ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2023
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ПРИСУТСТВИИ «СИЛЬНОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Елисеев А.Г., Кириченко П.В.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

yeliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru

Аннотация. Статья посвящена развитию метода регуляризации С.А. Ломова на сингулярно возмущенные задачи при наличии спектральных особенностей у предельного оператора. В частности, строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши, возникающей при квазиклассичеком переходе в уравнении Шредингера в координатном представлении. Выбранный в работе профиль потенциальной энергии приводит к особенности в спектре предельного оператора в виде «сильной» точки поворота. Опираясь на идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром С.А. Ломова и А.Г. Елисеева, указано каким образом и из каких соображений следует вводить регуляризирующие функции и дополнительные регуляризирующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для указанного вида особенности, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотической решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Введение.

Сингулярно возмущенные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с нарушенными условиями стабильности спектра предельного оператора уже давно хорошо известны специалистам в математической и теоретической физике. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [1]–[3]). В работах посвященных сингулярно возмущенным задачам некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота и проведена их классификация:

1) *простая точка поворота* — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль (см.[2], [4], [5]);

2) *слабая точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость (см. [6], [7]);

3) *сильная точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения,а базис собственных векторов теряет гладкость (см. [8]).

В настоящей работе рассматривается нестационарное и неоднородное уравнение Шредингера с гамильтонианом $\hat{H}(p,x) = \hat{p}^2 + \hat{x}$, которое при квазиклассическом переходе порождает сингулярно возмущенную задачу Коши с «сильной» точкой поворота. Отметим, что задача для однородного и стационарного уравнения с таким профилем потенциальной энергии является одной из немногих точно решаемых проблем квантовой механики (см.[9], §24).

Кратко обозначим здесь суть квазиклассического приближения в квантовой механике. Основное уравнение теории — уравнение Шредингера — при записи в координатном представлении является уравнением в частных производных второго порядка по координатам и первого порядка по времени и содержит постоянную Планка $\hbar$. Точные решения этого уравнения удаётся отыскать только для небольшого числа простейших случаев, реальные задачи значительно сложнее и точных решений получить для них не удаётся. Однако для широкого спектра задач может оказаться правильным считать $\hbar$ малой величиной и пытаться искать приближенные (по малому $\hbar$) решения (см.[9], Гл. 7). Строго говоря, постоянная Планка $\hbar$ является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости $\hbar$ следует понимать в том смысле, что всегда можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую $\hbar$ в какой-то степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими $\hbar$.

При описанном выше квазиклассичком переходе возникают различного рода сингулярно возмущенные задачи для уравнения Шрёдингера, в том числе задачи с точками поворота. Первые существенные результаты асимптотического интегрирования задач с классическими точками поворота (в нашей классификации они относятся к третьему типу) были получены в годы создания квантовой механики (Г. Вентцель, Х. Крамерс, Л. Бриллюэн, 1926 год) — метод ВКБ. В дальнейшем бурное развитие получил метод канонического оператора В.П. Маслова и его различные модификации , удалось обобщить применяемые подходы на другие сингулярно возмущенные задачи, а не только квантомеханические (см., например,[10]–[14]).

В настоящей статье развивается другой общеизвестный подход к решению сингулярно возмущенных задач — метод регуляризации С.А. Ломова. В условиях стабильного спектра предельного оператора метод регуляризации хорошо разработан и успешно применяется [15]. Для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром законченной математической теории до сих пор нет, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка 50 лет назад. Построение регуляризованной асимптотики решения одной из таких задач, а именно задачи со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота, является основной целью данной работы. Во многом наши исследования по асимтотическому интегрированию задачи Коши для нестационарного и неоднородного уравнения Шредингера с обозначенным выше гамильтонианом при $\hbar \to 0$ представляют собой развитие идей работы [8], где рассмотрена задача Коши для параболического уравнения с сильной точкой поворота. В дальнейшем везде в работе будем использовать обозначение ε вместо $\hbar$, что является более естественным в теории сингулярных возмущений.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Коши для нестационарного уравнения Шредингера $(\varepsilon \equiv \hbar)$ с неоднородностью $h(x,t)$

$$i\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = h(x,t), \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{1}$$

где выполнены условия:

1) $h(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0,T])$;

2) $u_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$;

3) $h(x,t)$ и $u_0(x)$ вместе со всеми своими производными абсолютно интегрируемы на $\mathbf{R}$;

4) ε — малый параметр, т.е. задача изучается при $\varepsilon \to 0$.

Для наглядного представления о виде особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u/\partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Теперь легко заметить, что матрица (2) диаганолизируема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x. Согласно указанной во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора $A(x)$ (см.,например, работу [16]) и соответсвующий базис из собственных векторов, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответсвующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x,t)$, т.к. оператор $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим.

3. Формализм метода регуляризации.

Регуляризирующую функцию задачи (1) будем искать в стандартной форме $e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$, для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Ж. Лиувиллем в [17]. Итак, осуществляя подстановку $u(x,t) = v(x,t) \cdot e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$ в соответствующее однородное уравнение задачи (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε, получим:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - x\right)v + i\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \cdot v - 2 \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Анализ последнего выражения позволяет утверждать, что для поиска $v(x,t)$ в виде регулярного ряда по ε нужно в качестве $\varphi(x,t)$ взять решение следующей задачи:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 = x, \qquad \varphi(x,0) = 0. \tag{4}$$

Выбор начального условия для $\varphi(x,t)$ обусловлен желанием того, чтобы в дальнейшем в начальное условие для $v(x,t)$ не вошла сингулярная зависимость от ε и оно наследовало начальное условие задачи (1).

Задача (4) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую будем методом характеристик (см. [18], Гл. 5, §4, с. 268–272). Обозначив $p = \partial\varphi/\partial t$ и $q = \partial\varphi/\partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (4):

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{1} = \frac{d\varphi}{p-2q^2} = dr, \\ &\text{Н.У.:}\;\; t=0,\; x=s,\; \varphi=0,\; q=0,\; p=s. \end{aligned} \tag{5}$$

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (4).

Интегрируя систему (5), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = r, \quad x = -r^2 + s, \quad \varphi = sr - \frac{2}{3}r^3.$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x,t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x,t) = t\cdot\left(x + \frac{t^2}{3}\right). \tag{6}$$

Дополнительный регуляризирующий сингулярный оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора $A(x)$, строится с помощью фундаментального решения задачи (1), которое можно получить с помощью интегрального преобразования Фурье для однородного уравнения с дельта-функцией в начальном условии (см. **Приложение**). Выпишем здесь только окончательный результат:

$$\Phi(x,\xi,t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}}\exp\left(-\frac{it}{\varepsilon}\Big(\xi+\frac{t^2}{3}\Big) + i\frac{\big(t^2-(x-\xi)\big)^2}{4\varepsilon t}\right). \tag{7}$$

Заменяя t на $t-\tau$ и интегрируя (7) по переменной ξ, получим тот самый дополнительный регуляризирующий оператор $\sigma(x,t,\varepsilon)(\cdot)$, основная задача которого — вложить правую часть уравнения задачи (1) в образ предельного оператора. Указанный оператор имеет вид:

$$\sigma(x,t,\varepsilon)(\cdot)=\int\limits_0^t d\tau(\cdot)\exp\Big(-\frac{i\varphi(x,t-\tau)}{\varepsilon}\Big),$$

где функция $\varphi(x,t)$ определена в (6). При этом действие этого оператора на функцию $f(t)$ запишется как свертка:

$$\sigma(f(t))=f(t)*\exp\Big(-\frac{it}{\varepsilon}\cdot\big(x+\frac{t^2}{3}\big)\Big).$$

А основным свойством, которое устанавливается непосредственной подстановкой, является следующее:

$$L_\varepsilon\sigma(f(t))=i\varepsilon f(t),\quad \text{где}\quad L_\varepsilon\equiv i\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x. \tag{8}$$

Таким образом, регуляризирующая функция $e^{-i\varphi/\varepsilon}$ и дополнительный регуляризирующий оператор $\sigma(x,t,\varepsilon)(\cdot)$ построены и теперь мы вправе рассчитывать, что оставшуюся часть решения можно искать в виде степенных рядов по ε. Вид, в котором будем искать решение исходной задачи, поясняет последнюю фразу:

$$u(x,t,\varepsilon)=e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\upsilon_k(x,t)\cdot\varepsilon^k+\sum_{k=-1}^{\infty}\sigma(z_k(t))\cdot\varepsilon^k+\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k(x,t)\cdot\varepsilon^k, \tag{9}$$

здесь начало суммирования с $k=-1$ во втором ряде обусловлено свойством (8) и необходимостью регуляризации правой части $h(x,t)$ задачи (1) на нулевом шаге по ε.

Учитывая соотношения (3) и (8), подставим (9) в задачу (1). При этом получим:

$$\begin{cases} e^{-i\varphi/\varepsilon}\left(i\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dot\upsilon_k\varepsilon^{k+1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\upsilon''_k\varepsilon^{k+2}-2it\sum\limits_{k=0}^{\infty}\upsilon'_k\varepsilon^{k+1}\right)+i\sum\limits_{k=0}^{\infty}z_{k-1}\cdot\varepsilon^k+ \\ +i\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dot\omega_k\cdot\varepsilon^{k+1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\omega''_k\cdot\varepsilon^{k+2}-x\sum\limits_{k=0}^{\infty}\omega_k\cdot\varepsilon^k=h(x,t), \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\upsilon_k(x,0)\cdot\varepsilon^k+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\omega_k(x,0)\cdot\varepsilon^k=u_0(x), \end{cases} \tag{10}$$

здесь $\upsilon_k = \upsilon_k(x,t)$, $\omega_k = \omega_k(x,t)$, а $z_k = z_k(t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате.

Выделив в (10) группы слагаемых при различных регуляризирующих функциях, приходим к серии итерационных задач:

$$\begin{cases} iz_{k-1}(t) + i\dot{\omega}_{k-1}(x,t) + \omega''_{k-2}(x,t) - x\cdot\omega_k(x,t) = \delta_0^k \cdot h(x,t), \\ i\dot{\upsilon}_k(x,t) + \upsilon''_{k-1}(x,t) - 2it\upsilon'_k(x,t) = 0, \\ \upsilon_k(x,0) + \omega_k(x,0) = \delta_0^k \cdot u_0(x), \quad k = \overline{0,\infty}. \end{cases} \tag{11}$$

Отметим, что при отрицательных индексах у функций $\upsilon_k(x,t)$ и $\omega_k(x,t)$ их необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в ряде (9)).

Для начала рассмотрим итерационную задачу на нулевом шаге (т.е. при $k=0$ в (11)):

$$\begin{cases} iz_{-1}(t) - x\cdot\omega_0(x,t) = h(x,t), \\ i\dot{\upsilon}_0(x,t) - 2it\upsilon'_0(x,t) = 0, \\ \upsilon_0(x,0) + \omega_0(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{12}$$

Для разрешимости первого уравнения из системы (12) достаточно положить

$$z_{-1}(t) \equiv -ih(0,t). \tag{13}$$

Тогда для $\omega_0(x,t)$ получим гладкое решение:

$$\omega_0(x,t) = \frac{h(x,t) - h(0,t)}{-x}, \tag{14}$$

что в свою очередь приводит к задаче Коши для определения функции $\upsilon_0(x,t)$:

$$\frac{\partial \upsilon_0}{\partial t} - 2t\cdot\frac{\partial \upsilon_0}{\partial x} = 0, \quad \upsilon_0(x,0) = \frac{h(x,0) - h(0,0)}{x} + u_0(x).$$

Последняя задача легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\upsilon_0(x,t) = u_0(x+t^2) + \frac{h(x+t^2,0) - h(0,0)}{x+t^2}. \tag{15}$$

Здесь отметим, что функция $z_0(t)$ на нулевом шаге не определяется, найти её удастся на следующем итерационном шаге. Этот факт не позволяет нам пока выписать главный член асимптотики.

Переходим теперь к задаче с $k=1$ в (11):

$$\begin{cases} iz_0(t)+i\dot{\omega}_0(x,t)-x\cdot\omega_1(x,t)=0, \\ i\dot{\upsilon}_1(x,t)+\upsilon_0''(x,t)-2it\upsilon_1'(x,t)=0, \\ \upsilon_1(x,0)+\omega_k(x,0)=0. \end{cases} \tag{16}$$

Подставляя $\omega_0(x,t)$ из (14) в первое уравнение этой системы, убеждаемся, что для его разрешимости нужно положить

$$z_0(t)\equiv -ih_1(0,t), \quad \text{где} \quad h_1(x,t)=i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h(x,t)-h(0,t)}{x}\right) \tag{17}$$

Тогда аналогично предыдущему итерационному шагу для $\omega_1(x,t)$ также получим гладкое решение

$$\omega_1(x,t)=\frac{h_1(x,t)-h_1(0,t)}{-x},$$

а для $\upsilon_1(x,t)$ из (16) — задачу Коши для квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial\upsilon_1}{\partial t}-2t\cdot\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x}=f_1(x+t^2), \quad \upsilon_1(x,0)=\frac{h_1(x,0)-h_1(0,0)}{x},$$

здесь введено обозначение:

$$f_1(x+t^2)\equiv i\cdot\upsilon_0''(x,t)=i\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u_0(x+t^2)+\frac{h(x+t^2,0)-h(0,0)}{x+t^2}\right).$$

Выпишем здесь только окончательное решение последней задачи, опуская подробности:

$$\upsilon_1(x,t)=t\cdot f_1(x+t^2)+\frac{h_1(x+t^2,0)-h_1(0,0)}{x+t^2}$$

Ещё раз обратим внимание читателя на то, что полностью определить все слагаемые перед ε^1 в ряде (9) удасться только на следующем итерационном шаге — осталось найти $z_1(t)$. Последнее можно сделать, рассмотрев условия разрешимости первого уравнения в системе (11) при $k=2$. В результате будем иметь:

$$z_1(t)\equiv -ih_2(0,t),$$
$$\text{где} \quad h_2(x,t)=i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_1(x,t)-h_1(0,t)}{x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{h(x,t)-h(0,t)}{x}\right),$$

а функция $h_1(x,t)$ определена в (17).

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \dots$ в (11), можно найти все члены ряда (9). В конце данного раздела, опираясь на (13), (14), (15) и (17), выпишем главный член асимптотики:

$$u_{\text{гл.}}(x,t,\varepsilon) = e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}\cdot \upsilon_0(x,t) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\cdot e^{-i\varphi(x,t-\tau)/\varepsilon}\cdot z_{-1}(\tau) +$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\cdot e^{-i\varphi(x,t-\tau)/\varepsilon}\cdot z_0(\tau) + \omega_0(x,t) =$$
$$= \exp\Big(-i\frac{t(x+t^2/3)}{\varepsilon}\Big)\cdot\left(u_0(x+t^2) + \frac{h(x+t^2,0)-h(0,0)}{x+t^2}\right) -$$
$$-\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\cdot\exp\Big(-i\frac{(t-\tau)\big(x+(t-\tau)^2/3\big)}{\varepsilon}\Big)\cdot h(0,\tau) -$$
$$-i\int\limits_0^t d\tau\cdot\exp\Big(-i\frac{(t-\tau)\big(x+(t-\tau)^2/3\big)}{\varepsilon}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{h(x,\tau)-h(0,\tau)}{x}\right)\Bigg|_{x=0} -$$
$$-\frac{h(x,t)-h(0,t)}{x}.$$

4. Оценка остаточного члена.

Пусть члены ряда (9) определены в результате решения итерационных задач (11) для $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Запишем соотношение для остатка:

$$u(x,t,\varepsilon) = e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}\sum_{k=0}^{n}\upsilon_k(x,t)\cdot\varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{n}\sigma(z_k(t))\cdot\varepsilon^k +$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\omega_k(x,t)\cdot\varepsilon^k + \varepsilon^{n+1}\cdot R_n(x,t,\varepsilon). \tag{18}$$

Подставим (18) в задачу (1). Учитывая решения итерационных задач и сокращая на ε^{n+1}, для остаточного члена получим задачу:

$$\begin{cases} i\varepsilon\dfrac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x\cdot R_n = -H(x,t,\varepsilon),\\ R_n(x,0,\varepsilon) = 0,\end{cases} \tag{19}$$

где $H(x,t,\varepsilon) = e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \cdot \upsilon_n''(x,t) \cdot \varepsilon + x \cdot \omega_{n+1}(x,t) + \varepsilon \cdot \omega_n''(x,t)$. Используя фундаментальное решение (7), для $R_n(x,t,\varepsilon)$ в (19) получим:

$$R_n = -\frac{1-i}{2i\varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot e^{-\frac{i(t-\tau)}{\varepsilon}\left(\xi+(t-\tau)^2/3\right)+i\frac{\left(x-\xi-(t-\tau)^2\right)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} \cdot H(\xi,\tau,\varepsilon).$$

Выделив во внутреннем интеграле полный квадрат в показателе экспоненты, сделаем замену переменной интегрирования ξ на:

$$y = \frac{\xi - x + (t-\tau)}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}} - i\sqrt{\frac{(t-\tau)^3}{\varepsilon}}.$$

Тогда последнее выражение для остаточного члена перепишется в виде:

$$R_n = \frac{i+1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t d\tau \cdot e^{-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}(x-(t-\tau))} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{iy^2} \cdot H(y,\tau,\varepsilon).$$

Теперь, учитывая условия 1), 2) и 3) в постановке задачи (1) и тот факт, что итерационные задачи решены вплоть до шага $k = n+1$, легко построить оценку по модулю для остатка:

$$|R_n| = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t d\tau \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \Big|H(y,\tau,\varepsilon)\Big| \leqslant \frac{T\cdot M}{\varepsilon\cdot\sqrt{\pi}} = \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{для} \quad (x,t) \in (\mathbf{R}\times[0,T]).$$

Осталось представить остаточный член в виде:

$$R_n = u_{n+1} + \varepsilon \cdot R_{n+1},$$

Тогда окончательно получим

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}| + \varepsilon \cdot \frac{C}{\varepsilon} \leqslant \mathbb{C}.$$

Тем самым доказана следующая

Теорема. Об оценке остатка (асимтотическая сходимость).

Пусть дана задача Коши (1) и выполнены условия 1) ÷ 4). Тогда верна оценка

$$\Bigg\| u(x,t,\varepsilon) - e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \upsilon_k(x,t)\cdot\varepsilon^k - \sum_{k=-1}^{n} \sigma(z_k(t))\cdot\varepsilon^k - \\ - \sum_{k=0}^{n} \omega_k(x,t)\cdot\varepsilon^k \Bigg\|_{C(\mathbf{R}\times[0,T])} \leqslant \mathbb{C}\cdot\varepsilon^{n+1},$$

где $\mathbb{C} \geqslant 0$ — константа, не зависящая от ε, а $\upsilon_k(x,t), z_k(t), \omega_k(x,t)$ получены из решения итерационных задач при $0 \leqslant k \leqslant n+1$.

5. Заключение.

При выполнении условий стабильности спектра предельного оператора, как уже было отмечено во введение, метод регуляризации С.А. Ломова дает достаточно простой рецепт поиска регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора построения сложнее. В предложенной работе регуляризирущие функции, описывающие нерегулярную зависимость решения от малого параметра, и регуляризирующий оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора, успешно найдены для задачи со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота, и тем самым основная проблема метода регуляризации успешно решена, что подтверждается результатами наших исследований.

6. Приложение.

Поставим задачу для поиска фундаметального решения задачи (1):

$$i\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\cdot u = 0, \quad u(x,0) = \delta(x - x_0).$$

Для решения этой задачи применим метод интегрального преобразования Фурье. Будем предполагать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $u(x,t)$ со своими частными производными достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Также предположим, что интеграл для образа Фурье искомого решения $\widetilde{U}(\lambda,t)$ можно дифференцировать по переменным t и λ под знаком интеграла. В пространстве образов получим следующую задачу Коши:

$$i\varepsilon\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial t} - i\cdot\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\lambda} = \varepsilon^2\cdot\lambda^2\cdot\widetilde{U}, \quad \widetilde{U}(\lambda,0) = e^{-i\lambda x_0}. \tag{20}$$

Задача (20) - задача для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, интегрирование которой проводится обычными методами. Опуская достаточно громоздкие выкладки, выпишем здесь только её решение:

$$\widetilde{U}(\lambda,t) = \exp\Big(-i\varepsilon t\lambda^2 - i(x_0+t^2)\lambda - ix_0t/\varepsilon - it^3/(3\varepsilon)\Big).$$

Теперь, используя формулу обратного преобразования Фурье, для оригинала будем иметь:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda\cdot \widetilde{U}(\lambda,t)\cdot e^{i\lambda x} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\exp\Big(-i\frac{t(x_0+t^2/3)}{\varepsilon}\Big)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda\cdot \exp\Big(i\lambda(x-x_0-t^2) - i\varepsilon t\lambda^2\Big)$$

Для вычисления получившегося интеграла выделим полный квадрат в показателе экспоненты и сделаем замену:

$$y = \sqrt{\varepsilon t}\Big(\lambda + \frac{t^2-(x-x_0)}{2\varepsilon t}\Big).$$

В результате получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon t}}\exp\Big(-i\frac{t(x_0+t^2/3)}{\varepsilon} + i\frac{\big(t^2-(x-x_0)\big)^2}{4\varepsilon t}\Big)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\cdot e^{-iz^2}.$$

Оставшийся интеграл может быть легко вычислен различными способами (например, методами теории вычетов) или сведён к известным значениям для интегралов Френеля $\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt = \int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt = \sqrt{\pi/8}$. Окончательно для фундаментального решения будем иметь:

$$u(x,t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}}\exp\left(-i\frac{t}{\varepsilon}\Big(x_0+\frac{t^2}{3}\Big) + i\frac{\big(t^2-(x-x_0)\big)^2}{4\varepsilon t}\right),$$

что с точностью до обозначений совпадает с (7).

Благодарности

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

Список литературы

[1] Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Регуляризации и асимптотические решения для сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора. — Укр. мат. журн., 1984, т. 36, № 2, с. 172–180.

[2] Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора. — Математический сборник, 1986, т. 131, № 173, с. 544–557.

[3] Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами. — Уфимский математический журнал, 2018, т. 10, № 2, с. 3–12.

[4] Елисеев А. Г., Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота. — Дифф. урав. и процессы управл., 2019, № 3, с. 63–73.

[5] Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота. — Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 2, с. 15–32.

[6] Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши для параболического уравнения при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора. — Математические заметки СВФУ, 2020, № 3, с. 3–15.

[7] Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задача Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора. — Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 1, с. 55–67.

[8] Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота. — Дифф. урав. и процессы управл., 2022, № 3, с. 46–58.

[9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[10] Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.

[11] Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики — М.: Наука, 1986.

[12] Кучеренко В.В. Асимптотика решения системы $A(x, -ih\frac{\partial}{\partial x})$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности. — Известия АН СССР. Сер.матем, 1974, т. 38, № 3, с. 625–662.

[13] Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.— М.: М.: Наука, 1978.

[14] Карасев М.В., Маслов В.П. Псевдодифференциальные операторы и канонический оператор в симплектических многообразиях — Известия АН СССР. Сер.матем, 1983, т. 47, № 5, с. 999–1029.

[15] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

[16] Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров.— УМН, 1971, т. 26, № 2(158), с. 101–114.

[17] Liouville, J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramétre variable. — Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1837, p. 16–35.

[18] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

A REGULARIZED ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE NONHOMOGENEOUS SCHROEDINGER EQUATION IN THE QUASICLASSICAL APPROXIMATION IN THE PRESENCE OF A «STRONG» TURNING POINT OF THE LIMIT OPERATOR

Alexander G. Eliseev , Pavel V. Kirichenko

National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

yeliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru

Abstract. The article is devoted to the development of the regularization method by S.A. Lomov on singularly perturbed problems in the presence of spectral singularities of the limit operator. In particular, a regularized asymptotic solution is constructed for the singularly perturbed inhomogeneous Cauchy problem that arises in the quasiclassical approximation in the Schroedinger equation in the coordinate representation. The potential energy profile chosen in the paper leads to a singularity in the spectrum of the limit operator in the form of a «strong» turning point. Based on the ideas of asymptotic integration of problems with unstable spectrum, S.A. Lomov and A.G. Eliseev, it is indicated how and from what considerations regularizing functions and additional regularizing operators should be introduced, the formalism of the regularization method for the indicated type of singularity is described in detail, this algorithm is substantiated, and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

Acknowledgements

The work by supported by the Russian Ministery of Education and Science (Project FSWF-2023-0012).