



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2023

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Посвящается светлой памяти моего отца

Абдурагимов Эльдэрхана Исрапиловича

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения четного порядка

Абдурагимов Г.Э.

ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»

gusen_e@mail.ru

Аннотация. В настоящей статье рассматривается двухточечная краевая задача для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения четного порядка с сильной нелинейностью на отрезке $[0, 1]$ с однородными граничными условиями. С использованием специальных топологических средств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения рассматриваемой задачи. Существование положительного решения доказано с помощью известной теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусе, единственность соответственно установлена с применением принципа сжатых отображений. Приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус.

1 Введение

Вопросам разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений посвящено немало работ, в частности [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], в которых основном, в них рассмотрены вопросы существования положительного решения, его поведения и асимптотики и др. Работ, посвященных получению условий, обеспечивающих единственность положительного решения задач с однородными краевыми условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и более высокого порядков немного, отметим, например, [9, 10, 11, 12, 13]. Из цитируемых выше работ близкими по тематике данному исследованию являются статьи [9, 13], в которых рассмотрены нелинейные краевые задачи с аналогичными краевыми условиями. В [9] получены достаточные условия существования положительных решений краевой задачи для некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения n порядка с различными вариациями граничных условий с помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусе. В [13] с помощью метода линейных преобразований Ц. На установлены достаточные условия существования единственного положительного решения аналогичной краевой задачи для частного случая нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка и предложен численный алгоритм построения такого решения. В данной статье авторами предпринята попытка обобщить упомянутые выше результаты с помощью теоремы о неподвижной точке в частично упорядоченных множествах. В заключении приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

2 Предварительные сведения и обозначения

Для удобства приведем некоторые обозначения и утверждения, которые будут использованы при доказательстве основных результатов работы.

Определение 1 [14, с. 17] Пусть E — вещественное банахово пространство. Множество $K \subset E$ называется конусом, если выполнены следующие условия:

1. множество K замкнуто;
2. из $u, v \in K$ вытекает, что $\alpha u + \beta v \in K$ при всех $\alpha, \beta \geq 0$;

3. из каждой пары векторов (точек) $x, -x$ по крайней мере один не принадлежит K , если $x \neq \theta$, где θ – нуль пространства E

Теорема 1 [15] Пусть E – банахово пространство и $K \subset E$ – конус в E . Предположим что Ω_1 и Ω_2 являются открытыми подмножествами E с $0 \in \Omega_1$ и $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Пусть $T : K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ вполне непрерывный оператор. Кроме того, предположим, что выполнено одно из двух условий:

$$\mathbf{H1} : \|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ и } \|Tu\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$$

$$\mathbf{H2} : \|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2 \text{ и } \|Tu\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1.$$

Тогда оператор T имеет фиксированную точку в $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Обозначим через C – пространство $C[0, 1]$, через \mathbb{L}_p ($1 < p < \infty$) – пространство $\mathbb{L}_p(0, 1)$ и через $\mathbb{W}^{(2n)}$ – пространство вещественных функций, определенных на $[0, 1]$ с $(2n - 1)$ абсолютно непрерывной производной.

Лемма 1 Пусть $y \in C$. Тогда краевая задача

$$x^{(2n)}(t) + y(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < t < 1, \quad (2.1)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots x^{(2n-2)}(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$x(1) = 0, \quad (2.3)$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s) ds,$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{2n-1}(1-s)^{2n-1} - (t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}, & \text{если } 0 \leq s \leq t, \\ \frac{t^{2n-1}(1-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}, & \text{если } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Применяя преобразование Лапласа к задаче (2.1)–(2.3), получим

$$s^{2n}x(s) - s^{2n-2}x'(0) = -y(s), \quad (2.4)$$

где $u(s)$ и $y(s)$ преобразования Лапласа $u(t)$ и $y(t)$ соответственно. Инверсия уравнения (2.4) дает окончательно решение:

$$x(t) = \int_0^1 \frac{t^{2n-1}(1-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} y(s) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} y(s) ds.$$

Лемма доказана.

Следствие 1 *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{(2n-1)!} \varphi(t)\varphi(s) \leq G(t, s) \leq \frac{1}{(2n-1)!} \varphi(s), \quad t, s \in [0, 1],$$

где $\varphi(t) = \min\{t, 1-t\}$.

3 Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(2n)}(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.1)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots x^{(2n-2)}(0) = 0, \quad (3.2)$$

$$x(1) = 0, \quad (3.3)$$

где $n \in \mathbb{N}$, линейный оператор $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) непрерывен, функция $f(t, u)$ монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение 2 *Под положительным решением задачи (3.1)–(3.3) будем понимать функцию $x \in \mathbb{W}^{(2n)}$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (3.1) и граничным условиям (3.2), (3.3).*

Рассмотрим эквивалентное задаче (3.1)–(3.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.4)$$

где $G(t, s)$ была ранее определена в лемме 1.

Предположим, что функция $f(t, u)$ в области $[0, 1] \times [0, \infty)$ удовлетворяет условию

$$f(t, u) \leq b(t) + \beta u^{p/q}, \quad p, q \in (1, \infty), \quad (3.5)$$

где $\beta > 0$, $b \in \mathbb{L}_q$.

Отметим, что условие (3.4) обеспечивает действие оператора Немыцкого $N: \mathbb{L}_p \rightarrow \mathbb{L}_q$, определяемого соотношением $(Nu)(t) = f(t, u(t))$ для каждого $u \in \mathbb{L}_p$.

В операторной форме уравнение (3.4) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где $G: \mathbb{L}_q \rightarrow C$, $(Gu)(t) = \int_0^1 G(t, s)u(s) ds$ — оператор Грина.

Положим

$$A = GNT,$$

где оператор A определен равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен и вполне непрерывен [16, с. 161].

Обозначим через \tilde{K} конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C , удовлетворяющих условию

$$x(t) \geq \varphi(t)\|x\|_C.$$

В дальнейшем под полуупорядочиванием $u \prec v$ и $u \succ v$ в конусе \tilde{K} пространства C соответственно будем понимать $u(t) \leq v(t)$ и $u(t) > v(t)$ при всех $t \in [0, 1]$.

Лемма 2 *Оператор A инвариантен относительно конуса \tilde{K} .*

Доказательство. В силу следствия 1 имеем

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^1 G(t, s)f(s, (Tx)(s)) ds \geq \\ &\geq \frac{1}{(2n-1)!} \varphi(t) \int_0^1 \varphi(s)f(s, (Tx)(s)) ds. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\|Ax\|_C \leq \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^1 \varphi(s)f(s, (Tx)(s)) ds.$$

Таким образом, очевидно

$$(Ax)(t) \geq \varphi(t)\|Ax\|_C.$$

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_1\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_2\}, \\ \Omega &= \bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1, \end{aligned}$$

где r_1 и r_2 — некоторые положительные числа, причем $r_1 < r_2$.

Теорема 2 Предположим, что $f(t, u)$ удовлетворяет условию (3.5) и

1. $p > q > 1,$

2.
$$\frac{p - q}{q} \left(\frac{2q(1 + q')^{\frac{1}{q'}} (2n - 1)!}{p\beta\gamma^{\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{q}{p-q}} \geq \frac{\|b\|_{\mathbb{L}_q}}{2(1 + q')^{\frac{1}{q'}} (2n - 1)!},$$

где γ – норма оператора T , $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$

3.
$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \right\} = \infty.$$

Тогда краевая задача (3.1)–(3.3) имеет по крайней мере одно положительное решение $x \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1).$

Доказательство. Доказательство настоящей теоремы основывается на применении теоремы 1. Вначале установим существование числа $r_2 > 0$ такого, что при $x \in K \cap \partial\Omega_2$

$$\|Ax\|_C \leq \|x\|_C. \tag{3.6}$$

В силу условия (3.5) и следствия 1 при $x \in K \cap \partial\Omega_2$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_C &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{(2n - 1)!} \int_0^1 \varphi(s) b(s) ds + \frac{\beta}{(2n - 1)!} \int_0^1 \varphi(s) (Tx)^{\frac{p}{q}}(s) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{(2n - 1)!} \|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|b\|_{\mathbb{L}_q} + \frac{\beta}{(2n - 1)!} \|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2(1 + q')^{\frac{1}{q'}} (2n - 1)!} \left(\|b\|_{\mathbb{L}_q} + \beta\gamma^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(r) = r - Ar^\sigma - B, \quad r > 0,$$

где $A > 0, B \geq 0, \sigma > 1.$

Несложно проверить, что наибольшее значение ψ достигается при

$$r = r_{max} = \left(\frac{1}{\sigma A} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

Отсюда, положив $A = \frac{\beta\gamma^{\frac{p}{q}}}{2(1+q')^{\frac{1}{q'}}(2n-1)!}$, $B = \frac{\|b\|_{\mathbb{L}_q}}{2(1+q')^{\frac{1}{q'}}(2n-1)!}$ и $\sigma = \frac{p}{q}$, в силу условия (2) теоремы, обеспечивающего неотрицательность значения ψ в точке r_{max} , при $r_2 = r_{max} = \left(\frac{2q(1+q')^{\frac{1}{q'}}(2n-1)!}{p\beta\gamma^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}}$ получим соотношение (3.6).

Найдем теперь такое положительное число $r_1 < r_2$, что при $x \in K \cap \partial\Omega_1$

$$\|Ax\|_C \geq \|x\|_C. \tag{3.7}$$

Очевидно, из условия (3) теоремы вытекает, что $f(t, u) \geq \delta u$, $\delta > 0$ на множестве $[0, 1] \times (0, \infty)$. Принимая во внимание это обстоятельство и следствие 1, при $x \in K \cap \partial\Omega_1$ имеем

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^1 G(t, s)f(s, (Tx)(s)) ds \geq \\ &\geq \frac{1}{(2n-1)!}\varphi(t)\delta \int_0^1 \varphi(s)(Tx)(s) ds \geq \\ &\geq \frac{1}{(2n-1)!}\delta\varphi(t)\|x\|_C \int_0^1 \varphi(s)(T\varphi)(s) ds. \end{aligned}$$

Нормируя последнее неравенство, получим

$$\|Ax\|_C \geq \frac{\delta}{2(2n-1)!} \int_0^1 \varphi(s)(T\varphi)(s) ds \cdot \|x\|_C.$$

Выбрав теперь δ так, чтобы

$$\frac{\delta}{2(2n-1)!} \int_0^1 \varphi(s)(T\varphi)(s) ds < 1,$$

легко убедиться в справедливости (3.7) для любого $r_1 \in (0, r_2)$.

Согласно теореме 1 с учетом леммы 1 оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в $K \cap \Omega$, что равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения $x \in K \cap \Omega$ краевой задачи (3.1)–(3.3).

Теорема доказана полностью.

Теорема 3 При выполнении условий теоремы 2 краевая задача (3.1)–(3.3) имеет единственное положительное решение $x \in K \cap \Omega$, если функция

$f(t, u)$ дифференцируема по u , производная $f'_u(t, u)$ монотонно возрастает по второму аргументу u

$$\gamma \|\rho\|_{\mathbb{L}_{p'}} < 2(2n - 1)!, \quad (3.8)$$

где $\rho(t) \equiv |f'_u(t, r_2(T1)(t))|$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Доказательство. Введем обозначение $y(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$, где $x_i \in K \cap \Omega$, $i = 1, 2$.

В силу монотонности производной $f'_u(t, u)$ по u , используя соответствующую теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} |(Ax_1)(t) - (Ax_2)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t, s) f'_u(s, (T\tilde{x})(s)) (Ty)(s) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(2n - 1)!} \int_0^1 \varphi(s) f'_u(s, r_2(T1)(s)) |(Ty)(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2(2n - 1)!} \|\rho\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leq \frac{\gamma}{2(2n - 1)!} \|\rho\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|y\|_C, \end{aligned}$$

где $(T\tilde{x})(t)$ принимает значения промежуточные между значениями $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$.

С учетом условия (3.8) теоремы на основании принципа сжатых отображений заключаем, что краевая задача (3.1)–(3.3) имеет единственное положительное решение $x \in K \cap \Omega$.

Теорема доказана полностью.

В конце работы приведем нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Пример 1 Рассмотрим следующую краевую задачу

$$x^{(2n)}(t) + p(t) \left(\int_0^1 x(s) ds \right)^{\frac{p}{q}} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < t < 1, \quad (3.9)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots x^{(2n-2)}(0) = 0, \quad (3.10)$$

$$x(1) = 0, \quad (3.11)$$

где $p(t) \geq 0$ – суммируемая на $[0, 1]$ функция, $p > q > 1$.

Легко видеть, что $f(t, u) = u^{p/q}$ неотрицательна, непрерывна на $[0, 1] \times [0, \infty)$ и не убывает по второму аргументу. Более того, взяв $b(t) = 0$ и $\beta = 1$ на основании теоремы 2 несложно убедиться в существовании по

меньшей мере одного положительного решения задачи (3.9)–(3.11) такого что $\|x\|_C \leq r_2$, где $r_2 = \left(\frac{2q(1+q')^{\frac{1}{q}}(2n-1)!}{p} \right)^{\frac{q}{p-q}}$.

Далее, очевидно, $\rho(t) = \frac{p}{q} r_2^{\frac{p}{q}-1} p(t)$, $t \in [0, 1]$. В силу условия (3.8), потребовав $p(t) < \frac{1}{(1+q')^{\frac{1}{q}}}$, согласно теореме 3 положительное решение задачи (3.9)–(3.11) единственное.

Список литературы

- [1] Li Z., Shu XB., Miao T. The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems. *Bound. Value Probl.*, 2022; (97):1–23.
- [2] Talib I., Abdeljawad T., Abdulah M. A. New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems. *Adv. Differ. Equ.*, 2021; (368):1–22.
- [3] Cabada A., Iglesias J. Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, 2021; (66):1–19.
- [4] Wang F., Ding R. On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight. *Bound. Value Probl.*, 2021; (96):1–17.
- [5] Yang Z. Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative. *Adv. Differ. Equ.*, 2021; (313):1–16.
- [6] Zhang Y., Abdella K., Feng W. Positive solutions for second - order differential equations with singularities and separated integral boundary condition. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2020; (75):1–12.
- [7] Ying He. Existence theory for single positive solution to fourth - order value problems. *Advances in Pure Mathematics*, 2014; (4):480–486.
- [8] Liu Y. Miltiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations. *Advances Mathematics Letters*, 2004; (4):747–757.
- [9] Moustafa El-S. Positive solutions of boundary value problems for n th order ordinary differential equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2008; (1):1–9.

- [10] Абдурагимов Э. И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения
Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.. 2010. Т. 76, № 2. С. 5–12.
- [11] Абдурагимов Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // *Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.*. 2014. Т. 121, № 10. С. 9–16.
- [12] Абдурагимов Э. И., Абдурагимова П. Э., Гаджиева Т. Ю. Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения // *Вестник Даг. гос. университета. Сер. 1: Естественные науки*. 2019. № 3. С. 79–85.
- [13] Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М. М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // *Вестник российских университетов. Математика*. 2021. Т. 25, № 136. С. 341–347.
- [14] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 396 с.
- [15] Krasnosel'skii M. A. Positive Solutions of Operator Equations. Noordhoff: Groningen, 1964. 396 p.
- [16] Крейн С. Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544 с.

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional differential equation of even order

G. E. Abduragimov
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru

Abstract. In this article, we consider a two-point boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of even order with strong nonlinearity on the interval $[0, 1]$ with homogeneous boundary conditions. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a positive solution of the problem under consideration are obtained using special topological tools. The existence of a positive solution is proved using the well-known Krasnoselsky theorem on a fixed point in a cone, and uniqueness is established accordingly using the contraction mapping principle. A non-trivial example is given, illustrating the fulfillment of sufficient conditions for the unique solvability of the problem posed.

Keywords: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone.