

Санкт-Петербургский государственный университет

ЖИЛИН Денис Евгеньевич

Выпускная квалификационная работа

Применение сплайнов четвертого порядка аппроксимации к решению уравнений Вольтерра второго рода

Уровень образования: **аспирантура**

Направление: **09.06.01 «Информатика и вычислительная техника»**

Основная образовательная программа: **МК.3019.2018 «Информатика»**

Научный руководитель:
профессор, Кафедра
вычислительной
математики, д.ф.-м.н.,
профессор, Булова Ирина
Герасимовна

Рецензент: профессор,
Федеральное
государственное бюджетное
образовательное
учреждение высшего
образования «Санкт-
Петербургский
государственный морской
технический университет»,
д.ф.-м.н., Хазанов Владимир
Борисович

Санкт-Петербург

2022

Saint Petersburg State University

ZHILIN Denis Evgenievich

Final qualifying work

Application of fourth-order approximation splines to the solution of Volterra equations of the second kind

Education level: **Postgraduate**

Direction: **09.06.01 "Computer science and computer engineering"**

Main educational program: **MK.3019.2018 "Informatics"**

Supervisor: Professor,
Department of Computational
Mathematics, Doctor of PhD,
Professor, Burova Irina
Gerasimovna

Reviewer: Professor, Federal
State Budgetary Educational
Institution of Higher
Education "Saint Petersburg
State Marine Technical
University", Doctor of Ph.D.,
Khazanov Vladimir
Borisovich

Saint-Petersburg

2022

Содержание

Введение	4
Формулировка проблемы.	9
1.1 Кубические полиномиальные сплайны	10
1.2 Кубические и квадратичные полиномиальные сплайны	13
1.3 Неполиномиальные сплайны	18
Решение задачи интегрального уравнения Вольтерра.	23
2.1 Численные примеры	25
2.2 Применение квадратурного правила Симпсона.	28
2.3 Вывод	36
Сплайны четвёртого порядка аппроксимации и интегральные уравнения Вольтерра.	36
Список литературы	41

ВВЕДЕНИЕ

Новый подход к разработке численных решений интегральных уравнений часто связан с применением интерполяции. К известным методам решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода относятся, прежде всего, метод трапеции и метод Симпсона. Метод трапеции довольно прост в использовании. Это следует отнести к преимуществам данного метода. Как известно, при проверке результата решения часто используется несколько различных методов. Поэтому желательно применять несколько различных методов для решения одного и того же уравнения. Следует отметить, что различные типы сплайнов довольно часто используются при решении задач интерполяции. Кратко напомним одну из главных причин их широкого использования.

Пусть P_n - интерполяционный многочлен, который решает задачу интерполяции Лагранжа, когда мы используем значения функции Рунге в равноудаленных узлах на интервале $[-1,1]$. Как известно (факт был установлен Рунге в 1901 году), верно следующее соотношение:

$$\|f - P_n\| \rightarrow \infty \quad \text{где } n \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, последовательность интерполяционных многочленов P_n не стремится к функции Рунге, когда n стремится к бесконечности. Таким образом, при решении различных задач математической физики широко используются сплайны. Следует отметить, что работы [1]-[34] относятся к числу множества работ, посвященных численным методам решения интегральных уравнений Вольтерра. В [1] авторы обсуждают сверхсходимость “интерполированных” решений коллокации для слабых сингулярных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. В работе [2] рассматривается метод Рунге-Кутты 6-го порядка с семиступенчатым методом нахождения численного решения интегро-дифференциального уравнения Вольтерра. В работе [2] интегральный член в интегро-

дифференциальном уравнении Вольтерра был аппроксимирован с использованием численного метода интерполяции Лагранжа. В работе [3] представлено численное решение интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма со слабой особенностью. В [3] представлен новый вычислительный метод, основанный на B-сплайнах. В работе [4] обсуждается численное решение класса слабых сингулярных интегральных уравнений Вольтерра. В работе [4] для решения проблемы сингулярности решения применяется дробная интерполяция Лагранжа, и разрабатываются эффективные методы граничных значений дробной коллокации. В работе [5] метод радиальных базисных функций используется для решения интегрального уравнения Вольтерра. Новый метод коллокации для численного решения интегральных уравнений Фредгольма, Вольтерра и смешанных уравнений Вольтерра-Фредгольма второго рода был представлен в работе [6]. В работе [7] было предложено квадратичное правило для численного решения линейных и нелинейных двумерных интегральных уравнений Фредгольма на основе квазиинтерполяции сплайнами.

Использование локальных полиномиальных и неполиномиальных сплайнов позволяет нам построить новые методы решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода. В статье [8] обсуждается использование полиномиальных и неполиномиальных сплайнов третьего порядка аппроксимации. Эти сплайны показали хорошую численную устойчивость и подходят для построения решений как на однородной, так и на неоднородной сетке узлов.

В исследовании [11] предлагается применять методы машинного обучения при численном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ODEs).

В статье [12] исследуется применение аппроксимаций с сохранением положительности для решения двумерной модели Лотки-Вольтерра "хищник-жертва", с мультипликативными «шумами».

Интегральные уравнения Вольтерра с вырожденными ядрами играют важную роль в теории эволюционирующих динамических систем в экономике, экологии и энергетике. В статье [13] представлена новая численная схема решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами. В статье [19] предлагается численная схема решения линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами. Разработанный подход основан на методе полиномиальной коллокации и эффективно аппроксимирует слабо сингулярные интегралы.

В работах [14], [18] исследуются стохастические интегральные уравнения Вольтерра, работы [15] и [17] посвящены численному решению линейных интегральных уравнений Вольтерра–Фредгольма второго рода. Эти интегральные уравнения обычно используются в математической физике для решения многих задач. Приведены численные примеры, проводится сравнение между численными результатами.

В статье [16] представлено решение задачи идентификации нелинейной системы на основе модели Вольтерра. В представленной работе для идентификации нелинейной системы с дискретным временем используется новый алгоритм оптимизации на основе совокупности, широко известный как алгоритм синус-косинуса (SCA).

Преимущества барицентрической рациональной интерполяции (BRI), введенной Флотером и Хорманном, включают стабильность интерполяции, отсутствие полюсов и высокую точность для любой достаточно гладкой функции. Авторы в статье [20] разрабатывают преобразованную схему BRI для решения двумерного дробного интегрального уравнения Вольтерра, решение которого может быть негладким, поскольку его производные могут быть неограниченными вблизи границы интегральной области.

В статье [21] представлен универсальный метод оптимизации структуры и мощности изолированных энергосистем на примере реальной туристической базы. Для оптимального управления процессами зарядки и

разрядки, а также определения режимов работы аккумуляторных батарей использовалась модель, основанная на нелинейных интегральных уравнениях Вольтерра, которая учитывает нелинейную зависимость эффективности от состояния заряда.

В статье [23] вводится метод разделения шага θ для решения стохастических интегральных уравнений Вольтерра с общими гладкими ядрами и приведены некоторые численные эксперименты для проверки теоретических результатов.

В исследовании [24] решение обратных переходных задач механики стержней основано на методе функций влияния. С его применением обратная задача сводится к решению системы интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода во времени относительно искомой внешней осевой нагрузки упругого стержня.

В статье [25] представлена математическая модель операционного риска для расчета вероятности, которая представлена в виде интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и решается методом декомпозиции Адомиана, в [28] представлен метод для верификации численных результатов решения интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами

Основной целью работы [26] является исследование приближенных решений нечетких интегральных уравнений Вольтерра (как линейных, так и нелинейных) с вырожденным ядром с помощью метода гомотопического анализа. В статье [27] приводится новый метод решения стохастических нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с использованием операционной матрицы Лежандра.

В статьях [29] и [34] приведены эффективные численные методы для решения линейных интегральных уравнений Вольтерра и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого и второго рода с экспоненциальными, сингулярными, регулярными ядрами и ядрами типа свертки. Эти методы основаны на применении полиномов Лагерра и

полиномов Тушара. Все вычисления и графики выполнены с применением программы MATLAB.

В статье [30] метод коллокации, основанный на двумерной барицентрической интерполяции Гегенбауэра, используется для решения специальных двумерных интегральных уравнений Фредгольма-Вольтерра.

В статье [32] исследуются линейные интегральные уравнения Вольтерра второго рода с разрывным ядром, полученные из задач выравнивания нагрузки и энергетической системы. Для решения этой задачи предложен метод гомотопических возмущений. В [33] авторы аппроксимируют общую неподвижную точку двух операторов, удовлетворяющих рациональным условиям сжатия, с помощью итерационных схем типа Юнга в комплекснозначных банаховых пространствах.

В данной работе локальные сплайновые аппроксимации используются для построения расчетных формул для решения интегрального уравнения Вольтерра. Здесь мы используем как полиномиальные, так и неполиномиальные сплайны четвертого порядка аппроксимации.

В разделе 1 обсуждаются свойства локального многочлена, полиномиально-тригонометрических сплайнов и интегродифференциальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации.

В разделе 2 рассматривается использование для построения решения интегрального уравнения не только полиномиальных и неполиномиальных локальных сплайнов лагранжева типа, но и интегродифференциальных сплайнов четвертого порядка приближения. В результате интегродифференциальные сплайны дают меньшую погрешность, но в этом случае предполагается, что значения интегралов по интервалам сетки известны. Здесь также предлагается модификация метода Симпсона, в которой применяются сплайновые аппроксимации.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Предположим, что система функций $\varphi_i(x)$ образует систему Чебышева. Мы определяем основные сплайны на интервале $[x_j, x_{j+1}]$, решая систему уравнений (вслед за профессором С.Г. Михлиным мы называем эту систему фундаментальными соотношениями)

$$\sum_{k=k_0}^{k_m} \varphi_i(x_k) w_k(x) = \varphi_i(x), i = 1, \dots, m + 1. \quad (1)$$

Здесь $k_m - k_0 = m + 1$.

Мы считаем, что определитель этой системы отличается от нуля. При различном выборе функций $\varphi_i(x)$ и целого числа k_0, k_m мы получаем базовые сплайны, подходящие для аппроксимации в начале интервала $[a, b]$, в середине интервала или в конце интервала $[a, b]$. В случае полиномиальной системы x^i фундаментальная система (1) имеет вид

$$\sum_{k=k_0}^{k_n} x_k^i w_k(x) = x^i, i = 1, \dots, m + 1, \quad x \in [x_j, x_{j+1}].$$

В этой работе мы сосредоточимся на сплайнах четвертого порядка аппроксимации. Поэтому в нашем случае мы рассматриваем $m = 3$. Таким образом, существует четыре уравнения и четыре неизвестные базисные функции $w_k(x)$.

Выделим важные особые случаи. Предположим, что носитель сплайна занимает интервал $[x_{j-3}, x_{j+1}]$. Сплайны w_j , подходящие для аппроксимации вблизи левого конца интервала $[a, b]$, могут быть получены, когда $k_0 = j$, $k_m = j + 3$. В этом случае должно выполняться условие $j = 0, \dots, n - 2$. Предположим, что носитель сплайна занимает интервал $[x_{j-2}, x_{j+2}]$. Сплайны w_j , подходящие для аппроксимации в середине интервала $[a, b]$, могут быть получены, когда $k_0 = j$, $k_m = j + 3$. В этом случае должно выполняться

условие $j = 0, \dots, n - 2$. Предположим, что носитель сплайна занимает интервал $[x_{j-2}, x_{j+2}]$. Сплайны w_j , подходящие для аппроксимации вблизи правого конца интервала $[a, b]$, могут быть получены, когда $k_0 = j - 1$, $k_m = j + 2$. В этом случае должно выполняться условие $j = 2, \dots, n$.

В следующем подразделе мы подробнее рассмотрим кубические полиномиальные сплайны.

Кубические полиномиальные сплайны

Сначала напомним особенности аппроксимации функций сплайнами вблизи правого конца интервала $[a, b]$, вблизи левого конца интервала $[a, b]$ и в середине интервала. Пусть $\{x_j\}$ - множество узлов на интервале $[a, b]$. Базисные сплайны, образующие непрерывную полиномиальную аппроксимацию в интервале $x \in [x_j, x_{j+1}] \subset [a, b]$, могут быть записаны следующим образом:

$$\omega_j^M(x) = \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})(x - x_{j+3})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})(x_j - x_{j+3})}, x \in [x_{j+1}, x_{j+2}],$$

$$\omega_j^M(x) = \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j-1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+2})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_j^M(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j-2})(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j-2})(x_j - x_{j+1})}, x \in [x_{j-1}, x_j],$$

$$\omega_j^M(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j-2})(x - x_{j-3})}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j-2})(x_j - x_{j-3})}, x \in [x_{j-2}, x_{j-1}],$$

$$\omega_j^M(x) = 0, x \notin [x_{j-2}, x_{j+2}].$$

Непрерывная полиномиальная аппроксимация $U_j^R(x)$ вблизи левого конца интервала $[a, b]$ использует правый базисный сплайн $\omega_j^R(x)$ вида:

$$\omega_j^R(x) = \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})(x - x_{j+3})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})(x_j - x_{j+3})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_{j+1}^R(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+2})(x - x_{j+3})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})(x_{j+1} - x_{j+3})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_{j+2}^R(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})(x - x_{j+3})}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+2} - x_{j+3})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_{j+3}^R(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_{j+3} - x_j)(x_{j+3} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+2})}, x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Аппроксимация с помощью этих базисных сплайнов может быть записана в виде:

$$U_j^R(x) = u(x_j)\omega_j^R(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}^R(x) + \\ u(x_{j+2})\omega_{j+2}^R(x) + u(x_{j+3})\omega_{j+3}^R(x).$$

Непрерывная полиномиальная аппроксимация $U_j^L(x)$ вблизи правого конца интервала $[a, b]$ использует левый базисный сплайн $\omega_j^L(x)$ вида:

$$\omega_{j-2}^L(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j-2} - x_{j-1})(x_{j-2} - x_j)(x_{j-2} - x_{j+1})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_{j-1}^L(x) = \frac{(x - x_{j-2})(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j-1} - x_{j-2})(x_{j-1} - x_j)(x_{j-1} - x_{j+1})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_j^L(x) = \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j-2})(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_{j+1}^L(x) = \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_{j-2})(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)}, x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Аппроксимация с помощью этих базисных сплайнов может быть записана в виде:

$$U_j^L(x) = u(x_{j-2})\omega_{j-2}^L(x) + u(x_{j-1})\omega_{j-1}^L(x) + u(x_j)\omega_j^L(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}^L(x).$$

Непрерывная полиномиальная аппроксимация $U_j^M(x)$ в середине интервала $[a, b]$ использует средний базисный сплайн $\omega_j^M(x)$ вида:

$$\omega_{j-1}^M(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_{j-1} - x_j)(x_{j-1} - x_{j+1})(x_{j-1} - x_{j+2})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_j^M(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_{j+1}^M(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)(x - x_{j+2})}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})}, x \in [x_j, x_{j+1}],$$

$$\omega_{j+2}^M(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_{j-1})(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})}, x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Аппроксимация с помощью этих базисных сплайнов может быть записана в виде:

$$U_j^M(x) = u(x_{j-1})\omega_{j-1}^M(x) + u(x_j)\omega_j^M(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}^M(x) + u(x_{j+2})\omega_{j+2}^M(x).$$

Аппроксимационные свойства этих базисных сплайнов хорошо известны. Обозначим $\|u^{(n)}\|_{[x_j, x_{j+1}]} = \max_{[x_j, x_{j+1}]} |u^{(n)}(x)|$. Следующая теорема может быть легко доказана (см. также [8]).

Теорема 1: Пусть $u \in C^4[a, b]$. $x_j = a + jh, j = 0, 1, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}, n \geq 3$. Для аппроксимации функции $u(x), x \in [x_j, x_{j+1}]$, с помощью левого и правого сплайнов справедливы следующие неравенства:

$$|u(x) - U_j^L(x)| \leq Kh^4 \|u^{(4)}\|_{[x_{j-2}, x_{j+1}]}, K = 1.$$

$$|u(x) - U_j^R(x)| \leq Kh^4 \|u^{(4)}\|_{[x_j, x_{j+3}]}, K = 1.$$

Для аппроксимации функции $u(x), x \in [x_j, x_{j+1}]$, со средними сплайнами справедливо следующее неравенство:

$$|u(x) - U_j^M(x)| \leq Kh^4 \|u^{(4)}\|_{[x_{j-1}, x_{j+2}]}, K = 0.5625.$$

Доказательство. Легко заметить, что U_j^R является интерполяционным многочленом, а $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}$ являются узлами интерполяции, и

$$U_j^R(x_j) = u(x_j), U_j^R(x_{j+1}) = u(x_{j+1}),$$

$$U_j^R(x_{j+2}) = u(x_{j+2}), U_j^R(x_{j+3}) = u(x_{j+3}).$$

Используя оставшийся член, мы получаем

$$u(x) - U_j^R(x) = \frac{u^{(4)}(\tau)}{4!} (x - x_j)(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})(x - x_{j+3}), \tau \in [x_j, x_{j+3}].$$

Мы можем использовать $x = x_j + t h, t \in [0,1]$. Можно легко подсчитать, что

$$\max_{t \in [0,1]} |t(t-1)(t-2)(t-3)| = 1.$$

Из этого следует, что на равномерной сетке с шагом h

$$\max_{x \in [x_j, x_{j+3}]} |u(x) - U_j^R(x)| \leq h^4 \max_{[x_j, x_{j+3}]} |u^{(4)}|.$$

Таким образом, мы получаем, что $K = 1$. Ранее в работе [8] рассматривались квадратичные сплайны.

Кубические и квадратичные полиномиальные сплайны

Функция $u(x), x \in [x_j, x_{j+1}]$, может быть аппроксимирована левым или правым полиномиальными сплайнами следующим образом. Левый квадратичный полиномиальный сплайн (см. [8]) может быть записан в виде:

$$U_j^L(x) = u(x_{j-1})\omega_{j-1}^L(x) + u(x_j)\omega_j^L(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}^L(x), x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{j-1}^L(x) &= \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j-1}-x_j)(x_{j-1}-x_{j+1})}, \\ \omega_j^L(x) &= \frac{(x-x_{j+1})(x-x_{j-1})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j-1})}, \\ \omega_{j+1}^L(x) &= \frac{(x-x_j)(x-x_{j-1})}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j-1})}. \end{aligned}$$

Функция $u(x), x \in [x_j, x_{j+1}]$, может быть аппроксимирована правым полиномиальным сплайном (см. [8, 9]), используя вид:

$$U_j^R(x) = u(x_j)\omega_j^R(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}^R(x) + u(x_{j+2})\omega_{j+2}^R(x), x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (3)$$

где

$$\omega_j^R(x) = \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})},$$

$$\omega_{j+1}^R(x) = \frac{(x - x_{j+2})(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_{j+2})(x_{j+1} - x_j)},$$

$$\omega_{j+2}^R(x) = \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j)}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+2} - x_j)}.$$

Аппроксимационные свойства этих базовых сплайнов хорошо изучены. Обозначим $\|u'''\|_{[x_j, x_{j+1}]} = \max_{[a, b]} |u'''(x)|$. Следующая теорема была доказана в [8].

Теорема 2: Пусть $u \in C^3[a, b]$. Для аппроксимации функции $u(x)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, с помощью сплайна (2), справедливо следующее неравенство:

$$|u(x) - U_j^L(x)| \leq Kh^3 \|u'''\|_{[x_{j-1}, x_{j+1}]}$$

Для аппроксимации функции $u(x)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, с помощью сплайна (3), справедливо следующее неравенство:

$$|u(x) - U_j^R(x)| \leq Kh^3 \|u'''\|_{[x_j, x_{j+2}]}$$

Доказательство. Легко заметить, что U_j^R - интерполяционный многочлен третьей степени, а x_j, x_{j+1} - узлы интерполяции, $U_j^R(x_j) = u(x_j)$, $U_j^R(x_{j+1}) = u(x_{j+1})$, $U_j^R(x_{j+2}) = u(x_{j+2})$. Используя оставшийся член, мы получаем

$$u(x) - U_j^R(x) = \frac{u'''(\tau)}{3!} (x - x_j)(x - x_{j+1})(x - x_{j+2}).$$

$$\text{Из этого следует, что } |u(x) - U_j^R(x)| \leq 0.0625h^3 \max_{[x_j, x_{j+2}]} |u'''|.$$

Таким образом, $K = 0.0625$.

Утверждения для $U_j^R(x)$ и $U_j^M(x)$ могут быть доказаны аналогичным образом. Теорема доказана.

Примечание. Теорема 1 и Теорема 2 дают оценки погрешностей аппроксимации при использовании квадратичных и кубических сплайнов. Эти оценки являются асимптотическими. Может быть задан следующий

вопрос: может ли использование кубических сплайнов всегда давать меньшую погрешность аппроксимации по абсолютному значению, чем использование квадратичных сплайнов? В общем, ответ на этот вопрос отрицательный. Рассмотрим аппроксимацию с использованием интерполяционных полиномов $P_n f$ для функции Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на интервале $[-1, 1]$ в равноудаленных узлах. Оценка погрешности аппроксимации, когда использовались квадратичные сплайны, включает третью производную функции, в то время как оценка погрешности аппроксимации, когда использовались кубические сплайны, включает четвертую производную функции. На Рис. 1 показан график третьей производной функции Рунге, а на Рис. 2 показан график четвертой производной функции Рунге на интервале $[-1, 1]$. Легко выбрать шаг h равномерной сетки узлов таким образом, чтобы аппроксимация функции Рунге квадратичными сплайнами давала меньшую погрешность по абсолютному значению, чем аппроксимация правыми кубическими сплайнами (последний столбец в таблице 1). В таблице 1 показаны погрешности аппроксимаций со средним и правым кубическими полиномиальными сплайнами.

Таблица 1. Погрешности аппроксимации с помощью квадратичных полиномиальных сплайнов, средних кубических полиномиальных сплайнов, правых кубических полиномиальных сплайнов, $h = 0.2$

Функция	Квадратичные полиномиальные сплайны	Средние кубические полиномиальные сплайны	Правые кубические полиномиальные сплайны
$\frac{1}{1+25x^2}$	0.0889	0.0200	0.162
$\sin(5x)$	0.0606	0.0215	0.0373

На Рис. 3 показан график погрешности аппроксимации функции Рунге квадратичными сплайнами при использовании шага сетки $h = 0.2$.

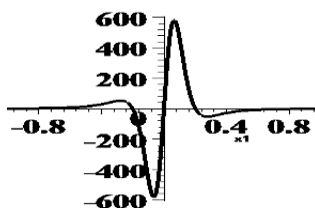


Рис. 1. График третьей производной функции Рунге на интервале $[-1, 1]$

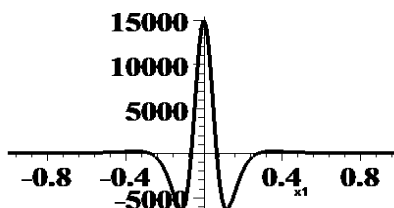


Рис. 2. График четвертой производной функции Рунге на интервале $[-1, 1]$

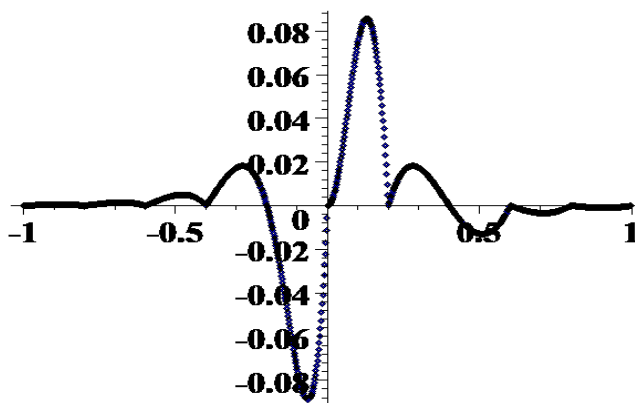


Рис. 3. График погрешности аппроксимации, когда для аппроксимации функции Рунге с шагом сетки $h = 0.2$ использовались сплайны квадратичного полинома.

На Рис. 4. показан график погрешности аппроксимации функции $\sin(5x)$ правыми кубическими сплайнами при использовании шага сетки $h = 0.2$.

На Рис. 5. показан график погрешности аппроксимации функции $\sin(5x)$ средними кубическими сплайнами при использовании шага сетки $h = 0.2$.

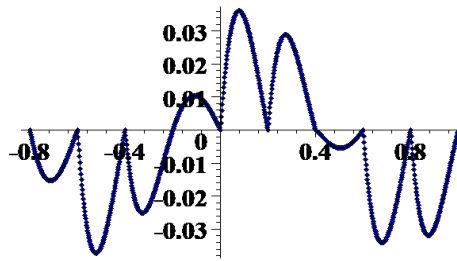


Рис. 4. График погрешности аппроксимации, когда для аппроксимации функции $\sin(5x)$ использовались правые кубические полиномиальные сплайны, $h = 0.2$.

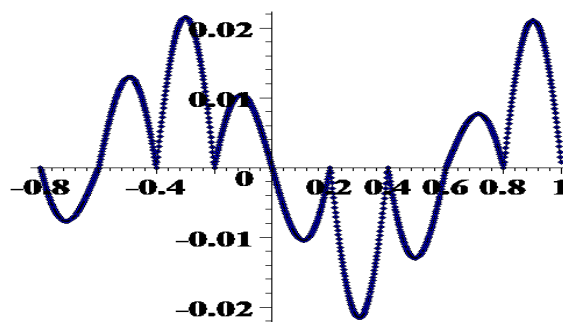


Рис. 5. График погрешности аппроксимации, когда средние кубические сплайны использовались для аппроксимации функции $\sin(5x)$ с шагом сетки $h = 0.2$.

На Рис. 6. показан график погрешности аппроксимации абсолютного значения функции Рунге правыми кубическими сплайнами с шагом сетки $h = 0.2$. На Рис. 7. показан график погрешности аппроксимации функции Рунге средними кубическими сплайнами с шагом сетки $h = 0.2$.

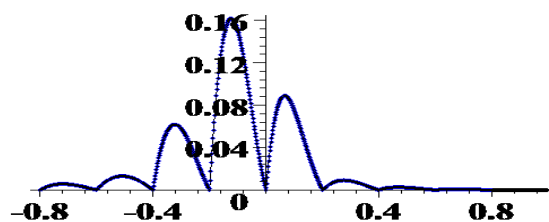


Рис. 6. График погрешности аппроксимации по абсолютному значению, когда для аппроксимации функции Рунге с шагом сетки $h = 0.2$ использовались правые кубические полиномиальные сплайны.

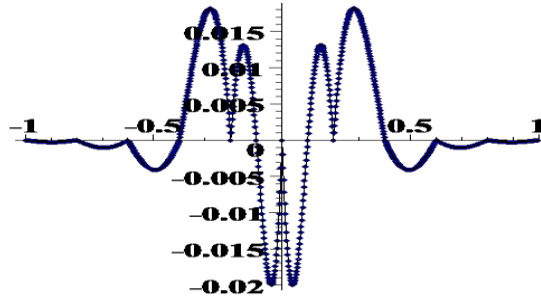


Рис. 7. График погрешности аппроксимации, когда для аппроксимации функции Рунге с шагом сетки $h = 0.2$ использовались средние кубические полиномиальные сплайны.

Неполиномиальные сплайны

Давайте теперь возьмем $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = \sin(x)$, $\varphi_4(x) = \cos(x)$. Система уравнений для определения непוליномиальных базисных функций $w_j(x)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, имеет вид:

$$\sum_{k=k_0}^{k_n} w_k(x) = 1,$$

$$\sum_{k=k_0}^{k_n} x_k w_k(x) = x,$$

$$\sum_{k=k_0}^{k_n} \cos(x_k) w_k(x) = \cos(x),$$

$$\sum_{k=k_0}^{k_n} \sin(x_k) w_k(x) = \sin(x).$$

Возьмем $k_0 = j - 1$, $k_n = j + 2$.

В этом случае мы получаем (когда $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $x = x_j + th$, $t \in [0, 1]$):

$$w_j(x_j + th) = ((1 - t) \sin(3h) + (1 + t) \sin(h) + 2 \sin(h(t - 2)) + (t - 2) \sin(2h))$$

$$+ \sin(h(1+t)) - 3 \sin(h(t-1)) / (5 \sin(h) + \sin(3h) - 4 \sin(2h)),$$

$$w_{j+1}(x_j + th) = (t \sin(3h) + (2-t) \sin(h) + 3 \sin(th) - \sin(th-2h) - (t+1) \sin(2h) - 2 \sin(h+th)) / (5 \sin(h) + \sin(3h) - 4 \sin(2h)),$$

$$w_{j+2}(x_j + th) = (\sin(h+th) + \sin(th-h) - 2 \sin(th) - t \sin(2h) + 2t \sin(h)) / (5 \sin(h) + \sin(3h) - 4 \sin(2h)),$$

$$w_{j-1}(x_j + th) = (-\sin(th-2h) - \sin(th) + 2 \sin(th-h) + (2-2t) \sin(h) + (t-1) \sin(2h)) / (5 \sin(h) + \sin(3h) - 4 \sin(2h)).$$

Эти сплайны полезны в середине интервала $[a, b]$. На Рис. 8 показан график погрешности аппроксимации функции $\sin(5x)$ средними неполиномиальными сплайнами с шагом сетки $h = 0.2$.

В Таблице 2 показаны погрешности приближений со средними кубическими полиномиальными сплайнами, средними неполиномиальными сплайнами и правыми неполиномиальными сплайнами.

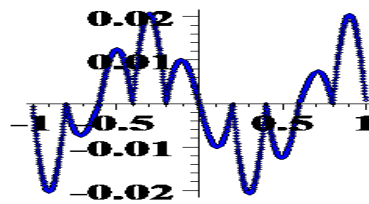


Рис. 8. График погрешности аппроксимации, когда средние неполиномиальные сплайны использовались для аппроксимации функции $\sin(5x)$ с шагом сетки $h = 0.2$.

Таблица 2. Погрешности аппроксимации средними кубическими полиномиальными сплайнами, средними неполиномиальными сплайнами, $h = 0.2$

Функция	Средние кубические полиномиальные сплайны	Средние неполиномиальные сплайны	Правые неполиномиальные сплайны
$\frac{1}{1 + 25x^2}$	0.0200	0.0197	0.161
$\sin(5x)$	0.0215	0.0207	0.0372

Как известно, интегродифференциальные сплайны (см. [9]) могут обеспечить меньшую погрешность аппроксимации. Пусть $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \varphi_2 = x^2, \varphi_3 = x^3$. Мы получаем основные сплайны из аппроксимационных соотношений

$$\varphi_i(x_j)w_j(x) + \varphi_i(x_{j+1})w_{j+1}(x) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_i(t)dt w_j^{<0,1>}(x) + \varphi_i(x_{j-1})w_{j-1}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

На интервале $[x_j, x_{j+1}]$ мы строим полиномиальную аппроксимацию в виде

$$U_j^{Pol}(x) = u(x_j)w_j(x) + u(x_{j+1})w_{j+1}(x) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(t)dt w_j^{<0,1>}(x) + u(x_{j-1})w_{j-1}(x).$$

Учитывая, что $x \in [x_j, x_{j+1}], h = x_{j+1} - x_j, t \in [0, 1]$, легко видеть, что базисные функции могут быть записаны в виде

$$w_j(x_j + th) = \frac{(t-1)(8t-3)(t+1)}{3},$$

$$w_{j+1}(x_j + th) = \frac{t(10t-7)(t+1)}{6},$$

$$w_j^{<0,1>}(x_j + th) = \frac{4t(t-1)(t+1)}{h},$$

$$w_{j-1}(x_j + th) = \frac{t(2t-1)(t-1)}{6}.$$

Аналогично, мы можем построить неполиномиальную аппроксимацию, используя интегродифференциальные полиномиально-тригонометрические

сплайны. Пусть $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \varphi_2 = \sin(x), \varphi_3 = \cos(x)$. На интервале $[x_j, x_{j+1}]$ мы строим полиномиальную аппроксимацию в виде

$$U_j^{Itrig}(x) = u(x_j)w_j(x) + u(x_{j+1})w_{j+1}(x) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x)dx w_j^{<0,1>}(x) + u(x_{j-1})w_{j-1}(x).$$

Учитывая, что $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $h = x_{j+1} - x_j$, $t \in [0, 1]$, легко видеть, что базисные функции могут быть записаны в виде

$$w_j(x_j + th) = (2 + 2t + 4\cos(th) + \cos(2h)(2 - 2t) + h\sin(h + th) + \sin(2h)(h - 2th) + 3h\sin(th - h) - 4\cos(th - h) - 4\cos(h))/(6 - 8\cos(h) + 2\cos(2h) - 2h\sin(h) + h\sin(2h)),$$

$$w_{j+1}(x_j + th) = -((h - 2th)\sin(h) + \cos(h)(2 + 4t) - 2\cos(th - h) - h\sin(th + h) + 3h\sin(th) + 2\cos(th) - 2t\cos(2h) - 2t - 2)/(2\cos(2h) - 2h\sin(h) + h\sin(2h) - 8\cos(h) + 6),$$

$$w_j^{<0,1>}(x_j + th) = \frac{2t\sin(h) - 2\sin(th)}{h\sin(h) - 2 + 2\cos(h)}.$$

В таблице 3 показаны погрешности аппроксимаций с полиномиальными интегро-дифференциальными сплайнами и неполиномиальными интегро-дифференциальными сплайнами.

Таблица 3. Погрешности аппроксимации полиномиальными интегро-дифференциальными сплайнами и неполиномиальными интегро-дифференциальными сплайнами, $h = 0.2$

Функция	Полиномиальные интегро-дифференциальные сплайны	Неполиномиальные интегро-дифференциальные сплайны
$\frac{1}{1 + 25x^2}$	0.0184	0.0183
$\sin(5x)$	0.00307	0.00295

На Рис. 9 показан график погрешности аппроксимации функции Рунге интегродифференциальными полиномиальными сплайнами с шагом сетки $h = 0.2$.

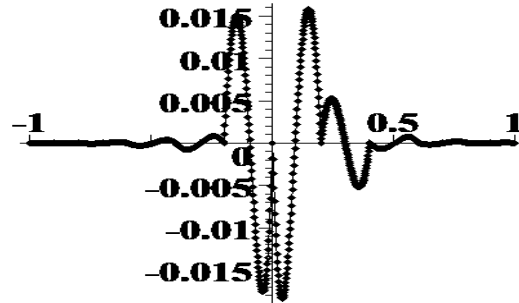


Рис. 9. График погрешности аппроксимации при использовании интегродифференциальных полиномиальных сплайнов для аппроксимации функции Рунге с шагом сетки $h = 0.2$.

На Рис. 10 показан график погрешности аппроксимации функции Рунге интегродифференциальными неполиномиальными сплайнами с шагом сетки $h = 0.2$.

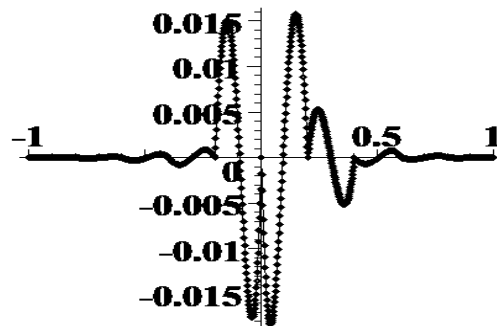


Рис. 10. График погрешности аппроксимации, когда интегродифференциальные тригонометрически-полиномиальные сплайны использовались для аппроксимации функции Рунге с шагом сетки $h = 0.2$.

Далее мы применяем сплайновые аппроксимации для решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Пусть n - целое число, а a, b – вещественные числа. Предположим, что сетка узлов $\{x_j\}$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, построена на интервале $[a, b]$. Таким образом, $x_j = a + jh, j = 0, \dots, n$. Рассмотрим численное решение уравнения Вольтерра второго рода. Линейное уравнение Вольтерра второго рода имеет вид:

$$u(x) + \int_a^x K(x, s)u(s)ds = f(x), \quad x, s \in [a, b],$$

где f - заданная функция, K, f являются непрерывными функциями, а $u(x)$ - неизвестная функция, которую необходимо получить.

Рассмотрим численное решение уравнения Вольтерра второго рода с использованием сплайнов четвертого порядка аппроксимации. Мы аппроксимируем функцию $u(x)$ сплайнами четвертого порядка. В этом случае, отбросив погрешность аппроксимации, мы получаем приближенные значения решения интегрального уравнения. Обозначим их через $\tilde{u}(x_k)$. Сначала мы должны решить систему линейных алгебраических уравнений, затем последовательно определяем приближительные значения неизвестных $\tilde{u}(x_k)$.

В случае сетки, состоящей из четырех узлов, система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_0) &= f(x_0), \\ \tilde{u}(x_1) + \tilde{u}(x_0) \int_{x_0}^{x_1} K(x_1, s) \omega_0^R(s) ds + \\ &+ \tilde{u}(x_1) \int_{x_0}^{x_1} K(x_1, s) \omega_1^R(s) ds \\ &+ \tilde{u}(x_2) \int_{x_0}^{x_1} K(x_1, s) \omega_2^R(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\tilde{u}(x_3) \int_{x_0}^{x_1} K(x_1, s) \omega_3^R(s) ds = f(x_1), \\
& \tilde{u}(x_2) + \tilde{u}(x_0) \int_{x_0}^{x_1} K(x_2, s) \omega_0^R(s) ds + \\
& \quad +\tilde{u}(x_1) \int_{x_0}^{x_1} K(x_2, s) \omega_1^R(s) ds \\
& \quad +\tilde{u}(x_2) \int_{x_0}^{x_1} K(x_2, s) \omega_2^R(s) ds \\
& \quad +\tilde{u}(x_3) \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, s) \omega_3^R(s) ds + \\
& \quad +\tilde{u}(x_0) \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, s) \omega_0^M(s) ds + \\
& \quad +\tilde{u}(x_1) \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, s) \omega_1^M(s) ds \\
& \quad +\tilde{u}(x_2) \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, s) \omega_2^M(s) ds \\
& +\tilde{u}(x_3) \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, s) \omega_3^M(s) ds = f(x_2), \\
& \tilde{u}(x_3) + \tilde{u}(x_0) \int_{x_0}^{x_1} K(x_3, s) \omega_0^R(s) ds + \\
& \quad +\tilde{u}(x_1) \int_{x_0}^{x_1} K(x_3, s) \omega_1^R(s) ds \\
& \quad +\tilde{u}(x_2) \int_{x_0}^{x_1} K(x_3, s) \omega_2^R(s) ds \\
& \quad +\tilde{u}(x_3) \int_{x_1}^{x_2} K(x_3, s) \omega_3^R(s) ds \\
& \quad +\tilde{u}(x_0) \int_{x_1}^{x_2} K(x_3, s) \omega_0^M(s) ds + \\
& \quad +\tilde{u}(x_1) \int_{x_1}^{x_2} K(x_3, s) \omega_1^M(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\tilde{u}(x_2) \int_{x_1}^{x_2} K(x_3, s) \omega_2^M(s) ds \\
& +\tilde{u}(x_3) \int_{x_1}^{x_2} K(x_3, s) \omega_3^M(s) ds \\
& +\tilde{u}(x_0) \int_{x_2}^{x_3} K(x_3, s) \omega_0^L(s) ds + \\
& +\tilde{u}(x_1) \int_{x_2}^{x_3} K(x_3, s) \omega_1^L(s) ds \\
& +\tilde{u}(x_2) \int_{x_2}^{x_3} K(x_3, s) \omega_2^L(s) ds \\
& +\tilde{u}(x_3) \int_{x_2}^{x_3} K(x_3, s) \omega_3^L(s) ds = f(x_3).
\end{aligned}$$

К преимуществам предлагаемого метода относится возможность вычисления точного интеграла $\int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x, s) \omega_0^R(s) ds$ (без погрешностей). Однако в случае трудностей с вычислением интеграла мы можем применить квадратурную формулу, которая обеспечивает порядок приближения $m, m \geq 4$.

Численные примеры

Задача 1. Теперь мы возьмем уравнение из статьи [6]:

$$u(x) = \exp(-x) + x \exp(x) - \int_0^x \exp(x+t) u(t) dt, x \in [0, 1].$$

Точное решение интегрального уравнения равно $u(x) = \exp(-x)$. На Рис. 11 и 12 показаны погрешности решения задачи 1 с кубическими полиномиальными сплайнами при $n = 32, 64, \text{Digits}=18$.

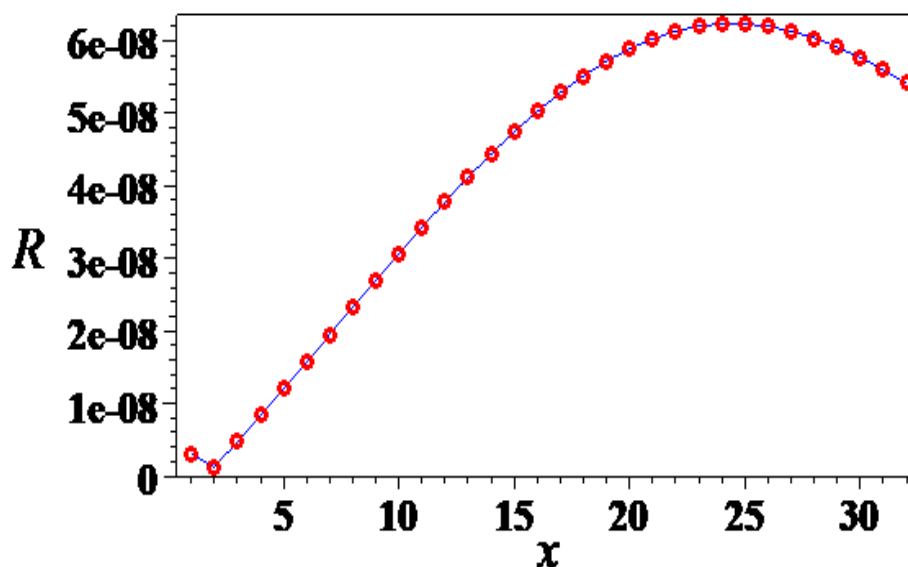


Рис.11. Погрешность решения задачи 1 с кубическими полиномиальными сплайнами при $n = 32$

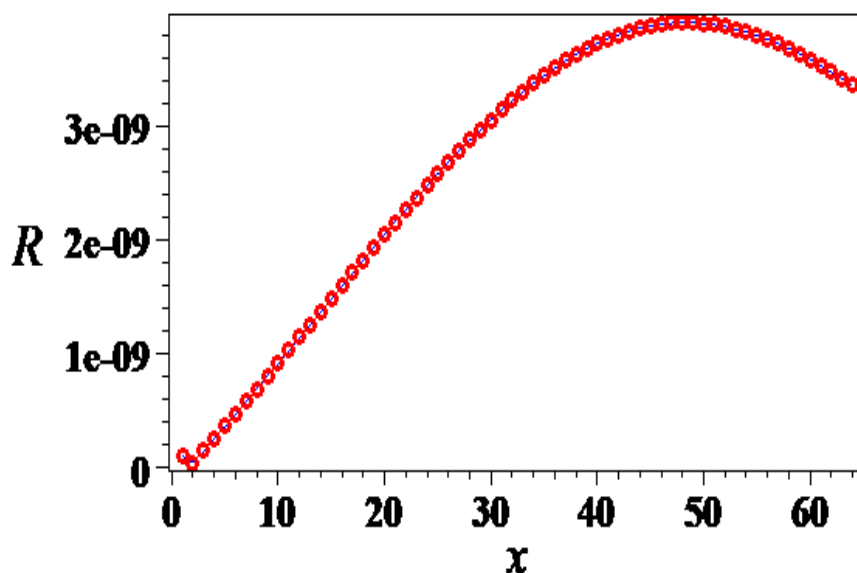


Рис.12. Погрешность решения задачи 1 с кубическими полиномиальными сплайнами при $n = 64$

На Рис. 13 и 14 показаны погрешности решения задачи 1 с неполиномиальными сплайнами при $n = 32, 64$ (Digits=25).

Обратите внимание, что трапецевидный метод для этой задачи даст точный результат (см. Рис. 15).

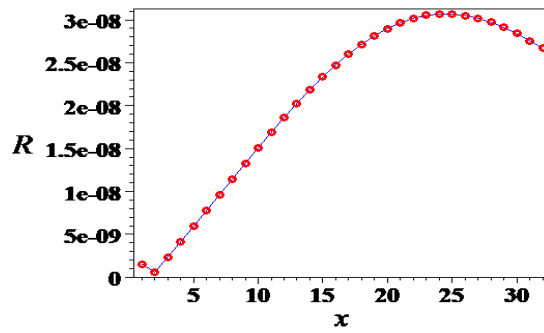


Рис.13. Погрешность решения задачи 1 с неполиномиальными сплайнами при $n = 32$

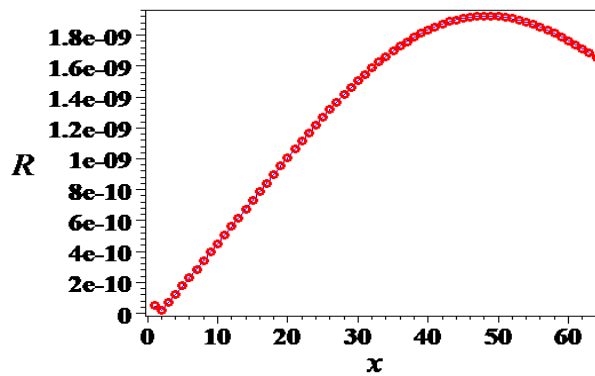


Рис.14. Погрешность решения задачи 1 с неполиномиальными сплайнами при $n = 64$

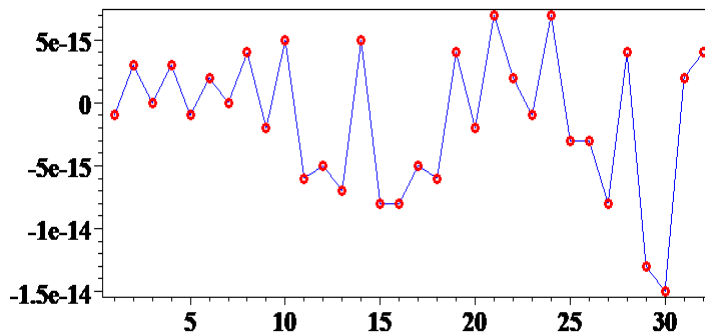


Рис.15. Погрешность решения задачи 1 с неполиномиальными сплайнами при $n = 32$

Задача 2. Мы берем уравнение

$$u(x) = g(x) - \int_0^x (x-t)\cos(x-t)u(t)dt, x \in [0, 1].$$

Точное решение уравнения равно $u(x) = 2 \cos(\sqrt{3}x + 1) / 3$. Функция $g(x)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} g(x) = & \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} x \cos(x) \sin(1) + \frac{2}{3} \cos(x) \cos(1) \\ & - \frac{1}{3} x \sin(x) \cos(1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(x) \sin(1) - \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3} x) \cos(1) \\ & + \frac{2}{3} \sin(\sqrt{3} x) \sin(1). \end{aligned}$$

На Рис. 16 показаны погрешности решения задачи 2 с кубическими полиномиальными сплайнами при $n = 32$.

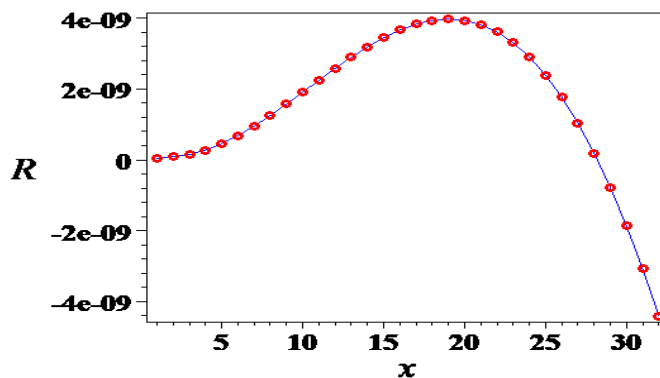


Рис.16. Погрешности решения задачи 2 с кубическими полиномиальными сплайнами при $n = 32$.

Применение квадратурного правила Симпсона

Теперь рассмотрим результаты применения квадратурного правила Симпсона к решению интегрального уравнения Вольтерра. Мы построим решение на единой сетке узлов. Мы обозначаем

$$S(x, j) = \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{6} (K(x, x_{j-1})u_{j-1} + 4K(x, x_j)u_j + K(x, x_{j+1})u_{j+1})$$

В начале, как всегда, у нас есть

$$u(x_0) = f(x_0).$$

Далее мы будем использовать кубический интерполяционный сплайн в узлах x_0, x_2, x_3, x_4 в уравнении

$$u(x_1) + \int_0^{x_1} K(x_1, s)u(s)ds = f(x_1).$$

Мы используем кубическую интерполяцию вида

$$U_1^R(x) = u(y_j)\omega_j^R(x) + u(y_{j+1})\omega_{j+1}^R(x) \\ + u(y_{j+2})\omega_{j+2}^R(x) + u(y_{j+3})\omega_{j+3}^R(x)$$

$$\omega_j^R(x) = \frac{(x - y_{j+1})(x - y_{j+2})(x - y_{j+3})}{(y_j - y_{j+1})(y_j - y_{j+2})(y_j - y_{j+3})},$$

$$x \in [y_j, y_{j+1}],$$

$$\omega_{j+1}^R(x) = \frac{(x - y_j)(x - y_{j+2})(x - y_{j+3})}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j+2})(y_{j+1} - y_{j+3})},$$

$$x \in [y_j, y_{j+1}],$$

$$\omega_{j+2}^R(x) = \frac{(x - y_j)(x - y_{j+1})(x - y_{j+3})}{(y_{j+2} - y_j)(y_{j+2} - y_{j+1})(y_{j+2} - y_{j+3})},$$

$$x \in [y_j, y_{j+1}],$$

$$\omega_{j+3}^R(x) = \frac{(x - y_j)(x - y_{j+1})(x - y_{j+2})}{(y_{j+3} - y_j)(y_{j+3} - y_{j+1})(y_{j+3} - y_{j+2})},$$

$$x \in [y_j, y_{j+1}].$$

В этом случае мы берем $y_j = x_0, y_{j+1} = x_2, y_{j+2} = x_3, y_{j+3} = x_4$.

Таким образом, мы применим соотношение

$$V(x) = u(y_0)\omega_0^R(x) + u(y_2)\omega_2^R(x) + u(y_3)\omega_3^R(x) + u(y_4)\omega_4^R(x)$$

на интервале $[x_0, x_2]$. Теперь у нас есть

$$V(x_1) = u(y_0)\omega_0^R(x_1) + u(y_2)\omega_2^R(x_1) + u(y_3)\omega_3^R(x_1) + u(y_4)\omega_4^R(x_1).$$

В следующих уравнениях мы применяем правило Симпсона:

$$u(x_2) + \int_0^{x_2} K(x_1, s)u(s)ds = f(x_2),$$

$$u(x_3) + \int_0^{x_1} K(x_3, s)u(s)ds + \int_{x_1}^{x_3} K(x_3, s)u(s)ds = f(x_3),$$

$$u(x_4) + \int_0^{x_2} K(x_4, s)u(s)ds + \int_{x_2}^{x_4} K(x_4, s)u(s)ds = f(x_4).$$

Поэтому, чтобы получить решение в точках $x_j, j = 1, 2, 3, 4$, нам придется решить систему уравнений:

$$u_0 = f(x_0),$$

$$u_1 + V(x_1) = f(x_1),$$

$$u_2 + S(x_2, 1) = f(x_2),$$

$$u_3 + V(x_3) + S(x_3, 2) = f(x_3),$$

$$u_4 + S(x_4, 1) + S(x_4, 3) = f(x_4).$$

Далее, следующее значение u_j получается путем решения уравнений для нечетного j вида

$$u_j + V(x_j) + \sum_{k=1}^{[j/2]} S(x_j, 2k) = f(x_j).$$

Здесь $[j/2]$ вычисляет целое частное от j деленное на 2.

И для четного j мы решаем уравнения вида

$$u_j + \sum_{k=1}^{j/2} S(x_j, 2k - 1) = f(x_j).$$

На Рис. 17 показана погрешность при решении уравнения Вольтерра задачи 1 предложенным методом. Таким образом, применение формулы Симсона дает очень хороший результат, если, кроме того, на одном интервале сетки используются сплайны четвертого порядка аппроксимации.

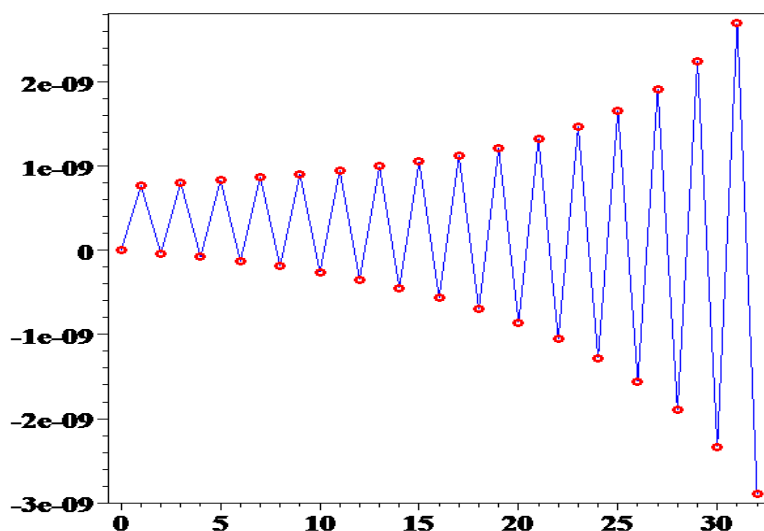


Рис.17. График погрешности при решении уравнения Вольтерра задачи 1 при использовании метода Симпсона (32 узла)

Может быть применен другой подход к построению расчетных формул. Мы можем использовать формулу Ньютона-Котеса:

$$W_3(x) = \frac{(x_3 - x_0)}{8} (K(x, x_0)u_0 + 3K(x, x_1)u_1 + 3K(x, x_2)u_2 + K(x, x_3)u_3)$$

и интерполяцию сплайнов

$$V_1(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, s)(u_0w_0(s) + u_1w_1(s) + u_2w_2(s) + u_3w_3(s))ds.$$

Традиционный подход заключается в применении формулы Симпсона

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} K(x, s)u(s)ds \approx S_j(x),$$

где

$$S_j(x) = \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{6} (K(x, x_{j-1})u_{j-1} + 4K(x, x_j)u_j + K(x, x_{j+1})u_{j+1})$$

Во-первых, нам нужно определить значения u_1, u_2, u_3, u_4 . Обозначим

$$W_3(x) = \frac{x_3 - x_0}{8} (K(x, x_0)u_0 + 3K(x, x_1)u_1 + 3K(x, x_2)u_2 + K(x, x_3)u_3)$$

С помощью $u_0 = f(x_0)$,

и решения системы уравнений

$$u_1 + V_1(x_1) = f(x_1),$$

$$u_2 + S_1(x_2) = f(x_2),$$

$$u_3 + W_3(x_3) = f(x_3),$$

$$u_4 + S_1(x_4) + S_3(x_4) = f(x_4),$$

мы получаем u_1, u_2, u_3, u_4 . Теперь, применяя правило Симпсона, мы можем последовательно находить значения $u_j, j = 5, \dots, n$.

Далее, следующее значение u_j получается путем решения уравнений для нечетного j вида

$$u_j + W(x_j) + \sum_{k=1}^{[j/2]} S(x_j, 2k) = f(x_j).$$

Здесь $[j/2]$ вычисляет целое частное от j деленное на 2.

И для четного j мы решаем уравнения вида

$$u_j + \sum_{k=1}^{\frac{j}{2}} S(x_j, 2k - 1) = f(x_j).$$

На Рис.18 показаны погрешности решения на интервале $[0,1]$ когда мы использовали методы Симпсона и Ньютона-Котеса (32 узла). На Рис.19 погрешности решения показаны на интервале $[x_5, 1]$ когда использовалось 32 узла.

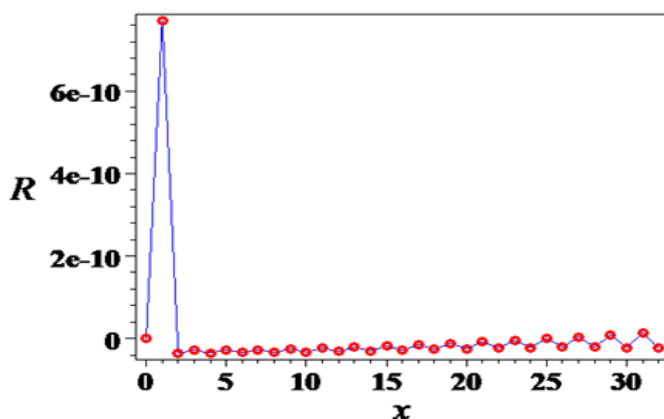


Рис.18. График погрешности при решении уравнения Вольтерра задачи 1 при использовании метода Симпсона и Ньютона-Котеса (32 узла)

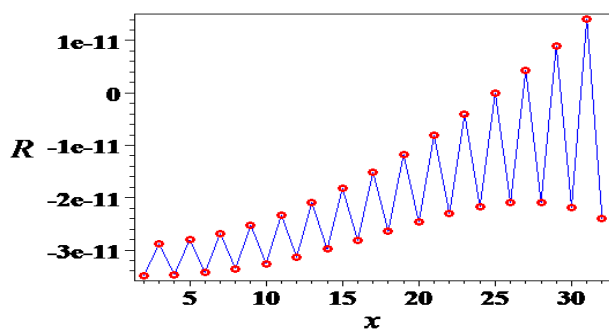


Рис.19. График погрешности при решении уравнения Вольтерра задачи 1 при использовании метода Симпсона и Ньютона-Котеса (32 узла)

На рисунках 20-21 показаны результаты решения задачи 1 при использовании метода Симпсона и Ньютона-Котеса. На Рис.20 показаны погрешности решения на интервале $[0,1]$ когда использовалось 64 узла. На Рис.21 показаны погрешности решения на интервале $[u_5,1]$ когда использовалось 64 узла.

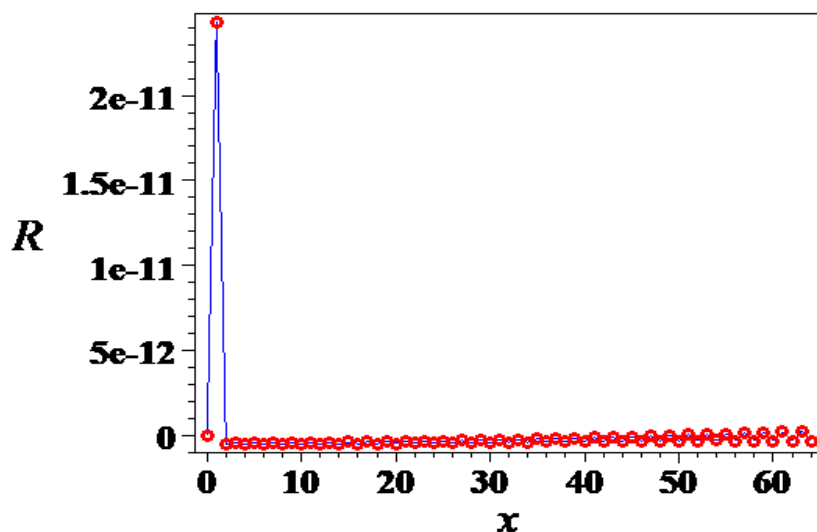


Рис.20. График погрешности при решении уравнения Вольтерра задачи 1 при использовании метода Симпсона и Ньютона-Котеса (64 узла)

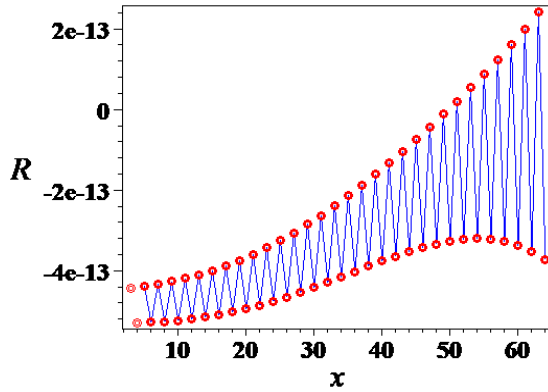


Рис.21. График погрешности при решении уравнения Вольтерра задачи 1 при использовании метода Симпсона и Ньютона-Котеса (64 узла)

Используя левый и правый интегро-дифференциальные полиномиальные сплайны, мы можем построить численную схему для решения уравнения Вольтерра второго рода.

Обозначим

$$\begin{aligned}
 (x, j) &= \sum_{k=0}^2 u_{j+k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x, s) w_{j+k}^R(s) ds \\
 &\quad + \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} u(s) ds \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x, s) w_j^{R<1,2>}(s) ds, \\
 W_1(x, j) &= \sum_{k=-1}^1 u_{j+k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x, s) w_{j+k}^L(s) ds \\
 &\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(s) ds \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x, s) w_j^{L<0,1>}(s) ds,
 \end{aligned}$$

Как обычно, у нас есть $u(x_0) = f(x_0)$. Далее у нас есть система уравнений

$$\begin{aligned}
 u(x_1) + \int_0^{x_1} K(x_1, s) u(s) ds &= f(x_1), \\
 u(x_2) + \int_0^{x_1} K(x_2, s) u(s) ds + \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, s) u(s) ds &= f(x_2),
 \end{aligned}$$

Используя правый и левый полиномиальные сплайны, мы получаем

$$\int_0^{x_1} K(x_1, s) u(s) ds = W(x_1, 0).$$

$$\int_{x_1}^{x_2} K(x_2, s)u(s)ds = W_1(x_2, 1).$$

Таким образом, мы должны решить систему уравнений, чтобы получить (x_1) , $u(x_2)$:

$$\begin{aligned} u(x_1) + W(x_1, 0) &= f(x_1), \\ u(x_2) + W(x_2, 0) + W_1(x_2, 1) &= f(x_2), \end{aligned}$$

Далее мы можем получить $u(x_j)$, $j = 3, \dots, n - 1$, решая уравнения

$$\begin{aligned} u(x_j) + W(x_2, 0) + \sum_{k=1}^{j-1} W_1(x_j, k) &= f(x_j), \\ j &= 3, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

На Рис. 22 и 23 показан график погрешности задачи 1, когда использовались интегродифференциальные полиномиальные сплайны.

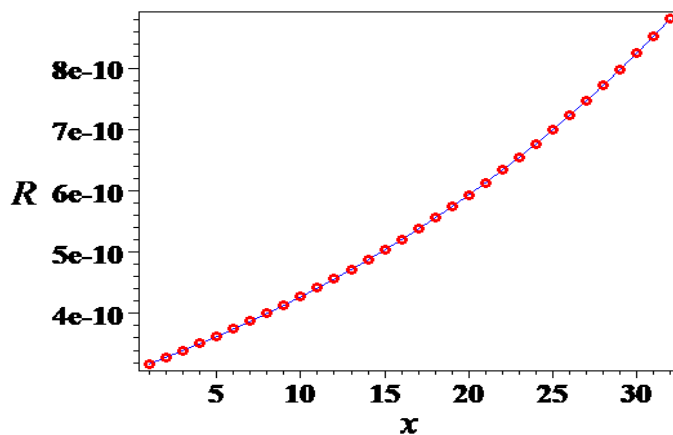


Рис. 22. Погрешность решения задачи 1 ($Digits = 25$)

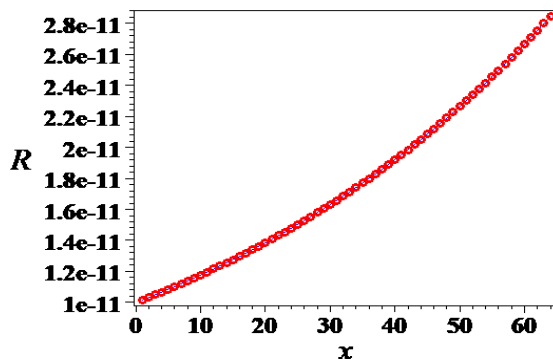


Рис. 23. Погрешность решения задачи 1 ($Digits=25$)

Вывод

В вышеизложенном рассматривалось использование полиномиальных и неполиномиальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации. Результаты численных экспериментов показали преимущество хороших аппроксимационных свойств. Полиномиально-тригонометрические сплайны давали меньшую погрешность, но для вычислений требуется больше знаков в мантиссе. В некоторых случаях значения интегралов могут быть известны. В этом случае могут быть применены интегро-дифференциальные сплайны (см. [8]).

СПЛАЙНЫ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Во многих современных задачах появляется необходимость решения интегральных уравнений. При решении интегральных уравнений могут быть использованы методы машинного обучения могут быть сведены к решению. А численное решение интегральных уравнений, чаще всего, связано с решением задачи интерполирования. Представляем новый метод решения интегрального уравнения Вольтерра, использующий локальные интерполяционные сплайны четвертого порядка аппроксимации.

Постановка задачи

Пусть n – целое число, a, b – вещественные. Построим на промежутке $[a, b]$ сетку узлов $\{x_j\}$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, такую что $y_j = a + jh$, $j = 0, \dots, n$. Рассмотрим численное решение линейного уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) + \int_a^x K(x, s)u(s)ds = f(x), \quad x, s \in [a, b],$$

где K, f - известные функции, $u(x)$ – функция, которую надо найти.

Численное решение

Построим метод численного решения этого уравнения, применяя локальные сплайны четвёртого порядка аппроксимации. На каждом сеточном интервале $[y_j, y_{j+1}]$, аппроксимируем функцию $u(x)$ правыми локальными сплайнами четвёртого порядка аппроксимации [1]:

$$\tilde{u}(x) = u(y_j)\omega_j^R(x) + u(y_{j+1})\omega_{j+1}^R(x) + u(y_{j+2})\omega_{j+2}^R(x) + u(y_{j+3})\omega_{j+3}^R(x),$$

$$\omega_j^R(x) = \frac{(x - y_{j+1})(x - y_{j+2})(x - y_{j+3})}{(y_j - y_{j+1})(y_j - y_{j+2})(y_j - y_{j+3})},$$

$$\omega_{j+1}^R(x) = \frac{(x - y_j)(x - y_{j+2})(x - y_{j+3})}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j+2})(y_{j+1} - y_{j+3})},$$

$$\omega_{j+2}^R(x) = \frac{(x - y_j)(x - y_{j+1})(x - y_{j+3})}{(y_{j+2} - y_j)(y_{j+2} - y_{j+1})(y_{j+2} - y_{j+3})},$$

$$\omega_{j+3}^R(x) = \frac{(x - y_j)(x - y_{j+1})(x - y_{j+2})}{(y_{j+3} - y_j)(y_{j+3} - y_{j+1})(y_{j+3} - y_{j+2})}.$$

Наша задача – найти значения $\tilde{u}(y_k)$. Вначале находим $\tilde{u}(y_k), k = 0, 1, 2, 3$:

$$\tilde{u}(y_0) = f(y_0),$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y_1) + \tilde{u}(y_0) \int_{y_0}^{y_1} K(y_1, s)\omega_0^R(s)ds + \tilde{u}(y_1) \int_{y_0}^{y_1} K(y_1, s)\omega_1^R(s)ds \\ + \tilde{u}(y_2) \int_{y_0}^{y_1} K(y_1, s)\omega_2^R(s)ds + \tilde{u}(y_3) \int_{y_0}^{y_1} K(y_1, s)\omega_3^R(s)ds \\ = f(y_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{u}(y_2) + \tilde{u}(y_0) \int_{y_0}^{y_1} K(y_2, s) \omega_0^R(s) ds + \tilde{u}(y_1) \int_{y_0}^{y_1} K(y_2, s) \omega_1^R(s) ds \\
& + \tilde{u}(y_2) \int_{y_0}^{y_1} K(y_2, s) \omega_2^R(s) ds + \tilde{u}(y_3) \int_{y_0}^{y_1} K(y_2, s) \omega_3^R(s) ds \\
& + \tilde{u}(y_0) \int_{y_1}^{y_2} K(y_2, s) \omega_0^M(s) ds + \tilde{u}(y_1) \int_{y_1}^{y_2} K(y_2, s) \omega_1^M(s) ds \\
& + \tilde{u}(y_2) \int_{y_1}^{y_2} K(y_2, s) \omega_2^M(s) ds + \tilde{u}(y_3) \int_{y_1}^{y_2} K(y_2, s) \omega_3^M(s) ds \\
& = f(y_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{u}(y_3) + \tilde{u}(y_0) \int_{y_0}^{y_1} K(y_3, s) \omega_0^R(s) ds + \tilde{u}(y_1) \int_{y_0}^{y_1} K(y_3, s) \omega_1^R(s) ds \\
& + \tilde{u}(y_2) \int_{y_0}^{y_1} K(y_3, s) \omega_2^R(s) ds + \tilde{u}(y_3) \int_{y_0}^{y_1} K(y_3, s) \omega_3^R(s) ds \\
& + \tilde{u}(y_0) \int_{y_1}^{y_2} K(y_3, s) \omega_0^M(s) ds + \tilde{u}(y_1) \int_{y_1}^{y_2} K(y_3, s) \omega_1^M(s) ds \\
& + \tilde{u}(y_2) \int_{y_1}^{y_2} K(y_3, s) \omega_2^M(s) ds + \tilde{u}(y_3) \int_{y_1}^{y_2} K(y_3, s) \omega_3^M(s) ds \\
& + \tilde{u}(x_0) \int_{y_2}^{y_3} K(y_3, s) \omega_0^L(s) ds + \tilde{u}(y_1) \int_{y_2}^{y_3} K(y_3, s) \omega_1^L(s) ds \\
& + \tilde{u}(y_2) \int_{y_2}^{y_3} K(y_3, s) \omega_2^L(s) ds + \tilde{u}(y_3) \int_{y_2}^{y_3} K(y_3, s) \omega_3^L(s) ds \\
& = f(y_3).
\end{aligned}$$

Далее применяем формулу:

$$u(y_k) + \int_0^{x_1} K(y_k, s) u(s) ds = f(y_k).$$

Если интегралы не могут быть вычислены точно, то можно использовать соответствующую квадратурную формулу.

Результаты численного эксперимента

Рассмотрим решение уравнения

$$u(x) = g(x) - \int_0^x (x-t) \cos(x-t) u(t) dt, \quad x \in [0,1],$$

где функция $g(x)$ построена по функции $u(x) = \frac{2 \cos(\sqrt{3}x+1)}{3}$. Таким образом: $g(x) = \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} x \cos(x) \sin(1) + \frac{2}{3} \cos(x) x \cos(1) - \frac{1}{3} x \sin(x) \cos(1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(x) \sin(1) - \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}x) \cos(1) + \frac{2}{3} \sin(\sqrt{3}x) \sin(1)$.

предположим, что количество узлов сетки равно 32. График погрешности решения представлен на Рис. 24. Вычисления проводились в среде MAPLE.

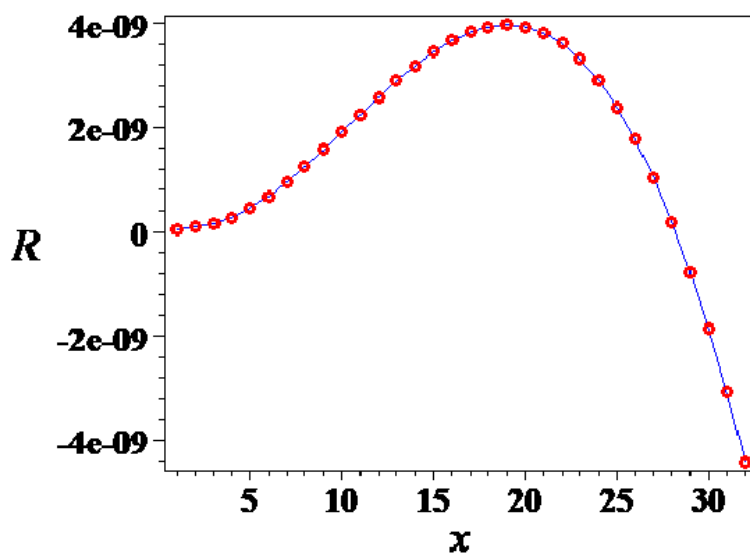


Рис. 24. График погрешности приближения при $n = 32$

Вывод

Преимуществом предложенного метода является возможность использования его на неравномерной сетке узлов. Значения искомой функции в точках можно соединить приведёнными выше сплайнами.

Список литературы

- [1] Q.Huang, M.Wang, Superconvergence of interpolated collocation solutions for weakly singular Volterra integral equations of the second kind, *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 40, No 3, paper 71, 2021 . Scopus
- [2] A.F.Al-Shimmary, A.K.Hussain, S.K.Radhi, Numerical Solution of Volterra Integro-Differential Equation Using 6thOrder Runge-Kutta Method, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1818, No 1, paper 012183, 2021.
- [3] M.Mohammad, C.Cattani, A collocation method via the quasi-affine biorthogonal systems for solving weakly singular type of Volterra-Fredholm integral equations, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 59, No 4, 2020, pp. 2181-2191. Scopus
- [4] J.Ma, H.Liu, Fractional collocation boundary value methods for the second kind Volterra equations with weakly singular kernels, *Numerical Algorithms*, Vol. 84, No 2, 2020, pp. 743-760. Scopus
- [5] S.Soradi-Zeid, Efficient radial basis functions approaches for solving a class of fractional optimal control problems, *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 39, No 1, paper 2 , 2020. Scopus
- [6] M. Asif, I. Khan, N. Haider, Q. Al-Mdallal, Legendre multi-wavelets collocation method for numerical solution of linear and nonlinear integral equations. *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 59, 2020, pp. 5099-5109. Scopus
- [7] Derakhshan, M., Zarebnia, M. On the numerical treatment and analysis of two-dimensional Fredholm integral equations using quasi-interpolant, *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 39, No 2, paper 106, 2020. Scopus
- [8] I.G.Burova, On left integro-differential splines and Cauchy problem, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 9, 2015, pp. 683-690. Scopus
- [9] I.G.Burova, Application local polynomial and non-polynomial splines of the third order of approximation for the construction of the numerical solution of the volterra integral equation of the second kind, *WSEAS Transactions on Mathematics*, Vol. 20, 2021, pp. 9-23. Scopus

- [10] Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. Минимальные сплайны и их приложения - СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета. – 2010. - 364 с. - ISBN 978-5-288-04978.
- [11] Hu, P., Yang, W., Zhu, Y., Hong, L. Revealing hidden dynamics from time-series data by ODENet, *Journal of Computational Physics*, 461, статья № 111203, 2022. Scopus
- [12] Hong, J., Ji, L., Wang, X., Zhang, J. Positivity-preserving symplectic methods for the stochastic Lotka–Volterra predator-prey model, *BIT Numerical Mathematics*, 62 (2), pp. 493-520, 2022. Scopus
- [13] Aghaei Amirkhizi, S., Mahmoudi, Y., Salimi Shamloo, A. Legendre polynomials approximation method for solving Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53 (2), pp. 492-504, 2022. Scopus
- [14] Li, M., Huang, C., Wen, J. A two-parameter Milstein method for stochastic Volterra integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 404, статья № 113870, 2022. Scopus
- [15] Raad, S., Alqurashi, K. Toeplitz matrix and Nyström method for solving linear fractional integro-differential equation, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15 (2), pp. 796-809, 2022. Scopus
- [16] Singh, S., Rawat, T.K., Ashok, A. Nonlinear System Identification Using Adaptive Volterra Model Optimized with Sine Cosine Algorithm, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2022. Scopus
- [17] Ramadan, M.A., Osheba, H.S., Hadhoud, A.R., A numerical method based on hybrid orthonormal Bernstein and improved block-pulse functions for solving Volterra–Fredholm integral equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2022. Scopus
- [18] Benth, F.E., Detering, N., Krühner, P., Stochastic Volterra integral equations and a class of first-order stochastic partial differential equations, *Stochastics*, 2022. Scopus
- [19] Tynda, A., Sidorov, D., Muftahov, I., Numerical analysis of fractional order integral dynamical models with piecewise continuous kernels [Численный анализ дробных интегральных динамических моделей с кусочно-непрерывными ядрами], *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 13 (4), pp. 58-65, 2021. Scopus

- [20] Liu, H., Huang, J., He, X. Bivariate barycentric rational interpolation method for two dimensional fractional Volterra integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 389, статья № 113339, 2021. Scopus
- [21] Karamov, D.N., Sidorov, D.N., Muftahov, I.R., Zhukov, A.V., Liu, F. Optimization of isolated power systems with renewables and storage batteries based on nonlinear Volterra models for the specially protected natural area of lake Baikal, *Journal of Physics: Conference Series*, 1847 (1), статья № 012037, 2021. Scopus
- [22] Zhu, Q., Loeper, G., Chen, W., Langrené, N. Markovian approximation of the rough bergomi model for Monte Carlo option pricing, *Mathematics*, 9 (5), статья № 528, pp. 1-21, 2021. Scopus
- [23] Li, M., Huang, C., Hu, P., Wen, J. Mean-square stability and convergence of a split-step theta method for stochastic Volterra integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 382, статья № 113077, 2021. Scopus
- [24] Fedotenkov, G.V., Starovoitov, E.I., Vahterova, Ya.A. The inverse transient problem of identifying the law of change in the cross-sectional area of an elastic bar, 9th International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, COUPLED PROBLEMS 2021. Scopus
- [25] Rasouli, M., Fariborzi Araghi, M.A., Damercheli, T. Approximate techniques to solve the partial integro-differential equation arising in operational risk: Adomian decomposition method, *Mathematical Sciences*, 2021. Scopus
- [26] Jameel, A.F., Anakira, N.R., Alomari, A.K., Man, N.H. Solution and analysis of the fuzzy volterra integral equations via homotopy analysis method, *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 127 (3), pp. 875-899, 2021. Scopus
- [27] Zeghdane, R. Numerical approach for solving nonlinear stochastic Itô-Volterra integral equations using shifted Legendre polynomials, *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 11 (1), pp. 69-88, 2021. Scopus
- [28] Noeiaghdam, S., Sidorov, D., Wazwaz, A.-M., Sidorov, N., Sizikov, V. The numerical validation of the adomian decomposition method for solving volterra integral equation with discontinuous kernels using the cestac method, *Mathematics*, 9 (3), статья № 260, pp. 1-15, 2021. Scopus

- [29] Abdullah, J.T. Approximate numerical solutions for linear volterra integral equations using touchard polynomials, Baghdad Science Journal, 17 (4), pp. 1241-1249, 2020. Scopus
- [30] Liu, H., Huang, J. Numerical solution of special 2D Fredholm-Volterra integral equations using barycentric Gegenbauer interpolation collocation method, Journal of Physics: Conference Series, 1634 (1), статья № 012099, 2020. Scopus
- [31] Griffies, S.M., Adcroft, A., Hallberg, R.W. A Primer on the Vertical Lagrangian-Remap Method in Ocean Models Based on Finite Volume Generalized Vertical Coordinates, Journal of Advances in Modeling Earth Systems, 12 (10), статья № e2019MS001954, 2020. Scopus
- [32] Noeiaghdam, S., Dreglea, A., He, J., Avazzadeh, Z., Suleman, M., Araghi, M.A.F., Sidorov, D.N., Sidorov, N. Error estimation of the homotopy perturbation method to solve second kind volterra integral equations with piecewise smooth kernels: Application of the cadna library, Symmetry, 12 (10), статья № 1730, pp. 1-16, 2020. Scopus
- [33] Okeke, G.A., Kim, J.K. Fixed point theorems in complex valued banach spaces with applications to a nonlinear integral equation, Nonlinear Functional Analysis and Applications, 25 (3), pp. 411-436, 2020. Scopus
- [34] Abdullah, J.T., Ali, H.S. Laguerre and Touchard Polynomials for Linear Volterra Integral and Integro Differential Equations, Journal of Physics: Conference Series, 1591 (1), статья № 012047, 2020. Scopus