

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра МЭКС

Направление 27.04.03 «Системный анализ и управление»
по уровню «МАГИСТРАТУРА»

Султан Небрас

Выпускная квалификационная работа
"Математическое моделирование эмиссионной
системы с полевыми катодами"
"Emission system with field cathodes mathematical modeling"

Образовательная программа
«Инженерно-ориентированная информатика»

Руководитель образовательной программы,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Егоров Н В.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Виноградова Е.М.

29,04.2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	2
Глава 1. Распределение электростатического потенциала в эмиссионной диодной системе с одиночным полевым эмиттером лезвийной формы	11
1.1 Постановка задачи расчета распределения потенциала в системе с одиночным эмиттером	11
1.2 Решение электростатической задачи с одиночным эмиттером методом разделения переменных в декартовых координатах	12
1.3 Заключение к Главе 1	17
Глава 2. Распределение электростатического потенциала в эмиссионной диодной системе с двумя полевыми эмиттерами лезвийной формы	18
2.1 Постановка задачи расчета электростатического потенциала в эмиссионной диодной системе с двумя полевыми эмиттерами	18
2.2 Решение электростатической задачи с двумя эмиттерами методом разделения переменных в декартовых координатах	19
2.3 Заключение к Главе 2	23
Результаты работы	24
Литература	25

Введение

Под эмиссией понимается испускание электронов из твердого тела или какой-либо другой среды. Наибольший интерес представляет эмиссия электронов в вакуум. Тело, из которого выпускаются электроны, называется катодом. Электроны не могут самопроизвольно покинуть поверхность катода, так как для этого надо совершить работу против внутренних сил, удерживающих их на границе раздела катод — вакуум. Таким образом, для того чтобы высвободить электроны из катода, необходимо затратить энергию. По способу, которым эта энергия передается катоду, эмиссионные процессы называются термоэмиссией, когда энергия передается электронам при нагревании катода за счет тепловых колебаний решетки; вторичной электронной эмиссией, когда эта энергия передается другими частицами (электронами или ионами, бомбардирующими катод); фотоэлектронной эмиссией, при которой электроны выбиваются квантами света, и т.п. Полевой эмиссией называется явление испускания электронов в вакуум с поверхности твердого тела или другой среды под действием очень сильного электрического поля напряженностью $E = 10^7 - 10^8$ В/см. Для того чтобы создать такие сильные электрические поля, к обычным макроскопическим электродам необходимо было бы прикладывать напряжения в десятки миллионов вольт. Практически полевою эмиссией можно возбудить при гораздо меньших напряжениях, если придать катоду форму тонкого острия с радиусом вершины в десятые или сотые доли микрона. Сейчас реализованы условия, когда при микроскопических расстояниях катод — анод, равных единицам или долям микрона, и очень малых радиусах кривизны катода $r = 20 - 50$ Б (1 Б = 10^{-8} см)

полевую эмиссию удается получать при напряжениях всего в сотни и даже десятки вольт. Среди эмиссионных явлений полевая эмиссия занимает особое место, так как это чисто квантовый эффект, при котором для высвобождения электронов из катода не требуется затрат энергии на сам эмиссионный акт в отличие от термо-, фото- и вторичной эмиссии. Полевые катоды находят широкое применение в разнообразных современных вакуумных электронных устройствах. Данный вид катодов обладает неоспоримыми преимуществами по сравнению с термо- и фото катодами — это высокое быстродействие, безынерционность, а поток заряженных частиц при полевой эмиссии является моноэнергетичным и ламинарным [1–5].

Благодаря своим замечательным свойствам полевая эмиссия всегда вызывала большой интерес у прикладных математиков. Однако по настоящему она нашла серьезное применение практически в последние десятилетия. Полевую эмиссию стали использовать в различных элементах вакуумной микроэлектроники: транзисторах, преобразователях частоты, усилителях, различного рода прецизионных датчиках давления, регулировки управления микрозорами и др .

Полевой катод конструктивно представляет собой очень тонкое острие с радиусом кривизны при его вершине, порядка нескольких микро- или нанометров. На РИСУНКЕ 1 представлено изображение полевого острия в микрометровом диапазоне [6]. Придание катоду формы острия позволяет получить при сравнительно небольших напряжениях (от единиц до десятков киловольт) интенсивную полевую электронную эмиссию. Однако, одним из основных недостатков полевых катодов является то, что они дают небольшие значения полного

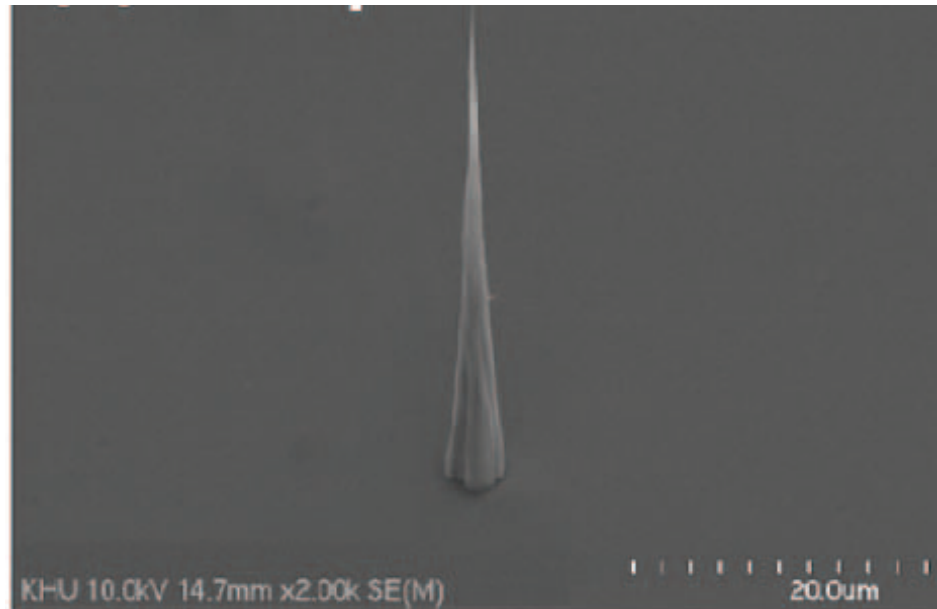


Рис. 1.

эмиссионного тока для одиночных катодов – порядка нескольких микроампер.

В зависимости от назначения прибора, существуют несколько методов получения нужных значений эмиссионного тока. Во-первых, увеличить ток позволяют многоострийные системы. На РИСУНКЕ 2 представлено изображение массива полевых острий в микрометровом диапазоне [7]. Существует большое число экспериментальных исследований с массивами полевых катодов различной формы.

На РИСУНКЕ 3 также представлено изображение массива полевых эмиттеров в микрометровом диапазоне [8].

Однако, в силу взаимного влияния множества эмиттеров друг на друга (экранирования), требуется исследование подобного влияния и определение оптимального набора геометрических параметров системы, например, плотности упаковки, под плотностью упаковки пони-

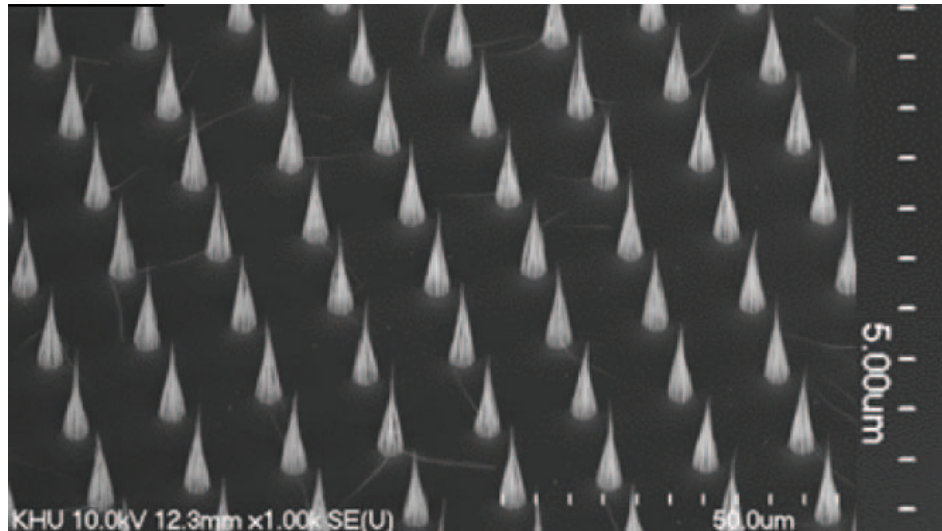


Рис. 2.

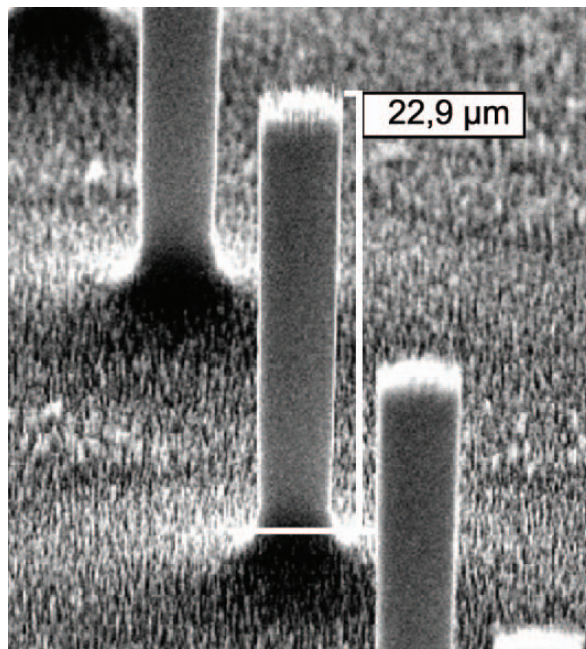


Рис. 3.

мается отношение расстояния между соседними эмиттерами к длине самого эмиттера.

Поэтому вторым методом является увеличение площади эмиссии самого полевого катода. Полевые катоды так называемой лезвийной формы обладают значительно большей площадью эмиссии по сравнению с одиночными острейными эмиттерами, что и позволяет увеличить общий ток в эмиссионной системе. На РИСУНКЕ 4 представле-

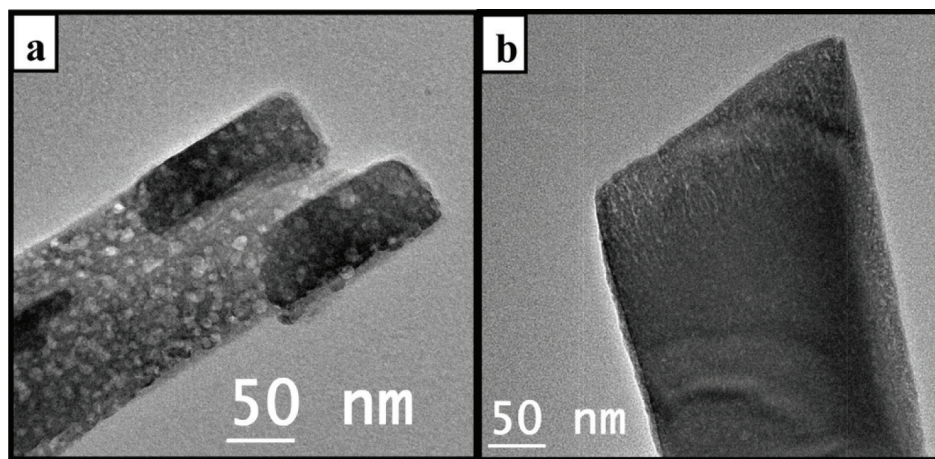


Рис. 4.

но изображение полевых эмиттеров лезвийной формы в нанометровом диапазоне [9].

По сравнению с термокатодами такие эмиттеры обеспечивают чрезвычайно большие плотности токов, что важно при создании миниатюрных приборов [10]. Кроме того, в качестве полевого источника электронов может использоваться, например, металлический зонд сверхвысоковакуумного зондового микроскопа LS SPM фирмы OMICRON [11].

Увеличение тока возможно за счет увеличения площади эмиссии, когда в качестве полевого катода используются либо многоостридная система, либо эмиттер лезвийной формы с острым краем. Края слоев двумерных полупроводниковых наноматериалов, например, графена, гафния, также обладают высокой эффективностью эмиссии и могут рассматриваться как полевые эмиттеры. Простейшей системой на основе полевого электронного катода, позволяющей получить эмиссионный ток, является диодная система катод–анод [12].

Повышение эмиссионной эффективности полевого катода позволяет повысить эффективность работы электронно-вакуумных приборов.

Традиционно эффективность катода повышают путем подбора и варьирования химического состава материала, из которого он изготовлен. В частности, в состав катода вводят химические элементы со сниженной работой выхода электрона по сравнению с работой выхода основного материала. Между тем введенные химические элементы, взаимодействуя с материалом катода, могут образовывать соединения, работа выхода которых не аддитивна относительно составляющих соединений химических элементов. Это может открыть путь к дополнительному повышению эмиссионной эффективности катода [13–23].

Надежность и долговечность, а также стабильность характеристик электровакуумных приборов (ЭВП) в значительной степени определяются эмиссионной надежностью и долговечностью катодов. В настоящее время в производстве ЭВП СВЧ- и субтерагерцевого диапазонов рассматривается возможность использования кроме МПК источников электронов, функционирование которых основано на явлении полевой эмиссии электронов, которые обладают в отличие от термокатодов сверхвысоким быстродействием [14, 15].

Перспективными для создания полевых эмиссионных катодов являются нанокремниевые материалы. Они устойчивы к высокотемпературному нагреву и бомбардировке ионами остаточных газов, которые имеют место в приборах, работающих в условиях технического вакуума и высоковольтного питания. Кроме того, при определенных структурных модификациях, характерных для алмазного типа гибридизации связей валентных электронов атомов углерода и ”открытых“ углеродных нанотрубок с графитовым типом структуры, они имеют более низкую, чем массивный углеродный материал, работу выхода

электронов. Это уменьшает электрофизическую нагрузку на материал полевого катода и позволяет получать высокие плотности полевых эмиссионных токов при более продолжительном ресурсе эксплуатации. Идеальными электрофизическими свойствами для применения в качестве долговечных высокостабильных полевых эмиссионных катодов обладает нанокристаллический алмаз. У него помимо традиционных свойств алмаза, присущих массивному кристаллическому состоянию, таких как низкий коэффициент катодного распыления, отрицательное электронное сродство, высокие теплопроводность, электрическая и механическая прочность и др., присутствуют квантовые эффекты, характерные для низкоразмерных систем. Благодаря этим свойствам сотрудниками Аргоннской национальной лаборатории (США) показано, что нанокристаллические алмазные покрытия наноострий и пленки, полученные с использованием неравновесной микроволновой плазмы, способны обеспечивать чрезвычайно высокую плотность тока (до 60–100 мА на острие) и стабильность [16, 17].

Также наметилась устойчивая тенденция к использованию полевой эмиссии электронов и из полупроводников с дырочным типом проводимости. Большой интерес вызывают, например, исследования, направленные на создание фотопольевых детекторов со сверхвысокой квантовой эффективностью, которые могут работать в инфракрасной области спектра, а также вакуумных транзисторов и светодиодов, которые по теоретическим оценкам могут работать на терагерцевых частотах [18–20].

При этом важнейшими параметрами, определяющими возможные области практического использования полевых эмиттеров, являются

суммарная величина и плотность силы тока, создаваемого полевыми катодами. Суммарное значение силы тока определяется общей площадью катода и плотностью тока эмиссии[19].

Углеродные пленки с алмазной структурой являются одним из перспективных материалов для изготовления катодов электровакуумных устройств, работа которых основана на полевой электронной эмиссии. Основной проблемой на пути широкого практического использования острийных катодов является нестабильность их характеристик, обусловленная в основном быстрым загрязнением поверхности эмитирующего острия молекулами остаточных газов в условиях технического вакуума. Алмаз позволяет решить эту проблему, так как его поверхность является химически инертной и малочувствительна к адсорбции [21, 22, 23].

Интерес к подобным устройствам особенно возрос в последние годы благодаря разработке полевых катодов на основе углеродных нанотрубок (УНТ) . Преимущества таких катодов связаны с хорошими электрическими характеристиками УНТ, их термической и химической стабильностью, а также высоким аспектным отношением УНТ, благодаря которому достигается значительный эффект усиления электрического поля вблизи наконечника нанотрубки [24].

Например, в работе [25] представлен полевой эмиттер на основе углеродных нанотрубок для эмиссионной интегральной микроэлектроники. Исследованы зависимости эмиссионного тока от тянущего и управляющих полей и показано, что данный эмиттер может быть использован во всех микроэлектронных аналогах вакуумных приборов от сверхвысокочастотных до плоских экранов, при этом технология

изготовления приборов является интегральной.

Основными проблемами, требующими решения при создании полевых катодов с высоким уровнем тока эмиссии, являются: — низкая долговечность вследствие деградационных процессов эмитирующей поверхности катода в условиях технического вакуума; — необходимость использования высокого ускоряющего напряжения для обеспечения напряженности электростатического поля, достаточной для полевой эмиссии значительного по величине тока; — сложность технологии изготовления автоэмиссионных структур с развитой эмитирующей поверхностью. Поэтому именно параметры долговечности, низковольтности и технологичности определяют в целом качество полевого катода. Поскольку вероятность туннелирования растет с повышением напряженности внешнего электростатического поля на поверхности катода, то наиболее известным и распространенным методом стимулирования полевой эмиссии является цененаправленное формирование эмиттера в виде острий или лезвий [26, 27].

ГЛАВА 1. Распределение электростатического потенциала в эмиссионной диодной системе с одиночным полевым эмиттером лезвийной формы

В данной главе представлен расчет распределения потенциала в диодной эмиссионной системе с лезвийным полевым катодом на плоской подложке. Анод – плоскость, параллельная подложке.

На РИСУНКЕ 5 а) приведено схематическое изображение полевого эмиттера в декартовых координатах (x, y, z) . Для расчета электростатического потенциала во всей области исследуемой системы используется метод разделения переменных.

1.1. Постановка задачи расчета распределения потенциала с системе с одиночным эмиттером

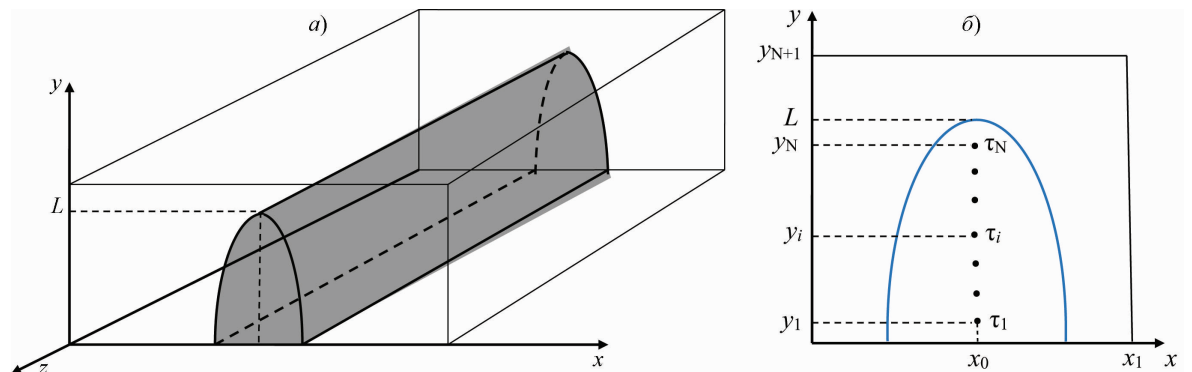


Рис. 5. Схематическое изображение полевого катода

Для определения распределения электростатического потенциала во всей области системы используется метод разделения переменных в декартовых координатах (x, y, z) . Будем считать, что форма лезвийного катода по переменной z не меняется, тогда распределение потенциала $U((x, y))$ зависит от двух координат (x, y) . Влияние поле-

вого эмиттера на распределение электростатического потенциала заменим влиянием N заряженных нитей с плотностями зарядов $\tau_i(y)$, $i = 1, \dots, N$, расположенных в плоскости xOy с координатами $x = x_0$, $y = y_i$, $i = 1, \dots, N$ (см. РИСУНК 5 б)). Нулевая эквипотенциаль совпадает с поверхностью реального эмиттера [28–32].

Параметрами системы с одиночным эмиттером являются:

L – высота катода;

$y = 0$, $0 \leq x \leq x_1$, – поверхность подложки катода;

$y = y_{N+1}$, $0 \leq x \leq x_1$, – поверхность анода;

$x = 0$, $x = x_1$, $0 \leq y \leq y_{N+1}$, – границы области по переменной x ;

$x_0 = x_1/2$, $y = y_i$, $i = 1, \dots, N$, – координаты заряженных нитей с плотностью зарядов $\tau_i(y)$.

Граничные условия на электродах:

$U((x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq x_1$, – на подложке эмиттера;

$U((x, y_{N+1}) = U_0$, $0 \leq x \leq x_1$, – на аноде;

$U((0, y) = U_0 \frac{y}{y_{N+1}}$, $U((x_1, y) = U_0 \frac{y}{y_{N+1}}$, $0 \leq y \leq y_{N+1}$, – на границе системы по переменной y .

1.2. Решение электростатической задачи с одиночным эмиттером методом разделения переменных в декартовых координатах

Для определения распределения потенциала в системе с заряженными нитями требуется решить граничную задачу (1.1) для уравнения Пуассона. Каждая заряженная нить с плотностью зарядов τ_i создает

равномерно распределенный пространственный заряд ρ_i в малом объеме $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_i| < \delta$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U(x, y_{N+1}) = U_0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U(0, y) = U_0 \frac{y}{y_{N+1}}, \quad 0 \leq y \leq y_{N+1}, \\ U(x_1, y) = U_0 \frac{y}{y_{N+1}}, \quad 0 \leq y \leq y_{N+1}. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_i, & |x - x_0| < \varepsilon \text{ и } |y - y_i| < \delta, \\ 0, & |x - x_0| > \varepsilon \text{ или } |y - y_i| > \delta, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tau_i = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} 4\varepsilon\delta \rho_i. \quad (1.3)$$

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_{N+1}} + U_1(x, y). \quad (1.4)$$

Функция $\rho(x, y)$ в правой части уравнения Пуассона для граничной задачи (1.1) представима в виде (1.2), так, что выполняется условие (1.3). Запись функции $U(x, y)$ в виде (1.4) позволяет удовлетворить всем граничным условиям задачи по переменным x и y , если функция $U_1(x, y)$ — решение уравнения Пуассона с однородными граничными условиями по переменным x и y .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U_1(x, y_{N+1}) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U_1(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq y_{N+1}, \\ U_1(x_1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq y_{N+1}. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Функция $U_1(x, y)$ является решением граничной задачи (1.5) для уравнения Пуассона. Данную функцию представим в виде разложения по собственным функциям по переменной y с функциональными коэффициентами v_m от x , где α_m — собственные значения:

$$U_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x) \sin \alpha_m y, \quad \alpha_m = \frac{\pi m}{y_{N+1}}. \quad (1.6)$$

Подставим функцию (1.6) в уравнение Пуассона, и, после некоторых преобразований, получим, что неизвестные функции v_m от x представляют собой решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$v_m''(x) - (\alpha_m)^2 v_m(x) = -\frac{2}{\varepsilon_0 y_{N+1}} \int_0^{y_{N+1}} \rho(x, y) \sin \alpha_m y dy, \quad (1.7)$$

Решая систему (1.7), найдем распределение потенциала.

Таким образом, распределение потенциала $U(x, y)$ имеет вид:

$$0 \leq x \leq x_0$$

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_{N+1}} + \frac{2}{\pi \varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \tau_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_i}{m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m (x_1 - x_0)}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \times \quad (1.8)$$

$$\times \operatorname{sh} \alpha_m x \sin \alpha_m y,$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_{N+1}} + \frac{2}{\pi \varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \tau_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_i}{m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m x_0}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \times \quad (1.9)$$

$$\times \operatorname{sh} \alpha_m (x_1 - x) \sin \alpha_m y,$$

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{y_{N+1}}. \quad (1.10)$$

Итак, формулы (1.8, 1.9, 1.10) представляют общее решение исходной граничной задачи (1.1) во всей области эмиссионной диодной системы.

Придавая некоторые значения плотностей зарядов τ_i , можно получить поверхность катода, определяемую как нулевую эквипотенциаль. С другой стороны, для того, чтобы поверхность катода совпадала в M точках с координатами (x_j^*, y_j^*) с некоторой заданной формой, распределение потенциала должно удовлетворять условиям:

$$U(x_j^*, y_j^*) = 0, \quad j = \overline{1, M}. \quad (1.11)$$

На РИСУНКЕ 6 показано, что выполнение условий (1.11) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно плотностей зарядов τ_i :

$$0 \leq x_j^* \leq x_0$$

$$\sum_{i=1}^N \tau_i \frac{2}{\pi \varepsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_i}{m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m (x_1 - x_0)}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \times \quad (1.12)$$

$$\times \operatorname{sh} \alpha_m x_j^* \sin \alpha_m y_j^* = -U_0 \frac{y_j^*}{y_{N+1}},$$

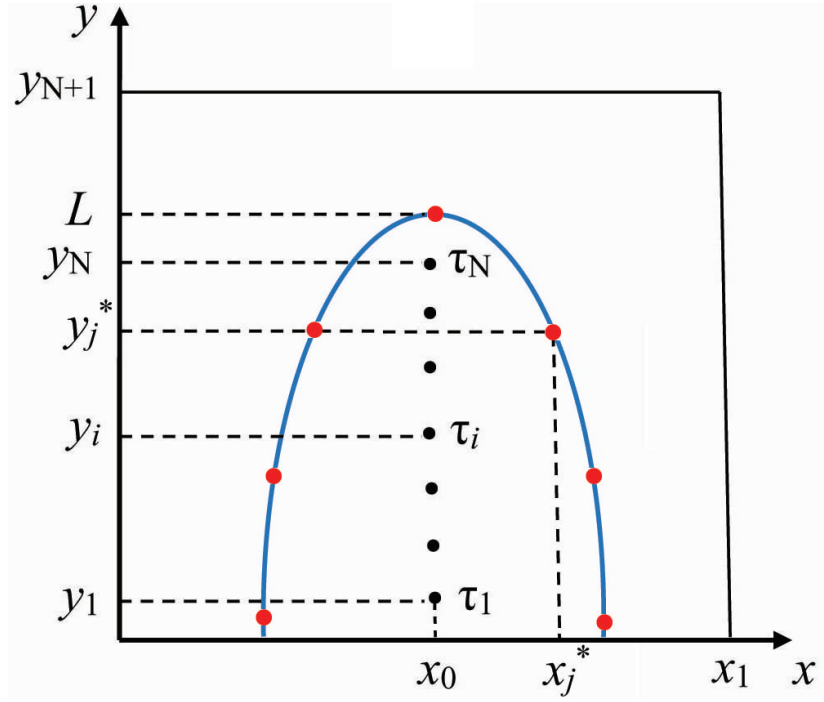


Рис. 6. Схематическое изображение полевого катода

$$x_0 \leq x_j^* \leq x_1$$

$$\sum_{i=1}^N \tau_i \frac{2}{\pi \varepsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_i}{m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m x_0}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \times \quad (1.13)$$

$$\times \operatorname{sh} \alpha_m (x_1 - x_j^*) \sin \alpha_m y_j^* = -U_0 \frac{y_j^*}{y_{N+1}},$$

При подстановке значения τ_i , вычисленных при решении системы (1.12, 1.13) в формулы распределения потенциала (1.8, 1.9), получим полевой эмиттер требуемой формы. При единственном условии, когда высота эмиттера должна быть равна L при одинаковых значения $\tau_i = \tau = \text{const}$, достаточно выполнение следующего условия:

$$U(x_0, L) = 0. \quad (1.14)$$

Условие (1.14) приводит к уравнению:

$$\tau = -U_0 \frac{L}{y_{N+1}} \frac{\pi \varepsilon_0}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_i \sin \alpha_m L}{m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m (x_1 - x_0) \operatorname{sh} \alpha_m x_0}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \right]^{-1}. \quad (1.15)$$

Итак, величина τ вычисляется по формуле (1.15).

1.3. Заключение к Главе 1

В Главе 1 представлена математическая модель эмиссионной диодной системы с полевым эмиттером произвольной формы. Влияние полевого эмиттера на распределение электростатического потенциала заменено влиянием заряженных нитей. Распределение электростатического потенциала найдено в виде разложений Фурье во всей области системы (1.8–1.10). Коэффициенты рядов вычислены в явном виде. Значения плотностей зарядов τ_i вычисляются как решение системы (1.13) или по формуле (1.15). Все геометрические размеры системы и значения потенциалов на электродах представляют собой параметры задачи.

ГЛАВА 2. Распределение электростатического потенциала в эмиссионной диодной системе с двумя полевыми эмиттерами лезвийной формы

В Главе 2 представлена математическая модель диодной эмиссионной системы с двумя лезвийными полевыми эмиттерами на плоской подложке. Анод – плоскость, параллельная подложке.

Схематическое изображение двух полевых эмиттеров представлено на РИСУНКЕ 5 в декартовых координатах (x, y, z) .

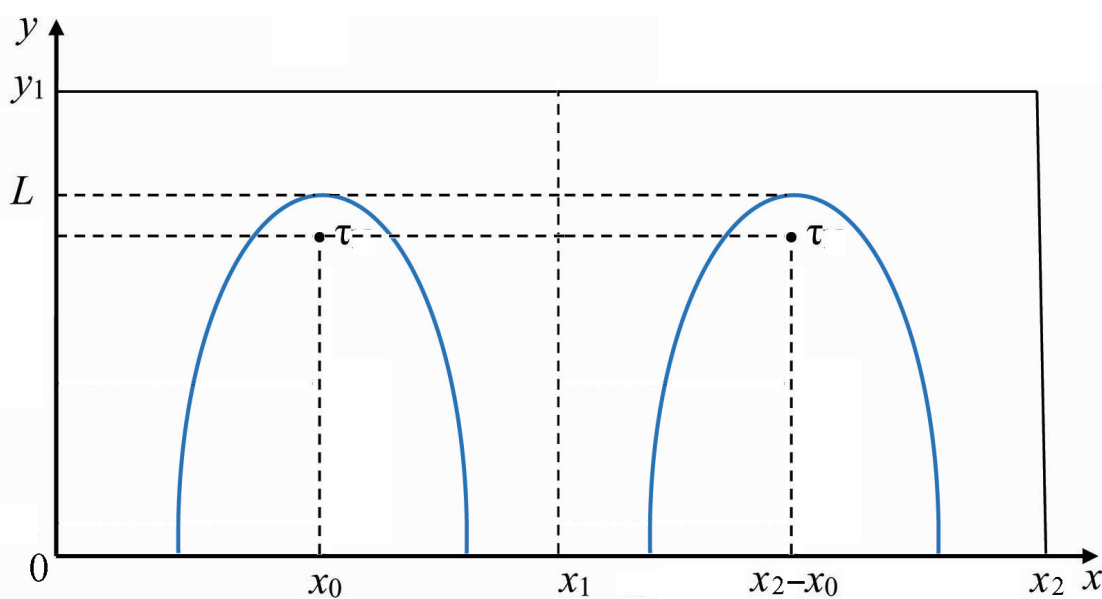


Рис. 7. Схематическое изображение эмиссионной системы с двумя эмиттерами

2.1. Постановка задачи расчета электростатического потенциала в эмиссионной диодной системе с двумя полевыми эмиттерами

При вычислении распределения электростатического потенциала во всей области эмиссионной системы используется метод разделения переменных в декартовых координатах (x, y, z) . Так как форма каждого

лезвийного катода при $z = const$ не меняется, то распределение потенциала $U((x, y))$ зависит от двух координат (x, y) . Как и в Главе 1, влияние полевых эмиттеров на распределение потенциала заменим влиянием двух заряженных нитей с одинаковыми плотностями зарядов τ , расположенных в плоскости xOy с координатами $(x = x_0, y = y_0)$ и $(x = x_2 - x_0, y = y_0)$. Поверхность реального катода совпадает с нулевой эквипотенциалью [28–32].

Параметры эмиссионной диодной системе с двумя полевыми эмиттерами:

L – высота катода;

$y = 0, 0 \leq x \leq x_2$ – поверхность подложки катода;

$y = y_1, 0 \leq x \leq x_2$ – поверхность анода;

$x = 0, x = x_2, 0 \leq y \leq y_1$ – границы области по переменной x ;

$(x = x_0, y = y_0), (x = x_2 - x_0, y = y_0)$ – координаты заряженных нитей с плотностью зарядов τ ;

$x = x_1, 0 \leq y \leq y_1$ – плоскость симметрии системы.

Граничные условия в эмиссионной диодной системе с двумя полевыми эмиттерами:

$U((x, 0) = 0, 0 \leq x \leq x_2$, – на подложке системы;

$U((x, y_1) = U_0, 0 \leq x \leq x_2$, – на аноде;

$U((0, y) = U_0 \frac{y}{y_1}, 0 \leq y \leq y_1$ – на границе системы по переменной y ;

$\left. \frac{\partial U((x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = 0, 0 \leq y \leq y_1$, – на плоскости симметрии системы по переменной y .

2.2. Решение электростатической задачи с двумя эмиттерами

методом разделения переменных в декартовых координатах

Для того, чтобы найти распределение электростатического потенциала системы из двух заряженных нитей требуется решить граничную задачу для уравнения Пуассона. Поскольку $x = x_1$ является плоскостью симметрии, то для расчета распределения потенциала во всей области эмиссионной системы достаточно рассмотреть область $(0 \leq x \leq x_1 \ 0 \leq y \leq y_1)$.

Пусть заряженная нить с линейной плотностью зарядов τ создает равномерно распределенный пространственный заряд ρ в малом объеме $|x - 0| < \varepsilon, \ |y - 0| < \delta$.

Тогда распределение потенциала является решением граничной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U(x, y_1) = U_0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U(0, y) = U_0 \frac{y}{y_1}, \quad 0 \leq y \leq y_1, \\ \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Функцию $\rho(x, y,)$ в правой части уравнения Пуассона для граничной задачи (2.1) можно представить в виде:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_i, & |x - x_0| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |y - y_0| < \delta, \\ 0, & |x - x_0| > \varepsilon \quad \text{или} \quad |y - y_0| > \delta, \end{cases} \quad (2.2)$$

где связь объемного заряда (2.2) с линейной плотностью заряда нити задается условием

$$\tau = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} 4\varepsilon\delta \rho. \quad (2.3)$$

Представим распределение потенциала в виде

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_1} + U_1(x, y). \quad (2.4)$$

Тогда формулы (2.3) и (2.4) для функции $U(x, y)$ позволяют удовлетворить всем граничным условиям исходной задачи по переменным x и y , в случае, если функция $U_1(x, y)$ является решением уравнения Пуассона с однородными граничными условиями по обеим переменным:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y), \\ U_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U_1(x, y_{N+1}) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1, \\ U_1(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1, \\ \left. \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = 0, \quad 0 \leq y \leq y_1. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Итак, функция $U_1(x, y)$ является решением граничной задачи (2.5) для уравнения Пуассона и может быть представлена в виде разложения по собственным функциям по переменной y с функциональными коэффициентами v_m от x , где α_m — собственные значения:

$$U_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x) \sin \alpha_m y, \quad \alpha_m = \frac{\pi m}{y_1}. \quad (2.6)$$

При подстановке (2.6) в уравнение Пуассона, в результате преобразований, получим, что функции v_m от x являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$v_m''(x) - (\alpha_m)^2 v_m(x) = -\frac{2}{\varepsilon_0 y_1} \int_0^{y_1} \rho(x, y) \sin \alpha_m y dy \quad (2.7)$$

и граничными условиям

$$v_m(0) = 0, \quad \left. \frac{dv_m(x)}{dx} \right|_{x=x_1} = 0.$$

Решение системы (2.7), дает возможность найти распределение потенциала во всей области эмиссионной системы.

Распределение электростатического потенциала $U(x, y)$ имеет вид:

$$0 \leq x \leq x_0$$

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_1} + \frac{2\tau}{\pi \varepsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_0}{m} \frac{\operatorname{ch} \alpha_m (x_1 - x_0)}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \times \\ \times \operatorname{sh} \alpha_m x \sin \alpha_m y, \quad (2.8)$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

$$U(x, y) = U_0 \frac{y}{y_1} + \frac{2\tau}{\pi \varepsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_0}{m} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m x_0}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \times \\ \times \operatorname{ch} \alpha_m (x_1 - x) \sin \alpha_m y, \quad (2.9)$$

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{y_1}. \quad (2.10)$$

Итак, формулы (2.8, 2.9, 2.10) представляют общее решение исходной граничной задачи (2.1) во всей области исследуемой диодной системы. Задавая значения плотности зарядов τ , можно получить поверхности эмиттеров, определяемые с помощью нулевой эквипотенциали.

Или, как и в Главе 1, если ставится условие, чтобы высота эмиттера была равна L , то достаточно выполнение условия

$$U(x_0, L) = 0, \quad (2.11)$$

При этом, величина τ определяется из (2.11) по формуле:

$$\tau = -U_0 \frac{L \pi \varepsilon_0}{y_1 2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y_0 \sin \alpha_m L}{m} \frac{\operatorname{ch} \alpha_m (x_1 - x_0) \operatorname{sh} \alpha_m x_0}{\operatorname{sh} \alpha_m x_1} \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

2.3. Заключение к Главе 2

В Главе 2 представлена математическая модель эмиссионной диодной системы с двумя одинаковыми полевыми эмиттерами произвольной формы. Влияние двух полевых эмиттеров на распределение электростатического потенциала заменено влиянием двух заряженных нитей. Распределение электростатического потенциала найдено в виде разложений Фурье во всей области системы (2.8–2.10). Коэффициенты рядов вычислены в явном виде. Значения плотности зарядов τ вычисляются по формуле (2.12). Все геометрические размеры системы и значения потенциалов на электродах представляют собой параметры задачи.

Результаты работы

- Представлены математические модели эмиссионных диодных систем с одиночным эмиттером и с двумя одинаковыми полевыми эмиттерами. Влияние полевых эмиттеров на распределение электростатического потенциала заменено влиянием заряженных нитей.
- Распределение электростатического потенциала найдено в виде разложений Фурье во всей области системы. Коэффициенты рядов вычислены в явном виде.
- Все геометрические размеры системы и значения потенциалов на электродах представляют собой параметры задачи.

Литература

1. Forbes R. G. Physical electrostatics of small field emitter arrays/clusters // Journal of Applied Physics. 2016. Vol. 120, No 5. 054302.
2. Ненакаливаемые катоды. Под ред. М.И.Елинсона. М., «Сов. радио», 1974, 336 с.
3. Иванова А.В., Светликина И.А., Кузнецова О.Ф. Катоды. Часть III. Холодные и боридные катоды. Обзоры по электронной технике. Сер.1. Электроника СВЧ. Вып.14 (1210), 1986.
4. Иванова А.В., Карсова Е.Н., Кузнецова О.Ф. Электронные пушки. Часть II. Электронные пушки для ускорителей. Электронные пушки для электронно-лучевых трубок Применение электронных пушек в промышленности. Обзоры по электронной технике. Сер.1. Электроника СВЧ. Вып.10 (1380), 1988.
5. Светликина И.А., Иванова А.В., Кузнецова О.Ф. Электронные пушки. Часть III. Электронные пушки с острийными катодами. Электронные пушки для приборов М-типа, гиротронов, мазеров. Обзоры по электронной технике. Сер.1. Электроника СВЧ. Вып.19 (1412), 1988.
6. Lee H.R. ets. Scanning electron imaging with vertically aligned carbon nanotube (CNT) based cold cathode electron beam (C-beam) // Vacuum. Vol. 182 (2020) 109696.
7. Ryu J.H. ets. Carbon Nanotube Electron Emitter for X-ray Imaging // Materials. 2012, Vol. 5, pp. 2353–2359.

8. Edler S. et al. Influence of adsorbates on the performance of a field emitter array in a high voltage triode setup // Journal of Applied Physics. 2017. Vol. 122, 124503.
9. Banerjee D., Chattopadhyay K.K. Synthesis of crystalline carbon nanofiber-like structure by dc-PECVD and study of its electrical and field emission properties // Materials Research Bulletin 47 (2012) 3868–3874.
10. Соминский Г.Г., Тарадаев Е.П., Тумарева Т.А., Мишин М.В., Корнишин С.Ю. Простой в изготовлении многоострый полевой эмиттер // Журнал технической физики. 2015. Том 85, вып. 7. С. 135–137.
11. Масалов С.А., Калинина К.В., Евтихийев В.П., Иванов С.В. Полевая инжекция электронов низких энергий в гетероструктуру ZnSe/CdSe/ZnSe с использованием сверхвысоковакуумного туннельного микроскопа // Физика твердого тела. 2012. Том 54, вып. 6. С. 1057–1061.
12. Виноградова Е.М., Доронин Г.Г., Егоров Н.В. Математическое моделирование двумерной диодной системы с полевым эмиттером лезвийной формы // Журнал технической физики. 2020. Том 90, вып. 4. С. 540–543.
13. Хисамов Р.Х., Корзникова Г.Ф., Халикова Г.Р., Сергеев С.Н., Назаров К.С., Шаяхметов Р.У., Мулюков Р.Р. Получение естественно-го металломатричного композита Al₃Nb деформацией сдвигом под

давлением и его эмиссионная эффективность в тлеющем разряде
// Письма в ЖТФ. 2020. Том 46, вып. 23. С. 45–47.

14. Гавриляченко В.Г., Решетняк Н.В., Семенчев А.Ф., Клевцов А.Н. Деполяризация сегнетокерамики под действием электрических импульсов наносекундной длительности // Письма в ЖТФ. 1997. Том 23, вып. 2. С. 71–74.
15. Яфаров Р.К., Сторублев А.В. Долговременная воспроизводимость эмиссионных характеристик алмазографитовых полевых источников электронов в нестационарных вакуумных условиях эксплуатации // Письма в ЖТФ. 2021. Том 47, вып. 24. С. 17–19.
16. Яфаров Р.К. Механизм полевой эмиссии электронов с туннельно-тонким алмазным покрытием на автокатоде // Письма в ЖТФ. 2020. Том 46, вып. 10. С. 42–45.
17. Беспалов В.А., Ильичев Э.А., Куклев С.В., Кулешов А.Е., Набиев Р.М., Патюков Н.Н., Петрухин Г.Н., Рычков Г.С., Соколов Д.С., Теверовская Е.Г., Шелюхин Е.Ю. Разработка и исследование автоэмиссионной среды для автокатодов мобильных силовых СВЧ приборов // Журнал технической физики. 2018. Том 88, вып. 3. С. 455–463.
18. Яфаров Р.К. Использование атомной структуры кристаллов кремния для получения многоострийных полевых источников электронов // Физика и техника полупроводников. 2018. Том 52, вып. 2. С. 147–153.

19. Ляшенко С.А., Волков А.П., Образцов А.Н. Ограничение тока на-
нографитных многоэмитерных автокатодов // Журнал техниче-
ской физики. 2012. Том 82, вып. 2. С. 94–98.
20. Кривченко В.А., Пилевский А.А., Рахимов А.Т., Суетин Н.В.,
Тимофеев М.А. Исследование морфологии нанокристаллического
графитового автокатаода, выращенного на алмазной сетке // Пись-
ма в ЖТФ. 2010. Том 36, вып. 1. С. 52–58.
21. Пшеничнюк С.А., Юмагузин Ю.М. Энергетические распределения
электронов, эмитированных с поверхности вольфрамовых острий,
покрытых алмазоподобными пленками // Журнал технической
физики. 2004. Том 74, вып. 5. С. 105–112.
22. Лобанов В.М., Юмагузин Ю.М., Бахтизин Р.З. Эмиссионные свой-
ства углеродного нанокристаллита // Физика твердого тела. 2002.
Том 44, вып. 3. С. 462–463.
23. Федирко В.А., Шадрин В.Д. Особенности туннелирования элек-
тронов кремния через окисный слой в сильном поле // Физика
твердого тела. 1997. Том 39, вып. 2. С. 387–391
24. Бочаров Г.С., Елецкий А.В. Преобразователь частоты на основе
полевого электронного эмиттера // Журнал технической физики.
2012. Том 82, вып. 1. С. 156–158.
25. Гаврилов С.А., Ильичев Э.А., Козлитин А.И., Полторацкий Э.А.,
Рычков Г.С., Дзбановский Н.Н., Дворкин В.В., Суетин Н.В. Лате-
ральный эмиттер как базовый элемент интегральной эмиссионной
электроники // Письма в ЖТФ. 2004. Том 30, вып. 11. С. 48–53.

26. Суворов А.Л., Шешин Е.П., Протасенко В.В., Лазарев Н.Е., Бобков А.Ф., Бабаев В.П. Микрошероховатые плоские автоэмиссионные катоды из графита, полученные радиационным способом // Журнал технической физики. 1996. Том 66, вып. 7. С. 156–160.
27. Абаньшин Н.П., Горфинкель Б.И., Якунин А.Н. Управление локализацией электростатического поля в автоэмиссионных структурах // Письма в ЖТФ. 2011. Том 37, вып. 7. С 94–102.
28. Бугаев А. С., Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Шешин Е.П.. Автоэлектронные пушки и катоды. 2017. – 304 стр.
29. Виноградова Е. М., Доронин Г. Г. Математическое моделирование двумерной периодической системы полевых эмиттеров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 2. С. 121–128.
30. Доронин Г. Г., Виноградова Е. М. Моделирование полевого эмиттера в двумерной диодной системе с диэлектрическими слоями // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 90–93.
31. Мирюлюбов Н. Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 209 с.
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977 г., 736 с.