

Санкт–Петербургский государственный университет

Бу Ийлунь

Выпускная квалификационная работа

**Исследование задачи оптимального управления с
переключениями**

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа ВМ.5504.

«Исследование операций и системный анализ»

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

компьютерных технологий и систем

Сотникова Маргарита Викторовна

Санкт-Петербург

2022 г.

Содержание

| | |
|--|----|
| Введение..... | 3 |
| Обзор литературы..... | 5 |
| Постановка задачи..... | 8 |
| 1. Решение задачи с одним переключением..... | 12 |
| 1.1 Принцип максимума Понтрягина..... | 12 |
| 1.2 Случай одного переключения в конечном горизонте..... | 14 |
| 1.2.1 Решение для второго интервала..... | 16 |
| 1.2.2 Решение для первого интервала..... | 17 |
| 1.3 Случай одного переключения в бесконечном горизонте..... | 18 |
| 2. Сезонно-периодическое решение..... | 20 |
| 2.1 Динамика сопряженной переменной..... | 20 |
| 2.2 Динамика состояния... .. | 26 |
| 3. Оптимальное решение и близорукое решение..... | 31 |
| 3.1 Условия природо-устойчивого оптимального решения..... | 32 |
| 3.2 Близорукое решение и сравнение с природо-устойчивым решением..... | 35 |
| Заключение | 40 |
| Список литературы..... | 41 |

Введение

Загрязняющие вещества, попадающие в воду с промышленными отходами и аварийными разливами, представляют серьезную опасность для окружающей среды и здоровья человека. В настоящее время количество случаев загрязнения воды растет. Многие реки и озера уже были серьезно загрязнены.

Мы должны сосредоточиться на сохранении окружающей среды и содействии гармоничному сосуществованию человека и природы. Необходимо поддерживать инициативы, направленные на снижение интенсивности выбросов загрязняющих веществ.

Это не только принесет прибыль от производства и прибыль от комплексной утилизации и переработки отходов предприятиям, но в то же время позволит уменьшить экологический налог. Правительство сможет назначить соответствующую политику для улучшения условий жизни окружающих жителей, привлечения туристов, стимулирования местной экономики и повышения уровня занятости населения.

Поэтому в данной работе рассматривается модель управления выбросами загрязняющих веществ с переключением. Мы получаем природо-устойчивое решение, и сравниваем его с альтернативным, близоруким решением. Альтернативное решение лучше в краткосрочной

перспективе, хоть оно и приводит к ухудшению состояния окружающей среды, но приводит к худшему результату в долгосрочной перспективе.

Полученные результаты могут быть использованы для разработки стратегий для заводов выбрасывающих загрязняющие вещества и местных органов власти.

Обзор литературы

Среди многих математических моделей, описывающих сложный характер процессов, возникающих в экологических системах, важную роль играет модель управления выбросами загрязняющих веществ. Эта работа продолжает линию исследований, начатую в [1], которая, насколько нам известно, является первым в литературе случаем, когда гибридный предельный цикл (ГПЦ) был явно найден как решение гибридной задачи оптимального управления. Ранее исследовался класс гибридных динамических систем с (потенциально) бесконечными переключениями режимов [2]. Однако явных решений найдено не было. После исследования в [1], в котором гибридный предельный цикл (ГПЦ) был явно найден как решение гибридной задачи оптимального управления. Другой подход был реализован в работах [3], которые изучали циклические линейно-гибридные системы и доказывали существование ГПЦ, но не исследовали их оптимальность. В недавней статье [4,5] изучалась дисконтированная гибридная задача оптимального управления с переключениями управления, определяемыми состоянием и показано, что такая задача не может иметь ГПЦ в качестве оптимального решения.

В отличие от упомянутого случая, рассматривается дискретная гибридная задача оптимального контроля загрязнения с переключением во времени (система, изменяющая режимы в фиксированные моменты времени),

означающая, что регенеративная способность среды изменяется во времени.

Наряду с нахождением оптимального режима производства, в магистерской работе мы учитываем реалистический смысл и устанавливаем управляющие переменные в пределах допустимого множества, на основе этого и была предложена новая концепция природо-устойчивого (environmentally sustainable) решения, т. е. решения, обеспечивающего минимальный уровень загрязнений при обеспечении положительной прибыли. Важность этого результата заключается в том, что он позволяет выделить класс решений, обеспечивающих компромисс между получением прибыли и уменьшением загрязнения окружающей среды.

В рамках моей магистерской работы были разработаны теоретические основы построения оптимальных управлений в задачах с переключениями, зависящими от времени. Разработанные методы были применены к определению оптимальных режимов производства в тех случаях, когда производство приводит к выбросу вредных веществ, а способность окружающей среды к самоочищению изменяется со временем, например, в зависимости от времени года. Эта задача имеет огромную практическую важность, особенно в применении к регионам, в которых скорость протекания природных процессов сильно изменяется в течение года.

Результаты, полученные в магистерской работе, продолжают линию исследований, направленных на определение оптимальных режимов производства и механизмов природоохранного регулирования для уменьшения объёма вредных выбросов [8,9,10,11]. В этой связи особо стоит

упомянуть работы [12,13], где проблемы загрязнения рассматривались при наличии переключений.

В то же время мы ограничиваем мгновенную отдачу положительной, изменяя производственную стратегию, мы формируем новое «близорукое» решение, краткосрочная прибыль увеличивается за счет ухудшения состояния окружающей среды, но в долгосрочной перспективе это приводит как к критически загрязненной окружающей среде и отрицательному потоку прибыли. Сравнивая с природо-устойчивым оптимальным решением, мы утверждаем, что управление, ограниченное внутренней частью допустимого множества, является единственным, которое максимизирует прибыль и является экологически устойчивым.

Постановка задачи

Рассмотрим модель управления выбросов загрязнения. Для простоты зададим только один источник загрязнения (завод) и наличие сбросов загрязняющих веществ от этого завода в близлежащие озера.

Динамика потока загрязнения определяется линейным дифференциальным уравнением.

$$\dot{z} = \xi v - \delta z, \quad z(0) = z_0, \quad (1a)$$

где z – поток загрязнения в стационарном природном водоеме (например, озере), v — скорость выброса загрязнения, $\xi \in (0,1)$ — доля выбрасываемого загрязняющего вещества, которое накапливается в водоеме, $\delta > 0$ — скорость самоочищения, т.е. у водоема (озера) есть способность, само себе очищает. Тогда поток загрязнения увеличивается из-за выброса загрязнения доля ξ указывает процент фактического попадания загрязняющего вещества в озеро. В то же время уменьшается путем способность самоочищения озера и текущее состояние уровня загрязнения по скорости δ во время.

Функция прибыли представляет собой функцию, которую соответствующей скорости выброса $P(v) = av(b - v/2)$. Она является вогнутой функцией, соответствующей скорости выброса загрязнения v и обладает свойством убывающей предельной отдачи для всех $v(t) \in [0,b]$, и прибыль максимальна, когда скорость выброса достигает своего максимума

$(v(t)=b)$. Где b — максимальный допустимый скорость выбросов. В то время как выражение $v(b - v/2)$ описывает скорость производства, коэффициент $a \geq 0$ используется для преобразования потока производства в поток прибыли.

Выражение расхода описывается формулой $qz(t)$, где q — положительная константа, соответствует штрафам, которые должен нести агент (например: эконалог, очистка озера, установка фильтра и так далее), и обычно устанавливается правительством для регулирования политики защиты окружающей среды. Как указано выше, мы предполагаем, что в модели присутствует только один источник загрязнения.

Функционал выигрыша определяется как дисконтированная чистая прибыль $L(v, z) = P(v) - qz$, полученное агентом в задаче с бесконечным горизонтом времени:

$$\bar{J}(z_0) := \max_{v(\cdot)} \int_0^{\infty} e^{-rt} \left[av(t) \left(b - \frac{1}{2}v(t) \right) - qz(t) \right] dt, \quad (1b)$$

где $r > 0$ — ставка дисконтирования, и e^{-rt} —предотвращение расхождения целевого функционала с течением времени (Сначала экспонента равна 1, потом её значения убывают) и устранение явной зависимости от времени. а управляющий вход удовлетворяет условию $v(t) \in [0, b]$ для всех $t \geq 0$. Кроме того, мы имеем, что для всех $z_0 \geq 0$ состояние $z(t)$ неотрицательно.

Для упрощения наших расчетов, и исключения размерности переменных, задача (1) нормализуется введением новых переменных состояния и управления:

$$u(t) = \frac{1}{b}v(t), \quad x(t) = \frac{q}{ab^2}z(t).$$

Заметим, что нормированное управление принимает значения в интервале $[0,1]$. И управление $u(t)$, состояние $x(t)$ теперь безразмерны.

После нормализации оптимальное управление задачу (1) можно записать следующим образом:

$$J(x_0) := \max_{u(\cdot)} \int_0^\infty e^{-rt} \left[u(t) \left(1 - \frac{1}{2}u(t) \right) - x(t) \right] dt \quad (2a)$$

$$\dot{x} = \beta u - \delta x, \quad x(0) = x_0. \quad (2b)$$

Здесь $\beta = \frac{\xi q}{ab} > 0$ - отношение штрафной составляющей ξq к производственной (линейной) составляющей ab . Говоря иначе, если β больше, экологический налог будет строже, следовательно - небольшое количество выбрасываемого загрязняющего вещества вносит больший вклад в штраф, чем в прибыль.

Потому что в экологических системах скорость регенерации δ изменяется периодически (периодические смены режимов) во времени (например, в летний и зимний сезоны) и компания (завод) стремится достичь наилучшего компромисса между максимизацией прибыли и одновременным уплатой штрафов (эконалогов) за ухудшение состояния окружающей среды. Поэтому важно определить оптимальную стратегию контроля, чтобы контроль был экологически устойчивым.

На основе этого фона, ключевое предположение, которое мы сделали в этой работе, состоит в том, что скорость самоочистки δ в (2b) изменяется как

функция времени. Весь интервал времени $\mathbb{H} = [0, \infty)$ разбивается на бесконечное число равных интервалов длины T , причем интервал делится на две части: $[k, k+\alpha)T$ и $[k + \alpha, k + 1)T$, где $\alpha \in (0, 1)$ и $k \in \mathbb{N}_0$.

Это предположение математически выражается следующим образом:

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_1 \geq 0, & t \in [kT, kT + \alpha T), \dots \\ \delta_2 \geq 0, & t \in [kT + \alpha T, (k + 1)T). \end{cases} \quad (3)$$

Когда система находится в первом временном подинтервале, система находится в первом режиме, $\delta = \delta_1 \geq 0$, а во втором временном подинтервале система находится во втором режиме, $\delta = \delta_2 \geq 0$. И $\delta_1 \neq \delta_2$, иначе проблема будет тривиальна. Наша цель — понять поведение решения (2а) и (2б) при кусочно-константном характере (3).

Заметим, что рассматриваемая задача представляет собой гибридную задачу управления с переключениями, управляемым временем (в отличие от переключения, управляемого состоянием).

Глава 1. Решение задачи с одним переключением

1.1 Принцип максимума Понтрягина

Пусть динамика исследуемого процесса описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in R^n$ - состояние, а $u(t) \in U$ для всех $t \geq 0$ - управление. Здесь $U \in R^m$ - компакт (это означает, что он включает свою границу). Без ограничения общности будем считать, что процесс начинается в момент времени $t = 0$.

Функция выигрыша, которую необходимо минимизировать, имеет вид

$$J(u, T) = \int_0^T f_0(x(t), u(t))dt + F_0(x(T)) \rightarrow \min,$$

где $f_0(x, u)$ называется мгновенной стоимостью, а $F_0(x)$ - конечной стоимостью. Поскольку мы предполагаем, что начальное значение x_0 фиксировано, эволюция системы (1) полностью определяется управлением $u(t)$. Следовательно, значение функции стоимости зависит только от управления и длительности временного интервала T .

Если в системе есть только один элемент управления, соответствующий набор допустимых значений управлений описывается как простой интервал:

$$[u_{\min}, u_{\max}].$$

Чтобы решить систему, необходимо выполнить несколько шагов:

- Функция Гамильтона

Функция Гамильтона играет ключевую роль в определении решений

задачи оптимального управления. Предположим, что рассматриваемая задача оптимального управления невырождена, и определим гамильтонову функцию как

$$H(x, u, \psi) = -f_0(x, u) + \langle \psi, f(x) + g(x)u \rangle,$$

где $\psi \in R^n$ - сопряженные переменные, а треугольные скобки обозначают скалярное произведение двух векторов.

- Оптимальное управление

Оптимальное управление должно максимизировать функцию Гамильтона:

$$H(x(t), u^*(t), \psi(t)) \geq H(x(t), u(t), \psi(t)), \quad \forall t \geq 0 \text{ and } u(t) \in U.$$

Оптимальное управление u^* является функцией текущих значений состояния и сопряженных переменных:

$$u^*(t) = u^*(x(t), \psi(t))$$

Оптимальное управление находится из условия экстремальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(x, u, \psi) = 0.$$

- Максимизированный гамильтониан

Иногда нам может понадобиться использовать другую версию Гамильтониана функции, называемая максимизированным гамильтонианом:

$$\mathcal{H}(x, \psi) = \max_{u \in U} H(x, u, \psi) = H(x, u^*, \psi)$$

- Каноническая система

Это система из $2n$ дифференциальных уравнений, имеющая следующий

вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial \psi} H(x, u, \psi) \Big|_{u=u^*} \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, u, \psi) \Big|_{u=u^*}. \end{cases}$$

1.2 Случай одного переключения в конечном горизонте

Сначала рассмотрим простой случай, когда $N=1$ и $\alpha = 1/2$, то есть время переключения $t_s = 1/2$. Мы изучаем проблему с конечным временным горизонтом времени $N=1$ и один переключатель с временным управлением через два режима. В этом случае спецификация (3) становится:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1 \geq 0, & t \in [0, 1/2), \\ \delta_2 \geq 0, & t \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

На каждом интервале, где коэффициент δ принимает постоянное значение, функция Гамильтона принимает вид

$$H(x, \lambda, u) = u(t) \left(1 - \frac{1}{2} u(t) \right) - x(t) + \lambda(t) (\beta u(t) - \delta x(t)), \quad (5)$$

где $\lambda(t) = e^{rt} \varphi(t)$ — текущее значение сопряженной переменной.

Каноническая система:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = (\beta u - \delta x) \quad (6a)$$

$$\dot{\lambda} = r\lambda - \frac{\partial H}{\partial x} = r\lambda + 1 + \delta\lambda, \quad (6b)$$

где δ определяется формулой (4). Оптимальное управление находится как:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \lambda(t) < -1/\beta, \\ \beta\lambda + 1, & \lambda(t) \in [-1/\beta, 0], \\ 1, & \lambda(t) > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Решаем эту задачу последовательно, начиная со второго интервала. И $x_{1,2}$, $\lambda_{1,2}$ соответственно представляют решения на разных интервалах.

Принцип оптимальности Беллмана предполагает, что мы должны начать решение этой задачи с последнего интервала, т.е. функция выигрыша может быть представлена в виде суммы двух интегралов:

$$J(x, u) = J_1(x, u) + J_2(x, u) = \int_{t_0}^s f_0(x(\tau), u(\tau))d\tau + \int_s^T f_0(x(\tau), u(\tau))d\tau$$

Сначала решаем задачу управления на втором интервале:

$$J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-rt} \left[\left(1 - \frac{1}{2}u\right)u - x \right] dt, \quad u \in [0, 1]$$

Пусть $(x_2^*(t), u_2^*(t))$, $t \in [s, T]$ - оптимальное решение, Тогда оптимальное значение второго интеграла равно ($W_2(x_s)$ параметризуется x_s):

$$W_2(x_s) = \min_u J_2(x, u) = \int_s^T f_0(x_2^*(\tau), u_2^*(\tau))d\tau.$$

Теперь мы можем решить первую часть задачи. Для этого заменим второй интеграл на $W_2(x_s)$ и решим полученную задачу на интервале $[t_0, s]$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, x(s) = x_s,$$

$$J(x, u) = \int_{t_0}^s f_0(x(\tau), u(\tau))d\tau + W_2(x_s).$$

1.2.1 Решение для второго интервала

Используя принцип максимума Понтрягина для второго интервала, решаем каноническую систему (6) при $\delta = \delta_2$. Поскольку временной горизонт конечен и на переменную состояния в конечное время $t = H = 1$ не накладывается никаких ограничений ($x(1)$ – свободно), то условие конечной точки: $x(1/2) = x_s, \lambda(1) = 0$. Таким образом, мы решим уравнение назад во времени. В обратное время соответствующее дифференциальное уравнение записывается как:

$$\dot{\lambda} = -(r + \delta)\lambda - 1.$$

Из данной канонической системы получим:

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{\delta_2 + r} (e^{-(\delta_2 + r)(1-t)} - 1), \quad (8a)$$

$$x_2(t) = \frac{\beta(r + \delta_2 - \beta)}{\delta_2(\delta_2 + r)} (1 - e^{-\delta_2(t-1/2)}) + \frac{\beta^2}{(2\delta_2 + r)(\delta_2 + r)} (e^{-(\delta_2 + r)(1-t)} - e^{-(\delta_2 t + r/2)}) + e^{-\delta_2(t-1/2)} x_s \quad (8b)$$

Здесь $x_s = x(t_s)$ — (еще не определенное) значение x в момент переключения.

1.2.2 Решение для первого интервала

На первом интервале решается каноническая система (6) с $\delta = \delta_1$ и граничными условиями:

$$x(0) = x_0, \lambda_1(t_s) = \lambda_2(t_s) = \frac{1}{\delta_2 + r} \left(e^{-\frac{1}{2}(\delta_2 + r)} - 1 \right). \quad (9)$$

Решение оптимальной траектории для $t \in [0, 1/2]$ определяется как:

$$\lambda_1(t) = e^{\frac{1}{2}a_1(2t-1)} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{e^{-\frac{1}{2}a_2} - 1}{a_2} \right) - \frac{1}{a_1} \quad (10a)$$

$$x_1(t) = e^{-\delta_1 t} \left(x_0 - \frac{\beta}{a_1} + \frac{(\beta r - \beta^2)}{\delta_1 a_1} + \frac{\beta^2 e^{-\frac{1}{2}(a_1 + a_2)}}{(2\delta_1 + r) a_2} + \frac{\beta^2 (\delta_2 - \delta_1) e^{-\frac{1}{2}a_1}}{(2\delta_1 + r) a_1 a_2} \right) + \frac{\beta^2 e^{a_1 t - \frac{1}{2}(a_1 + a_2)}}{(2\delta_1 + r) a_2} - \frac{\beta^2 e^{a_1(t - \frac{1}{2})} (a_1 - a_2)}{(2\delta_1 + r) a_1 a_2} + \frac{\beta (a_1 - \beta)}{\delta_1 a_1}, \quad (10b)$$

где мы использовали обозначения $a_i = \delta_i + r, i = 1, 2$.

Для завершения решения осталось определить граничное значение $x_s = x_1(1/2)$. Таким образом, полное решение представляет собой непрерывную кусочно дифференцируемую функцию

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t < \frac{1}{2} \\ x_2(t)|_{x_s = x_1(1/2)}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

1.3 Случай одного переключения в бесконечном горизонте

Как только мы допускаем бесконечный горизонт, параметризация (4) теряет смысл, поскольку для любого конечного k , kT бесконечно. Таким образом, мы модифицируем его как:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1 \geq 0, & t \in [0, t_s), \\ \delta_2 \geq 0, & t \in [t_s, \infty) \end{cases} \quad 0 < t_s < \infty. \quad (12)$$

При стремлении времени к бесконечности оптимальное решение состояния сходится к стационарным состояниям, что соответствует случаю $\delta = \delta_2$, устойчивое состояние:

$$\bar{X}_2^* = \frac{\beta(\delta_2 + r - \beta)}{\delta_2(\delta_2 + r)}$$

Из чего мы можем наблюдать одну конкретную ситуацию, когда $(\delta_2 + r) < \beta$. В этом случае устойчивое состояние $\bar{X}_2^* < 0$, это невозможно. С другой стороны, когда $(\delta_2 + r) \geq \beta$, как текущее значение сопряженной переменной уменьшается ниже $-1/\beta$, оптимальное управление покидает внутреннюю часть допустимого интервала $[0,1]$ и обращается в нуль ($u(t) = 0$) в конечное время t_b , и так динамика состояния переключается на $\dot{x} = -\delta_2 x$. Если $\delta_2 = 0$, динамика состояния равна 0 когда $t \geq t_b$, то $x(t) = x_b$ для все $t \geq t_b$. где точное значение $x_b \geq 0$ определяется начальным значением x_0 и параметрами системы. Таким образом, мы можем сформулировать следующий результат.

Лемма 1. *Оптимальная траектория состояния для задачи (2) при $H = \infty$, $k = 1$ и (12) сходится к следующему значению:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = \begin{cases} x_2^* = \frac{\beta(\delta_2 + r - \beta)}{\delta_2(\delta_2 + r)}, & \delta_2 + r \geq \beta \\ x_b, & \delta_2 + r \geq \beta \ \& \ \delta_2 = 0 \end{cases}$$

где значение x_b зависит от начального условия x_0 и времени переключения t_s .

Заметим, что устойчивое состояние будет определяться последним режимом ($\delta = \delta_2$), если у системы есть конечные переключения.

Однако, как только количество переключений становится бесконечным, мы получаем новое периодическое решение, как описано ниже. Таким образом, мы продолжаем рассмотрение случая бесконечного горизонта и бесконечного числа переключениями.

Глава 2. Сезонно-периодическое решение

Согласно основным предположениям (см. [14], [15]), которые мы сделали выше, регенеративная способность природы (скорость самоочищения озера) претерпевает сезонные колебания (см. (3)). Чтобы отразить это периодическое многосезонное изменение способности к самоочищению, мы теперь рассмотрим стандартную модель управления загрязнением, которую мы дополняем периодическим переключением.

В итоге мы хотим найти решение, учитывающее как экономические интересы, так и защиту окружающей среды.

Воспользуемся исходным определением (3) и положим что модель работает бесконечное время, т. е. $N = \infty$.

2.1 Динамика сопряженной переменной.

Решаем задачу, используя принцип максимума Понтрягина (ПМП). На каждом подинтервале, где коэффициент δ принимает постоянное значение, функция Гамильтона принимает вид (5) и каноническая система (6), а оптимальное управление дается формулой (7).

Заметим, что динамика λ отделена от динамики состояния. Это свойство выполняется для любой задачи линейного управления. Поэтому эволюцию текущего значения сопряженного переменного можно рассматривать отдельно от динамики состояния. Имеем следующую динамику переключения для $\lambda(t)$:

$$\dot{\lambda}(t) = \begin{cases} (\delta_1 + r)\lambda(t) + 1 = \rho_1\lambda(t) + 1, & t \in [kT, kT + \alpha T), \\ (\delta_2 + r)\lambda(t) + 1 = \rho_2\lambda(t) + 1, & t \in [kT + \alpha T, (k+1)T), \quad k \in 0 \dots N-1 \end{cases} \quad (13)$$

где $\rho_i = \delta_i + r, i=1,2$, и мы установили $\alpha = 1/2$, чтобы последующие выражения были более простыми.

Сопряженная переменная $\lambda(t)$ отделена от состояния $x(t)$ и, следовательно, может быть решена отдельно в обратном направлении во времени, начиная с конечного значения $\lambda(NT) = 0$. Однако, поскольку число переключений стремится к бесконечности, это условие трансверсальности необходимо заменить другим, которое можно сформулировать как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \lambda(t) = 0, \quad (14)$$

Откуда следует, что $\lambda(t)$ либо должно быть ограничено, либо может расти со скоростью, меньшей r .

Для определения оптимального решения (13) рассмотрим обратную динамику $\lambda(t)$ во времени, которая описывается следующей системой:

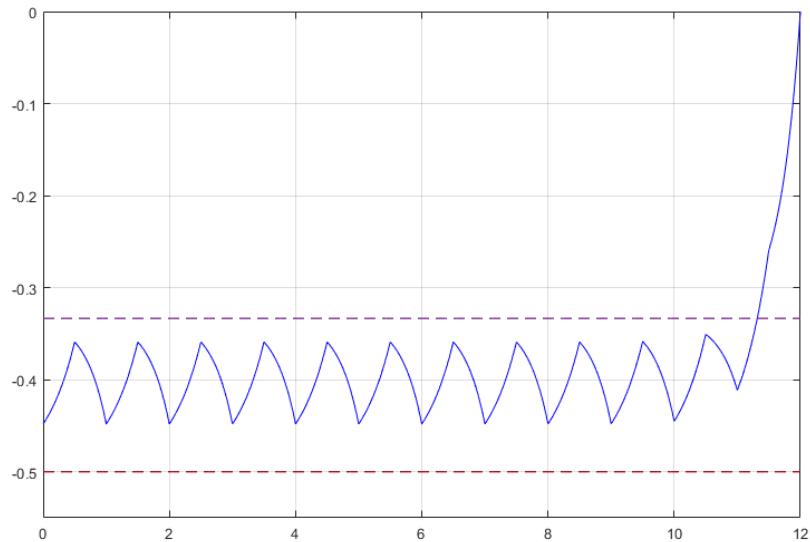
$$\dot{\lambda}(t) = \begin{cases} -(\delta_1 + r)\lambda(t) - 1 = -\rho_1\lambda(t) - 1, & t \in [kT, kT + \alpha T), \\ -(\delta_2 + r)\lambda(t) - 1 = -\rho_2\lambda(t) - 1, & t \in [kT + \alpha T, (k+1)T), \end{cases} \quad (15)$$

где $k = 0, 1, \dots, N-1$, и условие трансверсальности $\lambda(NT) = 0$. Заметим, что каждая подсистема в (15) имеет единственное устойчивое равновесие при $\lambda_i^* = -\frac{1}{\rho_i}, i=1,2$. На Рис.1. показана динамика сопряженной переменной в

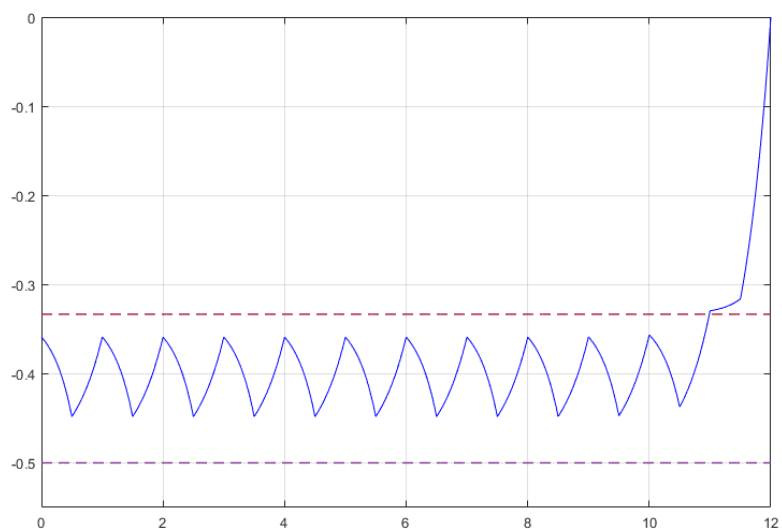
конечном горизонте с конечными переключениями.

Из рис.1. заметим, что с условием $\lambda(12) = 0, \alpha=1/2, T=1$, через короткое время траектория сопряженной переменной асимптотически приближается к гибриднему предельному циклу, образованному решениями обеих подсистем.

И траектория сопряженной переменной периодически меняется в интервале $[\min(-1/\rho_1, -1/\rho_2), \max(-1/\rho_1, -1/\rho_2)]$.



(а) $\rho_1 = 2, \rho_2 = 3$



(б) $\rho_1 = 3, \rho_2 = 2$

Рис.1. Текущее значение сопряженной переменной $\lambda(t)$, вычисленное в обратном времени, начиная с $\lambda(12) = 0$. Длина каждого отдельного интервала устанавливается равной $T = 1$.

С точки зрения прогрессивного времени, соотношение размеров ρ_1 и ρ_2 влияет на изменение траектории, потому что верхнее и нижнее положение

устойчивого равновесия также поменялись местами в одно время. Т.е. если $\rho_1 < \rho_2$, траектория сопряженного переменного монотонно возрастает на первом подинтервале и монотонно уменьшает во втором подинтервале с.м. Рис.1.(а). И если $\rho_1 > \rho_2$, наоборот.

Когда учитываем случай о том, что система в бесконечном временном горизонте – это означает, что, окончательное значение сопутствующей переменной не может быть получено напрямую. Текущие значения сопряженного переменного могут со временем расходиться. Такая ситуация неприемлема, потому что текущие значения сопряженного переменного непосредственно влияет на оптимальное управление (7), если оно расходится, то проблема тривиальна. Поэтому нам нужно найти ограниченное решение и сделать оптимальную управляющую переменную приемлемой.

Приравнивая $\lambda(0)$ и $\lambda(T)$, получаем конкретное начальное значение $\lambda(0)$, обозначаемое λ_{eq} , такое, что, начиная с этой точки, траектория системы оказывается периодической с периодом T , и $\alpha=1/2$:

$$\lambda_{eq} = \frac{\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)e^{\frac{T}{2}\rho_2} - \rho_2 e^{\frac{T}{2}(\rho_1 + \rho_2)}}{\rho_1 \rho_2 (e^{\frac{T}{2}(\rho_1 + \rho_2)} - 1)}$$

Лемма 2. Если начальное значение $\lambda(0)$ равно равновесному значению λ_{eq} , Решение (15) гибридного. Решение $\bar{\lambda}(t)$ уравнения (15) принадлежит интервалу $[\min(-1/\rho_1, -1/\rho_2), \max(-1/\rho_1, -1/\rho_2)]$.

$$\bar{\lambda}(t) = \begin{cases} \bar{\lambda}_1(t), & t \in [kT, kT + \alpha T), \\ \bar{\lambda}_2(t), & t \in [kT + \alpha T, (k+1)T), \end{cases}$$

где $\bar{\lambda}_1(t)$ - решение на первом подынтервале, и $\bar{\lambda}_2(t)$ - решение на втором подынтервале.

Доказательство. Если $\lambda(0)=\lambda(T)=\lambda_{eq}$, предположим, что при некотором $\tau \in [0, T)$ имеем $\lambda(\tau) < \min(-1/\rho_1, -1/\rho_2)$, т.е. $\lambda(\tau)$ находится на левой части интервала $[\min(-1/\rho_1, -1/\rho_2), \max(-1/\rho_1, -1/\rho_2)]$, и $\dot{\lambda}(\tau) < 0$. То при $t > \tau, t \in [\tau, T]$, $\lambda(t)$ монотонно уменьшается, и $\lambda(t) < \lambda(\tau) < \min(-1/\rho_1, -1/\rho_2)$. Однако это противоречит тому, что $\lambda(T) = \lambda_{eq} > \min(-1/\rho_1, -1/\rho_2)$.

Лемма 3. Для любого $\lambda(0) \neq \lambda_{eq}$, решение $\lambda(t)$ имеет следующее предельное поведение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{if } \lambda(0) > \lambda_{eq}, \\ -\infty, & \text{if } \lambda(0) < \lambda_{eq}. \end{cases}$$

Доказательство. Решить дифференциальное уравнение (13), начиная с точки $\lambda_{eq} + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ и вычислить разность $\Delta\lambda(\varepsilon) = \lambda(T) - \lambda(0)$. Мы получили:

$$\Delta\lambda(\varepsilon) = (-1 + e^{\frac{T}{2}(\rho_1 + \rho_2)})\varepsilon$$

Заметим, что элемент в правых скобках больше нуля, поэтому циклическое решение неустойчиво, поскольку $-1 + e^{\frac{T}{2}(\rho_1 + \rho_2)} > 0$. Это означает, что начиная с любым отклонением от λ_{eq} , решение увеличивается или уменьшается по прошествии времени. Когда время приближается к бесконечности, в зависимости от знака ε решение либо растёт до $+\infty$, либо убывает до $-\infty$.

Приведенная выше лемма иллюстрирует, что если начальное значение

сопряженного переменного равно равновесному значению λ_{eq} ($\lambda(0)=\lambda_{eq}$), полученное периодическое решение $\bar{\lambda}(t)$ изменяется на фиксирующем интервале $[\min(-1/\rho_1, -1/\rho_2), \max(-1/\rho_1, -1/\rho_2)]$, и показывает стабильность циклического поведения. см. Рис.2.

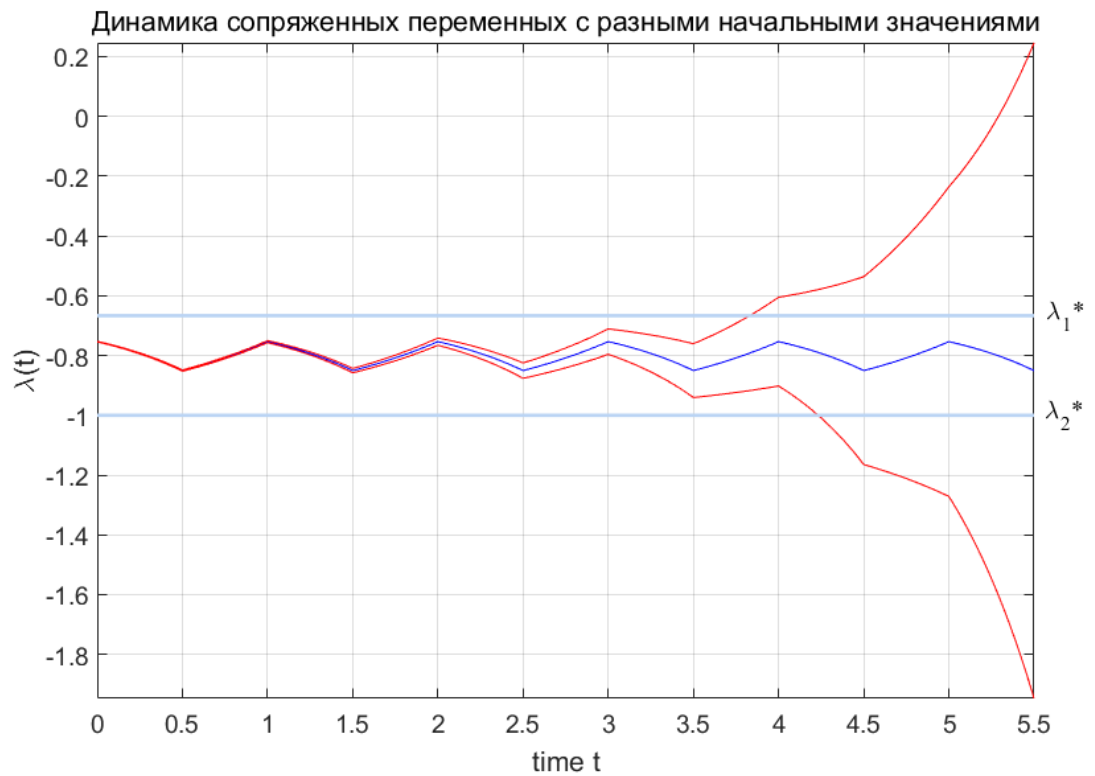


Рис.2. Динамика сопряженных переменных с разными начальными значениями

На Рис.2. Значения параметров выбираются $\rho_1=1.5$, $\rho_2=1$, $T=1$, $\alpha=1/2$.

Синяя линия обозначает стабильное периодическое решение сопряженного переменного, которое периодически равно-амплитудно меняется на интервале $[\lambda_2^*, \lambda_1^*]$. λ_i^* , $i=1,2$ - равновесные положения для каждого режима, которых зависят от изменения параметр δ во время. И равновесные положения показывают голубыми линиями. Его начальное значение $\lambda(0)$ равно равновесному значению λ_{eq} .

Красные линии обозначают неустойчивые решения, их начальные

значения немного отклоняются от равновесного значения. Т.е. Применение небольшого смещения к начальному значению может привести к расхождению решения с течением времени, либо входит в $+\infty$, либо в $-\infty$. И изгибаются от двух точек равновесия $[\lambda_2^*, \lambda_1^*]$.

По этому графику находим единственное устойчивое периодическое решение, образующее гибридный предельный цикл при начальном значении $\lambda(0) = \lambda_{eq}$. Когда время стремится к бесконечному горизонте ($N \rightarrow \infty$) с бесконечными переключениями ($N \rightarrow \infty$), условие трансверсальности (14) удовлетворяется.

2.2 Динамика состояния

Учитывая главное предположение, которое мы сделали. Переписать динамику переменной состояния $x(t)$:

$$\dot{x} = \begin{cases} \beta u^*(t) - \delta_1 x(t), & t \in [kT, kT + \alpha) \\ \beta u^*(t) - \delta_2 x(t), & t \in [kT + \alpha, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad (17)$$

где оптимальное управление $u^*(t)$ определяется согласно (7).

Согласно рассмотрению практической значимости доходов компании и охраны окружающей среды, предполагая, что оптимальное управление не принимает граничных значений. Т.е. $u^*(t) = 1 + \beta \lambda(t)$.

Заметим, что динамика состояния $x(t)$ устойчива. Приравнивает правую часть дифференциального уравнения (17) к нулю, получим равновесное значения состояния.

$$x_i^* = \frac{\beta(1 + \beta \bar{\lambda}_i(t))}{\delta_i}$$

Это означает, что при заданной эволюции сопряженной переменной $\bar{\lambda}(t)$ и соответствующей функции управления $u^*(t)$, эволюция состояния будет сходиться к похожей траектории при любом выборе начального условия $x(0)$. Поскольку изменения сопряженной переменной $\bar{\lambda}(t)$ влияют на положение равновесия состояния x_i^* в каждом режиме.

В зависимости от поведения $\lambda(t)$, возможны три варианта динамического состояния $x(t)$.

1. Периодическое решение сопряженной переменной ($\lambda(0)=\lambda_{eq}$).

Если начальное значение сопряженной переменной равно равновесному значению $\lambda(0)=\lambda_{eq}$, то траектория сопряженной переменной периодическая, а оптимальное управление также является периодическим решением.

Когда динамика состояния $x(t)$ управляется периодической функцией управления $u^*(t)$, эволюция переменной состояния также является периодической. Эволюция переменной состояния для конкретного выбора параметров показана на Рис. 3. В нем параметры как и на Рис.2. $\delta_1=0.98$, $\delta_2=1.48$, $r=0.02$, $\beta=0.5$, $T=1$, $\alpha=1/2$.

В данном случае можем заметить, что даже если начальные значения переменных состояния $x(t)$ различны, они все равно могут приближаться к устойчивому периодическому решению, которому похоже на периодическое решение сопряженной переменной $\bar{\lambda}(t)$. Это периодическое решение

обусловлено периодическим поведением сопряженной переменной $\bar{\lambda}(t)$ и, благодаря особой природе динамики состояния, приближается к тому же периодическому решению.

С точки зрения классической теории управления мы принимаем $u(t)$ в качестве входа и $x(t)$ в качестве выхода. Тогда передаточная функция выводится из дифференциального уравнения, и мы находим, что это типичное инерционное(апериодическое) звено ($w(s) = \frac{\beta}{s + \delta}$) и в этой системе есть возможность отслеживать изменения входного количества с временной задержкой.

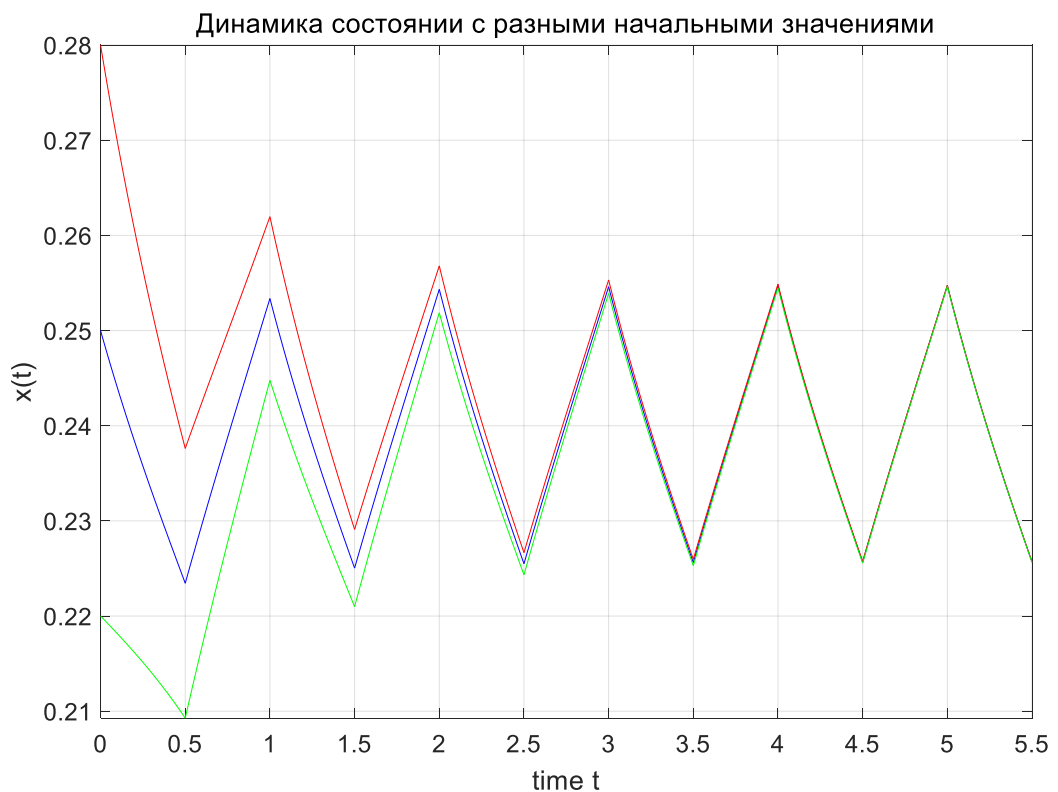


Рис. 3. Динамика состояния (17) с различным начальным значениям $x(0)$ и равновесным начальным значением λ : $\lambda(0) = \lambda_{eq}$.

Если мы тоже поставим $x(0)=x(T)$, то тоже можно получим «строгое»

периодическое решение $\bar{x}(t)$. Тогда равновесное значение x_{eq} :

$$\begin{aligned}
x_{eq} = & \frac{\beta e^{-2} (1 - e^{-2}) (\rho_2 - \beta + \delta_2)}{\frac{\delta T}{\delta_2 (\rho_2 + \delta_2) (e^{-2} - 1)}} + \frac{\beta (e^{-2} - 1) (\delta_1 - \beta + \rho_1)}{\frac{\delta T}{\delta_1 (\rho_1 + \delta_1) (e^{-2} - 1)}} \\
& + \frac{\beta^2 e^{-2} [\rho_1 (e^{-2} - 1) (e^{-2} - 1) + \rho_2 e^{-2} (e^{-2} - 1) (e^{-2} - 1)]}{\frac{\rho T}{\rho_1 \rho_2 (\rho_2 + \delta_2) (e^{-2} - 1) (e^{-2} - 1)}} \\
& - \frac{\beta^2 (e^{-2} - 1)}{\frac{\delta T}{\rho_2 (\rho_1 + \delta_1) (e^{-2} - 1)}} + \frac{\beta^2 (e^{-2} - 1) (e^{-2} - e^{-2})}{\frac{\rho T}{\rho_1 (\rho_1 + \delta_1) (e^{-2} - 1) (e^{-2} - 1)}}
\end{aligned}$$

где мы использовали сокращенную запись $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $\delta = (\delta_1 + \delta_2)$.

Теперь рассмотрим случаи, когда состояние расходится.

2. Сопряженная переменная стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow \infty$.

В этом случае через промежуток времени t_x , При $t \geq t_x$, оптимальное управление достигает своего граничного значения $u^*(t) = 1$. Динамика состояния записывается как:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \beta - \delta_1 x(t), & t \in [kT, kT + \alpha) \\ \beta - \delta_2 x(t), & t \in [kT + \alpha, (k+1)T), kT > t_x \end{cases} \quad (18)$$

Видим, что соответствующая траектория состояния периодически изменяется между двумя равновесными значениями $x_{1,2} = \frac{\beta}{\delta_i}, i = 1, 2$ как показано на рис. 4. Штриховыми фиолетовыми линиями показаны соответствующие равновесия $x_{1,2}$.

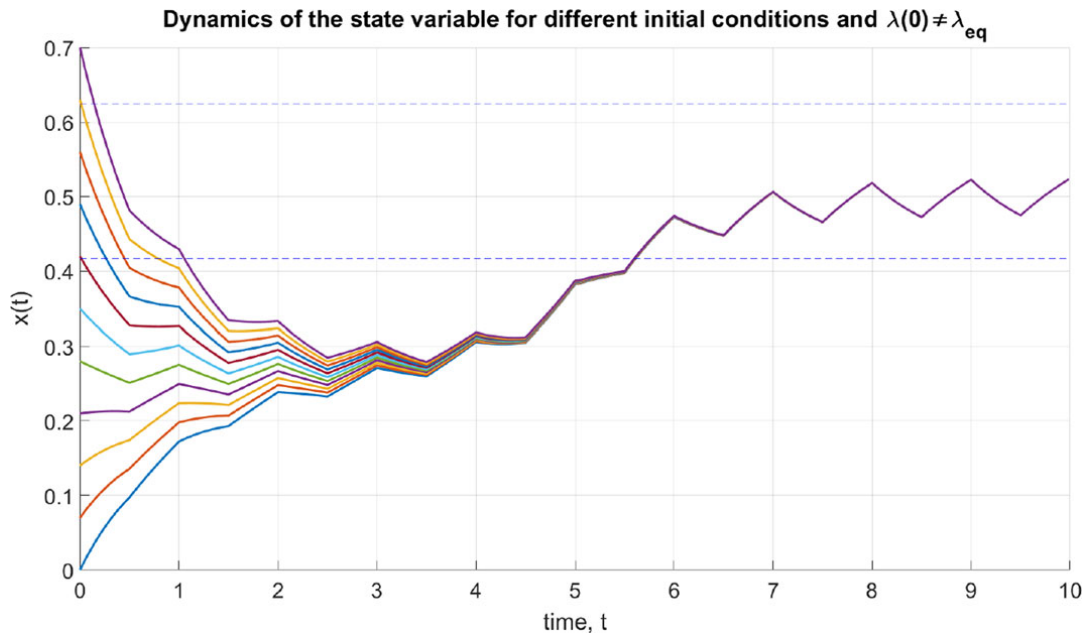


Рис.4. Решения (18), соответствующие различным начальным значениям $x(0)$ и значению λ большему, чем λ_{eq} : $\lambda(0) > \lambda_{eq}$.

3. Сопряженная переменная стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow \infty$.

В этом случае через промежуток времени t_x , При $t \geq t_x$, оптимальное управление достигает своего граничного значения $u^*(t) = 0$. Динамика состояния записывается как $\dot{x}(t) = -\delta_i x(t), i = 1, 2$. состояние асимптотически сходится к 0. Верно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} (x^*(t), u^*(t)) = (0, 0)$.

Глава 3. Оптимальное решение и близорукое решение

При рассмотрении задач оптимального управления в экономических приложениях принято постулировать, что оптимальное управление не принадлежит границе допустимого множества, кроме изолированных моментов времени. Ниже мы дадим экономическую интерпретацию этого требования в контексте нашей задачи и приведем условия его выполнения.

Определение 1. *Оптимальная стратегия $u^*(t)$ называется природо-устойчивой, если она не принимает граничные значения, кроме как в изолированные моменты времени, т. е. $\lambda(t) \in [-1/\beta, 0]$, $\forall t \geq 0$.*

Напомним определение оптимального управления (7) и заметим, $u^*(t)$ что принимает граничное значение, если либо $\lambda(t) > 0$, либо $\lambda(t) < -1/\beta$. Мотивация такого понятия заключается в следующем. Два граничных значения интерпретируются следующим образом:

1. $u(t)=0$: когда убытки компании из-за эконалога превышают прибыль от производства, компания должна была остановить производство, чтобы естественным образом снизить уровень загрязнения до уровня ниже определяющимся текущим производством в озере и уменьшить эконалог, чтобы обеспечить нормальное производство.
2. $u(t)=1$: Когда уровень загрязнения достаточно низок, компания, принимающая оптимизирующие решения, может производить с максимальной скоростью, не неся при этом высокого экологического налога.

Чтобы реализовать природо-устойчивую стратегию, эти две ситуации могут произойти только в отдельные моменты времени.

Параметр β определяет нижнюю границу сопряженной переменной и является составным параметром, включающим слагаемые от прибыли и от ущерба окружающей среде: $\beta = \frac{\xi q}{ab}$. Чем выше β , тем строже экологическое регулирование и тем строже ограничение на сопряженной переменной и, следовательно, управление.

Следовательно, пока управление (скорость производства) не остается на границе, определяемой β , ущерб окружающей среде не превышает прибыли, что позволяет агенту продолжать дальнейшую деятельность. Таким образом, понятие экологически устойчивой стратегии направлено на поиск компромисса, который сочетает в себе как прибыль, так и заботу об окружающей среде.

3.1 Условия природо-устойчивого оптимального решения

Рассмотрим оптимальное решение $\bar{\lambda}(t)$, удовлетворяющее (6b) наряду с (7) и начальным условием $\lambda(0) = \lambda_{eq}$. В частности, нас будет интересовать определение условий устойчивости оптимального решения, т. е. такого, что $\bar{\lambda}(t) \in [-1/\beta, 0]$ для всех $t \geq 0$. Пусть $T=1$, время переключения $t_s \in (0,1)$, и равновесное значение λ_{eq} :

$$\lambda_{eq} = -\frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{e^{\rho_1 t_s} - 1}{e^{\rho_1 t_s} - e^{\rho_2 (t_s - 1)}} \quad (19)$$

Прежде всего отметим, что оптимальное решение $\bar{\lambda}(t)$ следует одному из двух вариантов, зависящих от значений ρ_1 и ρ_2 : $\bar{\lambda}(t)$ возрастает при $t \in [kT, kT + \alpha T)$ и убывает при $t \in [kT + \alpha T, (k + 1)T)$, если $\rho_1 < \rho_2$ (см. иллюстрацию на рис. 1а); Во втором случае $\bar{\lambda}(t)$ сначала уменьшается, а затем увеличивается, если $\rho_1 > \rho_2$ (см. иллюстрацию на рис. 1б).

Как упоминалось ранее, оптимальное сопряженная переменная $\bar{\lambda}(t)$ строго отрицательна. Таким образом, нам нужно только проверить нижнюю границу. В зависимости от значений ρ_1 и ρ_2 имеем условия природо-устойчивого оптимального решения.

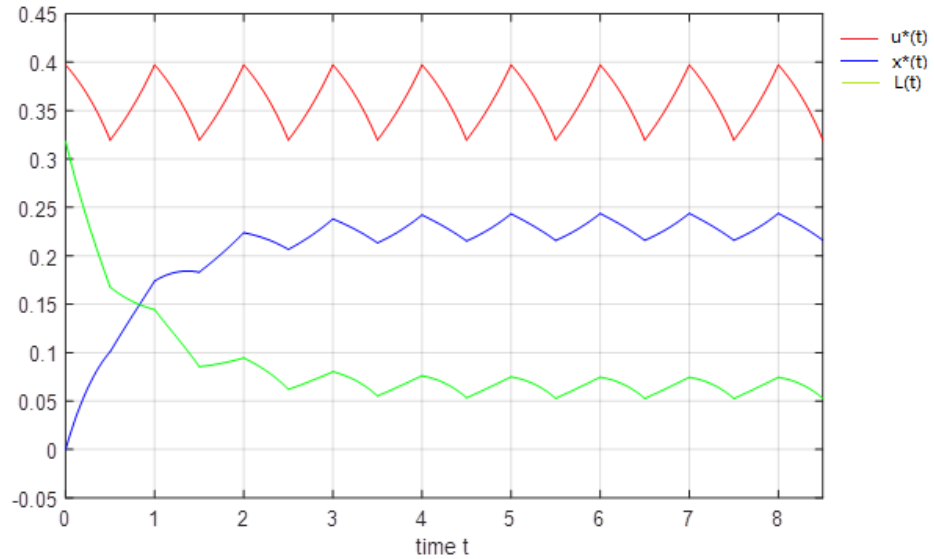
$$\frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{e^{\rho_1 t_s} - 1}{e^{\rho_1 t_s} - e^{\rho_2 (t_s - 1)}} \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{if } \rho_1 < \rho_2 \quad (20a)$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{e^{\rho_1 t_s} (e^{\rho_2 (t_s - 1)} - 1)}{e^{\rho_1 t_s} - e^{\rho_2 (t_s - 1)}} \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{if } \rho_1 > \rho_2. \quad (20b)$$

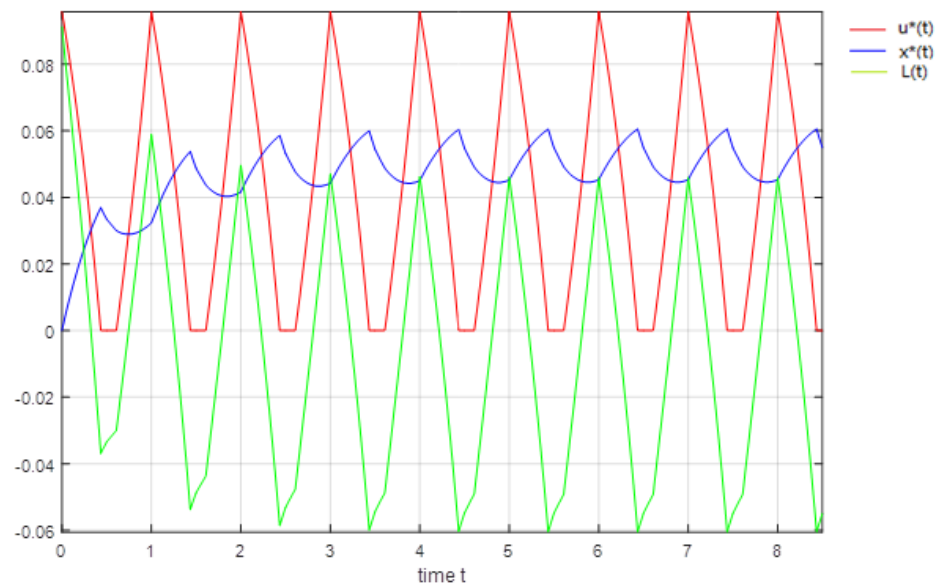
Предположим, что первая фаза динамики системы характеризуется меньшим коэффициентом, т. е. $\rho_1 < \rho_2$. Тогда нам нужно удовлетворить, что нижняя граница была $\lambda_{\text{eq}} \geq -\frac{1}{\beta}$, Таким образом, мы анализируем первое условие (20а). Нетрудно показать, что значение выражения в левой части (20а) монотонно изменяется от $1/\rho_2$ до $1/\rho_1$ при изменении t_s от 0 до 1. И для случая $\rho_1 > \rho_2$, нам нужно удовлетворить, что нижняя граница была $\lambda(t_s) \geq -\frac{1}{\beta}$, и затем легко обобщается на случай (20b), значение выражения в левой части (20b) монотонно изменяется от $1/\rho_1$ до $1/\rho_2$ при изменении t_s от 0 до 1. Затем дает следующую оценку.

Следствие 1. Оптимальное решение (2) с бесконечным числом переключателей является природо-устойчивым, если

$$\beta \leq \min(\rho_1, \rho_2) \quad (21)$$



(а) Прородо-устойчивое решение $\beta = 0.8, \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 1$



(б) Не природо-устойчивое решение $\beta = 1.2, \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 1$

Рис. 5. Уровень загрязнения $x(t)$, оптимальное управление $u^*(t)$ и мгновенная прибыль $L(t)$ при различных значениях β . Другие значения параметров установлены равными $x(0) = 0$, $T=1$ и $t_s = 0.5$.

Теперь проиллюстрируем природо-устойчивое решение, введенную в

этой работе, взяв значения параметра воздействия β такими, чтобы связанное с ним управление принадлежало $(0,1)$ (т. е. было природо-устойчивым).

Рис.5. показывает оптимальное управление, эволюцию состояния и мгновенную прибыль для двух типов решений. На Рис.5а., который представляет природо-устойчивое решение ($\beta = 0.8 \leq \min(\rho_1, \rho_2) = 1$), видно, что управление и мгновенная прибыль всегда положительна, поэтому производство продолжается, накопленная прибыль увеличивается. Уровень загрязнения после первоначального повышения сходится к устойчивому циклу.

На Рис.5б. показывает не природо-устойчивое решение ($\beta = 1.2 > \min(\rho_1, \rho_2) = 1$), заметим, что периоды остановки производства ($u(t) = 0$). В результате возникают периоды отрицательной мгновенной прибыли. Это показывает превосходство природо-устойчивого решения, поскольку оно может принести больше преимуществ. Однако отметим, что окружающая среда стабилизируется при более низком уровне загрязнения, чем для случая $\beta = 0.8$, из-за того, что имеет более строгое экологическое регулирование.

3.2 Близорукое решение и сравнение с природо-устойчивым решением

Чтобы показать долгосрочное преимущество природо-устойчивого решения, мы разработали близорукую стратегию. Если компания

фокусируется только на мгновенной прибыли и не приемлет отрицательную мгновенную прибыль, это означает, что мгновенная прибыль компании неотрицательна ($L(t) \geq 0$), тогда интервал управления напомним так:

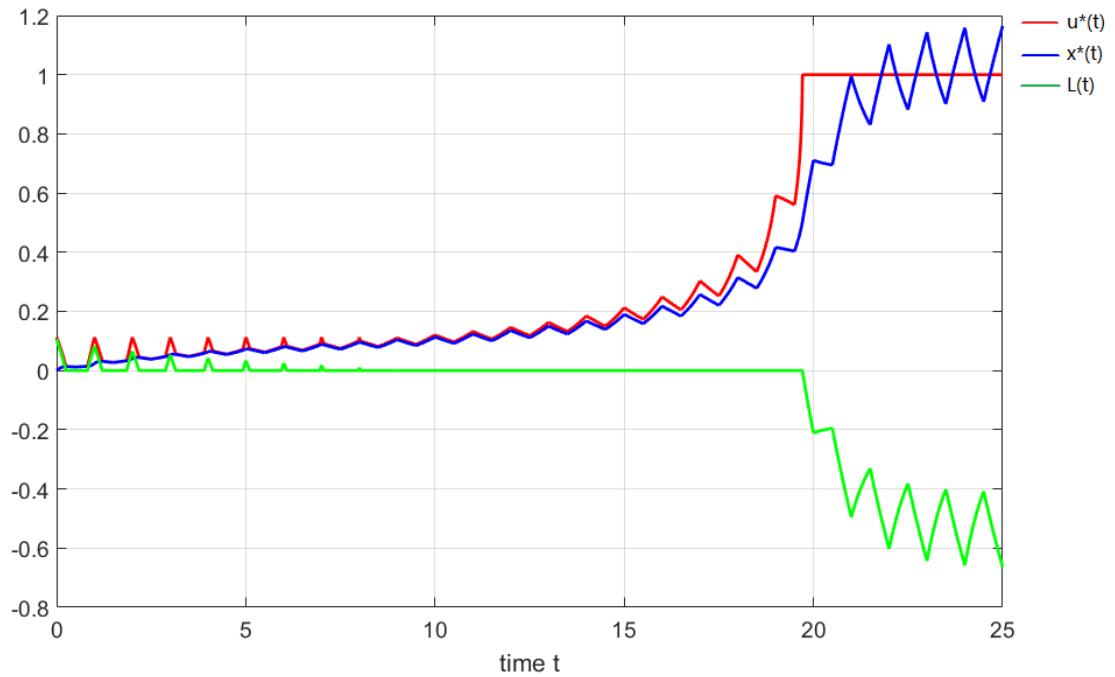
$$u(t) \in [1 - \sqrt{1 - 2x}, 1], \quad \text{for } 1 - 2x \geq 0. \quad (22)$$

Заметим, что если $x > 1/2$, то компания берет максимальную производительность, чтобы максимально компенсировать отрицательную мгновенную прибыль, где в этой ситуации она неизбежно становится отрицательной на какой-то период. Из ограничения (22) и модифицировать природо-устойчивое управление, мы получаем близорукую стратегию управления.

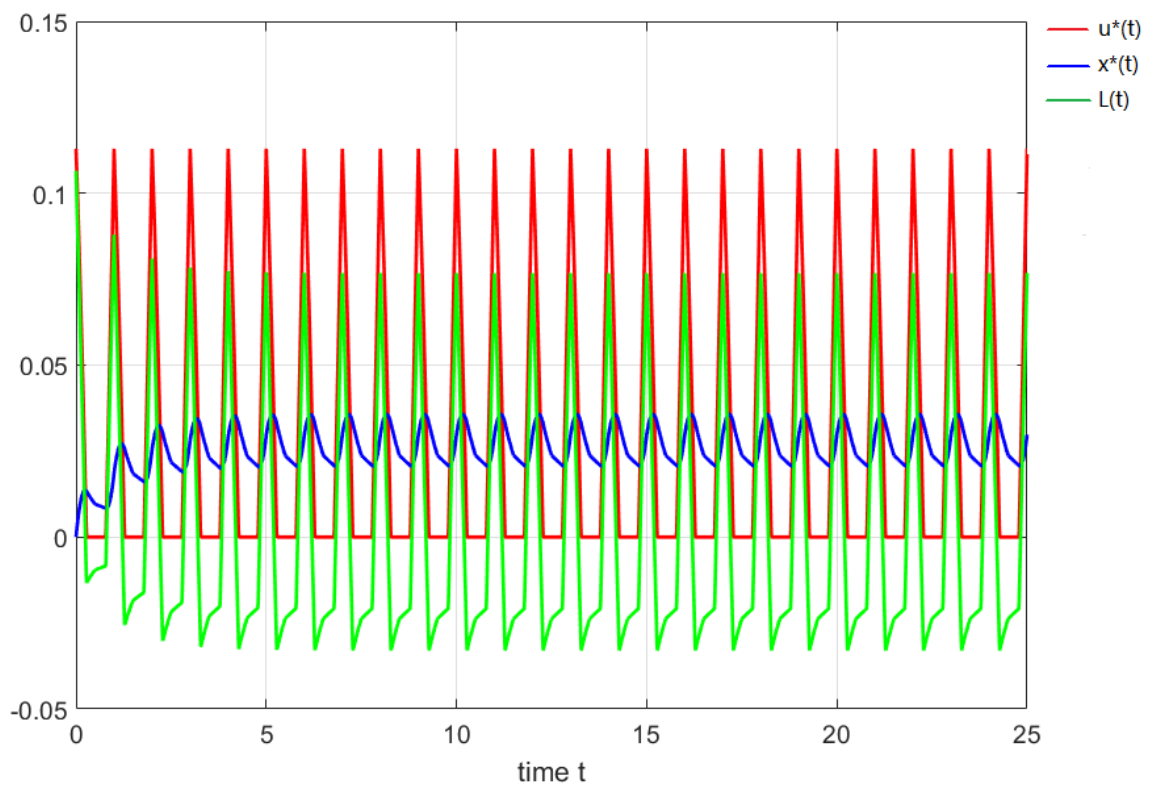
$$\tilde{u}^*(t) := \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2x}, & -\beta\lambda(t) \geq \sqrt{1 - 2x} \text{ and } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \lambda(t) > 0 \text{ or } x > \frac{1}{2} \\ 1 + \beta\lambda(t), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (23)$$

Результирующая задача оптимального управления хорошо определена, поскольку динамика $\lambda(t)$ отделена как от состояния $x(t)$, так и от управления $u(t)$. Полученные графики представлены на Рис.6(а).

Из Рис.6(а) мы видим, что при $x > 1/2$ производственная прибыль ($u(1-u/2)$) не может компенсировать эконаналог($-x$), лицо, принимающее решение (компания), должно применять максимальную производительность ($u=1$), чтобы свести к минимуму потери из-за ухудшения состояния окружающей среды.



(а) Близорукое решение $\beta = 1, \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 0.5$



(б) Природо-устойчивое решение $\beta = 1, \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 0.5$

Рис. 6. Уровень загрязнения $x(t)$, оптимальное управление $u^*(t)$ и мгновенная прибыль $L(t)$. Другие значения параметров установлены равными $x(0) = 0$, $T=1$ и $t_s = 0.5$

На Рис.6. показаны два решения, основанные под двумя стратегиями.

Видим, что мгновенная прибыль $L(t)$ близорукого решения положительна на начальном промежутке времени и резко уменьшается в какой-то момент времени. Хотя мгновенная прибыль $L(t)$ природо-устойчивого решения периодически меняется и имеет отрицательную часть, но в целом накопленная прибыль растет во времени.

В то же время также заметим, что уровень загрязнения $x^*(t)$ природо-устойчивого решения поддерживается на низком уровне по сравнению с близоруким решением, потому что он использует более консервативную стратегию (не слишком гнаться за краткосрочной прибылью).

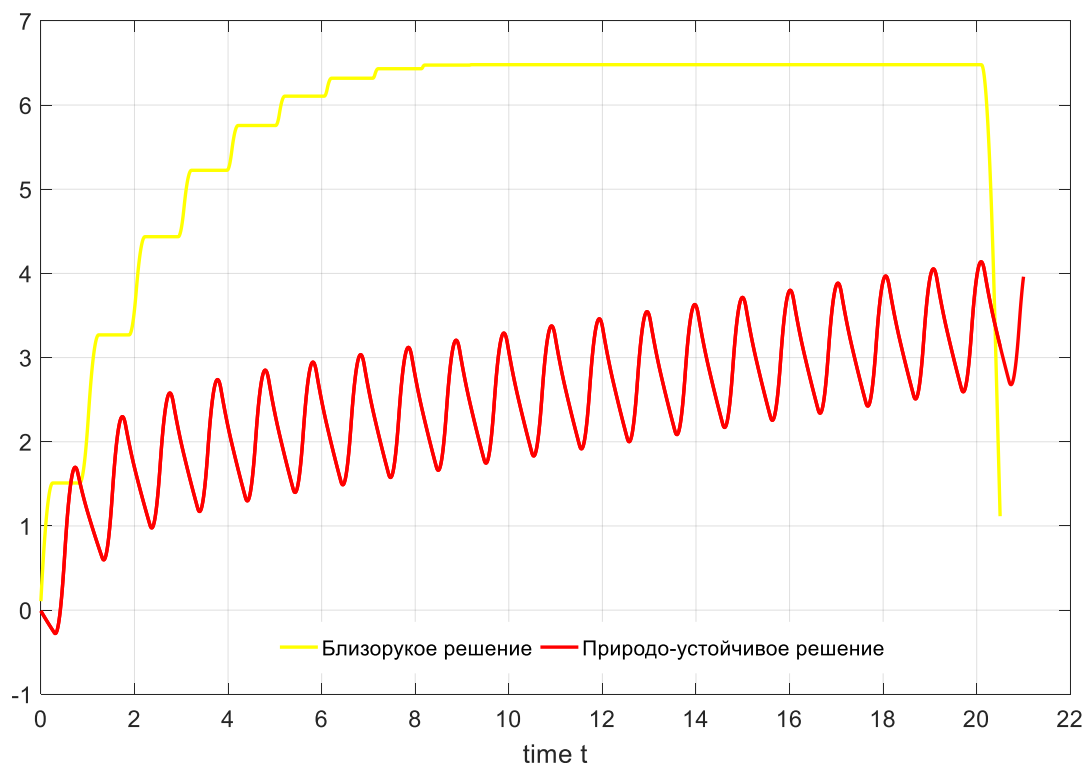


Рис. 7. Сравнение функций накопленной прибыли двух стратегии

На Рис.7. где мы показываем долгосрочный эффект выбора близорукого решения, видим, что на начальном этапе накопленная прибыль близорукого

решения доминирует над природо-устойчивым, но ценой ухудшения окружающей среды. Но в какой-то момент это приводит к критическому уровню загрязнения, при котором производство должно быть максимальным, чтобы компенсировать высокий эколог, потому что близорукая стратегия гоняется за краткосрочной прибылью и мгновенная прибыль становится отрицательной, а накопленной прибыль резко уменьшается.

Заключение

В данной работе мы рассматриваем гибридную задачу оптимального управления загрязнения.

На основе предположения о сезонных колебаниях δ (регенеративной способности среды) получено единственное оптимальное решение в виде гибридного предельного цикла. Также были определены условия для обеспечения природо-устойчивой оптимальной стратегии управления.

Чтобы показать превосходство этой стратегии, мы рассмотрели «близорукую» стратегию управления.

После сравнения различных типов природо-устойчивого и близорукое решения в краткосрочной перспективе близорукое решение обеспечивает лучшую отдачу, но за счет ухудшения состояния окружающей среды.

Однако в долгосрочной перспективе природо-устойчивое решение обеспечивает более высокую отдачу за счет более консервативного использования ресурсов окружающей среды.

Мы приходим к выводу, что природо-устойчивое решение является единственным решением, которое максимизирует прибыль и является экологически приемлемым в течение длительного периода планирования.

Список литературы

- [1]. Gromov, D., Bondarev, A., Gromova, E. (2021). On periodic solution to control problem with time-driven switching. *Optimization Letters*,. doi:10.1007/s11590-021-01749-6. On-line first.
- [2] Caines, P. E., Egerstedt, M., Malham 'e, R., Schoellig, A. (2007). A hybrid Bellman equation for bimodal systems. In A. Bemporad, A. Bicchi, G. Butazzo (Eds.), *HSCC 2007 LNCS 4416* (pp.656–659). Springer.
- [3] Savkin, A., & Matveev, A. S. (1999). Qualitative analysis of differential automata: Existence and stability of limit cycles. In *Proc. of the Information, Decision and Control Symposium* (pp. 265–270). IEEE.
- [4] Reddy, P. V., Schumacher, J. M., & Engwerda, J. (2020). Analysis of optimal control problems for hybrid systems with one state variable. *SIAM Journal on Control and Optimisation*, 58, 3262–3292.
- [5] Bondarev, A., & Gromov, D. (2021). On the structure and regularity of optimal solutions in a differential game with regime switching and spillovers. In *Dynamic economic models with regime switches* (pp. 187–207). Cham: Springer International Publishing.
- [6] Gromov, D., & Gromova, E. (2017). On a class of hybrid differential games. *Dynamic Games and Applications*, 7, 266–288.
- [7]. Dockner, E., Jorgensen, S., Long, N., Sorger, G. (2000). *Differential Games in Economics and Management Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [8] Shortle, J. S., Horan, R. D. (2001). The economics of nonpoint pollution control. *Journal of economic surveys*, 15, 255–289.
- [9] Jouvet, P.-A., Michel, P., Rotillon, G. (2005). Optimal growth with pollution: how to use pollution permits? *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29, 1597–1609.
- [10] Arguedas, C., Cabo, F., Mart`in-Herr´an, G. (2017). Optimal pollution standards and non-compliance in a dynamic framework. *Environmental and Resource Economics*, 68, 537–567.
- [11] Arguedas, C., Cabo, F., Mart`in-Herr´an, G. (2020). Enforcing regulatory standards in stock pollution problems. *Journal of Environmental Economics and Management*, 100, 102297.
- [12] De Zeeuw, A., Zemel, A. (2012). Regime shifts and uncertainty in pollution control. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36, 939–950.
- [13] Nkuiya, B., Costello, C. (2016). Pollution control under a possible future shift in environmental preferences. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 132, 193–205.
- [14] Klamerus-Iwan, A., Bł´owska, E., Lasota, J., Waligórski, P., Kalandyk, A.: Seasonal variability of leaf water capacity and wettability under the influence of pollution in different city zones. *Atmos. Pollut. Res.* 9(3), 455–463 (2018)
- [15] Wang, H., Shi, H., Li, Y., Yu, Y., Zhang, J.: Seasonal variations in leaf capturing of particulate matter, surface wettability and

micromorphology in urban tree species. *Front. Environ. Sci. Eng.* 7(4), 579–588 (2013)