Санкт-Петербургский государственный университет

Гребенюк Алексей Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Проверка статистических гипотез с помощью метода перестановок

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа ВМ.5751.2020 «Математическое моделирование, программирование и искусственный интеллект»

Научный руководитель:
Профессор, кафедра статистического моделирования
д. ф.-м. н., профессор В. Б. Мелас

Рецензент:
Профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
д. т. н., профессор Ю. Д. Григорьев

Санкт-Петербург

2022

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Statistical Modelling

Grebenyuk Aleksey Sergeevich

Graduation Project

Testing statistical hypotheses using the permutation method

Scientific Supervisor:
Professor, Department of Statistical Modelling,
Doctor of Physics and Mathematics,
Professor V. B. Melas

Reviewer:
Professor, St. Petersburg State Electrotechnical University,
Doctor of Technology, Professor
Y. D. Grigoriev

Saint Petersburg
2022

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача проверки гипотезы о равенстве двух распределений. Для поверки этой гипотезы применяются параметрические и непараметрические критерии. Одним из важнейших параметрических критериев является t-критерий Стьюдента. Тест Стьюдента является оптимальным во многих смыслах при условии нормальности обоих распределений, но мощность данного критерия для других видов распределений будет ниже [1]. Из непараметрических критериев наиболее часто используются критерий Колмогорова-Смирнова и критерий Уилкоксона-Манна-Уитни. Данные критерии свободны от распределений, что делает их привлекательными для случаев, когда распределение выборок неизвестно.

В настоящее время благодаря развитию вычислительной техники получили широкое распространение перестановочные критерии. Под перестановочным критерием будем понимать статистический критерий, при использовании которого применяется метод перестановок для получения критического значения.

Некоторые перестановочные критерии были подробно рассмотрены в статье [3]. В работе (Aslan, Zech, 2005) [7] был предложен перспективный перестановочный тест, названный энергетическим. В работах научного руководителя [2, 5] была введена модификация этого критерия, получены формулы для асимптотической эффективности модифицированного критерия. Эти формулы в данной работе применяются для сравнения мощности энергетического и модифицированного критериев. Также проведено численное сравнение мощности модифицированного теста с вышеперечисленными тестами.

Глава 1

Постановка задачи

1.1. Гипотеза о равенстве двух распределений

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о равенстве двух распределений

$$H_0 : F_1 = F_2 \tag{1.1}$$

против альтернативы

$$H_1 : F_1 \neq F_2 \tag{1.2}$$

в случае двух независимых выборок $X = (X_1, \cdots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно. Предположим, что функции распределения F_1 и F_2 принадлежат к такому классу распределений, что случайные величины ξ имеют плотность, симметричную относительно некоторой точки, и соответствуют свойству

$$\mathbb{E}[\ln^2(1 + \xi^2)] < \infty. \tag{1.3}$$

Нашей задачей является сравнение мощности различных тестов при проверке гипотезы о равенстве двух распределений с такими свойствами. Примерами таких распределений являются нормальное распределение, распределение Коши и Лапласа.

1.2. Перестановочные тесты

1.2.1. Энергетический тест

В 2005 году немецкие ученые Зех и Аслан предлагают энергетический тест [7], основанный на энергетическом расстоянии. Энергетическое расстояние — это статистическое расстояние между распределениями вероятностей. «Энергия» в данном случае представляет собой простую логарифмической функцию расстояния между двумя выборками

$$g(x) = \ln(|x|). \tag{1.4}$$

Энергетический тест показывает хорошие эмпирические результаты, но авторы не дают аналитических оценок его мощности.

Статистика энергетического теста имеет общий вид

$$\Phi_{n,m}(X,Y) = \Phi_{AB} + \Phi_A + \Phi_B, \tag{1.5}$$

$$\Phi_{AB} = -\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(|X_i - Y_j|),$$

$$\Phi_A = \frac{1}{n^2}\sum_{i<j}^{n} g(|X_i - X_j|),$$

$$\Phi_B = \frac{1}{m^2}\sum_{i<j}^{n} g(|Y_i - Y_j|),$$

где $g(x)$ — заданная функция (1.4).

1.2.2. Модифицированный тест

Основываясь на свойстве (1.3) было предложено улучшение энергетического теста (1.5), модифицированный тест [5]. Тест основан на следующем расстоянии между выборками

$$g(x) = \ln\left(1 + (kx)^2\right). \tag{1.6}$$

Данная функция при $k = 1$ является с точностью до знака и постоянного слагаемого логарифмом плотности стандартного распределения Коши. При помощи моделирования в работе [3] было показано, что модифицированный критерий имеет примерно такую же мощность, как и критерии Уилкоксона-Манна-Уитни, Андерсона-Дарлинга, Колмогорова-Смирнова при альтернативном распределении с другим параметром сдвига. При этом модифицированный тест показывает себя значительно лучше для случаев, когда у второго распределения отличается параметр масштаба.

1.3. Перестановочный метод

Для расчета мощности тестов моделируется распределение тестовой статистики методом перестановок [3, 6]. Пусть $Z(\pi_0)$ — изначальная выборка, $Z(\pi_s)$ — выборка после перестановки, r_2 — общее число перестановок, в нашем случае $s = 800$, r_1 — число перестановок π_s, для которых $K_i(Z(\pi_s)) > K_i(Z(\pi_0))$.

Если $\frac{r_1}{r_2} > \alpha$, то нулевая гипотеза H_0 не отвергается, а если $\frac{r_1}{r_2} < \alpha$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается. Для подсчета мощности считаем число раз, когда $\frac{r_1}{r_2} < \alpha$ и делим на общее число испытаний, в нашем случае $N = 1000$.

Глава 2

Асимптотическое исследование мощности

2.1. Теорема о виде распределения статистики критерия и о его мощности

Важным инструментом исследования мощности модифицированного теста в случае, когда нулевое и альтернативное распределения отличаются только сдвигом является следующая теорема.

Теорема 1. *[2] Рассмотрим задачу проверки гипотезы (1.1)-(1.2), где обе функции обладают свойством (1.3) и симметричны относительно некоторой точки. Тогда*

- *При верной H_0 $nT_n \xrightarrow{n\to\infty} (aL)^2 + c$, где $L \sim N(0,1)$,*
- *При верной H_1 $nT_n \xrightarrow{n\to\infty} (aL+b)^2 + c$, где $L \sim N(0,1)$.*

В этом случае асимптотическая мощность критерия T_n со значением α асимптотически равна

$$\mathbb{P}\left\{L \geq z_{1-\alpha/2} - \frac{\bar{b}h}{a}\right\} + \mathbb{P}\left\{L \leq -z_{1-\alpha/2} - \frac{\bar{b}h}{a}\right\} =$$
$$= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha/2} - \frac{\bar{b}h}{a}\right) + \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} - \frac{\bar{b}h}{a}\right),$$

где $z_{1-\alpha/2}$ — это $(1-\alpha/2)$-квантиль нормального распределения:

$$\mathbb{P}\left\{L \geq z_{1-\alpha/2}\right\} = \alpha/2.$$

2.2. Интегралы и коэффициенты для теоремы

Пусть $f(x)$ обозначает плотность F_1, тогда запишем

$$
\begin{aligned}
J(h) &= \int_{\mathbb{R}} -g\left(x - y - \frac{|h|}{\sqrt{n}}\right) f(x)f(y)dxdy,\\
J(0) &= \int_{\mathbb{R}} -g(x-y)f(x)f(y)dxdy,\\
J_1 &= J(0),\\
J_2 &= \int_{\mathbb{R}} g^2(x-y)f(x)f(y)dxdy,\\
J_3 &= \int_{\mathbb{R}} g(x-y)g(x-z)f(x)f(y)f(z)dxdydz.
\end{aligned}
$$

Обозначим через $J^*(h) = \lim_{n\to\infty} n(J(h) - J(0))$ существование предела, доказанно в работе [5]. Рассчитаем коэффициенты

$$
\begin{aligned}
\bar{b} &= \sqrt{\frac{J^*(h)}{h^2}},\\
a^2 &= \sqrt{J_2 + J_1^2 - 2J_3},\\
c &= J_1 - a^2.
\end{aligned}
$$

Интегралы рассчитываются при помощи численного интегрирования [4].

Таблица 2.1. Оценка интегралов и коэффициентов для теоремы

Коэффициенты	Нормальное	Коши	Лапласа
J_1	0.80989	2.19849	1.06504
J_2	1.15462	9.59541	2.02465
J_3	0.76330	6.88912	1.40679
a	0.72997	0.89808	0.76660
c	0.27703	1.39194	0.47736
$\hat{\bar{b}}$	0.47898	0.33336	0.43486

2.3. Асимптотические мощности

Используя коэффициенты $a, c, \hat{\bar{b}}$ из таблицы 2.1 рассчитываем асимптотическую мощность модифицированного критерия. Мощность рассчитывается по формуле

$$
\mathbb{P}\{L \geq z_{1-\alpha/2} - \bar{b}h/a\} + \mathbb{P}\{L \leq -z_{1-\alpha/2} - \bar{b}h/a\}.
$$

Таблица 2.2. Асимптотические мощности

h	Нормальное	Коши	Лапласа
h_1	0.101	0.066	0.088
h_2	0.259	0.115	0.206
h_3	0.503	0.318	0.398
h_4	0.747	0.605	0.621
h_5	0.907	0.738	0.810
h_6	0.976	0.916	0.926

Глава 3

Эмпирическое исследование мощности

3.1. Мощность модифицированного критерия при $k = 1$

Рассматриваем выборки размера $n = m = 100$, случай с одинаковыми параметрами масштаба $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ для нормального распределения, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ для распределения Коши, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ для распределения Лапласа и с разными параметрами сдвига $\mu_1 = 0, \mu_2 = \dfrac{h}{10}$. Для нормального распределения и распределения Лапласа $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, для распределения Коши $h = 1, 2, 4, 6, 7, 9$. Для расчета эмпирических мощностей для энергетического (E) и модифицированного (M) тестов применяем метод перестановок, код приведен в [4].

В таблицах и на рисунках 3.1-3.3 представлены эмпирические мощности для энергетического теста, модифицированного теста при $k = 1$, асимптотическая мощность для модифицированного теста.

Таблица 3.1. Эмпирические и асимптотические мощности для **нормального распределения**

h	E	M	M(асимпт.)
1	0.069	0.091	0.100
2	0.213	0.259	0.256
3	0.374	0.487	0.498
4	0.610	0.736	0.741
5	0.800	0.900	0.903
6	0.946	0.977	0.974

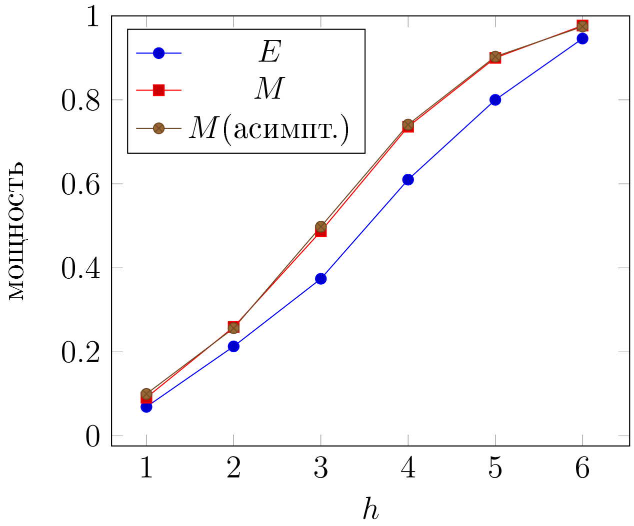

Рис. 3.1. Эмпирические и асимптотические мощности для **нормального распределения**

Таблица 3.2. Эмпирические и асимптотические мощности для **распределения Лапласа**

h	E	M	M(асимпт.)
1	0.078	0.069	0.088
2	0.213	0.225	0.206
3	0.384	0.396	0.398
4	0.583	0.644	0.621
5	0.802	0.819	0.810
6	0.929	0.932	0.926

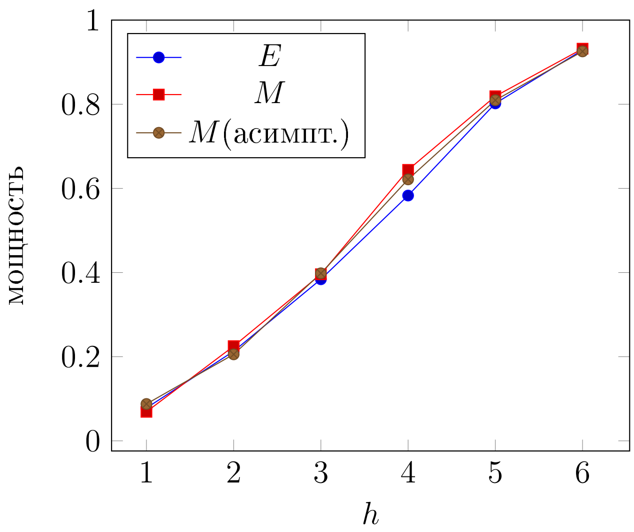

Рис. 3.2. Эмпирические и асимптотические мощности для **распределения Лапласа**

Таблица 3.3. Эмпирические и асимптотические мощности для **распределения Коши**

h	E	M	M(асимпт.)
1	0.057	0.072	0.066
2	0.106	0.114	0.116
4	0.337	0.333	0.321
6	0.676	0.671	0.611
7	0.829	0.810	0.744
9	0.968	0.954	0.920

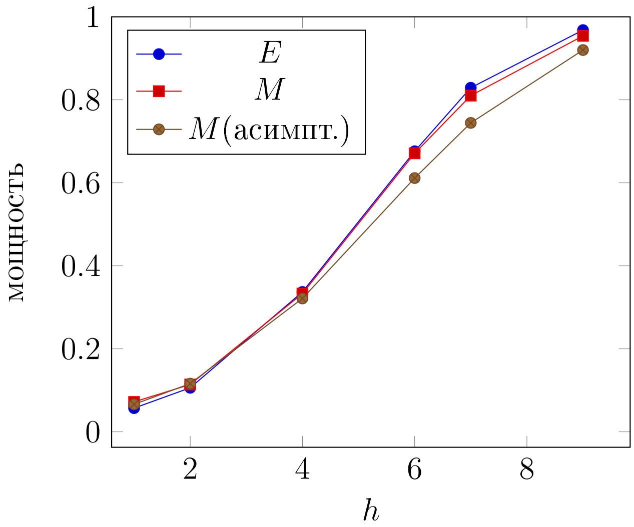

Рис. 3.3. Эмпирические и асимптотические мощности для **распределения Коши**

Полученные результаты показывают, что для нормального распределения и распределения Лапласа во всех случаях мощность модифицированного теста превосходит мощность энергетического теста, а для распределений Коши в ряде случаев мощности очень близки. Асимптотическая мощность модифицированного критерия хорошо аппроксимирует эмпирическую мощность в случае нормального распределения и распределения Лапласа. Для распределения Коши при больших h точность аппроксимации становится низкой.

3.2. Мощность модифицированного критерия в зависимости от параметра k

3.2.1. Эффективность модифицированного критерия

Под эффективностью предельного распределения (таблицы 3.4-3.9, рисунки 3.4-3.7) мы будем понимать отношение $\hat{\hat{b}}$ к a, т.к. от этой величины согласно теореме 1 монотонно зависит асимптотическая мощность. Для нормального распределения эффективность, а значит и мощность, монотонно убывает. Для распределения Коши при $k > 2$ мощность практически не меняется. Для распределения Лапласа максимум достигается при $k = 1$.

Эффективность для нормального распределения

Таблица 3.4. Эффективность модифицированного критерия для **нормального распределения**, $k = 0.1, \ldots, 1$

	k=0.1	k=0.2	k=0.3	k=0.4	k=0.5	k=0.6	k=0.7	k=0.8	k=0.9	k=1
J_1	0.0194	0.0723	0.1475	0.2359	0.3311	0.4285	0.5266	0.6233	0.7182	0.8101
J_2	0.0011	0.0140	0.0537	0.1275	0.2358	0.3745	0.5403	0.7284	0.9345	1.1551
J_3	0.0006	0.0074	0.0296	0.0730	0.1395	0.2278	0.3370	0.4644	0.6075	0.7634
a	0.1375	0.2577	0.3569	0.4389	0.5077	0.5657	0.6157	0.6586	0.6964	0.7303
c	0.0005	0.0059	0.0201	0.0432	0.0733	0.1085	0.1475	0.1896	0.2332	0.2767
$\hat{\hat{b}}$	0.0974	0.1810	0.2496	0.3031	0.3482	0.3832	0.4122	0.4392	0.4585	0.4759
$eff(k)$	0.7081	0.7022	0.6993	0.6906	0.6858	0.6773	0.6694	0.6670	0.6584	0.6516

Таблица 3.5. Эффективность модифицированного критерия для **нормального распределения**, $k = 1, \ldots, 10$

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
J_1	0.8101	1.5874	2.1591	2.6094	2.9768	3.2884	3.5589	3.7946	4.0082	4.2002
J_2	1.1551	3.7406	6.4093	8.9422	11.285	13.469	15.506	17.394	19.191	20.879
J_3	0.7634	2.7480	4.9669	7.1573	9.2435	11.218	13.089	14.841	16.513	18.098
a	0.7303	0.9351	1.0327	1.0948	1.1351	1.1657	1.1881	1.2053	1.2221	1.2346
c	0.2767	0.7130	1.0927	1.4109	1.6883	1.9295	2.1473	2.3418	2.5146	2.6759
$\hat{\hat{b}}$	0.4759	0.5732	0.6141	0.6318	0.6466	0.6472	0.6646	0.6680	0.6682	0.6720
$eff(k)$	0.6516	0.6130	0.5946	0.5771	0.5697	0.5552	0.5594	0.5542	0.5468	0.5443

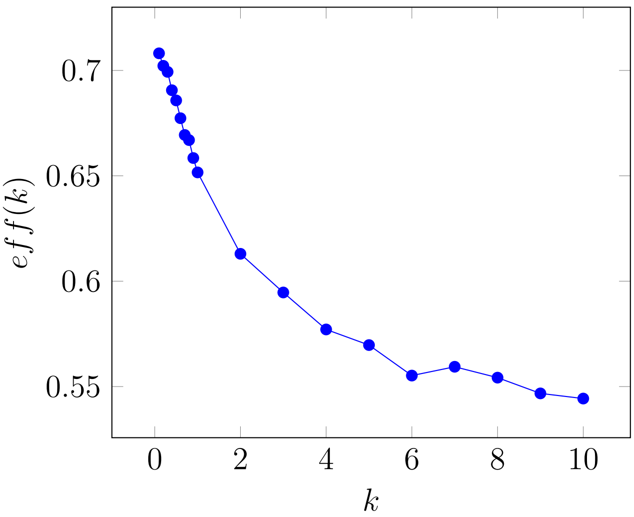

Рис. 3.4. Эффективность модифицированного критерия для **нормального распределения**

Эффективность для распределения Лапласа

Таблица 3.6. Эффективность модифицированного критерия для **распределения Лапласа**, $k = 0.1, \ldots, 1$

	k=0.1	k=0.2	k=0.3	k=0.4	k=0.5	k=0.6	k=0.7	k=0.8	k=0.9	k=1
J_1	0.0371	0.1271	0.2419	0.3655	0.4910	0.6145	0.7338	0.8497	0.9598	1.0650
J_2	0.0053	0.0516	0.1608	0.3284	0.5450	0.7982	1.0788	1.3818	1.6973	2.0236
J_3	0.0028	0.0287	0.0939	0.1997	0.3420	0.5148	0.7122	0.9296	1.1624	1.4068
a	0.1834	0.3190	0.4215	0.5002	0.5651	0.6183	0.6627	0.7032	0.7361	0.7659
c	0.0035	0.0254	0.0642	0.1153	0.1717	0.2322	0.2946	0.3552	0.4179	0.4783
$\hat{\hat{b}}$	0.0942	0.1724	0.2317	0.2787	0.3164	0.3483	0.3760	0.3996	0.4172	0.4354
$eff(k)$	0.5133	0.5403	0.5496	0.5572	0.5600	0.5634	0.5673	0.5683	0.5668	0.5685

Таблица 3.7. Эффективность модифицированного критерия для **распределения Лапласа**, $k = 1, \ldots, 10$

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
J_1	1.0650	1.9155	2.5184	2.9830	3.3611	3.6776	3.9516	4.1935	4.4093	4.6031
J_2	2.0236	5.4714	8.7438	11.714	14.419	16.885	19.165	21.296	23.282	25.143
J_3	1.4068	4.1667	6.9681	9.6008	12.051	14.320	16.439	18.433	20.309	22.070
a	0.7659	0.9479	1.0356	1.0899	1.1272	1.1534	1.1742	1.1914	1.2046	1.2165
c	0.4783	1.0170	1.4460	1.7952	2.0905	2.3473	2.5729	2.7740	2.9582	3.1232
$\hat{\hat{b}}$	0.4354	0.5314	0.5811	0.6035	0.6238	0.6383	0.6419	0.6526	0.6474	0.6489
$eff(k)$	0.5685	0.5606	0.5612	0.5537	0.5534	0.5534	0.5467	0.5477	0.5374	0.5334

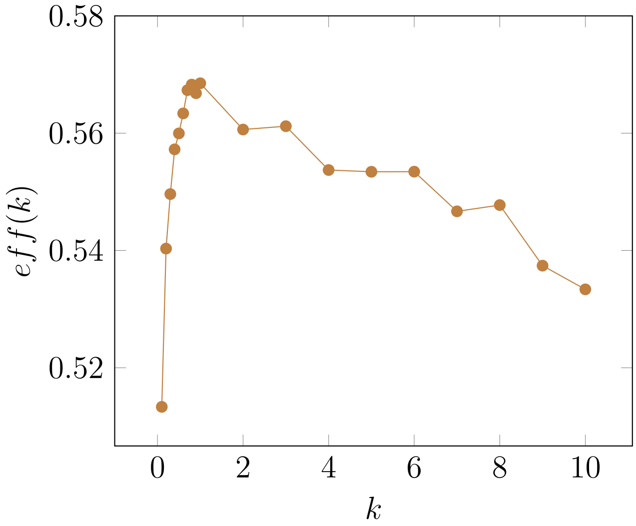

Рис. 3.5. Эффективность модифицированного критерия для **распределения Лапласа**

Эффективность для распределения Коши

Таблица 3.8. Эффективность модифицированного критерия для **распределения Коши**, $k = 0.1, \dots, 1$

	k=0.1	k=0.2	k=0.3	k=0.4	k=0.5	k=0.6	k=0.7	k=0.8	k=0.9	k=1
J_1	0.3647	0.6735	0.9402	1.1763	1.3864	1.5778	1.7511	1.9110	2.0591	2.1966
J_2	1.1040	2.1857	3.2309	4.2443	5.2099	6.1592	7.0546	7.9255	8.7662	9.5803
J_3	0.6059	1.2773	1.9829	2.7014	3.4192	4.1368	4.8393	5.5312	6.2123	6.8762
a	0.3988	0.5331	0.6214	0.6888	0.7362	0.7827	0.8155	0.8472	0.8732	0.8988
c	0.2057	0.3887	0.5540	0.7019	0.8444	0.9653	1.0861	1.1933	1.2966	1.3886
$\hat{\hat{b}}$	0.0840	0.1427	0.1888	0.2219	0.2476	0.2710	0.2909	0.3092	0.3185	0.3324
$eff(k)$	0.2106	0.2677	0.3039	0.3222	0.3363	0.3462	0.3567	0.3649	0.3647	0.3698

Таблица 3.9. Эффективность модифицированного критерия для **распределения Коши**, $k = 1, \ldots, 10$

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
J_1	2.1966	3.2197	3.8921	4.3946	4.7953	5.1294	5.4157	5.6651	5.8878	6.0896
J_2	9.5803	16.567	22.096	26.725	30.730	34.284	37.492	40.399	43.109	45.613
J_3	6.8762	12.886	17.883	22.165	25.940	29.300	32.360	35.142	37.762	40.188
a	0.8988	1.0381	1.1025	1.1429	1.1655	1.1882	1.2039	1.2190	1.2248	1.2341
c	1.3886	2.1420	2.6765	3.0883	3.4369	3.7177	3.9662	4.1790	4.3877	4.5665
$\hat{\hat{b}}$	0.3324	0.4007	0.4260	0.4439	0.4533	0.4604	0.4755	0.4675	0.4749	0.4889
$eff(k)$	0.3698	0.3860	0.3864	0.3884	0.3889	0.3874	0.3949	0.3835	0.3877	0.3962

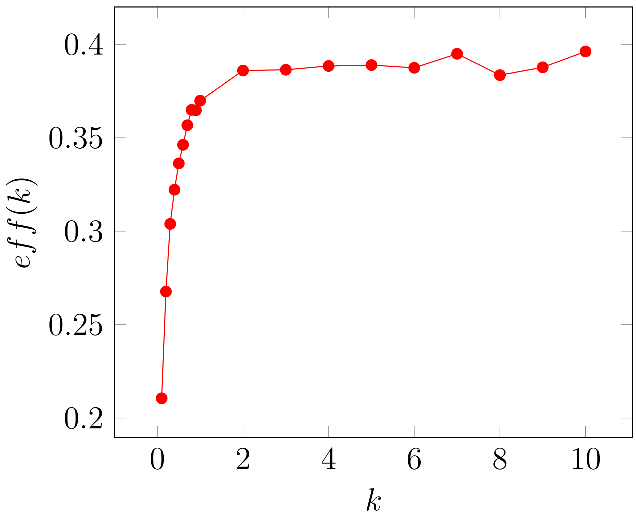

Рис. 3.6. Эффективность модифицированного критерия для **распределения Коши**

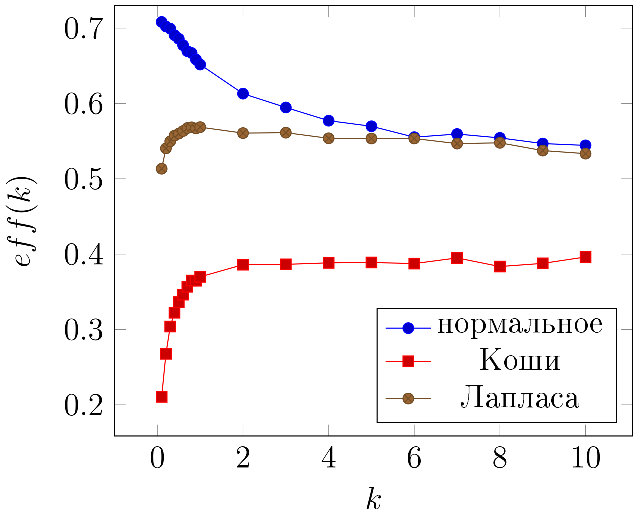

Рис. 3.7. Эффективность модифицированного критерия для **нормального распределения, распределения Коши, распределения Лапласа**

3.2.2. Эмпирическая мощность модифицированного критерия

Эмпирические мощности модифицированного критерия в зависимости от коэффициента k представлены в таблицах 3.10-3.12 и на рисунках 3.8-3.10.

Таблица 3.10. Эмпирические мощности модифицированного критерия для **нормального распределения** при разных параметрах k

h	k=0.1	k=0.5	k=1	k=1.5	k=2	k=2.5	k=3	k=10
1	0.107	0.113	0.100	0.102	0.090	0.082	0.090	0.090
2	0.272	0.283	0.280	0.245	0.243	0.224	0.225	0.203
3	0.556	0.541	0.519	0.495	0.472	0.462	0.449	0.401
4	0.826	0.791	0.772	0.717	0.735	0.688	0.704	0.639
5	0.930	0.941	0.901	0.896	0.874	0.889	0.878	0.828
6	0.990	0.976	0.984	0.966	0.972	0.969	0.973	0.948

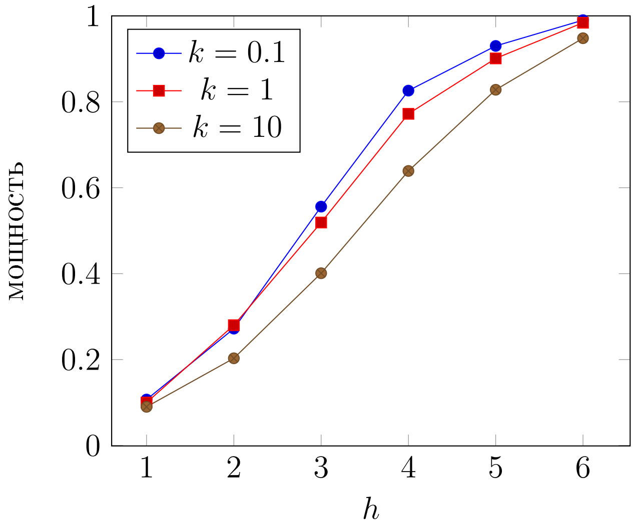

Рис. 3.8. Эмпирические мощности модифицированного критерия для **нормального распределения** при разных параметрах k

Таблица 3.11. Эмпирические мощности модифицированного критерия для **распределения Лапласа** при разных параметрах k

h	k=0.1	k=0.5	k=1	k=1.5	k=2	k=2.5	k=3	k=10
1	0.084	0.086	0.081	0.088	0.093	0.085	0.094	0.071
2	0.173	0.215	0.213	0.219	0.221	0.209	0.212	0.203
3	0.335	0.437	0.425	0.429	0.435	0.408	0.433	0.393
4	0.528	0.629	0.653	0.630	0.680	0.677	0.682	0.618
5	0.723	0.784	0.846	0.823	0.829	0.849	0.843	0.837
6	0.865	0.928	0.951	0.938	0.937	0.946	0.939	0.927

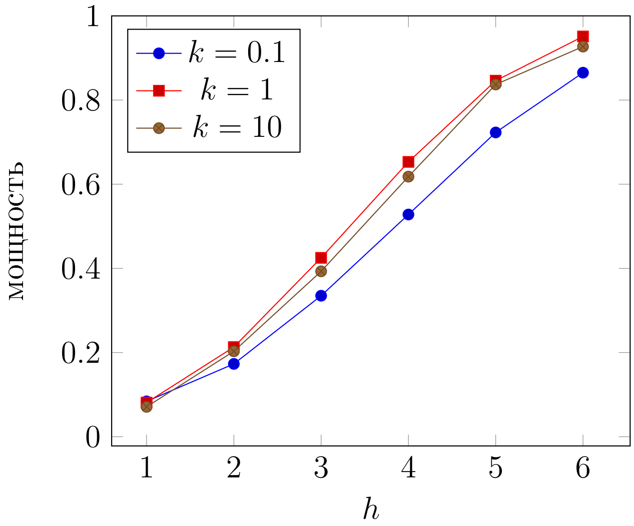

Рис. 3.9. Эмпирические мощности модифицированного критерия для **распределения Лапласа** при разных параметрах k

Таблица 3.12. Эмпирические мощности модифицированного критерия для **распределения Коши** при разных параметрах k

h	k=0.1	k=0.5	k=1	k=1.5	k=2	k=2.5	k=3	k=10
1	0.065	0.048	0.075	0.070	0.060	0.064	0.077	0.065
2	0.080	0.106	0.112	0.117	0.112	0.120	0.116	0.139
4	0.146	0.274	0.355	0.381	0.372	0.365	0.370	0.401
6	0.246	0.601	0.680	0.702	0.720	0.712	0.716	0.710
7	0.354	0.740	0.810	0.817	0.841	0.848	0.830	0.822
9	0.543	0.931	0.952	0.961	0.973	0.964	0.975	0.957

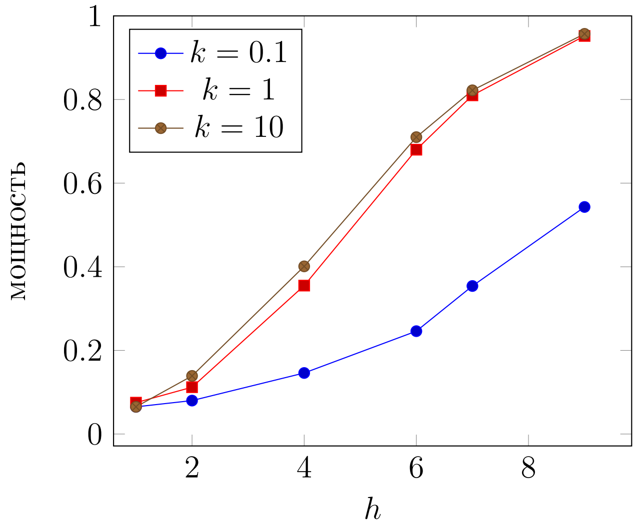

Рис. 3.10. Эмпирические мощности модифицированного критерия для **распределения Коши** при разных параметрах k

Для нормального распределения чем меньше параметр k, тем мощнее модифицированный критерий, хотя при $k = 1$ мощность модифицированного критерия уже превышает мощность энергетического. Для распределения Коши при большом значении k модифицированный критерий имеет такую же мощность, как и энергетический критерий. Для распределения Лапласа при $k = 1$ критерий имеет максимальную мощность.

Делаем вывод, что зависимость мощности от k слабая и мы получаем почти оптимальный критерий. Таким образом, эмпирические результаты подтверждают выводы, основанные на асимптотических формулах.

Глава 4

Сравнение с классическими критериями

Сравним мощности энергетического (E), модифицированного (M) критериев с классическими тестами t-Стьюдента (t), Колмогорова-Смирнова (KS), Уилкоксона-Манна-Уитни (WMW). Для модифицированного критерия выбираем параметр $k = 1$. Результаты представлены в таблицах и рисунках 4.1-4.3. Полученные результаты показывают, что модифицированный критерий в большинстве случаев не уступает альтернативным критериям.

Таблица 4.1. Эмпирические мощности критериев t, KS, WMW, E, M для **нормального распределения**

h	t	KS	WMW	E	M
1	0.105	0.067	0.109	0.089	0.100
2	0.274	0.193	0.284	0.177	0.280
3	0.569	0.439	0.526	0.359	0.519
4	0.811	0.607	0.788	0.588	0.772
5	0.952	0.825	0.924	0.808	0.901
6	0.989	0.948	0.981	0.929	0.984

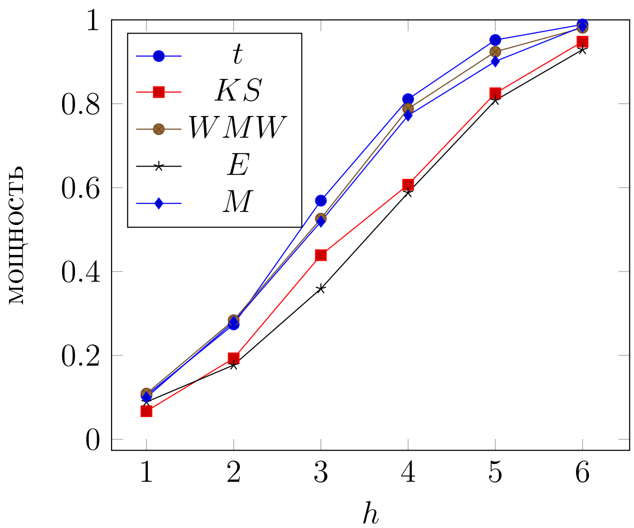

Рис. 4.1. Эмпирические мощности критериев t, KS, WMW, E, M для **нормального распределения**

Таблица 4.2. Эмпирические мощности критериев t, KS, WMW, E, M для **распределения Лапласа**

h	t	KS	WMW	E	M
1	0.076	0.083	0.071	0.075	0.081
2	0.174	0.226	0.170	0.191	0.213
3	0.343	0.389	0.371	0.376	0.425
4	0.528	0.657	0.558	0.607	0.653
5	0.703	0.820	0.763	0.782	0.846
6	0.832	0.946	0.880	0.935	0.951

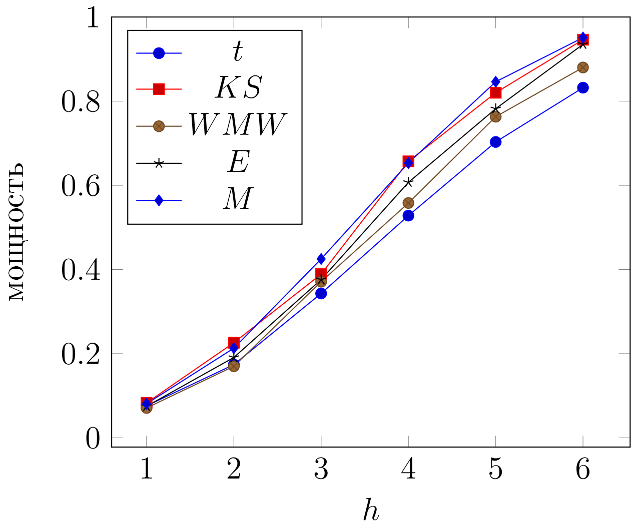

Рис. 4.2. Эмпирические мощности критериев t, KS, WMW, E, M для **распределения Лапласа**

Таблица 4.3. Эмпирические мощности критериев t, KS, WMW, E, M для **распределения Коши**

h	t	KS	WMW	E	M
1	0.020	0.051	0.044	0.070	0.075
2	0.031	0.110	0.090	0.133	0.112
4	0.040	0.384	0.194	0.389	0.355
6	0.044	0.695	0.344	0.693	0.680
7	0.051	0.814	0.450	0.845	0.810
9	0.080	0.961	0.649	0.971	0.952

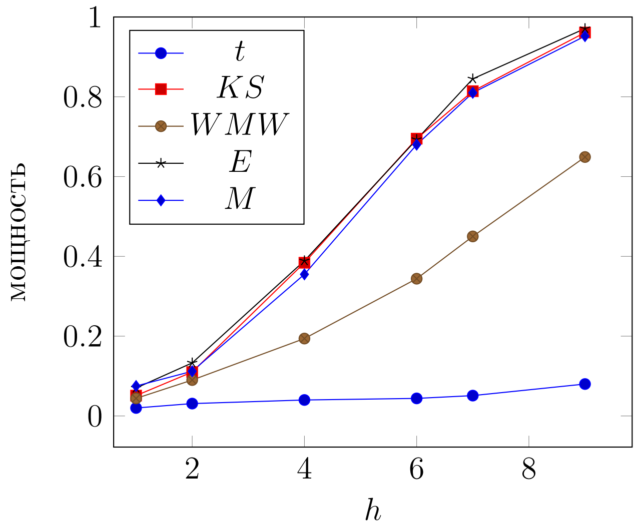

Рис. 4.3. Эмпирические мощности критериев t, KS, WMW, E, M для **распределения Коши**

Заключение

В данной работе было проведено численное сравнение мощности двух перестановочных тестов: энергетического теста, введенного в работе (Aslan, Zech, 2005) и весьма популярного в различных приложениях, и модифицированного теста, введенного в работах научного руководителя. Показано, что для нормального распределения и распределения Лапласа модифицированный тест превосходит энергетический во всех рассмотренных случаях, а для распределения Коши — в большинстве случаев (а в остальных случаях эмпирические мощности критериев имеют статистически незначимое отличие) при сравнении двух распределений, которые отличаются только сдвигом. Также проведено сравнение модифицированного теста в тех же условиях с альтернативными непараметрическими тестами (Уилкоксона-Манна-Уитни и Колмогорова-Смирнова). Оказалось, что модифицированный критерий не уступает лучшему из них. Ранее в работах научного руководителя было показано, что модифицированный критерий значительно превосходит эти критерии в случае, когда распределения отличаются параметром масштаба. Кроме того была исследована возможность оптимального выбора вспомогательного параметра в модифицированном критерии. Оказалось, что стандартное значение этого критерия близко к наилучшему, если неизвестен вид распределения.

Список литературы

1. Леман Э. Проверка статистических гипотез // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1979. — 408 с.
2. Мелас В.Б. Об асимптотической мощности одного метода проверки гипотез о равенстве распределений // Вестник СПбГУ, Сер. 1, Вып. 4. (в печати). — 2022.
3. Мелас В.Б., Сальников Д.И., Гудулина А.О. Численное сравнение перестановочных и классических методов проверки статистических гипотез // Вестник СПбГУ, Сер. 1, Вып. 3. — 2016.
4. Grebenyuk A.S. Statistical hypotheses testing using permutation tests. — 2022. — Access mode: https://doi.org/10.5281/zenodo.6581823
5. Melas V.B., Salnikov D.I. On asymptotic power of the new test for equality of two distributions // Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. — 2021. — Vol. 371. — P. 204–214.
6. Tibshirani R.J., Efron B. An introduction to the bootstrap // Monographs on statistics and applied probability. — 1993. — T. 57. — C. 1-436.
7. Zech G., Aslan B. New test for the multivariate two-sample problem based on the concept of minimum energy // Journal of Statistical Computation and Simulation 75(2). — 2005. — P. 109-119.