Санкт–Петербургский государственный университет

ЛАТЫШЕНКО Ульяна Александровна

Выпускная квалификационная работа

Встречные очереди при управлении запасами со случайным спросом

Уровень образования: магистратура
Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5505.2020 «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности»

Научный руководитель:
доц. кафедры моделирования экономических систем, к.ф. - м.н. Ковшов Александр Михайлович

Рецензент:
внс - советник, Corning, к.ф. - м.н., ст. науч. сотр. Доценко Александр Викторович

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Введение

С ростом потребностей современного человека растет необходимость развития потребительской сферы. К потребительской сфере в данном случае относятся оптово розничные магазины, места общественного питания и т.д. А сложившееся в последние года эпидемиологическая ситуация дала толчок к развитию интернет-магазинов.

По оценке Data Insight в 2021 году доставлено 1570 млн отправлений, рост относительно 2020 года составил 78%

Для интернет-магазинов, да и любого другого предприятия важную роль играет место хранение товаров, ресурсов. Склады представляют собой сложный элемент, отвечающий за снабжение и сбыт, и от них зависит качество и эффективность обеспечения потребителей необходимыми ресурсами. Актуальность выбранной темы заключается в том, что складская деятельность играет большую роль в успешном функционировании любого предприятия.

Каждая компания заинтересована в получении большей прибыли. Существует множество методов увеличить продажи или минимизировать издержки. Помимо этого можно анализировать логистику склада и улучшать его внутреннее устройство, а не внешние параметры.

В данном исследовании склад - это помещение для хранения, которое получает доход от продажи единицы товара. При этом имеются следующие затраты: на содержание помещения, на хранения единицы товара, на штрафы за переполнение.

Цель исследования заключается в том, чтобы вывести зависимость прибыли от объема склада, интенсивности потока товаров и покупателей. Найти оптимальные значения переменных, максимизирующих прибыль.

В работе рассматривалось два случая: обслуживание покупателей проходит мгновенно, на обслуживание требуется время. Для каждой задачи проводились следующие этапы:

1. Определить СМО, найти вероятность всех состояний системы.

2. Построить математическую модель - найти функцию прибыли.

3. Провести имитационное моделирование.

4. Провести численные эксперименты:

    - Сравнение аналитического и имитационного решения.

    - Поиск оптимальных значений для различных начальных данных.

Реализация численных экспериментов для тестовой задачи проводилась на Python. Ссылка на код программы: `https://github.com/Fran-Tini/Magistracy.git`

Постановка задачи

Есть склад конечной вместимости m. На склад привозят товары - это первый стационарный входящий поток Пуассона с частотой λ. Единица товара занимает единицу объема склада. Товар принимается мгновенно. Если склад полон, то товар не попадает на склад.

Уходят товары поштучно и случайно, по мере прихода покупателей. Приход покупателей – второй пуассоновский поток с частотой μ.

Рассмотрим два случая:

1) Покупка товара происходит мгновенно. При мгновенном обслуживании если склад пуст, то покупатели могут выстраиваться в очередь. Очередь покупателей не ограничена, а вероятность того, что заявка не уйдет, зависит от длины очереди x. Определим вероятность встать в очередь через функцию $p(x) = \frac{1}{x+1}$.

2) Покупка происходит не мгновенно. Время обслуживание распределено экспоненциально с показателем η. При отсутствии товара на складе покупатели образуют очередь ограниченную некоторой константой n.

Прибыль поступает от продажи товаров со склада. Имеются расходы на хранение одной единицы товара, на содержание самого склада, а также издержки, если прибывший товар не может быть помещён на склад из-за его переполнения.

Обзор литературы

Систем массового обслуживания предостаточно, и анализ и контроль систем массового обслуживания являются основными темами в области контроля, оценки производительности и оптимизации производственных систем. Последовательное и подробное описание теории построения моделей систем массового обслуживания можно найти в учебном пособии [1] и [2]. Теория управления запасами подробна изложена в книге [3].

В книге [4] описаны действия в случае бесконечной очереди, приведена теория с доказательствами для стационарного случая задачи Эрланга с бесконечной очередью. В данной работе воспользуемся выводами для нахождения финальных вероятностей системы. Также здесь представлено доказательство теоремы Маркова о существовании предельных вероятностей. Все необходимые свойства входящих потоков подробно изложены в [5]. Наиболее полезное для нас - связь простейшего потока с экспоненциальным распределением, а именно: время между заявками имеет экспоненциальное распределение. Также в данной книге рассмотрены основные системы массового обслуживания. В учебном пособии [6] показано, как использовать СМО в экономических задачах, рассмотрены примеры для простейших систем.

Теория, касающаяся встречных очередей, и характеристики СМО для случая, когда покупка товара происходит не мгновенно, описаны в [7]. Также представлены формулы для вероятностей для некоторых частных случаев. Но для нас важно введенное понятие "встречная очередь" , граф СМО и система уравнений, отвечающая этому графу.

Идея, как решить поставленную задачу, была взята из [8]. В данной статье изложена теория об управление товарными запасами на основе теории массового обслуживания. Рассматривается задача поставки товара для конечного числа состояний, и акцент делается на поставки товара, что отличает её от нашей задачи.

Для проверки математической модели в работе потребуется имитационное моделирование. Методология имитационного моделирования, классификация моделей описаны в [10]. Непосредственно этапы имитационного моделирования СМО подробно изложены в [9].

Глава 1. Математическая модель

1.1 Мгновенная выдачи товара

1.1.1 Вероятности состояний

Рассмотрим граф состояний системы, отвечающий задаче с мгновенным обслуживанием.

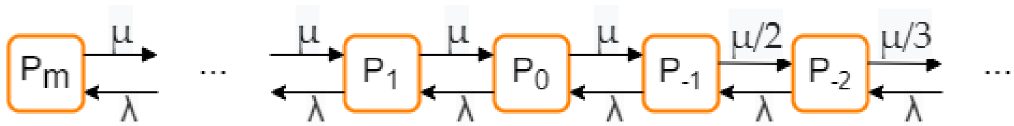


Рис. 1: Граф состояний

Здесь $m \in \mathbb{Z}_+$. λ и μ – интенсивности потоков товара и покупателей соответственно. $P_i, i = 0, ..., m$ – вероятность нахождения системы в состоянии, когда на складе находится i единиц продукции. $P_{-i}, i = 1, ..., \infty$ – вероятность нахождения системы в состоянии, когда склад пуст и i покупателей находится в очереди. $f(x) = \frac{1}{x}$ - вероятность, что покупатель встанет в очередь длины $x - 1$.

Данная задача является смесью одноканальной СМО с ограниченной и неограниченной очередью.

В данной работе будет рассматриваться только вероятности системы $P_i(t)$ в предельном стационарном режиме, т.е. при $t \to \infty$, которые называются предельными (или финальными) вероятностями состояний. В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют. Нам же нужно рассмотреть предельный случай системы с неограниченной очередью и убедиться, что он существует.

Допустим, что очередь покупателей ограничена числом n, следовательно, есть предельные вероятности. После найдем пределы этих вероятностей при $n \to \infty$. С допущением об ограниченности выпишем систему уравнений, соответствующих графу 1.

$$\begin{cases} \lambda P_{m-1} - \mu P_m = 0 \\ \lambda P_{i-1} + \mu P_{i+1} - (\lambda + \mu) P_i = 0 \\ \lambda P_{-1} + \mu P_1 - (\lambda + \mu) P_i = 0 \\ \lambda P_{j-1} + \dfrac{\mu}{-j} P_{j+1} - \lambda P_j - \dfrac{\mu}{-j+1} = 0 \\ \dfrac{\mu}{-n} P_{-n+1} - \lambda P_{-n} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda P_{m-1} = \mu P_m \\ \lambda P_{i-1} = \mu P_i, \\ \mu P_0 = \lambda P_{-1} \\ \dfrac{\mu}{-j} P_{j+1} = \lambda P_j, \\ \dfrac{\mu}{n} P_{-n+1} = \lambda P_{-n} \end{cases}$$

где $i = 1, ..., m-1$ и $j = -1, ..., -n+1$. Выразим все вероятности через вероятность состояния P_0:

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0, \qquad \text{где } k = 1, ..., m \tag{1.1}$$
$$P_{-k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k P_0, \qquad \text{где } k = 1, ..., n.$$

Для того чтобы найти P_0, воспользуемся условием $\sum\limits_{i=-n}^{m} P_i = 1$. Тогда,

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^i}{\mu^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu^i}{i!\lambda^i}\right)^{-1} \tag{1.2}$$

Находим финальные вероятности, устремив $n \to \infty$ в 1.1 и 1.2. Для удобства введём замену $\rho = \lambda/\mu$. Для начала найдем предел для P_0. В результате получим значение предельной вероятности P_0 в случае неограниченной очереди.

$$\lim_{n\to\infty} P_0 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \rho^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^{-i}}{i!}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \rho^i + \sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^{-i}}{i!}\right)^{-1} \tag{1.3}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \rho^i + e^{\rho^{-1}}\right)^{-1} = P_0 < \infty$$

Найдем предел для P_{-n}:

$$\lim_{n\to\infty} P_{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho^{-n}}{n!} P_0 = 0 < \infty$$

Предел равен нулю, т.к $\lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$ и факториал растет быстрее, чем любая показательная функция, а $P_0 < \infty$ по доказанному ранее.

Таким образом, мы показали, что финальные вероятности существуют, т.е. они конечны. Далее P_0, найденный в 1.3, подставляем в 1.1 и получаем значение остальных вероятностей.

1.1.2 Функция прибыли

Есть склад конечной вместимости m. λ тов./день – частота потока товара, μ чел./день – частота потока покупателей, r руб. – прибыль от продажи единицы товара, q руб. – штраф за возврат товара при переполненном складе, c руб. – затраты на хранение товара, s руб. – затраты на содержание склада, T дней – временной период анализа прибыли склада. H руб. - прибыль. Задача:

$$\begin{cases} H(m, \lambda, \mu, r, q, c, s) \to max \\ m \in \mathbb{Z}_+ \\ \lambda, \mu, r, q, c, s > 0 \end{cases}$$

Выведем формулу для прибыли, используя вероятности, вычисленные в предыдущем пункте. Предельная вероятность состояния имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Легко показать, что для простейшего потока среднее число событий, наступающих за время t, равно

$$\sum_{i=1}^{\infty} kP_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}\lambda t \sum_{i=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t \quad (1.4)$$

Зная время прибывания системы в том или ином состоянии, можем посчитать среднее количество заявок, поступивших в этот момент, и найти прибыль.

Склад получает доход, когда товар есть на складе и приходит покупатель. Время, когда товар есть на складе, равно $T\sum_{i=1}^{m} P_i$. За это время по 1.4 пришло $\mu T\sum_{i=1}^{m} P_i$ покупателей. Следовательно, в этом случае получаем выручку в размере $r\mu T\sum_{i=1}^{m} P_i$. Аналогичные рассуждения проведем для случая, когда приходит товар и есть люди в очереди, тогда выручка составит $\lambda rT\sum_{i=-1}^{-\infty} P_i$.

Склад несет убытки в размере λTP_mq в случае, когда приходит товар на переполненный склад. Также имеются затраты на хранение единицы товара:

$$cTP_1 + 2cTP_2 + ... + mcTP_m = cT\sum_{i=1}^{m} iP_i$$

и, наконец, затраты на поддержание работы склада на протяжении всего времени – Tsm.

Таким образом, получаем уравнение для прибыли:

$$H = \mu rT\sum_{i=1}^{m} P_i + \lambda rT\sum_{i=-1}^{-\infty} P_i - \lambda TP_mq - cT\sum_{i=1}^{m} P_i i - Tsm$$

Далее можем поделить обе части уравнения на T, т.е. в дальнейшем будем рассматривать среднюю прибыль. Так наша задача стала стационарной.

$$H = \mu r\sum_{i=1}^{m} P_i + \lambda r\sum_{i=-1}^{-\infty} P_i - \lambda qP_m - c\sum_{i=1}^{m} P_i i - sm \qquad (1.5)$$

Имея явную зависимость, можем исследовать функцию на максимум. Предварительно вычислим все суммы, которые есть в формуле 1.5, подставляя полученные в 1.3, 1.1 уравнения для вероятностей.

$$\sum_{i=-1}^{-\infty} P_i = \left(\rho^{-1}P_0 + \frac{\rho^{-2}}{2!}P_0 + \frac{\rho^{-3}}{3!}P_0 + ...\right) = \left(e^{\rho^{-1}} - 1\right)P_0 \qquad (1.6)$$

Для случая $\rho \neq 1$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = P_0 \sum_{i=1}^{m} \rho^i = \frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho} P_0 \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} iP_i = P_0 \sum_{i=1}^{m} \rho^i i = \frac{\rho(m\rho^{m+1} - (m+1)\rho^m + 1)}{(\rho-1)^2} P_0$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{\rho(1-\rho^m) + e^{\rho^{-1}}(1-\rho)}$$

Для случая $\rho = 1$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = P_0 \sum_{i=1}^{m} 1^i = mP_0 \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} iP_i = P_0 \sum_{i=1}^{m} 1^i i = \frac{m(m+1)}{(2} P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{m+e}$$

Далее исследуем функцию H на максимум по m в обоих случаях. Рассмотрим $\rho \neq 1$. Подставляем в формулу 1.5 вычисленные в 1.6,1.7 суммы. Тогда,

$$H = \mu r \frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho} P_0 + \lambda r \left(e^{\rho^{-1}} - 1\right) P_0 - \lambda \rho^m P_0 q -$$
$$- c \frac{\rho(m\rho^{m+1} - (m+1)\rho^m + 1)}{(\rho-1)^2} P_0 - sm$$

Выражение $m\rho^m$ не позволит явно выразить m, поэтому я этом случае максимум следует искать графически по точкам.

Рассмотрим $\rho = 1$, т.е. $\lambda = \mu$. Подставляем в формулу 1.5 вычисленные в 1.6,1.8 суммы. Тогда,

$$H = \frac{\lambda r m}{m+e} + \frac{\lambda r(e-1)}{m+e} - \frac{\lambda q}{m+e} - c\frac{m(m+1)}{2}\frac{1}{m+e} - sm$$

$$H' = -\frac{1}{(m+e)^2}\left[\lambda rm + \lambda r(e-1) - \lambda q - \frac{c(m^2+m)}{2}\right] +$$
$$+\frac{1}{(m+e)}\left[\lambda r - \frac{c(2m+1)}{2}\right] - s = 0$$

После некоторых преобразований получим:

$$-m^2\left(\frac{c}{2}+s\right) - m(ce+2se) + \left((\lambda(r+q) - e\left(\frac{c}{2}+se\right)\right) = 0$$

Решение полученного квадратного уравнения имеет вид:

$$m_{1,2} = \frac{-(ce+2se) \pm \sqrt{(ce+2se)^2 + 4\left(\frac{c}{2}+s\right)\left((\lambda(r+q) - e\left(\frac{c}{2}+se\right)\right)}}{c+2s}$$

По данным задачи $m > 0$ и $(ce+2se) > 0$, тогда условие $(ce+2se) < \sqrt{\ldots}$ удовлетворит не только условие неотрицательности объема склада, но и неотрицательности дискриминанта. В результате мы получим единственное решение уравнения, соответствующее условиям задачи.

$$m = \frac{-(ce+2se) + \sqrt{(ce+2se)^2 + (c+2s)(2\lambda(r+q) - e(c+2se))}}{c+2s} \quad (1.9)$$
$$2\lambda(r+q) > e(c-2se)$$

Для того чтобы убедиться, что найденное решение является максимумом, найдем вторую производную:

$$H'' = -m\underbrace{(c+2s)}_{>0} - \underbrace{(ce+2se)}_{>0} < 0 \quad \forall m > 0$$

Напомним, что объем склада - целое число, поэтому для нахождения оптимального размера сделаем ещё один шаг. Возьмём округление в меньшую и большую сторону числа, полученного в 1.9. Сравним только две полученные прибыли $H(\lfloor m \rfloor)$ и $H(\lceil m \rceil)$ вместо того, чтобы перебирать всё варианты. Аргумент, на котором функция прибыли больше, является оптимальным размером склада при условии $\lambda = \mu$.

В реальной жизни мы можем знать не все параметры, определяющие нашу задачу, но имея функцию прибыли 1.5 от всех переменных, можем найти оптимальные значения. В численных экспериментах дополнительно рассмотрим случаи, когда мы не знаем интенсивности входящих потоков.

1.2 Не мгновенная выдача товара

1.2.1 Вероятности состояний

Рассмотрим задачу, когда покупка товара происходит не мгновенно, а длина очереди покупателей ограничена числом n. Имеем один обслуживающий прибор.

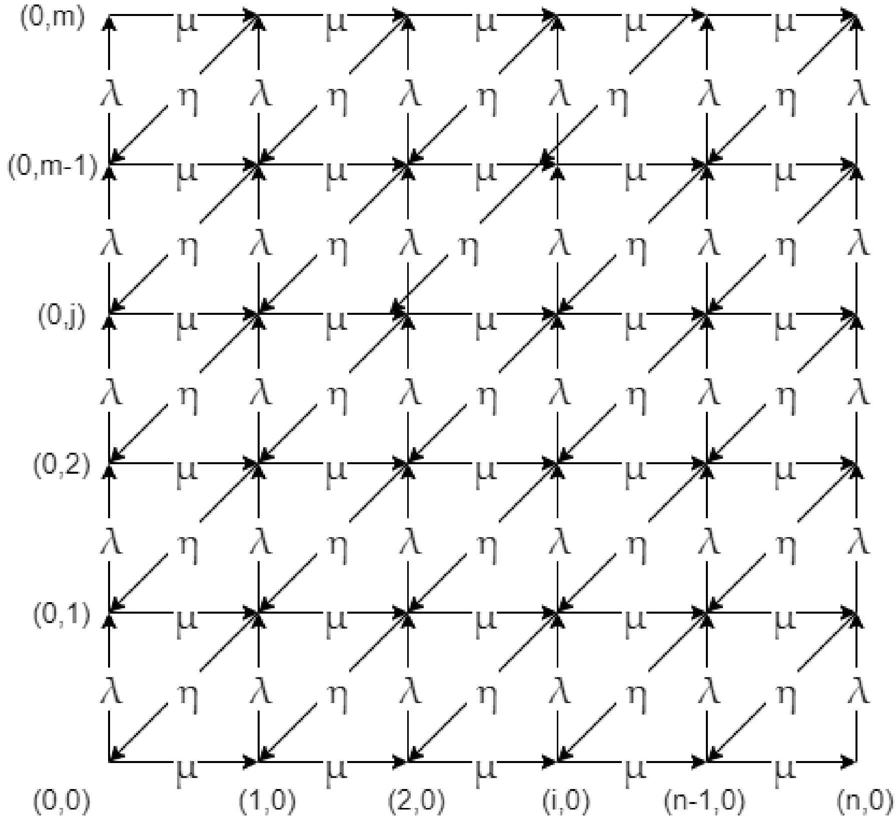


Рис. 2: Граф состояний

λ – интенсивность потока товара, μ – интенсивность потока покупателей, $1/\eta$ – среднее время обслуживания заявки, $P(i, j)$ – вероятность нахождения системы в состоянии (i, j), где i — длина очереди покупателей, а j — количество товара на складе.

Когда приходит покупатель, в случае, если склад не пуст, он образует пару с товаром. Если прибор свободен, то пара уходит на обслуживание. В случае, когда склад пуст, очередь из людей увеличивается на 1. Аналогично, при поступлении товара, он может либо образовать пару с имеющимся покупателем, либо пополнить соответствующую очередь. Каждый момент времени может обрабатываться максимум одна пара заявок.

Как говорилось ранее СМО с конечными очередями имеет предельные вероятности состояний. Подробно характеристики, полученной СМО, описаны в [6]. Здесь будет представлена только система уравнений, отвечающая графу.

$$
\begin{cases}
(\lambda+\mu)P(0,0) = \eta P(1,1) \\
(\lambda+\mu)P(0,i) = \eta P(1,1+i) + \lambda P(0,i-1) \quad \forall i = 1,2,...,m-1 \\
\mu P(0,m) = \lambda P(0,m-1) \\
(\lambda+\mu)P(i,0) = \nu P(i-1,0) + \eta P(i+1,1) \quad \forall i = 1,2,...,n-1 \\
\lambda P(n,0) = \mu P(n-1,0) \\
(\eta+\lambda)P(n,i) = \nu P(n-1,i) + \lambda P(n,i-1) \quad \forall i = 1,2,...,m-1 \\
\eta P(n,m) = \nu P(n-1,m) + \lambda P(n,m-1) \\
(\eta+\mu)P(n,i) = \nu P(i-1,m) + \lambda P(i,m-1) \quad \forall i = 1,2,...,n-1 \\
(\lambda+\mu+\eta)P(i,j) = \qquad \forall i = 1,2,...,n-1; \\
= \nu P(i-1,j) + \lambda P(i,j-1) + \eta P(i+1,j+1) \quad \forall j = 1,2,...,m-1;
\end{cases}
$$

В системе 1.7 $(m+1)\times(n+1)$ уравнений и неизвестных. Ранг матрицы коэффициентов, отвечающей данной системы, равен $(m+1)\times(n+1)-1$. Данная система описывает все возможные события, т.е. имеется полная группа событий, следовательно, выполняется условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P(i,j) = 1$$

Заменяя любую строку из системы на условие нормировки, получим $(m+1)\times(n+1)$ линейно независимых уравнений. Таким образом, система уравнений будет иметь единственное решение.

Вычисление вероятностей будет производиться численными методами с помощью встроенной библиотеки SciPy.

1.2.2 Функция прибыли

Переменные остаются теми же, что и в п.1.1.2, но к ним добавляется среднее время обслуживание клиента $\frac{1}{\eta}$. В данной задаче мы не можем использовать те же рассуждения, т.к. мы не знаем интенсивности появления пары. Также время обслуживания - это не то же самое, что входящий поток. Но при определенных условиях его можно будет считать таковым.

Считаем, что интенсивность появления пары примерно равно $min(\lambda, \mu)$.

Рассмотрим только случай, когда интенсивность обслуживания меньше интенсивности появления пары. Тогда чем больше время обслуживание, тем больше процедура обслуживания походит на поток Пуассона. При данных условиях не будет простоя на ожидание пары, и время между обслуженными парами будет подчиняться экспоненциальному закону распределения, что соответствует простейшему пуассоновскому потоку. Тогда, используя формулу 1.4 и рассуждения п.1.1.2, получим функцию прибыли:

$$H = \eta r \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(i,j) - \lambda q \sum_{i=0}^{n} P(i,m) - c \sum_{i=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} jP(i,j) - sm$$

Так как явных формул для вероятностей нет, есть решение системы в численном виде, то для анализа функции будем использовать только её график.

Глава 2. Имитационное моделирование

Для того чтобы проверить выведенную математическую модель, понять, насколько хорошо она отображает описанный процесс, проведем имитационное моделирование.

Имитационным моделированием – это компьютерная программа, которая описывает структуру и воспроизводит поведение реальной системы во времени.

Для имитации прибыли склада будем использовать дискретно-событийное моделирование. В дискретно-событийном моделировании функционирование системы представляется как хронологическая последовательность событий. Событие происходит в определенный момент времени и знаменует собой изменение состояния системы. Состояние системы в нашем случае одно - прибыль склада в момент времени t. Далее нам нужно понять, как моделировать моменты времени для событий, и как события влияют на прибыль. Покажем, что для простейшего пуассоновского потока время между событиями подчиняется экспоненциальному распределению.

Распределение Пуассона имеет вид:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\, e^{-\lambda\tau}, \tag{2.1}$$

где k – количество событий, λ – математическое ожидание случайной величины (среднее количество событий за фиксированный промежуток времени), т.е. интенсивность.

Вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события $(k = 0)$, равна

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}. \tag{2.2}$$

Найдем распределение интервала времени t_1 между произвольными двумя соседними событиями простейшего потока. В соответствии с 2.2 вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна

$$P(t_1 \geqslant t) = e^{-\lambda t},$$

а вероятность противоположного события, т.е. функция распределения случайной величины t_1, есть

$$F(t) = P(t_1 < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{2.3}$$

Распределение, задаваемое функцией распределения 2.3, называется показательным (или экспоненциальным).

Ограничиваем временной промежуток, на котором будем считать функцию прибыли, числом T. Ранее доказали, что время между событиями в простейшем пуассоновском потоке подчинено экспоненциальному закону распределения. Следовательно, мы можем смоделировать времена прихода товаров и покупателей с соответствующими частотами.

Опишем процесс для задачи, когда товар продается мгновенно. Перед заходом заявки в систему вычитаем из прибыли затраты на хранения продукции, которая сейчас находится на складе, а также затраты на аренду всего помещения.

При поступлении заявки "товар" смотрим сколько товара на складе, если склад полный, то платим штраф. Далее если есть люди в очереди, то добавляем к прибыли выручку с продажи, иначе увеличиваем количество товара на складе на единицу.

При поступлении заявки "покупатель" если есть товар на складе, то добавляем к прибыли выручку с продажи и уменьшаем количество товара на складе на единицу. Иначе покупатель встает в очереди при условии, что случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ меньше $1/(x+1)$, где x - длина очереди, т.е. смотрим на вероятность встать в очередь.

Опишем процесс для задачи, когда на продажу товара требуется время. Напомним, что в данной ситуации очередь покупателей ограничена числом n.

Перед заходом заявки в системы вычитаем из прибыли затраты на хранения продукции, которая сейчас находится на складе, а также затраты на аренду всего помещения. В данном случае, еще следим за временем, когда обслуживающий прибор заканчивает работу.

При поступлении заявки "товар" если склад переполнен, платим штраф, иначе добавляем единицу к количеству товара на складе. Далее если есть люди в очереди,то образуется пара "товар-покупатель" . Если обслуживающий прибор свободен, моделируется время обслуживания, и пара уходит из системы после окончания работы прибора. В результате получаем выручку с продажи. Иначе пара ждет, когда канал освободится.

При поступлении заявки "покупатель" если очередь переполнена, то заявка уходит, в этом случае у нас нет никаких потерь. В противном случае клиент встает в очередь. Далее если есть свободный товар на складе, то образуется пара. После действуем так же, как и с заявкой "товар".

Чем больше итераций программы будет сделано, тем точнее результаты моделирования. N – количество прогонов программы.

Глава 3. Численные эксперименты

Все расчетные примеры придуманы исключительно автором. Код программы можно посмотреть, пройдя по ссылке `https://github.com/Fran-Tini/Magistracy.git`

3.1 Мгновенная выдача товара

3.1.1 Интенсивности потоков товара и покупателей равны между собой

Рассмотрим пример на следующих данных:

$$\lambda = \mu = 3, \quad r = 900\text{р.}, \quad q = 300\text{р.}, \quad c = 50\text{р.}, \quad s = 10\text{р.},$$
$$T = 1000\text{дней}, \quad N = 1000.$$

Подставляя данные в уравнение 1.9 получим:

$$m = 7.7896$$
$$23(900 + 600) > e(50210e)$$

Сравним значения $H(7)$ и $H(8)$:

$$H(7) = 2115.5057624118303$$
$$H(8) = 2116.187907126869$$

Таким образом, оптимальный размер склада с прибылью 2116 равен 8.

Далее сравним работу имитационного моделирования с мат.моделью. На рис. 3 видно, что оба способа дают одно и то же решение, но время работы аналитического решения 0,0026 с, в то время как имитация заняла 430 с.

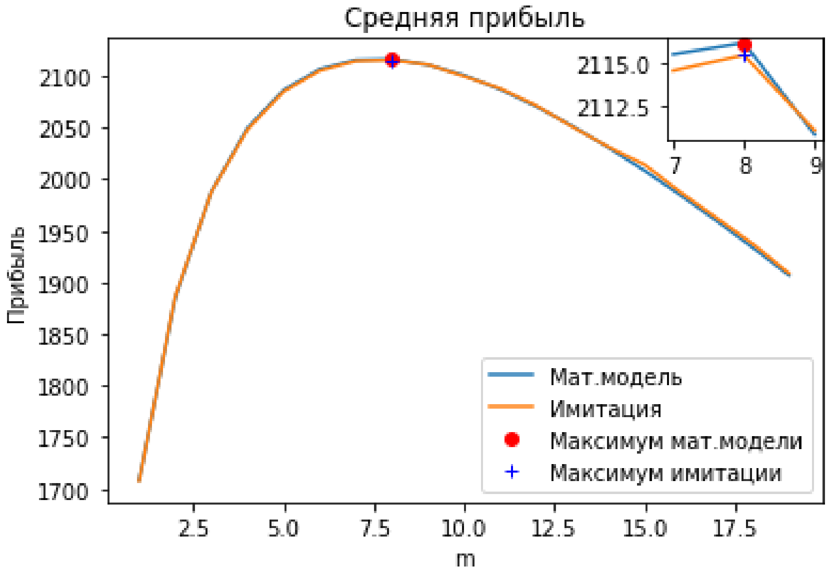


Рис. 3: Зависимость прибыли склада от объема

3.1.2 Интенсивности потоков товара и покупателей не равны между собой

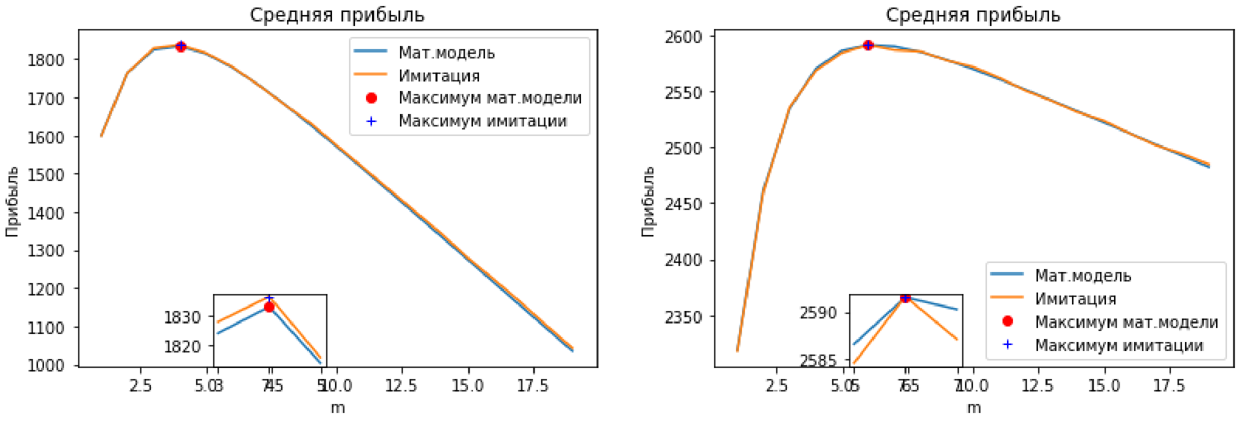
Для начала рассмотрим случай, когда $\lambda > \mu$. Остальные данные оставляем такими же, как в предыдущем примере.

$$\lambda = 5, \quad \mu = 3, \quad r = 900\text{р.}, \quad q = 300\text{р.}, \quad c = 50\text{р.}, \quad s = 10\text{р.},$$
$$T = 1000\text{дней}, \quad N = 1000.$$

Так как вывести явную формулу для объема склада не удалось, строим функцию прибыли по точкам, но единственное ограничение – объем есть целые неотрицательные числа. В численных экспериментах функции считались на $1 \leq m < 20$.

Аналогичные вычисления проведем для случая $\lambda < \mu$. Пусть $\lambda = 3$, $\mu = 5$. Как видно из рис. 4 в первом случае оптимальный размер склада равен 4, во втором - 6.

Так же, как и в предыдущем примере, имитационное моделирование и мат. модель показали один и тот же результат, но вычисления аналитического решения гораздо быстрее имитации. Недостаток обоих методов в том, что мы не знаем, где глобальный максимум будет находиться. В результате нам



$\lambda > \mu$ $\qquad$ $\lambda < \mu$

Рис. 4: Зависимость прибыли от объема склада

необходимо задавать дополнительные ограничения на m.

3.1.3 Интенсивности потоков не известны

Рассмотрим предыдущую задачу при условии, что нам не известны интенсивности входящих потоков. Начальные данные такие же, как в предыдущем примере. Пусть нам не известен входящий поток покупателей, а $\lambda = 3$. Оптимальные значения для данного случая:

$$H = 2661 \quad m = 3, \quad \mu = 9.$$

Как видно из рис. 5, после того как интенсивность покупателей достигнет 5, не стоит вкладываться в привлечение клиентов, т.к. дальнейшее их увеличение даёт совсем незначительный рост прибыли.

Пусть нам не известен поток товара, а $\mu = 3$. Оптимальные значения для данного случая:

$$H = 2116 \quad m = 8, \quad \lambda = 3.$$

Как видно из рис. 6, наблюдается рост прибыли до того, как интенсивность товара достигнет 3, дальнейшее увеличения интенсивности поступления товара приведёт к значительному снижению прибыли. Таким образом, интенсивность потока товаров должна быть равна интенсивности потока покупателей. Полученный результат вполне ожидаем, ведь за переполнения мы несем убытки.

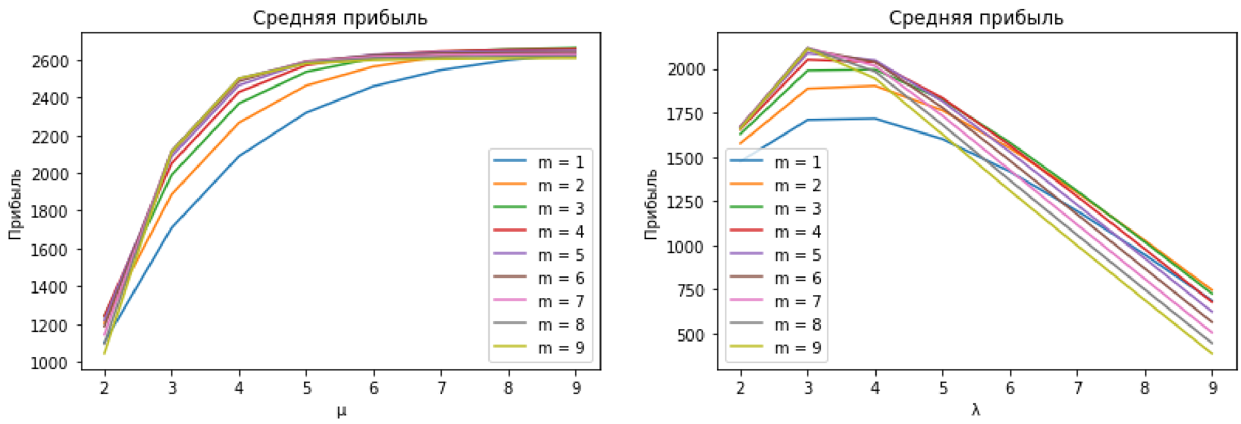


Рис. 6: Зависимости прибыли от λ для различных m при $\mu = 3$.

3.2 Случай не мгновенной выдачи товара

3.2.1 Оптимальный размер склада.

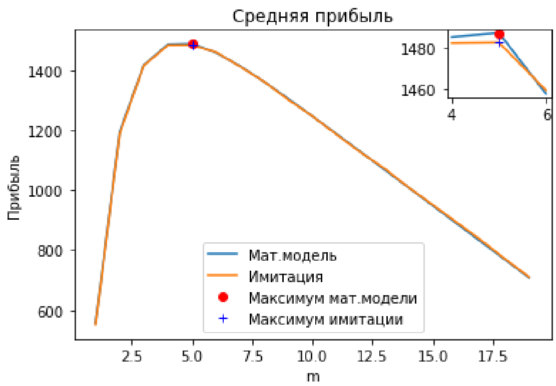
Пусть склад имеет следующие характеристики при условии $\eta < min(\lambda, \mu)$

$$n = 10, \quad r = 900\text{р.}, \quad q = 300\text{р.}, \quad c = 50\text{р.}, \quad s = 10\text{р.},$$
$$T = 1000\text{дней}, \quad N = 1000.$$

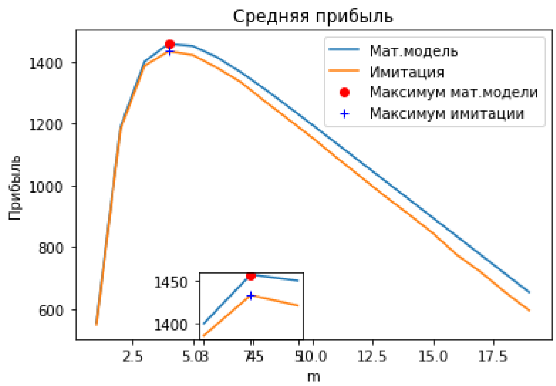
Далее найдем оптимальный размер склада для трех случаев: $\lambda = \mu$, $\lambda > \mu$, $\lambda < \mu$. Результаты вычислений представлены в таблице ниже.

	λ	μ	η	m	H(мат.модель)	H(имитация)
$\lambda = \mu$	6	6	3	5	1487	1482
$\lambda > \mu$	6	4	3	4	1457	1433
$\lambda < \mu$	4	6	3	7	1951	1950

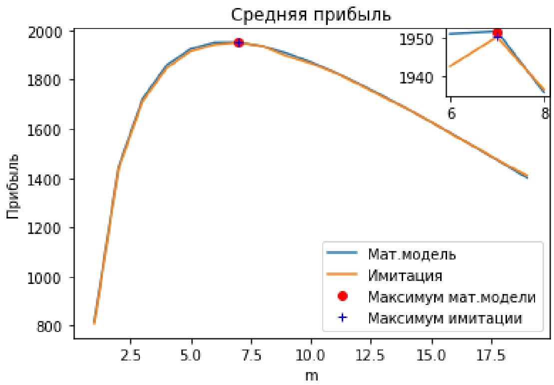
На рис. 7 представлены оптимальные значения, а также сравнение мат. модели и имитационного моделирования. В данном случае есть небольшое расхождения в моделях, всё зависит от такого насколько η меньше $min(\lambda, \mu)$. Чем больше разница между этими величинами, тем точнее мат.модель описывает работу склада.



(a)



(b)



(c)

Рис. 7: Зависимость прибыли от объема склада для случаев: (a) $\lambda = \mu$; (b) $\lambda > \mu$; (c) $\lambda < \mu$

3.2.2 Интенсивности потоков товара и покупателей не известны

Склад имеет следующие характеристики:

$$\eta = 3, \quad n = 10, \quad r = 900\text{р.}, \quad q = 300\text{р.}, \quad c = 50\text{р.}, \quad s = 10\text{р.},$$
$$T = 1000\text{дней}, \quad N = 1000.$$

Пусть нам известен поток товара $\lambda = 6$. Исследовать поведение прибыли будем на интервале $3 < \mu < 14$. Как видно из рис. 8, оптимальные размеры склада и интенсивности покупателей равны 5 и 13 соответственно. Заметим, что после того, как количество людей в день достигнет 5, не стоит вкладываться в привлечении клиентов, т.к. их увеличение даёт незначительный рост прибыли.

Пусть нам известен поток покупателей $\mu = 6$. Исследовать поведение прибыли будем на интервале $1 < \lambda < 10$. Как видно из рис. 9, оптимальные размеры склада и интенсивности покупателей равны 8 и 3 соответственно.

Рост прибыли наблюдается только до того, как интенсивность прихода товаров достигнет 3 , далее прибыль идет на спад. Получили, что оптимальная интенсивность потока товара совпадает с интенсивностью обслуживания.

Данные выводы аналогичны выводам задачи мгновенной выдачи п.3.1.3, только добавляется небольшой сдвиг из-за появления времени обслуживания. Чем больше время обслуживания, тем сильнее сдвиг.

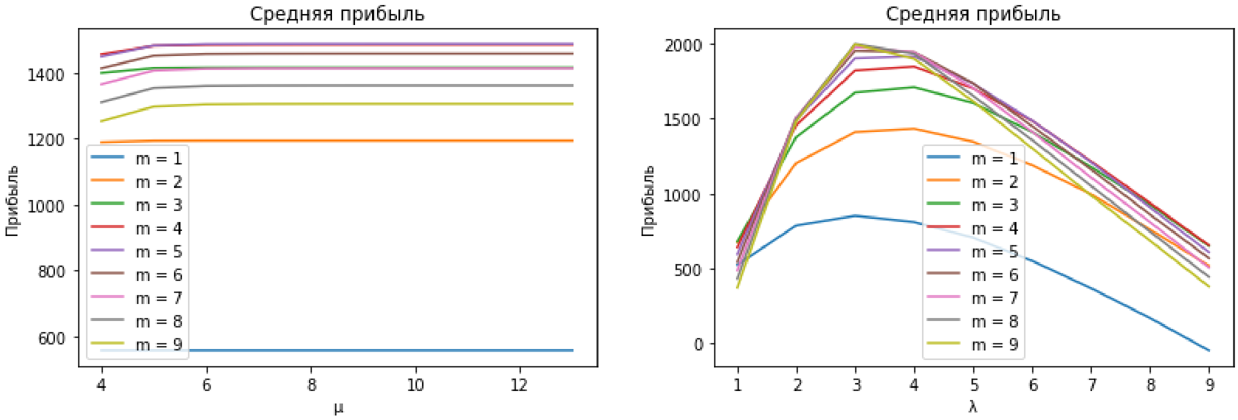


Рис. 9: Зависимости прибыли от λ для различных m при $\mu = 6$.

Заключение

Была рассмотрена задача нахождения прибыли склада в зависимости от объема склада, от интенсивности входящих потоков товаров и покупателей, от затрат на хранение товара и аренды склада, а также в зависимости от штрафов, накладывающихся за переполнение. Рассмотрено два случая:

1. Покупка товара происходит мгновенно. Люди могут выстраиваться в бесконечную очередь. Вероятность встать в очередь зависит от её длины ($f(x) = 1/(x + 1)$).

2. На обслуживание клиента требуется время. В этом случае очередь покупателей ограничена числом n.

Обе задачи решались на основе теории систем массового обслуживания. Для каждого случая построена математическая модель. С помощью имитационного моделирования показано, что математическая модель хорошо отражает реальное поведение системы.

Проведены численные эксперименты, в ходе которых проводился анализ функции прибыли для различных начальных данных. Найдены оптимальные значения объема склада и интенсивности потоков, которые дают наибольшую прибыль.

Список литературы

[1] Griffin D.W., Lim J.S. Multiband excitation vocoder. IEEE ASSP-36 (8), 1988, pp. 1223-1235.

[2] W.H.M. Zijm. Manufacturing And Logistic Systems Analysis, Planning And Control. 29 October 2003

[3] Рыжиков Ю. И. Управление запасами. М: Наука, 1969

[4] Научная библиотека избранных естественно-научных изданий [Электронный ресурс] – https://scask.ru/h_book_tmo.php?id=20

[5] Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г. Системы массового обслуживания – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 240 с.

[6] Фомин Г. П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 462 с.

[7] Глушакова А. М., Встречные очереди в теории массового обслуживания, выпускная квалификационная работа бакалавра, СПбГУ, 2020 — 28 с.

[8] Истомина А. А. , Бадеников В. Я., Истомин А. Л. Управление товарными запасами на основе теории массового обслуживания. Вестник СибГУТИ. 2017.№3

[9] Ослин Б.Г. Моделирование. Имитационное моделирование СМО: учебное пособие – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010 – 128 с.

[10] Эльберг М.С., Цыганков Н.С. Имитационное моделирование : учеб. пособие – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2017 – 128 с.