

Санкт-Петербургский государственный университет

Куклина Алина Александровна

Выпускная квалификационная работа

**Применение реологической модели Сиско в одномерных моделях
гемодинамики**

Уровень образования: магистратура

Направление 27.04.03 «Системный анализ и управление»

Основная образовательная программа «Инженерно-ориентированная
информатика»

Научный руководитель:
кандидат физ.— мат. наук,
доцент, Кривовичев Г. В.

Рецензент:
аналитик ООО "ХКФ Банк"
Гаева Е. С.

Санкт-Петербург

2022

Содержание

Введение	3
1. Обзор литературы	5
1.1. Объект исследования	5
1.2. Математическая модель	7
1.3. Выводы	10
2. Одномерная неньютоновская модель	12
2.1. Одномерная модель	12
2.2. Разностная схема	15
2.3. Стационарное решение	16
2.4. Результаты и выводы	19
3. Моделирование кровотока в сосудистых системах	20
3.1. Течение в одиночном сосуде	20
3.2. Течение в системе из 20 сосудов	21
3.3. Течение в системе из 37 сосудов	24
3.4. Результаты и выводы	30
Заключение	32
Список литературы	34

Введение

По данным всемирной организации здравоохранения (ВОЗ), сердечно-сосудистые заболевания (ССЗ) являются ведущей причиной смертности во всем мире, они составляют около 52-55% из всех смертельных случаев [1]. В России около 31 миллиона человек страдают ССЗ [2]. Примерами таких заболеваний являются ишемическая болезнь сердца, инфаркт, инсульт, гипертоническая болезнь. В клинической практике встречается много подобных заболеваний с разными причинами их развития. Под руководством ВОЗ ведущие государства работают над методами профилактики и лечения этих заболеваний [1].

В разработке этих методов важную роль играет математическое моделирование. Данная методика позволяет без какого-либо вмешательства в организм имитировать всевозможные ситуации и исследовать, как ведет себя система в различных условиях и экспериментировать со способами влияния на нее. На сегодняшний день имеется множество моделей сердечно-сосудистой системы, но их приходится постоянно дорабатывать из-за сложности объекта.

Основным объектом изучения данной работы является одномерная математическая модель течения крови, которая может применяться для моделирования кровотока в больших сосудистых системах. В рамках этой модели кровь описывается как неньютоновская жидкость, для этого используется модель Сиско. В процессе обзора литературы не нашлось упоминаний об исследованиях одномерного аналога данной модели, поэтому было принято решение провести ее подробный анализ и сравнить с результатами для модели Ньютона и модели идеальной жидкости, уже давно известных в этой области.

Целью данной работы является исследование одномерной неньютоновской модели Сиско, описывающей течение крови в сосудистых системах для оценки ее адекватности, наличия преимуществ перед другими

моделями и целесообразности ее применения. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Построение одномерной модели на основе реологической модели Сиско.
2. Получение решения задачи о стационарном течении.
3. Программная реализация алгоритмов численных методов решения нестационарных задач о моделировании течения в сосудистой системе.
4. Решение задачи о моделировании течения крови в одиночном сосуде.
5. Решение задачи о моделировании течения крови в модельных сосудистых системах.
6. Сравнение результатов расчетов с решениями, полученными для других моделей.

Первая глава посвящена обзору литературы по моделированию течения крови. В ней рассказывается о крови и сердечно-сосудистой системе с разных ракурсов. Также приведены данные о трехмерной и одномерной математических моделях кровотока. Во второй главе приводится описание модели Сиско, проводится постановка задачи, приводится разностная схема, используемая в расчетах, и описывается получение стационарного решения. В третьей главе описаны вычислительные эксперименты, проводимые над тремя сосудистыми системами, состоящими из одного, двадцати и тридцати семи сосудов. В ней описаны основные результаты, полученные по модели Сиско, а также их качественное и количественное сравнение с моделями Ньютона и идеальной жидкостью. Сделаны выводы о целесообразности использования данной модели.

1. Обзор литературы

В рамках текущего раздела произведен обзор литературы, посвященной моделированию течения крови. Приведено описание крови как объекта исследования, описан ее состав, выполняемые функции и физико-механические свойства, которые необходимо учитывать при построении модели. Также представлена общая математическая модель течения крови. Описан переход от трехмерной к одномерной модели.

1.1. Объект исследования

Кровь представляет собой жидкую и подвижную ткань в организме, состоящую из плазмы и находящихся в ней форменных элементов. Плазма – это жидкая часть крови, содержащая воду и низкомолекулярные вещества: белки и неорганические компоненты. По сути, плазма является межклеточным веществом жидкой ткани, и составляет 50-60% от всей крови [3]. Остальная часть приходится на форменные элементы – различные клетки крови. В частности, это эритроциты, тромбоциты и лейкоциты. Главная функция эритроцитов – это перенос газов. Именно эти элементы придают крови красный цвет. Тромбоциты вместе с белками плазмы обеспечивают свертываемость крови. Лейкоциты защищают организм от чужеродных тел, участвуют в иммунных реакциях. Они способны выходить за пределы сосуда в другие ткани организма. В среднем объем крови в организме человека составляет около 5,2 литра у мужчин и 3,9 литров у женщин, а ее массовая доля составляет примерно 6-8% [3].

Кровь выполняет жизненно важные функции в организме, среди которых транспортная, регуляторная и защитная [4]. Транспортная функция крови отвечает за дыхательный процесс, то есть перенос кислорода и углекислого газа от дыхательных органов к тканям и обратно, и питательный процесс – перенос питательных веществ от пищеварительного тракта к

клеткам организма. Также сюда относят экскреторную подфункцию, которая отвечает за транспортировку к органам выделения ненужных и вредных продуктов обмена веществ [4].

Кровь участвует в регуляции различных параметров организма, например температуры, а также доставляет необходимые активные вещества к органам – это проявление ее регуляторной функции. Сюда можно отнести гомеостатику – поддержание постоянства внутренней среды (водного баланса, уровня глюкозы в крови и т. п.), функцию креаторных связей – перенос макромолекул, осуществляющих в организме информационные связи, и терморегуляцию – поддержание температуры тела и перераспределение тепла по организму (охлаждение одних органов или областей и согревание других) [4].

За защитную функцию крови отвечают ее составные части, которые обеспечивают иммунные реакции и свертывание крови [4].

Если рассматривать кровь с физической точки зрения, большую роль играют такие свойства как вязкость, несжимаемость и неньютоновость. Вязкость отражает способность жидкостей и газов оказывать сопротивление течению или перемещению [5]. Вязкость крови по большей части зависит от эритроцитов, так как их количество значительно больше остальных форменных элементов, и в меньшей степени от белков плазмы. Вязкость крови примерно в 4 – 5 раз больше вязкости воды, это составляет 0,04 – 0,05 пуаз, а вязкость плазмы в 1,8 – 2,2 раза больше вязкости воды, это 0,018 – 0,022 пуаз [6].

Несжимаемыми считаются те жидкости, которые не меняют своей плотности при изменении давления. Плотность крови опять же зависит от концентрации форменных элементов в ней и веществ в плазме. В среднем плотность крови составляет 1,05 – 1,06 г/см³, плотность плазмы – 1,029 – 1,032 г/см³ [6].

Жидкость называется ньютоновской, когда она удовлетворяет закону вязкости Ньютона, говорящему о том, что напряжение сдвига прямо

пропорционально скорости сдвига [7]. Отдельно взятая плазма будет являться ньютоновской жидкостью, но помимо нее в крови присутствуют еще и форменные элементы. Чем больше гематокрит – отношение объема клеточной части крови к объему плазмы, – тем более вязкой становится кровь, а значит и ее неньютоновское поведение становится более явным, в частности, при очень низких скоростях сдвига. Это происходит из-за того, что эритроциты при низких скоростях сдвига способны образовывать конгломераты из отдельных клеток [7]. Это придает крови неоднородность и неньютоновское поведение.

Все эти свойства оказывают влияние на поведение крови, в связи с чем имеет смысл учитывать их при моделировании течений.

1.2. Математическая модель

Для описания течения крови используются уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, в общем случае имеющие следующий вид:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}), \quad (1.2)$$

где \mathbf{u} – вектор скорости, ρ – плотность, \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил, $\boldsymbol{\Sigma}$ – тензор напряжений, t – время. Здесь (1.1) – условие несжимаемости, (1.2) – уравнение движения.

Тензор напряжений представляется в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}, \quad (1.3)$$

где p – давление, \mathbf{I} – единичный тензор, \mathbf{T} – тензор касательных напряжений. Значение тензора \mathbf{T} зависит от тензора скоростей деформаций \mathbf{D} . Для некоторых неньютоновских жидкостей зависимость \mathbf{T} от \mathbf{D} определяется через так называемое реологическое соотношение:

$$\mathbf{T} = 2\sigma\mathbf{D}, \quad (1.4)$$

где σ представляет собой вязкость.

Настоящая работа подразумевает использование одномерной математической модели. Чтобы выполнить переход от трехмерной модели, нужно ввести ряд упрощений [8]:

1. Кровеносный сосуд представляет собой цилиндр с переменным поперечным сечением, для которого свойственна осевая симметрия. Наиболее удобно в этом случае использовать цилиндрические координаты (r, φ, z) .
2. Ось цилиндра не смещается во времени, а стенки сосуда могут смещаться только радиально.
3. Для любого поперечного сечения давление неизменно: $p = p(t, z)$.
4. Принимается, что компонента скорости u_r пренебрежимо мала в сравнении с компонентой u_z : $\mathbf{u} = u(0, 0, u_z)$.
5. Предполагается, что осевая компонента скорости будет иметь вид:

$$u_z(t, r, z) = U(t, z) s\left(\frac{r}{R}\right) \frac{r}{R(t, z)}, \quad (1.5)$$

где $U(t, z)$ – средняя скорость по поперечному сечению, $R(t, z)$ – радиус сосуда в деформированном состоянии, $s(r/R)$ – профиль скорости.

6. Выполняется граничное условие на стенке сосуда:

$$\mathbf{u} = \dot{\eta} \mathbf{e}_r, \quad (1.6)$$

где \mathbf{e}_r – орт, отвечающий координате r , η – разница радиусов в деформированном и недеформированном состояниях.

Кроме того, для дальнейшей работы понадобится ввести такие величины как коэффициент Буссинеска и объемный расход. Коэффициент Буссинеска – это отношение количества движения жидкости, протекающей за единицу времени через поперечное сечение, к количеству движения, вычисленному по средней скорости [9]:

$$\alpha = \frac{\int s^2 d\gamma}{A(t, z)}. \quad (1.7)$$

Объемный расход показывает, какой объем жидкости протекает через поперечное сечение за единицу времени:

$$Q(t, z) = \iint u_z d\gamma = A(t, z)U(t, z). \quad (1.8)$$

В результате осреднения трехмерных уравнений (1.1) – (1.2) при учете перечисленных упрощений и введенных величин получается одномерная система уравнений [8]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f(A, Q), \quad (1.10)$$

где $A(t, z)$ – площадь поперечного сечения, $Q(t, z)$ – объемный расход, α – коэффициент Буссинеска, ρ – плотность, p – давление. Здесь функция $f(A, Q)$ – это вязкий член, вид которого зависит от используемой модели. Условие несжимаемости преобразуется в уравнение (1.9), а (1.10) следует из уравнения движения. Так как пока переменных больше, чем уравнений, требуется замыкающее уравнение. Обычно для этого используют соотношение площади поперечного сечения и давления в сосуде – уравнение состояния:

$$p = p(A). \quad (1.11)$$

Обычно для артериальных систем его представляют в следующем виде [10]:

$$p(A) = \xi \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_{\min}}}{A_{\min}} p_{\min}, \quad (1.12)$$

где p_{\min} – наименьшее давление, A_{\min} – наименьшая площадь, ξ – коэффициент, который выражается через h – толщину стенки сосуда, E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона [10]:

$$\xi = \frac{\sqrt{\pi h E}}{1 - \nu^2}. \quad (1.13)$$

Какая-либо конкретная трехмерная модель задается видом реологического соотношения (1.4). Известным примером такой модели

является модель Сиско [11]. Таким образом, благодаря описанным упрощениям становится возможным найти вид вязкого члена в уравнениях (1.9) – (1.11), которые будут описывать одномерный вариант модели Сиско. На данный момент в процессе изучения этого вопроса работ по исследованию такой модели в литературе обнаружено не было.

1.3. Выводы

Для описания течения крови в сосудистых системах разработано множество моделей, учитывающих разнообразные свойства, имеющие разного рода упрощения и размерности. Исследования показывают, что разница в результатах решения задач, для которых применяются трехмерные и одномерные модели невелика, но при этом сложность вычислений для трехмерных моделей значительно выше [12]. Исходя из этого, можно прийти к заключению, что при рассмотрении больших сосудистых систем уместно использование одномерных моделей.

Известная одномерная модель, учитывающая все основные свойства крови – это модель Ньютона. Ее недостаток в том, что она не учитывает неньютоновость крови. Безусловно, существуют другие модели, которые предусматривают учет данного свойства. Но здесь вопрос состоит в том, получится ли построить такую модель, результаты применения которой будут значительно отличаться от уже имеющихся, и будет ли уместно ее применение на практике.

В связи с этим, цель диссертационной работы можно сформулировать следующим образом: исследование одномерной неньютоновской модели Сиско, описывающей течение крови в сосудистых системах для оценки ее адекватности и целесообразности ее применения на практике. Для достижения этой цели требуется решить следующие задачи:

1. Построение одномерной модели на основе реологической модели Сиско.

2. Получение решения задачи о стационарном течении.
3. Программная реализация алгоритмов численных методов решения нестационарных задач о моделировании течения в сосудистой системе.
4. Решение задачи о моделировании течения крови в одиночном сосуде.
5. Решение задачи о моделировании течения крови в модельных сосудистых системах.
6. Сравнение результатов расчетов с решениями, полученными для других моделей.

2. Одномерная неньютоновская модель

В этой главе подробно описывается одномерная неньютоновская модель Сиско, а именно: основное реологическое уравнение, одномерные уравнения, начальные и граничные условия, разностная схема для проведения численных расчетов. Также приведено решение задачи о стационарном течении.

2.1. Одномерная модель

В разделе 1.2 была приведена зависимость тензора касательных напряжений от тензора скоростей деформации для некоторых неньютоновских жидкостей – соотношение (1.4), а также указывалось, что в зависимости от выбранной модели его вид будет меняться. Для модели Сиско значение σ равно [11]:

$$\sigma = \mu + kI_2^{\frac{n-1}{2}}, \quad (2.1)$$

где μ, k, n – константы модели Сиско, полученные из экспериментов [13], I_2 – второй главный инвариант тензора скоростей деформации. Тогда само соотношение (1.4) примет вид:

$$\mathbf{T} = 2 \left(\mu + kI_2^{\frac{n-1}{2}} \right) \mathbf{D}. \quad (2.2)$$

В таком случае вязкий член в уравнении (1.10) будет выглядеть как:

$$f(A, Q) = -K_1 s'(1) \frac{Q}{A} - K_2 s'(1) |s'(1)|^{n-1} \frac{Q|Q|^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}}, \quad (2.3)$$

$$K_1 = -\frac{2\pi\mu}{\rho}, \quad K_2 = -\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} k}{\rho}.$$

В выражении присутствует профиль скорости s . В большинстве работ он определяется как:

$$s(y) = \frac{(d+2)(1-y^d)}{d}, \quad (2.4)$$

где d – безразмерный параметр профиля скорости. Как можно заметить, за счет значений d можно варьировать зависимость профиля скорости от безразмерного радиуса y , в частности, получать «приплюснутые» профили скорости, характерные для течения крови. Забегая вперед, стоит сказать, что в дальнейшем будет рассматриваться поведение решения зависимости от d . Входящее в (2.3) значение производной профиля скорости будет иметь вид:

$$s'(1) = -(d+2). \quad (2.5)$$

Также через параметр d вычисляется значение α :

$$\alpha = \frac{d+2}{d+1}. \quad (2.6)$$

В итоге при подстановке (2.3) в систему уравнений (1.9) – (1.11) для одномерной модели Сиско она примет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -K_1 s'(1) \frac{Q}{A} - K_2 s'(1) |s'(1)|^{n-1} \frac{Q |Q|^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}}, \quad (2.8)$$

$$p(A) = \xi \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_{\min}}}{A_{\min}} p_{\min}. \quad (2.9)$$

Для получения решения понадобятся граничные и начальные условия. Чтобы их ввести, удобно переписать уравнения (2.7) – (2.8) в квазилинейной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{f}(\mathbf{U}), \quad (2.10)$$

где векторы и матрицы выглядят так:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A}{\rho} \frac{dp}{dA} - \alpha \left(\frac{Q}{A} \right)^2 & 2\alpha \frac{Q}{A} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ K_1 \frac{Q}{A} + K_2 \sqrt{A} \operatorname{sign} \left(\frac{Q}{A} s'(1) \right) \end{pmatrix}.$$

Принимается, что в начальный момент времени жидкость в сосуде находится в покое, а именно, будем считать, что расход будет равен нулю для любого z . Площадь поперечного сечения задается в зависимости от z :

$$Q(0, z) = 0, \quad A(0, z) = A(z) > 0. \quad (2.12)$$

На каждом из концов системы задается по два граничных условия. Первое условие на входе задает объемный расход:

$$Q(t, 0) = Q(t). \quad (2.13)$$

Одно из условий на выходе – это неотражающее условие. Оно учитывает то, что жидкость свободно выходит за границу выбранной области:

$$I_1 \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{f} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Также на обеих границах задаются условия совместности. У них нет физического смысла, они требуются для того, чтобы система была замкнутой и была возможность найти и Q , и A . Они описывают поведение решения вдоль характеристики, выходящей из вычислительной области в этой точке:

$$I_1 \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = I_1 \mathbf{f}, \quad (2.15)$$

$$I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = I_2 \mathbf{f}, \quad (2.16)$$

где I_1 – левый собственный вектор матрицы системы (1.9) – (1.10), отвечающий отрицательному собственному значению $\lambda_1 = \lambda_1(\mathbf{U})$, I_2 – левый

собственный вектор матрицы системы (1.9) – (1.10), отвечающий положительному собственному значению $\lambda_2 = \lambda_2(\mathbf{U})$. Здесь (2.15) – это условие на входе, а (2.16) – на выходе.

В общем случае, полученную краевую задачу для нестационарных нелинейных уравнений возможно решить только численно.

2.2. Разностная схема

Для решения полученной системы уравнений было решено использовать широко известную для решения задач подобного типа схему Лакса – Вендроффа [14]. Причина такого выбора в том, что ее реализация относительно проста, и, кроме того, эта схема имеет второй порядок точности и по времени, и по пространству.

Для ее применения имеющиеся уравнения должны быть представлены в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{f}(\mathbf{U}), \quad (2.17)$$

где \mathbf{U} и $\mathbf{f}(\mathbf{U})$ определяются, как и в (2.11), а $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ представляется в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + \varphi(A) \end{pmatrix}, \quad \varphi(A) = \int_{A_{\min}}^A \frac{\tau}{\rho} \frac{dp}{dA} d\tau. \quad (2.18)$$

Сама схема предполагает два этапа [14]. Вначале вычисляются значения в промежуточных узлах по формуле:

$$\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j^i + \mathbf{U}_{j+1}^i) - \frac{\Delta t}{2h}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}^i) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^i)) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}\left(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^i\right). \quad (2.19)$$

Затем вычисляются значения в целых узлах:

$$\mathbf{U}_j^{i+1} = \mathbf{U}_j^i - \frac{\Delta t}{h} \left(\mathbf{F}\left(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}\right) \right) + \Delta t \mathbf{f}\left(\mathbf{U}_j^{i+\frac{1}{2}}\right). \quad (2.20)$$

Здесь Δt – шаг по времени, h – шаг по пространству.

Программная реализация осуществлена в пакете Matlab. Такой выбор был сделан по причине широких вычислительных и инструментальных возможностей. Код позволяет проводить вычисления для различных сосудистых систем по модели Сиско (2.7) – (2.9), а также для ньютоновской модели и модели идеальной жидкости, которые использовались для сравнения в качестве эталонных. По итогу работы программ получают значения A , Q и p в зависимости от времени для любой точки сосуда. Дальнейший анализ проводится с использованием полученных значений давления.

2.3. Стационарное решение

Одним из средств для сравнения между собой различных одномерных моделей являются стационарные решения. В случае стационарного течения площадь поперечного сечения A и объемный расход Q не зависят от времени:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \quad (2.21)$$

В этом случае система (1.9) – (1.10) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 &\Rightarrow Q = Q_0 = const, \\ \frac{d}{dz} \left(\alpha \frac{Q_0^2}{A} + \frac{2\chi}{3} A^{\frac{3}{2}} \right) &= f(A, Q_0). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Представляя вязкий член $f(A, Q_0)$ в соответствии с моделью Сиско в безразмерных переменных, получим:

$$\frac{d}{dz} \left(\alpha \frac{Q_0^2}{A} + \frac{2\chi}{3} A^{\frac{3}{2}} \right) = -\varepsilon_1 s'(1) \frac{Q_0}{A} - \varepsilon_2 s'(1) |s'(1)|^{n-1} \frac{Q_0 |Q_0|^{n-1}}{A^{\frac{3n-1}{2}}}, \quad (2.23)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{K_1 T_C}{A_C} = -\frac{2\pi\mu T_C}{\rho A_C}, \quad \varepsilon_2 = \frac{K_2 U_C^{n-1} T_C}{A_C^{\frac{n+1}{2}}} = -\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} k K_2 U_C^{n-1} T_C}{\rho A_C^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (2.24)$$

где T_C , A_C , U_C – характерные величины для обезразмеривания: время, площадь поперечного сечения и скорость, которые берутся для конкретных сосудов из литературы [12].

Далее полученное дифференциальное уравнение (2.23) требуется проинтегрировать, чтобы получить уравнение относительно $A(z)$. Заметим, что в этом уравнении можно разделить переменные. В итоге уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$G(A)dA = Rdz, \quad (2.25)$$

где R есть постоянная. Интегрируя его, получим:

$$\int_{A_0}^A G(\tau)d\tau = R \int_{z_0}^z d\mu. \quad (2.26)$$

В результате получается уравнение для нахождения $A(z)$:

$$F(A(z)) - F(A_0) = \varphi(z), \quad (2.27)$$

где левая часть уравнения соответствует левому интегралу в (2.26), а правая часть уравнения соответствует правому интегралу в (2.26), $A_0 = A(z_0)$.

В рамках данной задачи проинтегрировать уравнение (2.26) аналитически невозможно, поэтому использовался численный метод интегрирования – метод прямоугольников. Суть метода в том, что весь отрезок интегрирования разбивается на маленькие части, и интеграл заменяется суммой площадей прямоугольников с высотами, равными значениям функции [15].

После требуется решить полученное нелинейное уравнение (2.27). Сделать это возможно только численно, для этого подойдет метод Ньютона, формула для которого выглядит следующим образом [15]:

$$A^{k+1} = A^k - \frac{\Phi(A^k)}{\Phi'(A^k)}. \quad (2.28)$$

Здесь нужно учесть, что решить уравнение надо относительно A , но оно находится в верхнем пределе. Для этого понадобится фиксировать z и в

дальнейшем определять A . Это значит, что при расчетах $\Phi(A^k)$ для каждого k потребуется вычислять интеграл.

Уравнение (2.27) математически имеет два разных решения, это видно на Рис. 2.3.1. Причина этого в том, что у функции $F(A)$ существует точка минимума \hat{A} , и единственным решением будет только в случае $A(z) = \hat{A}$. Для таких z , при которых: $F(\hat{A}) < F(A_0) - \varphi(z)$ уравнение (2.27) будет иметь два решения. Для таких z , при которых: $F(\hat{A}) > F(A_0) - \varphi(z)$ уравнение (2.27) решений иметь не будет. Одно из них (верхнее) говорит о том, что площадь будет уменьшаться при увеличении длины, а другое (нижнее) – о том, что площадь будет увеличиваться при увеличении длины. Но только одно из них – первое – физически адекватно [16].

Одной из целей анализа стационарного решения было исследование зависимости площади поперечного сечения от вида профиля скорости. Результаты расчетов представлены на Рис. 2.3.1. График показывает, как меняется площадь в зависимости от z . По графику видно, что увеличение значения параметра d приводит к уменьшению промежутка существования решений.

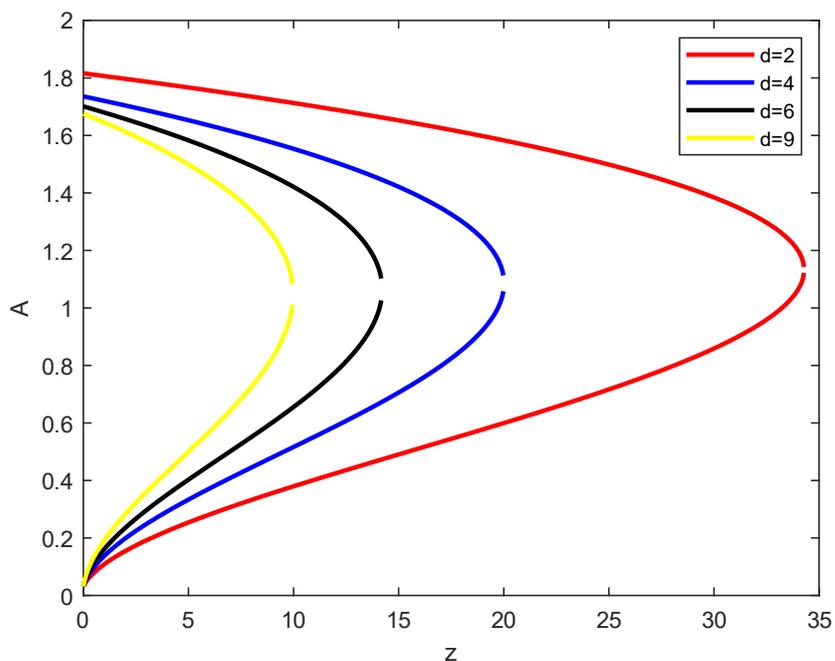


Рис. 2.3.1. Графики стационарных решений при различных d

2.4. Результаты и выводы

По итогу данного раздела были получены следующие результаты:

1. Построена одномерная модель течения крови, основанная на реологической модели Сиско.
2. Поставлена задача о нахождения стационарного решения.
3. Предложен алгоритм нахождения стационарного решения.
4. Численными методами получены стационарные решения и исследовано влияние вида профиля скорости.

Исходя из всего перечисленного, можно сделать выводы по поводу влияния профиля скорости на решение:

1. От выбора параметра d будет зависеть наличие решений и их количество.
2. При увеличении параметра d область существования решений уменьшается.

3. Моделирование кровотока в сосудистых системах

В текущем разделе будут описаны три модели сосудистых систем: одиночный сосуд, модель аорты и близлежащих сосудов и модель артериальной части сердечно-сосудистой системы. При решении задач для таких систем исследовалась модель Сиско и проводилось ее сравнение с другими моделями.

3.1. Течение в одиночном сосуде

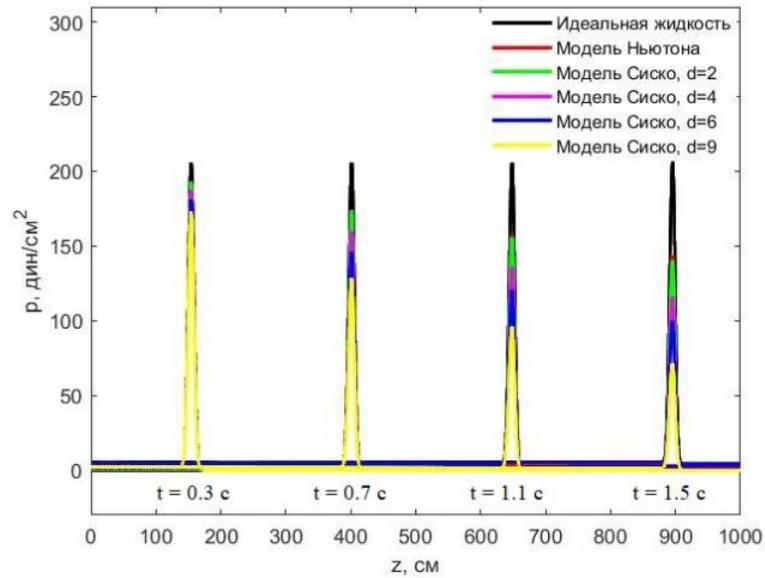
В рамках анализа сперва рассматривалась система из одного сосуда. Для вычислений использовались следующие параметры [17]:

- длина сосуда: $L = 1000$ см;
- плотность крови: $\rho = 1,05$ г/см³;
- параметр крутизны профиля скорости: $d = 2, 4, 6, 9$;
- параметры модели Сиско: $\mu = k = 0,035$ и $n = 0.9$.

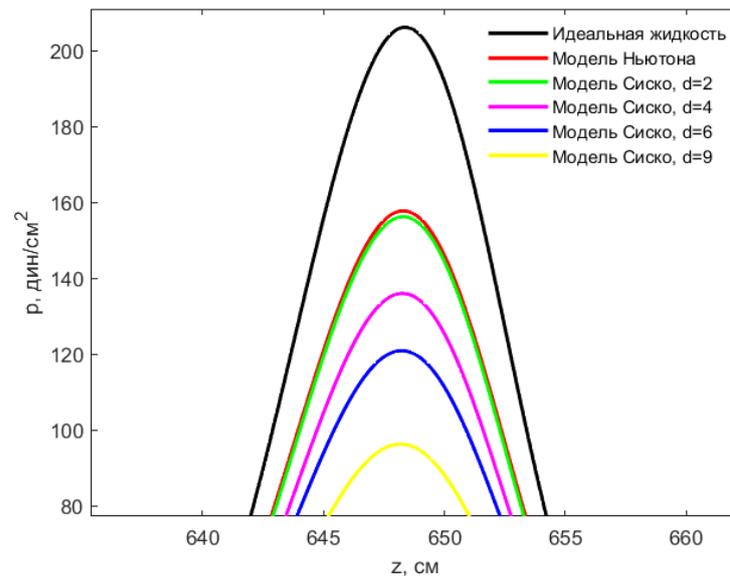
Задавались граничные условия (2.13)–(2.16) и такие начальные условия для площади поперечного сечения A и объемного расхода Q :

$$\begin{aligned} Q(0, z) &= 0, \\ A(0, z) &= A_0 = \pi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для оценки данных, полученных при помощи модели Сиско, вычисления проводились дополнительно для модели Ньютона и случая идеальной жидкости. Эти результаты можно увидеть на Рис. 3.1.1. График наглядно демонстрирует, что в случае отсутствия вязкости амплитуда давления не меняется. На фоне этих показателей видно, что в моделях, где вязкий член отличен от нуля, наблюдается затухание. Наиболее близкий к модели Ньютона результат наблюдается при использовании модели Сиско с параметром $d = 2$. Далее при увеличении этого параметра, а значит повышении вязкости, затухание происходит все сильнее, а отличие от модели Ньютона и идеальной жидкости все больше.



а)



б)

Рис. 3.1.1. а) график давления на разных участках сосуда в фиксированные моменты времени: $t = 0.3, 0.7, 1.1, 1.5$; б) увеличенный график давления в момент времени $t = 1.1$ с

3.2. Течение в системе из 20 сосудов

В качестве первого примера сосудистой системы рассматривалась система из двадцати сосудов – модель аорты и близлежащих сосудов из [12]. Для проведения расчетов было выбрано несколько сосудов, отличающихся друг от друга своим положением в системе: Ао. V (5 сосуд), Ао. IX (9 сосуд),

L. com. carotid (12 сосуд), Inf. mesenteric (18 сосуд) (Рис. 3.2.1). Модельные параметры для системы взяты из [12], параметры для модели Сиско аналогичны параметрам из предыдущего раздела.

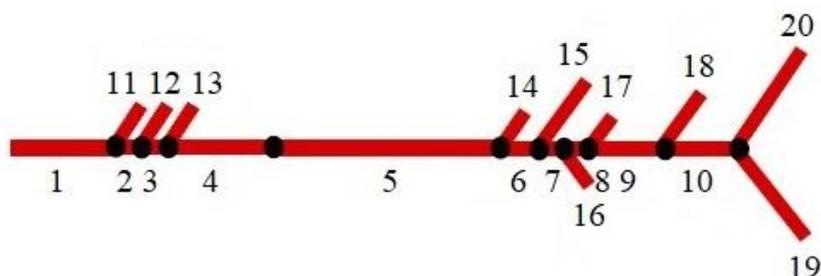


Рис. 3.2.1. Сосудистая система

Расчеты были произведены для модели Сиско при различных значениях параметра d : $d = 2, 4, 6, 9$. Полученные результаты будем сравнивать с результатами расчетов для моделей Ньютона и идеальной жидкости.

В процессе выполнения программы решение получалось на временном промежутке от 0 до 4 секунд. Для сравнения результатов было выбрано давление. Так как получившаяся функция является периодической, то для дальнейшего рассмотрения использовался не весь промежуток, а один период. В данном случае – третий, так как к этому момента колебания уже являются установившимися. Итоговые графики можно увидеть на Рис. 3.2.2.

По полученным графикам видно, что для сосудов 5 и 9 значения, полученные при помощи разных моделей, достаточно близки. Для сосудов 12 и 18 разница более заметна на «пиках». При этом очевидно, что для всех сосудов справедливо то, что чем меньше параметр d , тем ближе результат к ньютоновской модели и идеальному случаю.

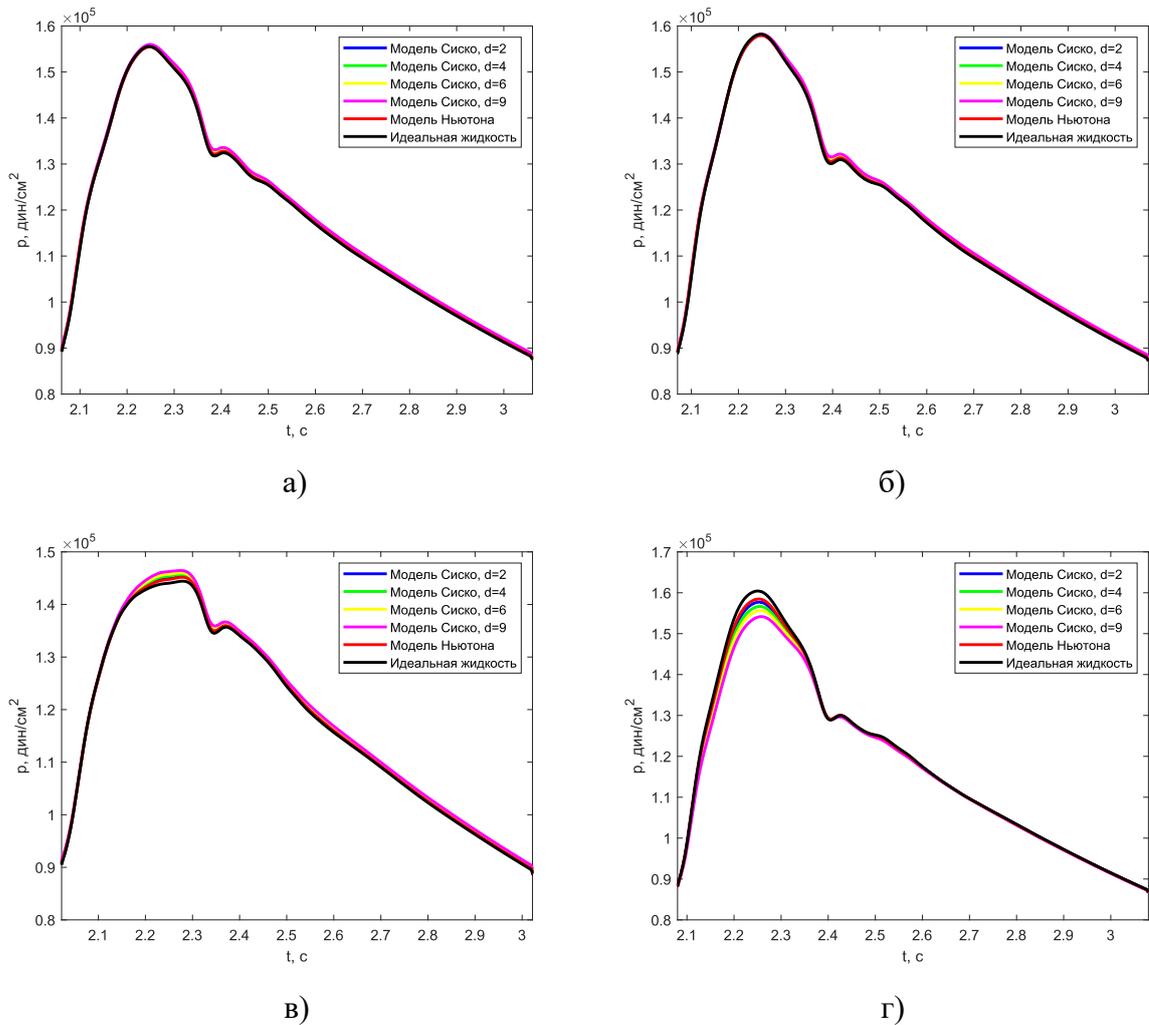


Рис. 3.2.2. Графики зависимости давления от времени для а) 5-го сосуда; б) 9-го сосуда; в) 12-го сосуда; г) 18-го сосуда

Помимо визуального (качественного) сравнения проводилось еще и количественное. Для этого использовались два критерия, показывающие относительную разницу между значениями, полученными при использовании разных моделей: I_1 – модели Сиско и модели Ньютона, I_2 – модели Сиско и идеальной модели:

$$I_1 = \frac{\|P_N - P_S\|}{\|P_N\|} \cdot 100\%, \quad (3.2)$$

$$I_2 = \frac{\|P_{Id} - P_S\|}{\|P_{Id}\|} \cdot 100\%, \quad (3.3)$$

где P_S – решение при использовании модели Сиско, P_N – решение при использовании модели Ньютона, P_{Id} – решение в случае идеальной жидкости. В качестве нормы использовалась евклидова норма вектора.

Полученные значения критериев не превышают полутора процента, то есть отклонения совсем небольшие. Кроме того, они подтверждают, что при увеличении параметра d разность в решениях, полученных двумя моделями, будет увеличиваться, но незначительно (Рис. 3.2.3). Причиной того, что отклонения решений, полученных для разных моделей, являются малыми, связано с тем, что в представленной системе все сосуды находятся вблизи левого желудочка сердца, из-за чего влияние вязкости не является существенным. Решения, полученные по разным моделям, становятся хоть немного различимыми только для сосуда 18 (Рис. 3.2.2 г)), который расположен на некотором удалении от сердца.

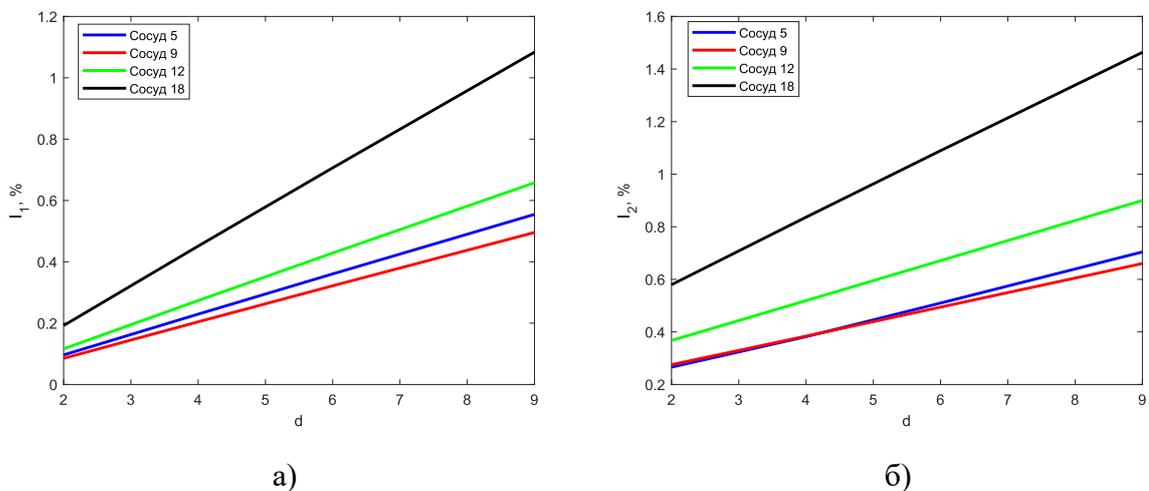


Рис. 3.2.3. Значения а) I_1 и б) I_2 при разных d для системы с 20-ю сосудами

3.3. Течение в системе из 37 сосудов

В этом разделе рассмотрим систему из тридцати семи сосудов из [18], являющуюся моделью артериальной части сердечно-сосудистой системы, которая включает в себя наиболее крупные центральные артерии человека (Рис. 3.3.1).

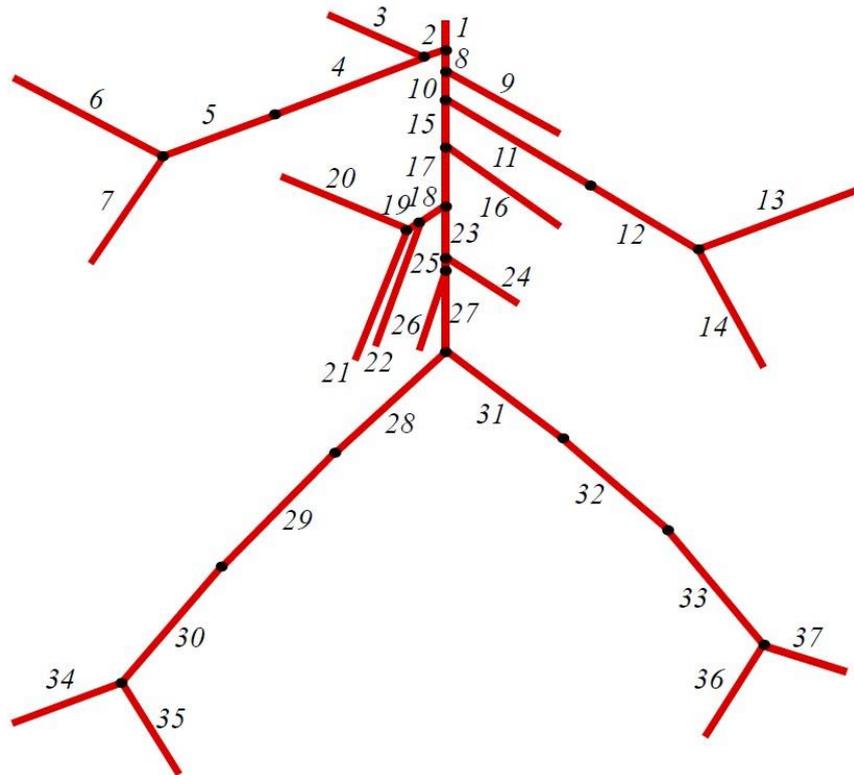


Рис. 3.3.1. Модель артериальной части сердечно-сосудистой системы

Модельные параметры данной системы взяты из [18]. Параметры для модели Сиско и значения параметра d аналогичны предыдущему случаю. Для проведения расчетов также были выбраны сосуды, находящиеся в разных частях системы: R. ulnar (7 сосуд – правая локтевая), L. ulnar (14 сосуд – левая локтевая), Thoracic aorta II (17 сосуд – грудная), Splenic (20 сосуд – селезеночная), Abdominal aorta III (27 сосуд – брюшная), R. iliac-femoral II (29 сосуд – правая подвздошно-бедренная), R. anterior tibial (34 сосуд – правая передняя большеберцовая). Зависимость давления от времени строилась на промежутке времени от 0 до 15 секунд. Для сравнения результатов брался один период. Результаты вычислений можно увидеть на Рис. 3.3.2 – 3.3.8.

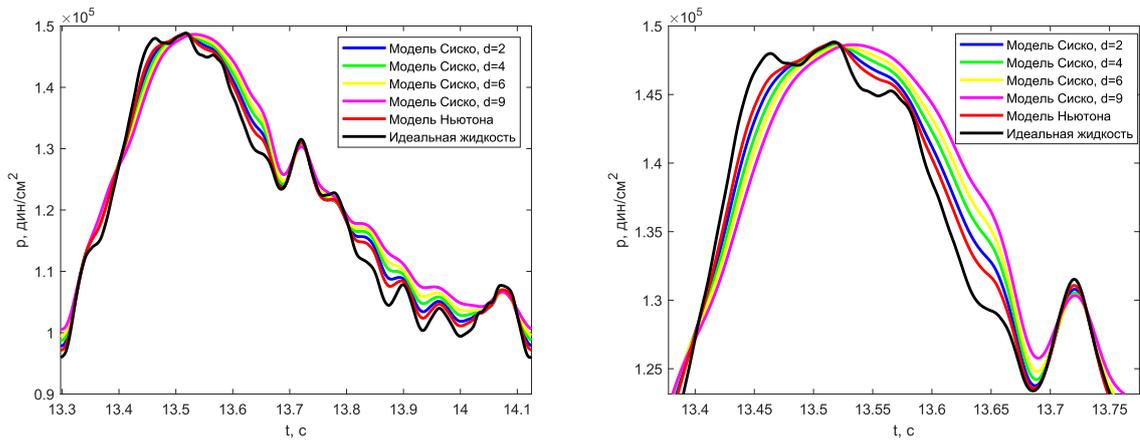


Рис. 3.3.2. График зависимости давления от времени для 7-го сосуда

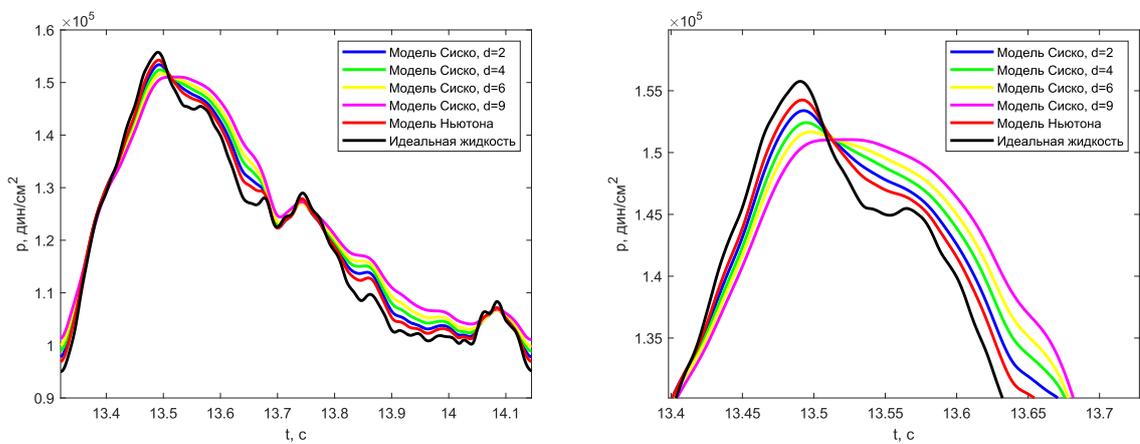


Рис. 3.3.3. График зависимости давления от времени для 14-го сосуда

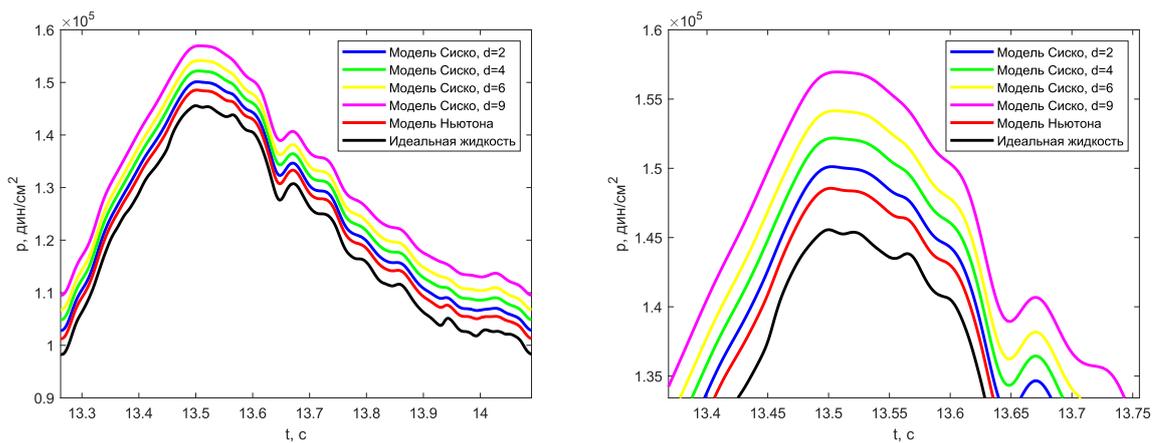


Рис. 3.3.4. График зависимости давления от времени для 17-го сосуда

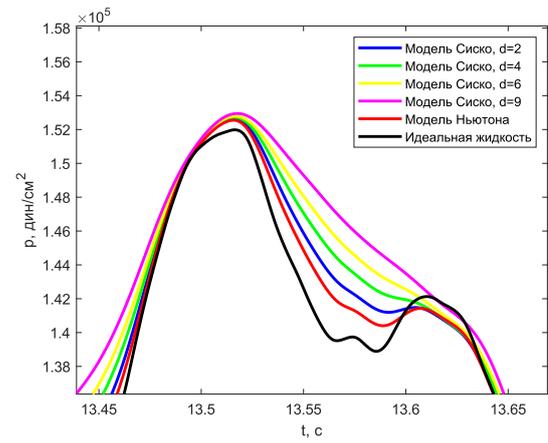
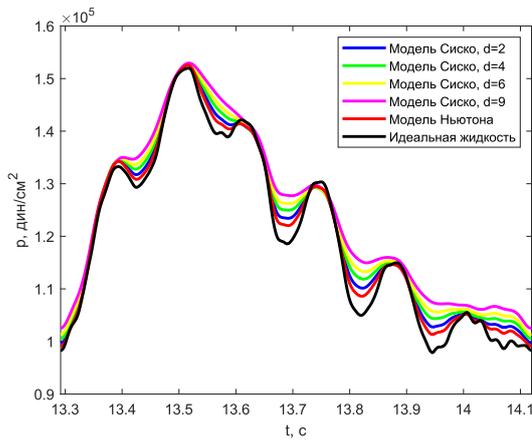


Рис. 3.3.5. График зависимости давления от времени для 20-го сосуда

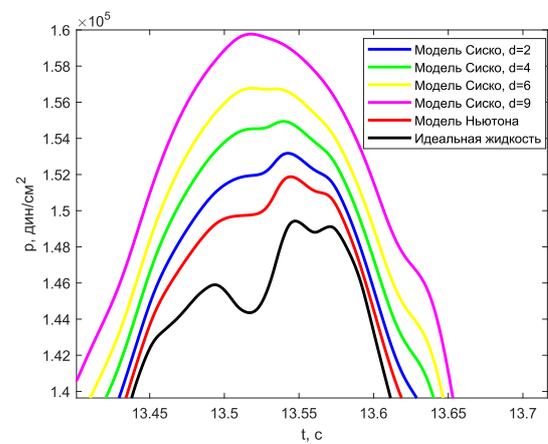
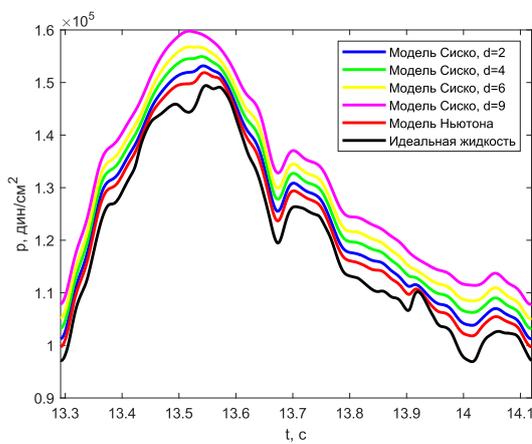


Рис. 3.3.6. График зависимости давления от времени для 27-го сосуда

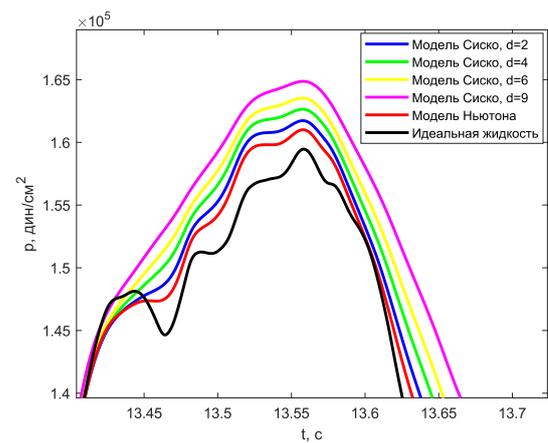
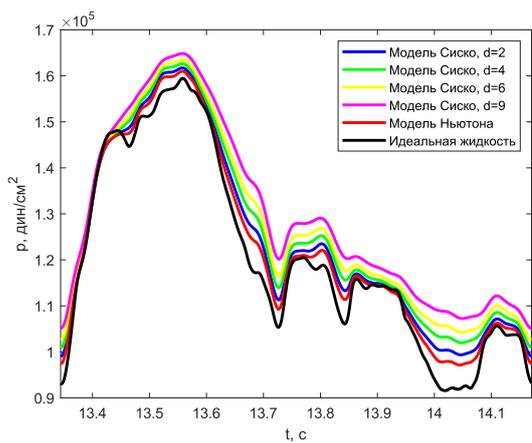


Рис. 3.3.7. График зависимости давления от времени для 29-го сосуда

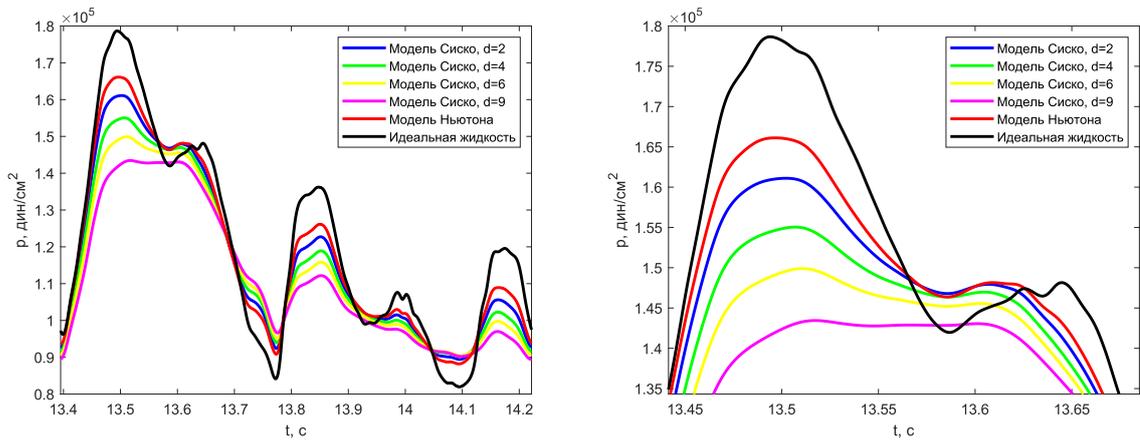


Рис. 3.3.8. Графики зависимости давления от времени для 34-го сосуда

Рассмотрим разницу в результатах, полученных для различных моделей. Данная система содержит больше сосудов артериальной части с разными характеристиками, чем ранее рассмотренная модель аорты, следовательно, и отклонения оказались больше. Анализируя графики, можно заметить, что задание ненулевого значения вязкого члена сглаживает «пики», которые ярко выражены в идеальном случае. И по-прежнему сохраняется закономерность: чем больше значение параметра d , тем больше отличия в результатах модели Сиско от других.

Прежде чем говорить о значениях отклонений, приведем значения критериев I_1 и I_2 (Рис. 3.3.9).

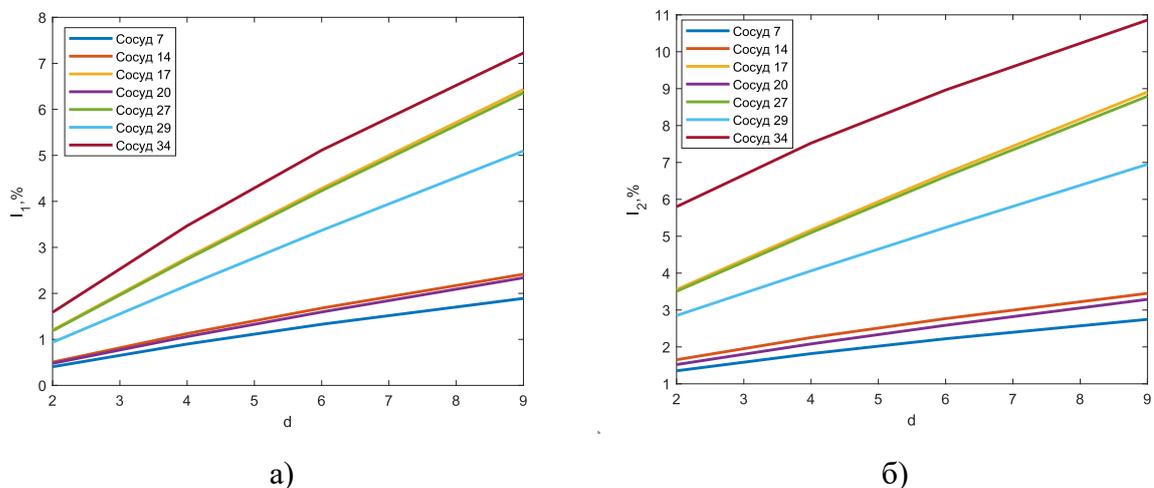


Рис. 3.3.9. Значения а) I_1 и б) I_2 при разных d для системы с 37-ю сосудами

На графике еще раз можно отметить верность выводов о зависимости отклонений от d . Кроме того видно, что отклонения значительно больше, и максимальное значение в случае сравнения с моделью Ньютона доходит почти до 8%, а в случае идеальной жидкости – до 11%. Порядок расположения линий на графике одинаковый.

Теперь рассмотрим значения I_1 и I_2 в зависимости от рассматриваемого сосуда. Наибольшее отклонение, ожидаемо, наблюдается для 34-го сосуда. Причина в том, что в процессе течения за счет вязкости происходит затухание. В разделе 3.1 уже было показано, что для модели Сиско это происходит быстрее, чем для ньютоновской модели. Сосуд 34 расположен в ноге, то есть является наиболее удаленным от сердца, и пульсовая волна, проходя такое длинное расстояние, затухает наиболее сильно за счет наличия вязкой диссипации.

Чуть меньшее и практически равное между собой отклонение имеют решения для сосудов 17 и 27, которые находятся в грудной и брюшной полостях, соответственно. Казалось бы, они совсем рядом с сердцем, значит отклонения наоборот должны быть меньше. Но здесь играет роль другой фактор. Для более вязкой жидкости требуется больше усилий, чтобы ее протолкнуть по сосуду, то есть давление изначально должно быть выше, поэтому и возникает разница в значениях.

Разную природу таких отклонений можно заметить даже по форме графика и порядку расположения линий. У 17 и 27 сосудов кривые значений как будто сдвинуты по оси ординат. Для этих сосудов не наблюдается затухание, но наличие отклонений в решениях связано с тем, что для проталкивания крови в таких сосудах требуется прикладывать разные давления при разных вязкостях. Подтверждением этого также служит порядок расположения линий на графике: при увеличении d , то есть при повышении вязкости, линии графика оказываются выше. Значит, для них изначально требуется более высокое давление. В случае 34-го сосуда наибольшие отклонения видны на пиках. Так как при увеличении d , то есть

при повышении вязкости, затухание происходит сильнее, то, минуя такое большое расстояние, значения давлений при разных вязкостях уже успели выровняться относительно друг друга, и исказиться снова в другую сторону. Поэтому и линии на графике расположены иначе: чем больше d , тем ниже график.

Далее по убыванию отклонений идет сосуд 29. Здесь логика аналогична случаю с сосудами 17 и 27. Так как расстояние от сердца уже больше, то и линии расположены ближе друг к другу, местами даже практически совпадают. Однако этого все еще недостаточно для значительного уменьшения погрешности.

Наименьшее отклонение у сосудов с номерами 20, 7 и 14. Если взглянуть на изображение схемы (Рис. 3.3.1), то можно увидеть, что они находятся в районе селезенки и в правой и левой руках соответственно. Этого расстояния достаточно, чтобы нивелировать разницу в значениях давления, но при этом затухание еще не настолько сильное, чтобы значительно понизить давление относительно других моделей.

3.4. Результаты и выводы

В ходе вычислительных экспериментов были выполнены расчеты для трех видов сосудистых систем при использовании трех моделей: модели Сиско, модели Ньютона и модели идеальной жидкости. По итогу были получены следующие результаты:

1. Поставлена и решена задача о моделировании течения крови в одиночном сосуде, и получены данные о влиянии параметра d модели Сиско на скорость затухания значения давления.
2. Поставлена и решена задача о моделировании течения крови на примере модели аорты и близлежащих сосудов.
3. Поставлена и решена задача о моделировании течения крови в модели артериальной части сердечно-сосудистой системы человека.

4. Выявлены закономерности, имеющие место при использовании модели Сиско, и отличия изучаемой модели от стандартных.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Анализ полученных данных показал, что модель Сиско по своим результатам достаточно близка к стандартным моделям. Отсюда можно сделать вывод, что неньютоновость слабо влияет на результаты, и отклонения в решениях составляют менее 11%, если сравнивать с идеальной жидкостью, и 8% по сравнению с ньютоновской моделью.
2. Реализация модели Сиско и вычислительный процесс сложнее тех моделей, с которыми проводилось сравнение. Исходя из того, что неньютоновость жидкости показала слабое влияние на результаты, можно сделать заключение, что нет необходимости использовать более сложную модель.

Заключение

Исследования в области гемодинамики являются действительно важными для современной медицины и математическое моделирование играет здесь большую роль. Эта методика позволяет имитировать строение, свойства и поведение сердечно-сосудистой системы. Существующие модели уже сейчас спасают жизни множеству людей и упрощают работу врачам. Разработка новых моделей и совершенствование старых позволяет им становиться более точными по отношению к реальной кровеносной системе.

В ходе данной работы была рассмотрена одномерная неньютоновская модель Сиско, описывающая течение крови. На основе уже известной трехмерной модели, путем определенных упрощений, были получены одномерные уравнения, описывающие гемодинамические процессы. Посредством использования схемы Лакса – Вендроффа была осуществлена программная реализация модели и получены решения для трех сосудистых систем. Результаты сравнивались с решениями, полученными при помощи модели Ньютона и модели идеальной жидкости, на основе чего были выявлены некоторые закономерности и сделаны определенные выводы.

Говоря о числах, стоит отметить, что модель аорты (система из 20 сосудов) показала совсем небольшие относительные отклонения решений, отвечающих разным моделям: не более 1,1% в сравнении с моделью Ньютона и не более 1,5% в сравнении с моделью идеальной жидкости. Графики значений давления в определенных сосудах для разных моделей практически идентичны. Модель артериальной части всей сосудистой системы человека более масштабна, здесь отклонения ожидаемо получились больше: до 8% в сравнении с моделью Ньютона и до 11% в сравнении с моделью идеальной жидкости. На графиках давления такая разница более очевидна.

Исходя из всего перечисленного можно сделать вывод, что неньютоновость крови, описываемая такой моделью, слабо влияет на результаты. Отклонения от моделей, которые не учитывают это свойство,

оказались довольно малыми. И если брать в расчет сложность реализации модели Сиско в сравнении с двумя другими рассматриваемыми моделями, то можно сказать, что использование ее на практике допустимо, но рациональным скорее не является. Помимо этого, была выявлена некая закономерность относительно параметра d . При рассмотрении каждой из трех систем оказалось, что при его увеличении, а значит при повышении вязкости, скорость затухания давления растет, то есть и отличия от других моделей возрастают. Наиболее близкой модель Сиско к модели Ньютона оказалась при параметре $d = 2$.

По итогу работы все поставленные задачи выполнены, и конечная цель достигнута.

Список литературы

1. [https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-\(cvds\)](https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-(cvds))
2. Глущенко В. А., Иркиенко Е. К. Сердечно-сосудистая заболеваемость - одна из важнейших проблем здравоохранения // Медицина и организация здравоохранения, 2019. №1. С. 222–333.
3. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Кровь>
4. Сусликова М. И., Губина М. И., Александров С. Г. и др. Избранные вопросы физиологии крови: учебное пособие // ФГБОУ ВО ИГМУ Минздрава России, Кафедра нормальной физиологии. – Иркутск: ИГМУ, 2021. 102 с.
5. Аксенова В. М., Осипов А. П. Морфология и физиология системы крови // М-во с.-х. РФ, федеральное гос. Бюджетное образов. Учреждение технологич. ун-т им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2019 – 123 с.
6. Лавриненко В. А., Бабина А. В. Физиология крови для студентов КРИ // Новосибирский государственный университет, 2015 – 116 с.
7. Fasano A. Sequeira A. Hemomath. The Mathematics of Blood // Springer, 2017. P. 340.
8. Formaggia L, Lamponi D and Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // J. of Eng. Math, 2003. Vol. 47. P. 251-276.
9. Френкель Н.З. Гидравлика // Энергоиздат. М-Л., 1976 – 345с.
10. Eleuterio F. Toro. Brain venous haemodynamics, neurological diseases and mathematical modelling. A review // Applied Mathematics and Computation, 2016. Vol. 272. P. 542 – 579.
11. Ali N., Zaman A., Sajid M. Unsteady blood flow through a tapered stenotic artery using Sisko model // Computers & Fluids, 2014. Vol. 101. P. 42 – 49.

12. Xiao N., Alastruey J., Figueroa C. A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2014. Vol. 30. P. 203–231.
13. Toghraie D., Esfahani N.N. and Zarringhalam M. et al. Blood flow analysis inside different arteries using non-Newtonian Sisko model for application in biomedical engineering // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2020. Vol. 190. P. 1–8.
14. Зализняк В. Е. Основы вычислительной физики. Часть 1. Введение в конечно-разностные методы // Москва: Техносфера, 2008. 224 с.
15. Бояршинов М. Г. Численные методы: Учебное пособие для студентов направления “Прикладная математика и информатика” // Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1998. 176 с.
16. Mukhin S. I., Menyailova M. A., Sosnin N. V., Favorskii A. P. Analytic study of stationary hemodynamic flows in an elastic vessel with friction // *Differential Equations*, 2007, vol. 43. P. 1011-1015.
17. Boileau E. and al. A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2015.
18. Mattys K.S., Alastruey J., Peiro J., Khir A.W., Segers P., Verdonc P.R., Parker K.H., Sherwin S.J. Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D numerical simulations against in vitro measurements // *Journal of Biomechanics*, 2011. Vol. 44. P. 2250–2258.