

Санкт-Петербургский государственный университет

ГОРДИЕВИЧ Кирилл Александрович

Выпускная квалификационная работа

**КООРДИНАЦИЯ ГРУППЫ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ ПРИ
ПРОХОЖДЕНИИ ПОЛОСЫ ПРЕПЯТСТВИЙ**

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа ВМ.5751.2020 «Математическое моделирование,
программирование и искусственный интеллект»

Научный руководитель:

Профессор, кафедра теоретической
кибернетики
д. ф.-м. н., доцент А. С. Матвеев

Рецензент:

Профессор научно-технологического
университета «Сириус»
к. ф.-м. н., доцент И. Б. Фуртат

Санкт-Петербург

2022

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Theoretical Cybernetics

GORDIEVICH Kirill Aleksandrovich

Graduation Project

**COORDINATION OF MOBILE ROBOTS WHEN PASSING THROUGH AN
OBSTACLE COURSE**

Scientific Supervisor:

Associate Professor, Department of
Theoretical Cybernetics A. S. Matveev

Reviewer:

Associate Professor I. B. Furtat

Saint Petersburg

2022

Оглавление

Введение	4
1. Постановка задачи	8
2. Модель робота и предположения	10
3. Закон управления	14
4. Основной результат	18
5. Доказательства	21
6. Результаты компьютерного моделирования	30
7. Заключение	43
Список литературы	44

Введение

За последние десятилетия тема управления группой мобильных роботов и их формацией стала широко изучаемой [1, 2]. В данной области неуклонно растёт интерес к теме децентрализованного распределённого управления в условиях сенсорных ограничений и отсутствия коммуникации между роботами.

В работе рассматривается специальная задача децентрализованного и распределённого управления формацией группы роботов для обеспечения эффективного заметающего покрытия территории. Возникающая область задач заметающего покрытия группой роботов быстро приобретает всё большее значение благодаря постоянно растущему использованию мобильных роботизированных групп и беспроводных сетей для исследования или распределённой обработки протяженных объектов.

Примеры соответствующих миссий включают автоматическое разминирование [3], экологические исследования, разведку, очистку корпуса корабля, мониторинг мест захоронения отходов на дне океана [4], съёмку морского дна для разведки углеводородов. [5], обнаружение источников утечки опасных химических веществ, выброса паров или загрязняющих веществ, обнаружение разливов нефти, поиск экстремумов естественных полей [6], спасательные операции в городах после стихийных бедствий или техногенных катастроф, а также многое другое.

Чтобы добиться успеха в таких миссиях, элементы сети должны занимать правильные, желательно оптимальные, места с минимальным требованием, чтобы любая точка рабочего пространства была покрыта зоной видимости какого-то элемента. Если сеть большая, размещение элементов в таких местах внешними средствами может быть сложным и дорогостоящим. Это делает автономное саморазвертывание мобильных элементов привлекательным вариантом [7, 8, 9, 10]: начиная со случайных позиций, роботы должны сами достичь оптимального развертывания за счет скоординированных действий. Для достижения этой цели необходимы масштабируемые и распределённые

законы управления, сочетающие в себе простоту реализации, малое потребление ресурсов, устойчивость к отказам элементов, их взаимозаменяемость и твердые гарантии глобальной сходимости.

Однако многочисленные исследования задачи покрытия были сосредоточены в основном на геометрических аспектах проблемы [11, 12, 13]. Среди наиболее популярных тем — задача размещения узлов (сколько узлов нужно в сети и где их разместить) и построения пути, проходящего в непосредственной близости от любой точки интересующей области. При этом мало внимания уделялось вопросу автономного самораспределения групп роботов.

В частности, в задаче рассылки узлов основное внимание уделяется распределению узлов по предварительно вычисленным точкам, определенным алгоритмом размещения, и, возможно, улучшению качества покрытия; см., например, [14, 15]. Многоагентное управление движением для достижения заданной статической конфигурации — еще одна хорошо изученная область; см., например, [16, 17]. Некоторые из соответствующих подходов, например, основанные на потенциальных полях, виртуальных силах [18, 19] или разбиении Вороного [17, 20], способны работать с неизвестными рабочими зонами. В то же время доказательные гарантии глобальной сходимости по-прежнему остаются редкостью в соответствующей литературе, а проверка алгоритма часто сводится к компьютерным тестам и/или вторичным теоретическим фактам, таким как локальная оптимальность, вытекающая из сходимости к центрам ячеек Вороного. Доступно лишь несколько строгих результатов по глобальной сходимости (см., например, [21, 22, 23]), а разработка строго обоснованных глобально сходящихся законов управления для задач покрытия группой роботов в целом находится на ранней стадии.

Предложенный в работе строго обоснованный и глобально сходящийся распределенный закон управления для задачи покрытия, сочетающий элементы барьерного и заметающего покрытия [24], призван заполнить некоторые из вышеперечисленных пробелов. Группа роботов неизвестного размера должна прийти к общему перпендикулярному сечению неизвестного коридора, равномерно распределиться по его ширине в максимально плотный сетевидный барьер и прочесать коридор, двигаясь по нему как единое целое с предварительно заданной скоростью в заданном направлении. Эта схема покрытия представляет интерес для различных приложений, включая разминирование, экологические исследования, разведку при спасательных операциях и мониторинг

экологических границ, и это лишь некоторые из них.

Для описанной выше миссии алгоритмы распределенного управления с гарантиями глобальной сходимости приведены в [25, 22, 23]. Однако соответствующие результаты сильно зависят от предположения, что коридор не содержит препятствий. С одной стороны, это предположение не выполняется для многих реальных приложений. С другой стороны, наличие препятствий существенно усложняет дело, делает невозможным базовые алгоритмические решения из [25, 22, 23] и добавляет дополнительную существенную проблему обхода препятствий к набору задач, решаемых распределенным образом, так что основная цель миссии должна быть выполнена при наличии препятствий.

Кроме того, выводы [25, 22] связаны с моделями дискретного времени и существенно опираются на ограниченность снизу периода дискретизации по времени. Это ограничение может препятствовать своевременному обновлению управления и, таким образом, может повлечь за собой негативное влияние на работу команды, например, привести к столкновению роботов друг с другом, эта проблема не проработана в [25, 22].

В данной квалификационной работе рассматриваются мобильные роботы, перемещающиеся с ограниченной скоростью, и смоделированные как простые интеграторы, каждый из которых имеет конечную зону видимости. В качестве рабочей зоны рассматривается коридор, который моделируется как полоса между двумя параллельными линиями в теоретической части статьи. Роботы не знают размера команды и ширины коридора и не могут различать друг друга, играть разные роли в команде и не оснащены средствами связи.

Предлагается простой закон управления, который индивидуально и независимо выполняется каждым роботом, является общим для всех, выстраивает роботов в максимально плотную сеть-барьер поперек коридора, а также перемещает этот барьер по коридору с заданной скоростью в заданном направлении. Кроме того, этот закон исключает столкновения роботов друг с другом, препятствиями и стенами коридора. При прохождении полосы препятствий равномерность распределения по коридору обязательно нарушается, однако предложенный закон продолжает поддерживать требуемую скорость движения вдоль коридора и расположение всех роботов на общем поперечном (подвижном) сечении коридора. При этом равномерность распределения автоматически восстанавливается после полного преодоления полосы препятствий. Это строго обосновано доказательством глобальной сходимости и подтверждено тестами компьютерного

моделирования.

Текст работы организован следующим образом. Раздел 1 описывает проблему. Раздел 2 содержит необходимые условия для достижимости поставленной цели управления. Закон управления и связанные с ним определения и предположения представлены в разделе 3, а основные результаты в разделе 4. Все доказательства вынесены в раздел 5. Раздел 6 приводит результаты компьютерной симуляции. Раздел 7 содержит краткие выводы.

1. Постановка задачи

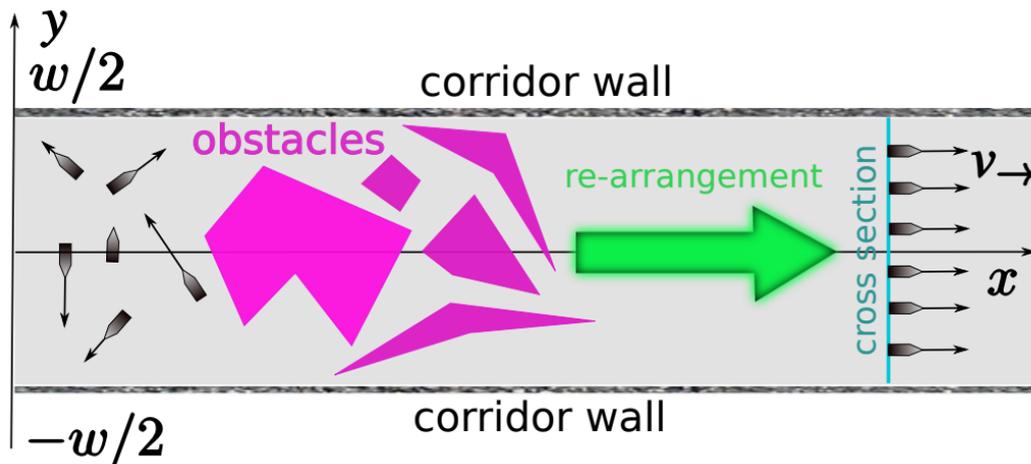


Рис. 1. Плотное заметающее покрытие коридора с полосой препятствий, ограниченного прямыми параллельными стенами.

Команда из $N \geq 2$ роботов, пронумерованных цифрами от 1 до N , должна равномерно распределиться по ширине заранее неизвестного *коридора* \mathcal{C} , ограниченного двумя параллельными линиями. Роботы должны двигаться с общей заданной скоростью $v_{\rightarrow} > 0$ по коридору и выстроиться перпендикулярно его стенкам на общей подвижной прямой линии \mathcal{N} , соединяющей стенки коридора (см. рисунок 1). Они также должны равномерно распределиться по ширине коридора.

Эти цели должны быть достигнуты автономно и полностью децентрализованным образом. Роботы не имеют средств связи, не различают своих соседей, не имеют иерархии и не способны выполнять разные ролевые функции в команде. Также ни один робот не знает размера команды N и ширину коридора w .

В коридоре расположено конечное число препятствий O_1, \dots, O_k , которые являются непересекающимися многоугольниками (возможно невыпуклыми). Препятствия также не пересекаются со стенками коридора. Эти многоугольники могут быть верхним приближением препятствий более сложной формы. Часть коридора, в которой расположены препятствия, назовём *полосой препятствий*.

Роботы должны избегать столкновений друг с другом, препятствиями и стенками коридора. Следовательно, равномерное распределение по всей ширине коридора возможно только вне полосы препятствий. Даже если команда роботов подходит к полосе препятствий в идеальном порядке, обход препятствий обычно приводит к его наруше-

нию. В таком случае предлагаемый закон управления должен автоматически восстанавливать формацию. В своей локальной системе отсчета каждый робот имеет доступ к направлению коридора и может определять относительное положение объектов, включая границы коридора и препятствия, в пределах конечного диапазона видимости $R_{\text{vis}} > 0$, если визуальному контакту с этим объектом не препятствует какое-либо препятствие.

Для удобства введём декартову систему отсчета, границы коридора в которой задаются уравнением $y = \pm \frac{w}{2}$, а ось x идет в желаемом направлении движения по коридору. Направления осей абсцисс и ординат называются *горизонтальными* и *вертикальными* соответственно. Полярный угол считается положительным, если он отсчитывается от оси x против часовой стрелки, и отрицательным в обратном случае.

Введем также точку $e_j(x)$ с абсциссой x и ординатой $-w/2 + jw/(N + 1)$. Точки $e_1(x), \dots, e_N(x)$ разбивают поперечное сечение коридора на равные по длине подынтервалы. Пусть $\mathbf{r}_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]$ обозначает положение робота i в момент времени t .

Цель управления определяется следующим образом.

Определение 1. *Говорят, что роботы плотно заметают коридор со скоростью v_{\rightarrow} , если выполнены следующие условия:*

- 1) *Роботы не сталкиваются с препятствиями и стенами коридора $\mathbf{r}_i(t) \notin O_1 \cup \dots \cup O_k \forall t$ и $-w/2 < y_i(t) < w/2 \forall t$ для любого робота i ;*
- 2) *Роботы не сталкиваются друг с другом: $\mathbf{r}_{i'}(t) \neq \mathbf{r}_{i''}(t) \forall t$, если $i' \neq i''$;*
- 3) *Существует x_* для которого роботы могут быть пронумерованы так, что $\|\mathbf{r}_i(t) - e_i(v_{\rightarrow} \cdot t + x_*)\| \rightarrow 0 \forall i$ при $t \rightarrow \infty$.*

Данная работа нацелена на разработку и анализ алгоритма, который при независимом запуске на каждом роботе, обеспечивает выполнения всех условий из Определения 1.

2. Модель робота и предположения

Для любого многоугольника O минимум $m_-(O) := \min_{(x,y) \in O_i} x$ и максимум $m_+(O) := \max_{(x,y) \in O_i} x$ достигаются в вершинах O .

Предположение 1. Для любого i минимум $m_-(O_i) := \min_{(x,y) \in O_i} x$ достигается в только одной вершине p_{\min}^i многоугольника O_i .

Предположение 1 исключает случаи, когда сторона многоугольника расположена поперёк коридора и одновременно является передней стороной этого препятствия, либо имеется несколько «передних вершин» многоугольника; см. рис. 2а.

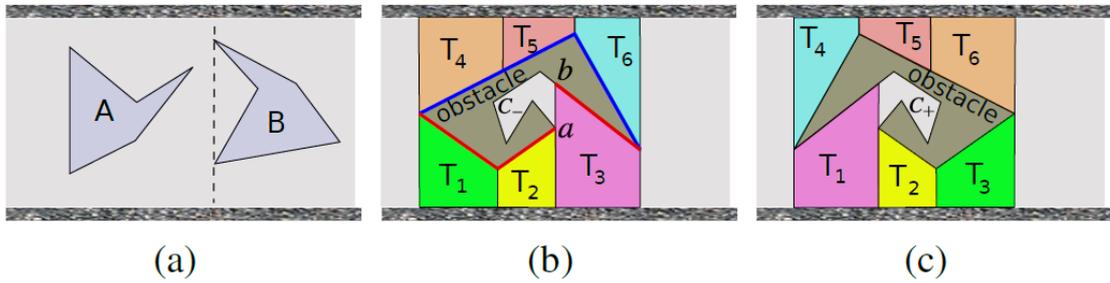


Рис. 2. (а) нарушение Предположения 1; (б) трапеции поддерживают препятствие; (с) Трапеции T_1, T_2 соединены неправильно.

Пусть $O \subset \mathfrak{C}$ многоугольник. Говорят, что трапеция T поддерживает O , если ее основания являются вертикальными прямыми, одна из боковых сторон опирается на стенку \mathfrak{C} , а другая лежит на стороне O , и внутренность O не пересекается с T ; см. рис. 2б. Две такие трапеции называются *правильно соединёнными*, если их пересечение равняется правому основанию левой трапеции. На рис. 2б пары T_1, T_2 и T_2, T_3 правильно соединены, то же верно для пар T_4, T_5 и T_5, T_6 . На Рис. 2с трапеции T_1, T_2 соединены неправильно.

Многоугольник $O \subset \mathfrak{C}$ называется *обходимым слева направо*, если существуют две цепи из трапеций $T_1^-, \dots, T_{s^-}^-$ и $T_1^+, \dots, T_{s^+}^+$, поддерживающих O , со следующими свойствами:

- 1) Все трапеции первой и второй цепи опираются на нижнюю и верхнюю стены коридора соответственно;
- 2) Любые две соседние трапеции из общей последовательности правильно соединены, а та, что с меньшим индексом, находится слева;

- 3) Абсцисса левого основания T_1^\pm равна $m_-(O)$;
- 4) Абсцисса правого основания T_{s^\pm} равна $m_+(O)$.

Вышеупомянутые первая и вторая цепи и их объединения называются соответственно *нижней и верхней проходными цепями* и *нижним и верхним проходами* около O . Объединение этих проходов с O покрывает прямоугольник $\{(x, y) : m_-(O) \leq x \leq m_+(O)\}$, может быть, с точностью до конечного числа связных компонентов, называемых *пещерами*, которые обозначены на рис. 2 как C_\pm . Многоугольник на рис. 2b обходим слева направо. T_1, T_2, T_3 – нижний проход, а T_4, T_5, T_6 – верхний. Многоугольник на рис. 2c нельзя обходить слева направо из-за C_+ .

Неформально говоря, обходимость слева направо означает, что робот может пройти от крайней левой до крайней правой точки препятствия как сверху, так и снизу, постоянно следуя вдоль границы препятствия и при этом постоянно продвигаясь вперёд по коридору $\dot{x} > 0$. При движении точки a с Рис. 2b следование вдоль границы препятствия предполагает “скачок” к точке b . На практике этот “скачок” может быть “организован” компонентной закона управления, отвечающей за вертикальное распределение роботов, и не может быть мгновенным.)

Предположение 2. *Любое препятствие обходимо слева направо.*

Для такого препятствия O рассмотрим трапеции нижнего/верхнего прохода и объединим все их боковые стороны, не пересекающиеся со стенами коридора и, таким образом, лежащие на границе препятствия. Результат объединения однозначно определяется по O и называется *нижним/верхним ограждением* препятствия. На Рис. 2b ограждения выделены красным и синим цветом соответственно. Любое ограждение состоит из конечного числа отрезков прямой линии, они называются *сегментами*. Любой сегмент лежит на ограждении O и не является вертикальным; направление сегмента определяется направлением, в котором x увеличивается. На Рис. 2b синие и красное ограждения состоят из двух и трех сегментов соответственно.

В результате приходим к следующему.

Замечание 1. *Для любого препятствия любой сегмент любого его ограждения образует с осью абсцисс острый угол.*

В некоторых случаях, когда вышеуказанные предположения не выполняются, их можно удовлетворить путём искусственного изменения модели сцены и параметров

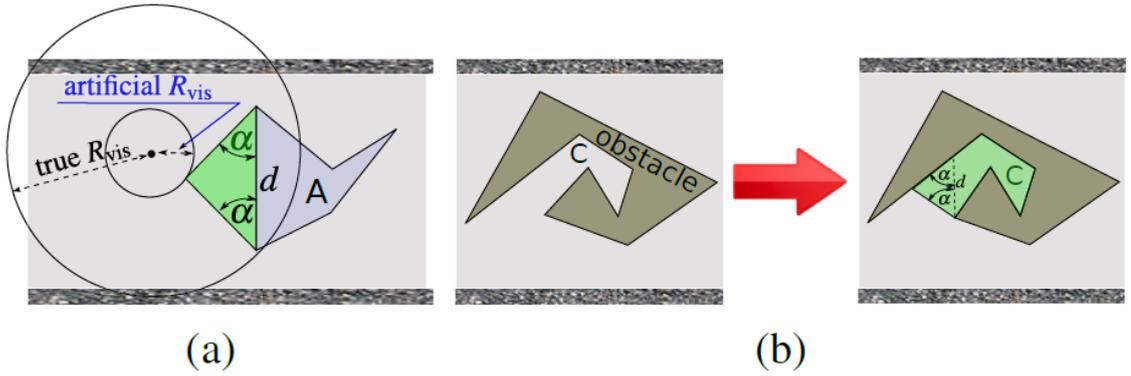


Рис. 3. (a) Добавление выступа к фронтальной части препятствия; (b) Заполнение пещеры.

роботов. Проиллюстрируем это двумя примерами. Рис. 3а наводит на мысль об исправлении недопустимого препятствия A с Рис. 2а путём добавления впереди искусственного выступа. Чтобы обеспечить видимость возникающего препятствия в пределах дальности видимости, эту дальность следует рассматривать как искусственно уменьшенную до $R'_{\text{vis}} < R_{\text{vis}}$, так что вся истинная передняя сторона A находится в пределах истинного диапазона R_{vis} всякий раз, когда выступ находится в пределах искусственного диапазона R'_{vis} . Это возможно, только если $R_{\text{vis}} > d \max\{1, 1/(2 \cos \alpha)\}$ и $R'_{\text{vis}} < R_{\text{vis}} - d \max\{1, 1/(2 \cos \alpha)\}$. Рис. 3б иллюстрирует распространение той же идеи на исправление неприемлемого препятствия из Рис. 2с: пещера C на Рис. 2с “заполнена” и “дополнена” выступом.

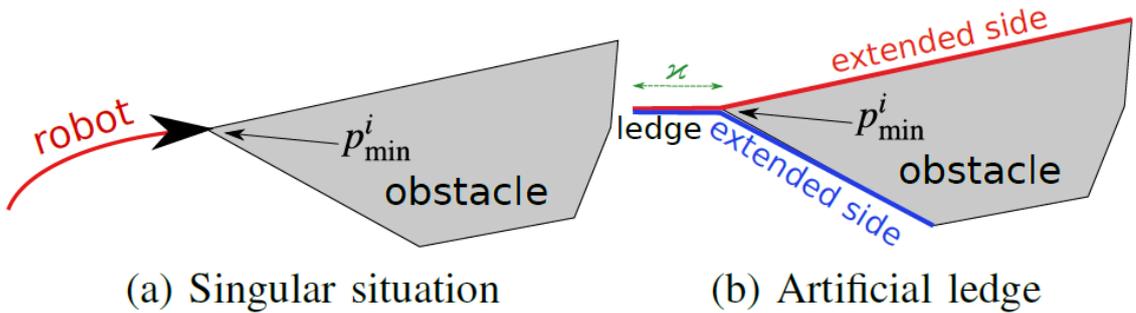


Рис. 4. Искусственный выступ препятствия.

Мы рассматриваем “верхнюю” $E^+ := \{\mathbf{r} : y \geq w/2\}$ и “нижнюю” $E^- := \{\mathbf{r} : y \leq -w/2\}$ стенки коридора как “препятствия” с положительно ориентированными границами. Чтобы обработать маловероятную, но возможную ситуацию столкновения робота лоб в лоб с передней вершиной p_{min}^i “истинного” препятствия O_i (см. рис. 4а), роботы

искусственно расширяют O_i , добавляя короткий горизонтальный отрезок (*выступ*) перед \mathbf{p}_{\min}^i , как показано на рис. 4б. Здесь $\varkappa > 0$ — параметр регулятора, выбранный настолько малым, что расширенные препятствия O_i остаются непересекающимися. Выступ положительно ориентирован. Робот использует расширенное препятствие вместо истинного при вычислении управляющего воздействия. Если робот оказывается точно на выступе, то он считает, что его положение либо “выше”, либо “ниже” выступа, принимая решение случайным образом.

Мы рассматриваем роботов как материальную точку. Они описываются следующей стандартной кинематической моделью с заданной верхней границей скорости \bar{v} :

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \|\mathbf{v}_i\| \leq \bar{v}. \quad (1)$$

Здесь скорость $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^2$ — управляющее воздействие.

Рассматриваемая задача выполнима только, если требуемая скорость v_{\rightarrow} находится в пределах возможностей роботов $v_{\rightarrow} \leq \bar{v}$ и, кроме того, $\frac{w}{N+1} \leq R_{\text{vis}}$. Действительно, если $\frac{w}{N+1} > R_{\text{vis}}$, то из-за слишком большого расстояний между роботами они теряют сенсорный контакт друг с другом при оптимальном (равномерном) распределении поперек коридора, так как даже соседние роботы не “видят” друг друга. Тогда добиться и стабильно поддерживать равномерное распределение вряд ли возможно.

Чтобы избежать столкновения с препятствием, может возникнуть необходимость двигаться вдоль его границы. При этом максимальная скорость по оси абсцисс робота равна $\bar{v} |\cos \alpha|$, где α — полярный угол текущего сегмента препятствия. Следовательно, требование двигаться по коридору с горизонтальной скоростью v_{\rightarrow} выполнимо только если $v_{\rightarrow} \leq \bar{v} |\cos \alpha|$. Немного усилив наши требования заменой \leq на $<$, приходим к следующему:

$$v_{\rightarrow} < \bar{v} \cos \bar{\alpha}, \quad \frac{w}{N+1} < R_{\text{vis}}, \quad (2)$$

где α — верхняя граница модуля полярных углов всех сегментов ограждений препятствий.

3. Закон управления

Для начала введём параметры видимого участка сцены, используемые в предлагаемом законе управления. Для любого робота i *видимой сбоку точкой ограждения* называется точка \mathbf{r} на границе препятствия такая, что вертикальный прямой отрезок S_{r,r_i} с концами \mathbf{r} и \mathbf{r}_i не имеет общих точек с препятствиями, кроме \mathbf{r} , и его длина не превышает R_{vis} (Выступы также учитываются). Выше робота есть не более одной видимой сбоку точки ограждения; это верно также, если здесь “выше” заменить на “ниже”. Случай, когда робот находится ровно на выступе, рассмотрен в предыдущем разделе.

Замечание 2. *Вышеизложенное предполагает, что робот j на S_{r,r_i} не может полностью перекрыть обзор на рассматриваемое препятствие по каким-либо причинам, например, из-за существенного превосходства препятствий над роботами по размеру или из-за того, что сенсоры робота, с помощью которых он может “видеть” препятствия, расположены на высоте, превышающей высоту роботов.*

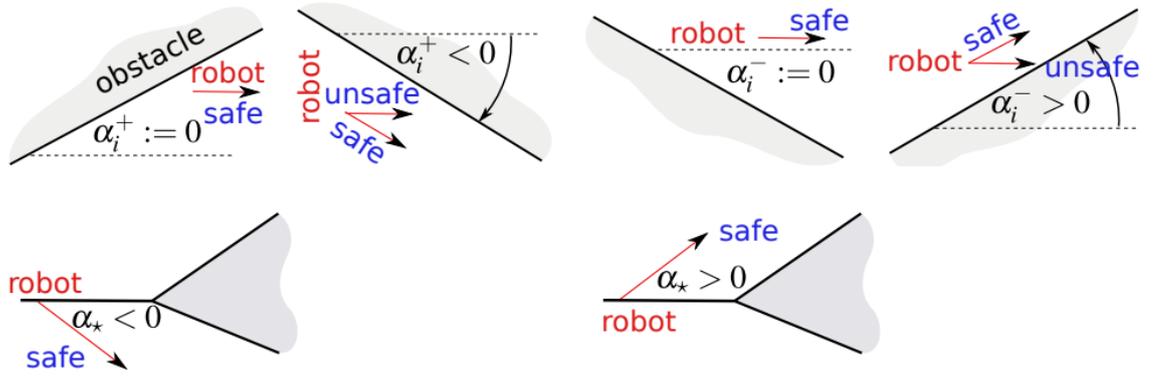
Параметр $\delta > 0$ используется при формировании множества $V_{i,\delta}$, оно включает в себя всех видимых соседей j , таких что расстояние вдоль абсциссы $|x_j - x_i| < \delta$, а также видимые сбоку точки ограждения, если они существуют. Сосед j считается “видимым”, если $R_{\text{vis}} > \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$ и j не находится за препятствием. Обозначим $V_{i,\delta}^+$ как множество всех точек из $V_{i,\delta}$, ордината которых больше или равна y_i . Аналогично определим $V_{i,\delta}^-$: в этом случае ордината меньше.

Боковое расстояние $d_{i,\delta}^\pm$ от i -го робота до ближайшего верхнего/нижнего объекта определяется следующим образом:

$$d_{i,\delta}^\pm := \begin{cases} \min_{r \in V_{i,\delta}^\pm} \pm(y - y_i) & \text{if } V_{i,\delta}^\pm \neq \emptyset, \\ R_{\text{vis}} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

Наклон границы препятствия в его точке представляет собой полярный угол соответствующей ориентированной касательной по ходу коридора $\dot{x} > 0$; этот наклон не определен, если касательная вертикальна. (В вершинах этот наклон определяется как полусумма наклонов соседних сегментов границы.)

Пусть f_i^\pm обозначает расстояние до видимой сбоку верхней/нижней точки ограждения препятствия fp_i^\pm , если эта точка существует, иначе пусть $f_i^\pm := R_{\text{vis}}$.

Рис. 5. Выбор угла α_i^\pm .

В предложенном законе управления используется угол α_i^\pm для предотвращения столкновений с препятствиями. Он равен наклону границы в точке fp_i^\pm , если fp_i^\pm существует и не лежит на уступе, в противном случае значения выбираются в зависимости от ситуации. Чтобы определить правила выбора значения α_i^\pm введём параметр $\alpha_* \in (0, \pi/2)$ и $\sigma := \pm 1$, в котором знак берётся из верхнего индекса α_i^\pm , тогда α_i^\pm выбирается следующим образом:

$$\alpha_i^\pm := \begin{cases} \text{наклон} \\ \text{границы } \varphi_i^\pm \text{ в } \mathbf{fp}_i^\pm \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{если} \\ \mathbf{fp}_i^\pm \text{ существует, } \notin \text{выступа} \\ \text{и } -\mathbf{sgn} \varphi_i^\pm = \sigma \end{array} \right.,$$

$$\alpha_i^\pm := -\sigma \alpha_* \text{ если } \mathbf{fp}_i^\pm \text{ существует и лежит на выступе,}$$

$$\alpha_i^\pm := 0 \text{ в других случаях.} \quad (4)$$

Этот угол α_i^\pm используется для определения направление вектора скорости робота, предотвращающее столкновение с препятствием, см. рис 5.

Предлагаемый закон управления строится исходя из выбираемых разработчиком четырёх непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых отображений:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\cdot) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \Xi(\cdot) : [0, 2R_{\text{vis}}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ W(\cdot) : [0, R_{\text{vis}}] &\rightarrow [0, \infty), & h(\cdot) : \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty). \end{aligned} \quad (5)$$

Они выбираются так, чтобы:

$$x\Upsilon(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \Upsilon'(0) > 0, \quad (6)$$

$$\bar{\Upsilon} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Upsilon(x)| < \infty, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Upsilon'(x)| < \infty, \quad (7)$$

$$\Xi(0) \geq 0, \quad \Xi'(L) \geq 0 \quad \forall L \in [0, 2R_{\text{vis}}], \quad (8)$$

$$\exists R_{\Xi} \in (0, R_{\text{vis}}] \text{ такое что } \begin{cases} \Xi'(L) > 0 & \forall L \in [0, R_{\Xi}), \\ \Xi'(L) = 0 & \forall L \in [R_{\Xi}, 2R_{\text{vis}}], \end{cases} \quad (9)$$

$$W'(f) \leq 0 \quad \forall f \in [0, f_{\star}), \quad W(f) = 0 \quad \forall f \in [f_{\star}, R_{\text{vis}}], \quad (10)$$

$$h(0) = 1, \quad h'(\pm y) \leq 0 \quad \forall y \in [0, h_{\star}), \quad h(y) = 0 \text{ если } |y| \geq h_{\star}. \quad (11)$$

В (9)–(11), $R_{\Xi} > 0$, $f_{\star} > 0$ и $h_{\star} > 0$ – параметры алгоритма. Приведём несколько примеров выбора таких отображений $\Upsilon(x) = a\lambda_{\star}(x/b)$, $\Xi(L) := cL + d \quad \forall L \in [0, R_{\Xi})$, $\Xi(L) = cR_{\Xi} + d \quad \forall L \in [R_{\Xi}, 2R_{\text{vis}}]$, $W(f) := \max\{a(1 - f/f_{\star}); 0\}$, $h(y) := \max\{1 - |y|/h_{\star}; 0\}$, где $a, b, c > 0$, $d \geq 0$ являются параметрами и $\lambda_{\star}(z) = \arctan(z)$, $\tanh(z)$, $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

Каждый i -ый робот использует заранее заданный параметр $\eta \in (0, 1)$ для формирования множества *значимых видимых соседей* $\mathcal{N}_i(t)$:

- п.1)** В каждый момент времени t , когда j -ый робот приближается к i -му на такое расстояние, что $\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| \leq \eta R_{\text{vis}}$, $|x_i(t) - x_j(t)| \leq \eta\delta$, и между ними отсутствуют препятствия, блокирующие визуальный контакт, j -ый робот добавляется в множество $\mathcal{N}_i(t)$
- п.2)** Всякий раз, когда $\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| \geq R_{\text{vis}}$ или $|x_i(t) - x_j(t)| \geq \delta$ для $j \in \mathcal{N}_i(t)$ или j находится за препятствием, этот робот исключается из $\mathcal{N}_i(t)$;
- п.3)** В начальный момент времени множество $\mathcal{N}_i(0-)$ состоит из одного робота i , но оно может быть сразу дополнено при выполнении правила 1) при $t = 0$.

Следовательно, $i \in \mathcal{N}_i(t)$ и $|\mathcal{N}_i(t)| \geq 1$ для всех $t \geq 0$, где $|A|$ количество элементов в множестве A . Параметр $\eta < 1$ делает условия включения робота в множество $\mathcal{N}_i(t)$ более строгими, чем его исключения, чтобы избежать включения и исключения из множества одного и того же робота теоретически одновременно, а на практике с высокой частотой.

Управляющее воздействие $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^2$ для i -го робота генерируется в терминах его абсциссы v_i^x и ординаты v_i^y следующим образом:

$$v_i^x(t) := v_{\rightarrow} + \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \Upsilon[x_j(t) - x_i(t)], \quad (12)$$

$$v_i^y(t) := \Xi[d_{i,\delta}^+(t)] - \Xi[d_{i,\delta}^-(t)] \quad (13)$$

$$+ \max_{j \in \mathcal{N}_i(t)} h[y_j(t) - y_i(t)] w_j^-(t) \quad (14)$$

$$+ \min_{j \in \mathcal{N}_i(t)} h[y_j(t) - y_i(t)] w_j^+(t), \quad (15)$$

$$\text{где } w_j^{\pm}(t) := W[f_j^{\pm}(t)] \tan \alpha_j^{\pm}(t). \quad (16)$$

Кроме (14)–(15), здесь используются данные, которые заведомо доступны, включая расстояние $x_j - x_i$ (вдоль оси x) и $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$ от i -го робота до его видимого соседа $j \in \mathcal{N}_i$. Доступность $y_j - y_i$ из (14) и (15) имеет место по той же причине. Одновременно только $j \in \mathcal{N}_i$ с $f_j^{\pm}(t) < f_{\star}$ и $|y_j(t) - y_i(t)| < h_{\star}$ играют роль в 14 и 15 в силу последних формул в (10) и (11). Робот i не только “видит” таких соседей j , но также способен наблюдать их f_{\star} -окрестность вдоль “вертикальной” линии и поэтому может определить соответствующие $h(y_j - y_i)W[f_j^{\pm}(t)]$ при условии, что:

$$(f_{\star} + h_{\star})^2 + \delta^2 \leq R_{\text{vis}}^2. \quad (17)$$

В силу (13)–(16) замкнутая система описывается ОДУ с разрывными правыми частями по переменным состояния. (Такие разрывы не подразумеваются в (12) из-за механизма **п.1**), **п.2**). Решение этих ОДУ понимается в смысле Филиппова [26].

4. Основной результат

Пересечение внутренностей любых двух трапеций из цепей проходов любых двух (протяженных) препятствий либо пусто, либо представляет собой внутренность трапеции с вертикальными основаниями ненулевых длин. Пусть d_{\min}^{free} — нижняя граница всех таких длин. Например, $d_{\min}^{\text{free}} > 0$ можно определить как минимальное значение длин связных компонент пересечений сечений коридора со свободным пространством $\mathfrak{C} \setminus \bigcup_i O_i$.

Теорема 1. Пусть выполнены Предположения 1, 2, а также (6)–(8), (2) и (17), и пусть параметры алгоритма δ, η и R_{Ξ} выбраны так, что:

$$f_{\star} + h_{\star} + \delta \tan \bar{\alpha} < d_{\min}^{\text{free}}, \quad h_{\star} < \eta R_{\text{vis}}, \quad \bar{\Upsilon} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Upsilon(x)| < v_{\rightarrow}, \quad (18)$$

$$(v_{\rightarrow} + \bar{\Upsilon})^2 + [\Xi (2R_{\text{vis}}) + W(0) \tan \bar{\alpha}]^2 \leq \bar{v}^2, \quad (19)$$

$$\frac{w}{N+1} < R_{\Xi} < \eta R_{\text{vis}}, \quad \eta \in (0, 1), \quad (20)$$

$$0 < f_{\star} + \delta \tan \bar{\alpha} < \frac{d_{\min}^{\text{free}}}{2}, \quad v_{\rightarrow} + \bar{\Upsilon} < W(0). \quad (21)$$

Предположим, что изначально роботы располагаются в свободном от препятствий пространстве коридора и в перпендикулярной коридору относительно узкой полосе, ширина которой $\gamma > |x_i(0) - x_j(0)| \forall i, j$ удовлетворяет следующим требованиям:

$$\gamma < \delta, \quad \gamma^2 < \eta^2 R_{\text{vis}}^2 - R_{\Xi}^2, \quad h_{\star}^2 + \gamma^2 < \eta^2 R_{\text{vis}}^2 \quad (22)$$

Наконец, пусть $y_i(0) \neq y_j(0) \forall i \neq j$.

Тогда верны следующие утверждения:

- i) Выход блока управления допустим, т. е. он удовлетворяет неравенству из (2) для любых i и t ;
- ii) Роботы достигают плотного заметания коридора со скоростью v_{\rightarrow} , то есть выполнены условия из Определения 1;
- iii) Разброс $\varsigma(t) := \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)|$ роботов в направлении коридора уменьшается со временем t ;
- iv) Каждый робот постоянно движется в нужном направлении по коридору: $\dot{x}_i(t) > 0$ для почти всех t

v) Роботы постоянно находятся на разном расстоянии от границ коридора: $y_i(t) \neq y_j(t) \forall i \neq j, t \geq 0$.

Хотя в Теореме 1 полоса начального расположения роботов упоминается как “узкая”, её ширина ограничена только (22) и в зависимости от $\delta, \eta_x, R_{\text{vis}}$ и R_{Ξ} может быть относительно большой. Часто задача начального расположения роботов решается простым размещением роботов почти в одно и то же место.

Теорема 1 предъявляет выполнимые требования к настройке параметров алгоритма. Действительно, (20) имеет решение $\eta, R_{\Xi} > 0$ по второй формуле в (2). Выбирая $f_*, h_*, \delta, \bar{\Upsilon} > 0$ достаточно небольшими, мы обеспечиваем выполнение (17), (18) и первые два неравенства в (21). При $\bar{\Upsilon} \rightarrow 0+, \Xi(2R_{\text{vis}}) \rightarrow 0+$, (19) и второе неравенство (21) переходят в $\bar{v}^2 > v_{\rightarrow}^2 + W(0)^2 \tan^2 \bar{\alpha}$ и $W(0) > v_{\rightarrow}$. При $W(0) \rightarrow v_{\rightarrow}+$, первое неравенство переходит в соотношение $\bar{v}^2 > v_{\rightarrow}^2 + v_{\rightarrow}^2 \tan^2 \bar{\alpha} = \frac{v_{\rightarrow}^2}{\cos^2 \bar{\alpha}}$, которое верно по первой формуле (21). Следовательно, (19) и второе неравенство из (21) можно удовлетворить, выбирая $W(0) > v_{\rightarrow}$ достаточно близким к v_{\rightarrow} и выбирая $\bar{\Upsilon}, \Xi(2R_{\text{vis}}) > 0$ достаточно малыми. Остается подобрать функции (5), удовлетворяющие (6)–(11) с выбранными параметрами $R_{\Xi}, f_*, h_*, \bar{\Upsilon}, W(0), \Xi(2R_{\text{vis}})$. Отметим также, что (22) описывает непустое множество γ в силу (18) и (20).

Теорема 1 остается в силе, если заменить ширину коридора w на ее известную верхнюю границу \bar{w} в (2) и (18). Если $\delta > R_{\text{vis}}$, то параметр δ никак не влияет на управление, так как в (3) и п.1)–п.3) связанные с δ неравенства следуют из предыдущих, связанных с R_{vis} . Цель неравенств, связанных с δ ($\delta < R_{\text{vis}}$), состоит в том, чтобы уменьшить вычислительную нагрузку за счёт сокращения элементов в множестве значимых соседей \mathcal{N} .

Если вопреки предположению Теоремы 1, $y_i(0) = y_j(0)$ для некоторого $i \neq j$, то $y_i(t) = y_j(t) \forall t \geq 0$ и, значит, цель не достигается. (На самом деле, эта команда действует как команда меньшего размера, и она достигает своей цели.) Хотя это можно исправить, изменив закон управления, в данной работе это опускается, поскольку на практике это предположение легко выполнить с помощью правильной начальной расстановки роботов в момент времени $t = 0$.

Замечание 3. В контексте Теоремы 1 система не посещает множество разрывов закона управления (13)–(16) по прошествии некоторого времени.

Это исключает скользящие режимы и связанные с ними эффекты. Теперь рассмотрим несколько частных ситуаций.

4.1. Потеря членов команды во время выполнения миссии

Предположим, что в момент времени $t = t_*$ несколько роботов отказываются от выполнения задания (например, из-за технических проблем), а остальные начинают их игнорировать. Применяя Теорему 1 при $t \geq t_*$, уделяя особое внимание iii) и v) пунктам Теоремы при $t = t_*$, мы видим, что заключение Теоремы 1 выполняется для оставшейся команды, если ее размер $N_* > wR_{\Xi}^{-1} - 1$. (Это условие сохраняет первое неравенство в (20) верным.) С учетом возможности выбрать $\eta \approx 1$ и $R_{\Xi} \approx R_{\text{vis}}$ последнее неравенство сводится к $R_{\text{vis}} > w(N_* + 1)$ и означает, что потеря роботов не нарушает "визуальную" связность команды при ее равномерном развертывании по коридору. Таким образом, закон управления автоматически адаптируется к уменьшению численности команды.

4.2. Добавление членов в команду во время выполнения миссии

Мы рассматриваем только простой случай, когда дополнительные члены команды (новички) высаживаются рядом с некоторыми "старыми" (стариками). Пусть новые члены появляются в какой-то момент t_* не в пещерах препятствий и внутри вертикальной полосы, содержащей всех старичков и имеющей достаточно малую ширину γ_{add} : (22) выполняется с $\gamma := \gamma_{\text{add}}$. Это гарантируется в силу пункта iii) в Теореме 1, если при $t = 0$ старички находятся в вертикальной полосе шириной $< \gamma/2$ и любой новичок высаживается при $t = t_*$ на расстоянии $\leq \gamma/2$ от какого-то старичка. Из Теоремы 1 следует, что при $t \geq t_*$ её утверждения i)-v) остаются в силе, если при $t = t_*$ ординаты новичков попарно различны и отличаются от ординат старичков. Это условие не является ограничительным, например, оно выполняется с вероятностью 1, если новички появляются на сцене в соответствии с непрерывным распределением вероятностей.

5. Доказательства

Лемма 1. *Утверждение i) Теоремы 1 верно.*

Доказательство. В (17) $\alpha_i^\pm(t)$ входит в число углов, оцененных сверху $\bar{\alpha}$ из (2) по абсолютной величине. Таким образом $|\tan \alpha_i^+(t)| \leq \tan \bar{\alpha}$. В силу (12) $|v_i^x(t)| \leq v_{\rightarrow} + \bar{\Upsilon}$, тогда как (8)–(11) дают:

$$\begin{aligned} |v_i^y(t)| &\stackrel{(13)-(16)}{\leq} \Xi(2R_{\text{vis}}) + W(0) |\tan \alpha_i^+(t)| \\ &\leq \Xi(2R_{\text{vis}}) + W(0) \tan \bar{\alpha} \stackrel{(19)}{\leq} \bar{v} \end{aligned}$$

□

Лемма 2. *Утверждение iii) Теоремы 1 верно.*

Доказательство. В терминах $z_i(t) := x_i(t) - v_{\rightarrow} \cdot t$ закон управления (12) принимает форму следующей нелинейной версии *правила ближайших соседей* [27], которая используется для достижения консенсуса значения z_i между многими агентами:

$$\dot{z}_i = \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \Upsilon[z_j(t) - z_i(t)]. \quad (23)$$

По теореме Данскина [28] функция $M(t) := \max_i z_i(t)$ абсолютно непрерывна, и почти для всех t мы имеем $\dot{M}(t) = \dot{z}_{i_t^0}(t)$, где i_t^0 максимизирует $\max_i z_i(t)$. По (23) и определению решения по Филиппову, $\dot{z}_{i_t^0}(t)$ лежит в выпуклой оболочке множества, которую можно представить как предел суммы

$$\frac{1}{|\mathcal{N}_{i_t^0}(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_{i_t^0}(t)} \Upsilon[z_j(t) - z_{i_t^0}(t)],$$

, когда искусственно возмущенное состояние системы $\{\mathbf{r}_i\}_{i=0}^{N-1}$ сходится к его истинному (невозмущенному) значению. Таким образом, можно повлиять на множество соседей, а не на предельные значения слагаемых, которые точно такие, как показано в приведенной выше формуле. Между тем они неотрицательны в силу (6). Следовательно $\dot{M}(t) = \dot{z}_{i_t^0}(t) \leq 0$ и поэтому $M(t)$ не возрастает. Точно так же $m(t) := \min_i z_i(t)$ является (нестрого) возрастающей функцией. Остается заметить, что $\varsigma(t) := \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)| = \max_{i,j} |z_i(t) - z_j(t)| = M(t) - m(t)$. □

Следствие 1. $|x_i(t) - x_j(t)| < \gamma$ для всех i, j и $t \geq 0$.

Лемма 3. *Утверждение iv) Теоремы 1 верно.*

Доказательство. Основываясь на (12), мы видим, что

$$v_i^x(t) := v_{\rightarrow} + \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \Upsilon[x_j(t) - x_i(t)] \stackrel{(7)}{\geq} v_{\rightarrow} - \bar{\Upsilon} \stackrel{(a)}{>} 0, \quad (24)$$

где (a) следует из последнего неравенства в первой строке (18). \square

В связи с Предположением 2 и так как ни один робот не стартует в пещере препятствия, Лемма 3 приводит к следующему.

Следствие 2. *Роботы никогда не заходят в пещеры препятствий.*

Лемма 4. *Если какой-то робот s находится на выступе препятствия O_i в момент времени τ , то он не находится на соответствующем выступе при $t \approx \tau, t > \tau$.*

Доказательство. Мы сосредоточимся на случае, когда робот s “думает”, что он находится ниже выступа в момент времени $t = \tau$; случай, когда робот находится выше выступа, рассматривается аналогично. Тогда $d_{s,\delta}^+(\tau+) = 0, f_s^+(\tau+) = 0$ и $\alpha_i^+(\tau+) := -\alpha_*$ в силу (3) и (4). Из Следствия 2 следует, что расстояние по вертикали от робота до ближайшего нижнего препятствия не меньше величины d_{\min}^{free} , введенной в начале раздела 5. Тогда в силу (16), первого соотношения в (18) и последних соотношений в (10) и (11) получаем $\max_{j \in \mathcal{N}_s(t)} h[y_j(t) - y_s(t)]w_j^-(t) = 0$. Из (13)–(16),

$$\begin{aligned} v_s^y(\tau+) &= \Xi[0] - \underbrace{\Xi[d_{s,\delta}^-(\tau+)]}_{\geq 0} \\ &+ \min_{j \in \mathcal{N}_s(t)} h[y_j(\tau+) - y_s(\tau+)]W[f_j^+(t)] \tan \alpha_j^+(\tau+) \\ &\stackrel{(8), j:=s}{\leq} -h(0)W(0) \tan \alpha_* \stackrel{(11), (21)}{<} 0. \end{aligned}$$

Следовательно, робот находится не на выступе при $t > \tau, t \approx \tau$. \square

Основываясь на предположении Теоремы 1, сформулированной сразу после (22), мы пронумеруем роботов так, что при $t = 0$ выполняется следующее неравенство

$$y_1(t) < \dots < y_N(t). \quad (25)$$

Лобовым столкновением робота с протяженным препятствием называется прямое попадание робота на передний край выступа этого препятствия. В следующей лемме верхняя E^+ и нижняя E^- границы коридора рассматриваются как “протяженные препятствия”.

Лемма 5. Для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство (25), и нет столкновений роботов с протяженными препятствиями, кроме лобовых.

Доказательство. По (24) и Лемме 4 момент времени τ любого лобового столкновения расположен в открытом интервале Δ так, что робот в любой момент времени $t \in \Delta, t \neq \tau$ находится вне выступа. Таким образом, множество $E := \{t \geq 0 : \text{неравенство (25) верно и нет столкновений роботов с протяженными препятствиями, кроме лобовых}\}$ открыто в $[0, \infty)$ и содержит 0. Нам необходимо показать, что $E = [0, \infty)$. Предположим противное и рассмотрим крайнюю левую компоненту связности $[0, \tau)$ множества E . Здесь $\tau > 0$ и при $t = \tau$ либо 1) $y_j(\tau) = y_s(\tau)$ для некоторого $j \neq s$, либо 2) происходит не лобовое столкновение.

1) В этом случае $y_j(\tau)$ принимает общее значение для всех j из некоторого дискретного интервала $[j_- : j_+] \subset [1 : N]$ из не менее двух элементов $j_- < j_+$. Рассмотрим такой нерасширяемый интервал. Тогда либо $d_{j_+, \delta}^+(\tau-) > 0$, либо $d_{j_-, \delta}^-(\tau-) < 0$. Поскольку оба случая рассматриваются одинаково, мы сосредоточимся на первом.

Заметим, что $d_{j_+, \delta}^-(\tau-) = d_{j_+ - 1, \delta}^+(\tau-) = 0$, $y_{j_+}(\tau-) = y_{j_+ - 1}(\tau-)$. Также пусть $q_i(t)$ обозначает сумму (14) и (15). Тогда $q_{j_+}(\tau-) = q_{j_+ - 1}(\tau-)$ благодаря (10), (11), (17), Следствию 1, а также первого и третьего соотношения из (22).

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{d}_{j_+, \delta}^-(\tau-) &= \dot{y}_{j_+, \delta}(\tau-) - \dot{y}_{j_+ - 1, \delta}(\tau-) \\ &\stackrel{(16)}{=} \Xi[d_{j_+, \delta}^+(\tau-)] - \Xi[d_{j_+, \delta}^-(\tau-)] - \left\{ \Xi[d_{j_+ - 1, \delta}^+(\tau-)] - \Xi[d_{j_+ - 1, \delta}^-(\tau-)] \right\} \\ &\quad + q_{j_+}(\tau-) - q_{j_+ - 1}(\tau-) = \Xi[d_{j_+, \delta}^+(\tau-)] + \Xi[d_{j_+ - 1, \delta}^-(\tau-)] - 2\Xi(0) \stackrel{(8), (9)}{>} 0. \end{aligned}$$

Однако $\dot{d}_{j_+, \delta}^-(\tau) > 0$ и $d_{j_+, \delta}^-(\tau) = 0$ несовместимы с (25).

2) В этом случае неравенство (25) выполняется при $t = \tau$. Предположим, что столкновение происходит при “спуске” на границу протяжённого препятствия; случай, когда столкновение происходит при подъёме, рассматривается аналогичным образом. Так как это столкновение не лобовое, то при $t < \tau, t \approx \tau$ сталкивающийся робот s движется над прямолинейным сегментом S , являющимся частью ограждения препятствия, и сталкивается с S в момент времени $t = \tau$. Пусть β обозначает наклон S . Тогда S описывается уравнением вида $y = x \tan \beta + y_-$, где y_- — некоторая константа. Столкновение означает, что для $t < \tau, t \approx \tau$:

$$\theta(t) := y_s(t) - x_s(t) \tan \beta - y_- > 0, \quad \theta(\tau) = 0. \quad (26)$$

С этого момента мы рассматриваем такое максимальное s и ориентируемся на $t < \tau, t \approx \tau$. Из-за (11) только соседи j с $|y_j(t) - y_s(t)| < h_*$ учитываются в (14), (15) при $i = s$. Как при доказательстве Леммы 4 $\min_{j \in \mathcal{N}_s(t)} h[y_j(t) - y_s(t)]w_j^+(t) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(\tau-) &= \dot{y}_s(\tau-) - \dot{x}_s(\tau-) \tan \beta \underbrace{\Xi[d_{s,\delta}^+(\tau-)]}_{>0} - \underbrace{\Xi[d_{s,\delta}^-(\tau-)]}_{=0} \\ &+ \max_{j \in \mathcal{N}_s(\tau-)} h[y_j(\tau) - y_s(\tau)]W[f_j^-(\tau-)] \tan \alpha_j^-(\tau-) - \dot{x}_s(\tau-) \tan \beta \\ &\stackrel{j:=s,(8)}{\geq} \underbrace{\Xi[d_{s,\delta}^+(\tau-)] - \Xi[d_{s,\delta}^-(\tau-)]}_{=: \xi > 0 \text{ по (9)}} \\ &+ h[0]W[f_s^-(\tau-)] \tan \alpha_s^-(\tau-) - \dot{x}_s(\tau-) \tan \beta \\ &\stackrel{(11)}{=} \xi + W[0] \tan \alpha_s^-(\tau-) - \dot{x}_s(\tau-) \tan \beta. \end{aligned}$$

Если $\beta \leq 0$, то $\alpha_s^-(\tau-) \geq 0$ в силу (4), а (24) даёт $\dot{\theta}(\tau-) > 0$. Если $\beta > 0$, то $\alpha_s^-(\tau-) = \beta$ и, следовательно, $\dot{\theta}(\tau-) \geq [W[0] - \dot{x}_s(\tau-)] \tan \beta$, где аналогично (24) мы видим, что $|\dot{x}_s(\tau-)| \leq v_{\rightarrow} + \bar{\Upsilon}$. Следовательно, $\dot{\theta}(\tau-) > 0$ по (21). Таким образом, мы видим, что $\dot{\theta}(\tau-) > 0$ в любом случае, что несовместимо с (26). Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Теперь введем x_{\dagger} такой, что $\mathfrak{C}_+ := \{r \in \mathfrak{C} : x \geq x_{\dagger}\}$ не пересекает препятствия O_i . Из вышеизложенного следует следующее.

Следствие 3. *Команда роботов благополучно преодолевает полосу препятствий, а затем входит в \mathfrak{C}_+ .*

С этого момента мы рассматриваем соответствующую часть движения команды роботов и присваиваем её началу $t = 0$. Положим $y_0(t) := -w/2, y_{N+1}(t) := w/2 \forall t \geq 0$, и

$$\Delta_i(t) := y_{i+1}(t) - y_i(t) \quad i = 0, \dots, N, \quad (27)$$

Лемма 6. *Следующая функция не убывает:*

$$\mu(t) := \min_{i=0, \dots, N} \Delta_i(t).$$

Доказательство. По теореме Дэнскина [28] функция $\mu(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\dot{\mu}(t) = \dot{\Delta}_{i_t^0}(t)$ для почти всех t , где i_t^0 некоторый индекс, доставляющий $\min_i \Delta_i(t)$. Поскольку $\sum_{i=0}^N \Delta_i(t) = w$, мы заключаем, что $\mu(t) \leq \frac{w}{N+1}$. Рассмотрим отдельно три возможных варианта.

$i^0(t) = 1, \dots, N - 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(t) &= \dot{\Delta}_{i^0(t)}(t) \stackrel{(27)}{=} \dot{y}_{i^0(t)+1}(t) - \dot{y}_{i^0(t)}(t) \\ &\stackrel{(16)}{=} \Xi[d_{i^0(t)+1,\delta}^+(t)] - \Xi[d_{i^0(t)+1,\delta}^-(t)] - \Xi[d_{i^0(t),\delta}^+(t)] + \Xi[d_{i^0(t),\delta}^-(t)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $d_{i^0(t)+1,\delta}^-(t) = d_{i^0(t),\delta}^+(t) = \Delta_{i^0(t)}(t) = \mu(t)$ по (3), поскольку $\|\mathbf{r}_{i^0(t)+1}(t) - \mathbf{r}_{i^0(t)}(t)\| < R_{\text{vis}}$ из-за (18), (22) и Предположения 1. При этом $d_{i^0(t)+1,\delta}^+(t) \geq \mu(t)$ и $d_{i^0(t),\delta}^-(t) \geq \mu(t)$ по (3). В целом, $\dot{\mu}(t) \geq 0$ в силу (8).

$i^0(t) = 0$. По тем же соображениям $\mu(t) = y_1(t) - y_0(t) = |y_1(t) + w/2|$, и

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(t) &= \dot{\Delta}_0(t) \stackrel{(27)}{=} \dot{y}_1(t) \stackrel{(16)}{=} \Xi[d_{1,\delta}^+(t)] - \Xi[d_{1,\delta}^-(t)] \\ &= \Xi[d_{1,\delta}^+(t)] - \Xi[\mu(t)] \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

$i^0(t) = N$. Рассуждая аналогичным образом, снова получаем, что $\dot{\mu}(t) \geq 0$.

Таким образом, $\dot{\mu}(t) \geq 0$ для почти всех t , что завершает доказательство. \square

Поскольку $\mu(0) > 0$ по Лемме 5, приходим к следующему.

Следствие 4. *Существует $\zeta > 0$ такая, что $y_{i+1}(t) - y_i(t) \geq \zeta \forall i = 0, \dots, N, t \geq 0$.*

Лемма 7. *Существует константа $c > 0$ такая, что для любых $i = 0, \dots, N$ и почти всех t выполняется следующее неравенство*

$$|\dot{\Delta}_i(t)| \leq c.$$

Доказательство. Для $i = 1, \dots, N - 1$ имеем $d_{i+1,\delta}^-(t) = d_{i,\delta}^+(t)$ и

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_i(t) &\stackrel{(27)}{=} \dot{y}_{i+1}(t) - \dot{y}_i(t) \stackrel{(16)}{=} \Xi[d_{i+1,\delta}^+(t)] - \Xi[d_{i+1,\delta}^-(t)] - \Xi[d_{i,\delta}^+(t)] \\ &\quad + \Xi[d_{i,\delta}^-(t)] = \Xi[d_{i+1,\delta}^+(t)] - 2\Xi[d_{i,\delta}^+(t)] + \Xi[d_{i,\delta}^-(t)] \\ &\stackrel{(8)}{\Rightarrow} |\dot{\Delta}_i(t)| \leq c := 4\Xi(2R_{\text{vis}}). \end{aligned} \quad (30)$$

Для $i = 0$ имеем:

$$\dot{\Delta}_i(t) \stackrel{(27)}{=} \dot{y}_0(t) \stackrel{(16)}{=} \Xi[d_{0,\delta}^+(t)] - \Xi[d_{0,\delta}^-(t)] \stackrel{(8)}{\Rightarrow} |\dot{\Delta}_i(t)| \leq c. \quad (31)$$

Случай $i = N$ рассматривается аналогично. \square

ω -предельная точка отображения $\mathbf{Y}(t) := [y_0(t), y_1(t), \dots, y_{N+1}(t)]$ — это предел $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{Y}(t_j)$, связанный с некоторой неограниченной последовательностью $t_1 < t_2 <$

$\dots < t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. Поскольку $y_j(t) \in [-w/2, w/2] \forall t \geq 0$ множество \mathfrak{Y} всех ω -предельных точек не пусто и компактно. Оно может содержать много элементов $\mathcal{Y} = [y_{-1}^\infty, \dots, y_N^\infty]$; они называются ω -предельными распределениями. Согласно Следствию 4 $y_0^\infty = -w/2 < y_1^\infty < \dots < y_{N+1}^\infty = w/2$. Аналогично (27) положим

$$\Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) := y_{i+1}^\infty - y_i^\infty \text{ for } i = 0, \dots, N. \quad (32)$$

Лемма 8. Для любого ω -предельного распределения \mathcal{Y} справедливо следующее:

$$\Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) \geq \frac{w}{N+1} \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (33)$$

Доказательство. Предположим противное, то есть что (33) нарушается для некоторого ω -предельного распределения $\mathcal{Y}_* \in \mathfrak{Y}$. Тогда минимум непрерывной функции

$$m(\mathcal{Y}) := \min_{i=0, \dots, N} \Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) \quad (34)$$

на компактном множестве \mathfrak{Y} меньше $w/(N+1)$ и достигается на некотором ω -предельном распределении $\bar{\mathcal{Y}} = [\bar{y}_0^\infty, \dots, \bar{y}_{N+1}^\infty] \in \mathfrak{Y}$ по теореме Вейерштрасса.

По (34) $m(\bar{\mathcal{Y}}) = \Delta_i^\infty(\bar{\mathcal{Y}})$ для некоторого i . Между тем это уравнение не может быть верным для всех i , так как

$$\sum_{i=0}^N \Delta_i^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) = w \quad (35)$$

и $m(\bar{\mathcal{Y}}) < w/(N+1)$. Следовательно, существует такой индекс, что либо

$$\Delta_i^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) = m(\bar{\mathcal{Y}}) < \frac{w}{N} \quad \text{и} \quad \Delta_{i+1}^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) > m(\bar{\mathcal{Y}}) \quad \text{или} \quad (36)$$

$$\Delta_{i+1}^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) = m(\bar{\mathcal{Y}}) < \frac{w}{N} \quad \text{и} \quad \Delta_i^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) > m(\bar{\mathcal{Y}}). \quad (37)$$

Пусть $t_1 < t_2 < \dots < t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ — временная последовательность, связанная с ω -предельным распределением $\bar{\mathcal{Y}}$. Отбрасывая при необходимости некоторые члены последовательности, мы обеспечиваем $t_{k+1} \geq t_k + 1 \forall k$. Отметим также, что для всех j

$$y_j(t_k) \rightarrow \bar{y}_j^\infty \Rightarrow \Delta_j(t_k) \rightarrow \Delta_j^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) \quad \text{as } k \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Случай (36). Основываясь на (36), мы выбираем $\varkappa > 0$, так что

$$\Delta_i^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) = m(\bar{\mathcal{Y}}) < \min \left\{ \frac{w}{N} - 3\varkappa; \Delta_{i+1}^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) - 5\varkappa \right\}$$

Далее символ $\alpha(k)$ (с возможными индексами) обозначает зависящую от k величину, которая стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. Привлекая c из Леммы 7, имеем для любых $\varepsilon \leq \min\{\varkappa/c; 1\}$ и $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$,

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) &\leq \Delta_i(t_k) + |\Delta_i(t) - \Delta_i(t_k)| \leq \Delta_i(t_k) + c|t - t_k| \leq \Delta_i(t_k) + c\varepsilon \\ &\stackrel{(36),(38)}{\leq} m(\bar{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_i(k) \stackrel{k \approx \infty}{\leq} m_* := m(\bar{\mathcal{Y}}) + 2\varkappa < \frac{w}{N} - \varkappa < \frac{w}{N} \\ &\stackrel{(3),(22), (25), (27), \text{След. 1}}{\longrightarrow} \Delta_i(t) = d_{i,\delta}^+(t); \\ \Delta_{i+1}(t) &\geq \Delta_{i+1}(t_k) - |\Delta_{i+1}(t) - \Delta_{i+1}(t_k)| \geq \Delta_{i+1}(t_k) - c|t - t_k| \\ &\geq \Delta_{i+1}^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) + \alpha_{i+1}(k) - c\varepsilon \stackrel{k \approx \infty}{\geq} \Delta_{i+1}^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) - 2\varkappa \geq m_* + \varkappa \\ &\stackrel{m_* + \varkappa < w/N, (3),(22), (25), (27), \text{След. 1}}{\longrightarrow} d_{i+1,\delta}^+(t) \geq m_* + \varkappa; \\ j \leq N - 2 &\Rightarrow \Delta_j(t) \geq \Delta_j(t_k) - |\Delta_j(t) - \Delta_j(t_k)| \geq \Delta_j(t_k) - c\varepsilon \\ &\stackrel{(38), \Delta_j^\infty(\bar{\mathcal{Y}}) \geq m(\bar{\mathcal{Y}})}{\longrightarrow} \Delta_j(t) \geq m(\bar{\mathcal{Y}}) + \alpha_j(k) - c\varepsilon. \end{aligned}$$

Приступим к рассмотрению отдельно двух возможных вариантов. Предположим сначала, что $i \geq 1$. Затем

$$\begin{aligned} t \in [t_k - \varepsilon, t_k] &\Rightarrow \dot{\Delta}_i(t) \stackrel{(30)}{=} \Xi[d_{i+1,\delta}^+(t)] - 2\Xi[d_{i,\delta}^+(t)] + \Xi[d_{i,\delta}^-(t)] \\ &\stackrel{(8), k \approx \infty}{\geq} \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_i(k)] + \Xi[d_{i-1,\delta}^+(t)] \\ &\geq \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_i(k)] + \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + \alpha_{i-1}(k) - c\varepsilon] \\ &\Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in [t_k - \varepsilon, t_k]} \dot{\Delta}_i(t) \geq \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon] \\ &+ \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) - c\varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi := \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}})] \stackrel{(8),(9),(18)}{>} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при необходимости правильно уменьшая ε , мы можем гарантировать, что $\dot{\Delta}_i(t) \geq \chi/2$ для всех $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$ и достаточно большого k .

$$\Delta_i(t_k - \varepsilon) = \Delta_i(t_k) - \int_{t_k - \varepsilon}^{t_k} \dot{\Delta}_i(t) dt \leq \Delta_i(t_k) - \chi\varepsilon/2. \quad (39)$$

Теперь выберем сходящуюся подпоследовательность из ограниченной последовательности $\{\mathbf{Y}(t_k - \varepsilon)\}_{k=1}^\infty$. Её предел \mathcal{Y}_ε представляет собой ω -предельное распределение, для которого величина (34) меньше одноименной величины, связанной с $\bar{\mathcal{Y}}$, благодаря (38) (где $t_k \mapsto t_k - \varepsilon$ и $\bar{\mathcal{Y}} \mapsto \mathcal{Y}_\varepsilon$) и (39), в нарушение определения $\bar{\mathcal{Y}}$ как дающего минимум (34). Это противоречие завершает доказательство, если имеет место первый вариант.

Для завершения рассмотрения случая (36) осталось разобраться с ситуацией, когда $i = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
t \in [t_k - \varepsilon, t_k] &\Rightarrow \dot{\Delta}_i(t) \stackrel{(31)}{=} \Xi[d_{0,\delta}^+(t)] - \Xi[d_{0,\delta}^-(t)] \\
&= \Xi[d_{0,\delta}^+(t)] - \Xi[d_{-1,\delta}^+(t)] \\
&\stackrel{(8), k \approx \infty}{\geq} \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + 3\mathcal{I}] - \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_{-1}(k)] \\
\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in [t_k - \varepsilon, t_k]} \dot{\Delta}_i(t) &\geq \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + 3\mathcal{I}] - \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon] \\
&\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \chi_* := \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}}) + 3\mathcal{I}] - \Xi[m(\bar{\mathcal{Y}})] \stackrel{(8),(9),(18)}{>} 0.
\end{aligned}$$

Доказательство завершается аналогично случаю $i \geq 1$.

Случай (37) рассматривается как случай (36) с заменой интервалов $[t_k - \varepsilon, t_k]$ на $[t_k, t_k + \varepsilon]$ и выбором сходящейся подпоследовательности из последовательности $\{\mathbf{Y}(t_k + \varepsilon)\}_{k=1}^\infty$. \square

Соединив (33) с (35), мы приходим к следующему.

Следствие 5. Для любого ω -предельного распределения \mathcal{Y} ,

$$\Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) = \frac{w}{N+1} \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (40)$$

Лемма 9. Следующие соотношения верны для любого $i = 1, \dots, N$:

$$y_i(t) \rightarrow -w/2 + iw/(N+1) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Доказательство. Для любого ω -предельного распределения $\mathcal{Y} = [y_0^\infty, \dots, y_{N+1}^\infty]$ формулы (32) и (40) подразумевают, что

$$y_i^\infty = -w/2 + iw/(N+1) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Пусть \bar{y} — ω -предельная точка функции $y_i(\cdot)$, т. е. $\bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_i(t_k)$ для некоторой неограниченно возрастающей временной последовательности $\{t_k\}$. Теперь выберем сходящуюся подпоследовательность из ограниченной последовательности $\{\mathbf{Y}(t_k)\}_{k=1}^\infty$. Его пределом является ω -предельное распределение, а его i -я запись равна \bar{y} . Отсюда следует, что $\bar{y} = -w/2 + iw/(N+1)$. Другими словами, все ω -предельные точки ограниченной функции $y_i(\cdot)$ совпадают и равны $-w/2 + iw/(N+1)$. Отсюда вытекает (41) [29, Ch. VII, Cor. 1.1]. \square

Теперь введем изменяющийся во времени неориентированный граф $\mathcal{G}(t)$ с множеством вершин $[1 : N]$, где i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда $j \in \mathcal{N}_i(t)$, где $\mathcal{N}_i(t)$ строится в соответствии с **п.1-п.3**). Следствие 1, Лемма 9, (18) и (22) влекут за собой следующее.

Следствие 6. *При всех $t \approx \infty$ граф $\mathcal{G}(t)$ является связным; при этом его вершины i и $i + 1$ соединены ребром для любых $i = 1, \dots, N - 1$.*

Доказательство Теоремы 1.

i) верно по Лемме 1.

ii) Из Следствия 6 и (6), (23) следует [49], что существует x_* такое что $z_i(t) \rightarrow x_*$ при $t \rightarrow \infty$ для всех i . Это, Определение 1, и (41) обеспечивают выполнение ii).

iii) верно по Лемме 2.

iv) верно по Лемме 3.

v) следует из Леммы 5.

Доказательство замечания 3 относительно (12): Разрывы в (12) могут иметь место только в ситуации, когда $\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| = R_{\text{vis}}$ для некоторых i, j . Однако это не может происходить для всех достаточно больших времен из-за ii) Теоремы 1, Определения 1 и последнего неравенства в (20).

6. Результаты компьютерного моделирования

Чтобы проверить и дополнить теоретические выводы работы, было проведено несколько серий экспериментов с помощью компьютерного моделирования.

Моделирование представленного алгоритма было проведено с помощью средств языка программирования Python (библиотеки NumPy и Pygame). При моделировании на Python были использованы следующие значения параметров алгоритма: $\bar{v} = 4.0$ м/с, $R_{vis} = 1.5$ м, $w = 5.0$ м, $\delta = R_{vis}/\sqrt{2}$, $v_{\rightarrow} = 1.0$ м/с, $R_{\Xi} = 0.8R_{vis}$, $\Xi(d) = 0.078d$, $\Upsilon(x) = \frac{0.78x}{\sqrt{1+x^2}}$, период дискретизации или частота обновления $\tau = 100$ мс, $h(y) = \max\left\{1 - \frac{|y|}{h_*}; 0\right\}$, $W(f) = \max\left\{\frac{\bar{v}(f_* - |f|)}{f_*}; 0\right\}$, $f_* = \frac{R_{vis}}{2}$, $h_* = \frac{R_{vis}}{4}$, $\eta = 0.9$. Выбор параметров регулятора не полностью соответствовал рекомендациям Теоремы 1; это было сделано намеренно, чтобы продемонстрировать, во-первых, надежность предложенного закона управления, а во-вторых, что область его сходимости на практике шире, чем было доказано теоретически. Размер команды N и место первоначального развертывания роботов менялись от эксперимента к эксперименту. Измерения расстояний подвержены воздействию шума, равномерно распределённого на отрезке $[-0.05\text{м}, 0.05\text{м}]$.

На Рис.6 изображена траектория движения группы из 8 роботов при прохождении коридора с одним препятствием. Большие треугольники показывают расположение роботов в конце эксперимента. На Рис.6 команда из восьми роботов плотно замечает коридор с немного криволинейными стенами, в котором расположено одно невыпуклое препятствие довольно сложной формы; например, в препятствии есть пещера. Начиная свою миссию в круге диаметра $\approx 1.5\text{м}$, роботы достигают требуемой скорости и равномерно распределяются по ширине коридора за $\approx 5.0\text{с}$, преодолев $\approx 5.0\text{м}$ по коридору. Это равномерное распределение сохраняется до $\approx 10.0\text{с}$, когда роботы встречают на своём пути препятствие. Роботам требуется $\approx 10\text{с}$, чтобы преодолеть полосу препятствий. При этом они не сталкиваются с препятствием и друг с другом и движутся по коридору (вдоль оси x) с заданной скоростью $v^x = v_{\rightarrow}$. С точностью до небольших погрешностей они постоянно остаются на общем подвижном сечении коридора (график x_i изображён на Рис.8), несмотря на то, что при прохождении полосы препятствий вся команда распадается на две подгруппы (по 4 робота в каждой), которые обходят препятствие сверху и снизу соответственно, а значит во время этого обхода не имеют связи друг с другом. После преодоления полосы препятствий требуется $\approx 10\text{с}$ для восстановления формации. С этого момента эта формация устойчиво поддерживается. На Рис.7 изоб-

ражен график бокового расстояние до ближайшего верхнего/нижнего объекта $d_{i,\delta}^{\pm}$, по нему видно, что значения $d_{i,\delta}^{\pm}$ для всех $i \in [1 : 8]$ сходятся к $\frac{w}{N+1} = \frac{5}{8+1} \approx 0.55$ вне полосы препятствия. То есть, несмотря на возмущающее воздействие препятствия и шумы сенсоров, начиная с ≈ 10 с роботы постоянно поддерживают заданную горизонтальную скорость $v^x = v_{\rightarrow}$, находятся на общем подвижном перпендикулярном сечении коридора и равномерно распределены по его ширине. Также роботы никогда не сталкиваются друг с другом, препятствием и стенами коридора. Таким образом цель управления достигается с хорошей точностью. Видео эксперимента доступно по следующей ссылке: <https://www.youtube.com/watch?v=mvGL4iMcut8>

Основное отличие эксперимента на Рис.9 от эксперимента на Рис.6 заключается в замене одиночного препятствия на полосу препятствий, состоящей из четырех препятствий. Остальные детали и результаты эксперимента практически не отличаются. Графики $d_{i,\delta}^{\pm}$ и x_i изображены на Рис.10 и 11 соответственно. Видео эксперимента доступно по следующей ссылке: <https://www.youtube.com/watch?v=P186zhf8x3U>

На Рис.12 рассматривается случай искусственного добавления выступа к препятствию. В данном эксперименте искусственно уменьшенная дальность видимости робота взята как $R'_{\text{vis}} = 0.65 * R_{\text{vis}}$. Начиная свою миссию в круге диаметра ≈ 1.5 м, роботы достигают требуемой скорости и равномерно распределяются по ширине коридора за ≈ 5.0 с, преодолев ≈ 5.0 м по коридору. Это равномерное распределение сохраняется до ≈ 15.0 с, когда роботы встречают на своём пути препятствие с вертикальной фронтальной стороной. Чтобы избежать столкновения, роботы независимо друг от друга расширяют препятствие с помощью выступа и двигаются вдоль границы этого выступа. После обхода препятствия требуется ≈ 10 с для восстановления формации. Результаты эксперимента существенно не отличаются от описанных выше. Цель управления достигается с хорошей точностью. Видео эксперимента доступно по следующей ссылке: <https://youtu.be/Z2WxG6URKp0>

На Рис.13 изображена траектория движения группы из 8 роботов при прохождении коридора с овальными препятствиями. Начиная свою миссию в круге диаметра ≈ 1.5 м, роботы не успевают достигнуть требуемой скорости и равномерно распределиться по ширине коридора, так как практически сразу входят в первую полосу препятствий, состоящую из трёх препятствий. Роботам требуется ≈ 10 с, чтобы преодолеть первую полосу препятствий, но роботы не успевают равномерно распределиться по коридору из-за

второй полосы препятствий. При преодолении второй полосы препятствий количество подгрупп меняется со временем и в некоторые моменты времени превышает 2. Преодоление второй полосы препятствий также занимает ≈ 10 с, после чего через ≈ 5 с роботы равномерно распределяются по коридору и далее постоянно сохраняют требуемую форму. График $d_{i,\delta}^{\pm}$ изображён на Рис.14. Несмотря на то, что овалы препятствия нарушают предположения теоретической части, результаты эксперимента показали эффективность алгоритма, то есть цель управления достигнута с хорошей точностью. Видео эксперимента доступно по следующей ссылке: https://youtu.be/kaV85_BpvnM

На Рис.15 изображена траектория движения группы из 8 роботов с потерей 3 роботов во время прохождения коридора с тремя препятствиями. Первые ≈ 5 с полностью совпадают с экспериментом на Рис.9, потом происходит потеря 3 членов команды, после потери роботы начинают перераспределяться по коридору. Через ≈ 5 с начинается полоса препятствий и строй нарушается, роботы делятся на три подгруппы. После преодоления полосы препятствий требуется ≈ 10 с для восстановления формации. На Рис.14 изображён график $d_{i,\delta}^{\pm}$, по нему видно, что значения $d_{i,\delta}^{\pm}$ для всех $i \in [1 : 8]$ в первые 5 секунд сходятся к $\frac{w}{N+1} = \frac{5}{8+1} \approx 0.55$, а после потери 3 членов и прохождения полосы препятствий $d_{i,\delta}^{\pm}$ для всех $i \in [1 : 5]$ сходятся к $\frac{w}{N+1} = \frac{5}{5+1} \approx 0.83$ после прохождения полосы препятствий. Данный эксперимент показал, что предложенный закон управления автоматически адаптируется к уменьшению численности команды. Видео эксперимента доступно по следующей ссылке: <https://youtu.be/H-UklpwvGt0>

На Рис.15 изображена траектория движения группы при добавлении во время движения по коридору новых членов. Пять роботов начинают свою миссию в круге диаметра ≈ 1.5 м, они достигают требуемой скорости и равномерно распределяются по ширине коридора за ≈ 5.0 с, почти сразу же происходит добавление 3 новых членов в группу. Через ≈ 5 с начинается полоса препятствий и строй нарушается, роботы делятся сначала на две, а потом и на три подгруппы. После преодоления полосы препятствий требуется ≈ 10 с для восстановления формации. На Рис.17 изображён график $d_{i,\delta}^{\pm}$, по нему видно, что значения $d_{i,\delta}^{\pm}$ для всех $i \in [1 : 5]$ в первые пять секунд сходятся к $\frac{w}{N+1} = \frac{5}{5+1} \approx 0.83$, после добавления новых членов и прохождения полосы препятствий $d_{i,\delta}^{\pm}$ для всех $i \in [1 : 8]$ сходятся к $\frac{w}{N+1} = \frac{5}{8+1} \approx 0.55$. Данный эксперимент показал, что предложенный закон управления автоматически адаптируется к добавлению новых членов во время движения. Видео эксперимента доступно по следующей ссылке: https://youtu.be/kaV85_BpvnM

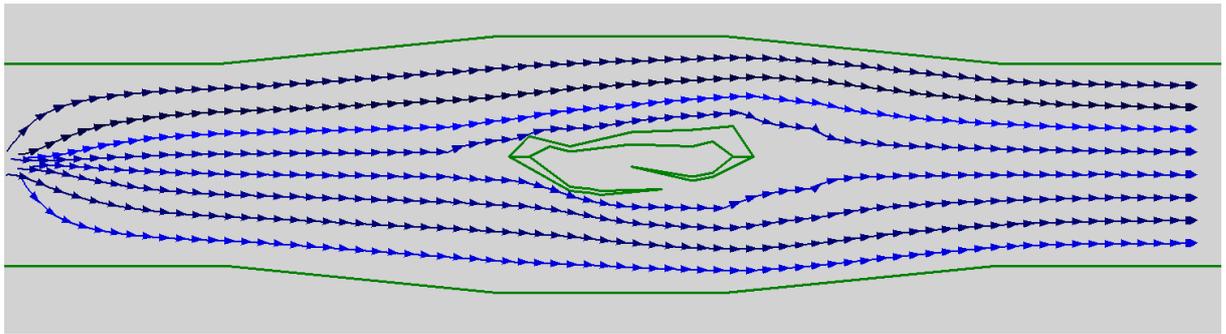


Рис. 6. Восемь роботов, сцена с одним препятствием.

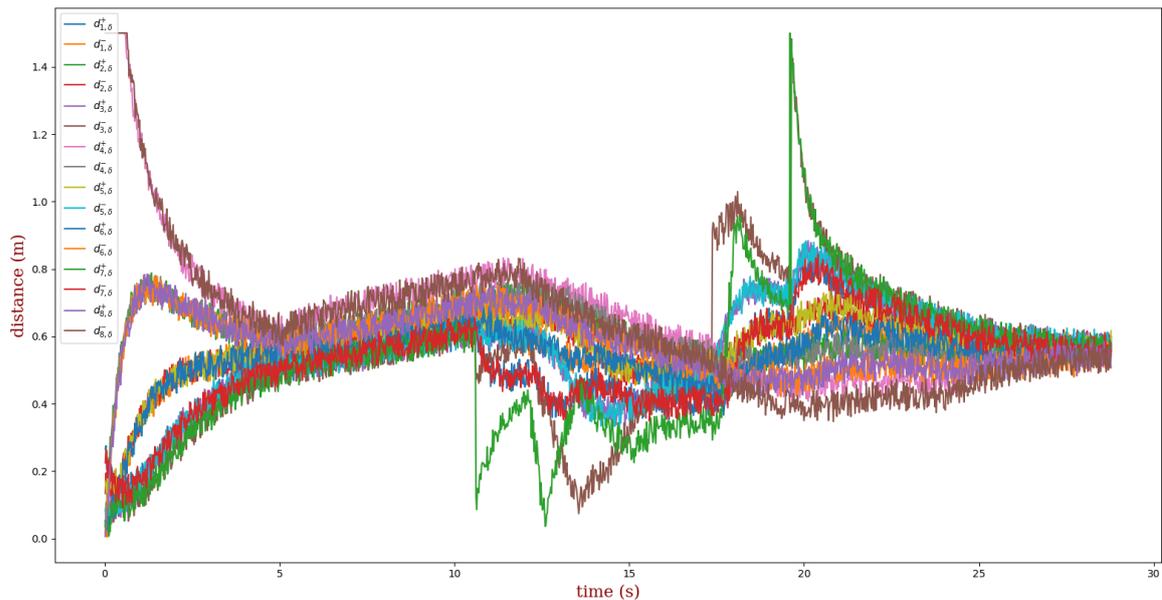


Рис. 7. График бокового расстояния до ближайшего верхнего/нижнего объекта $d_{i,\delta}^{\pm}(t)$, $i = 1, \dots, 8$, сцена с одним препятствием.

[//youtu.be/t3_h5sj3I0s](https://youtu.be/t3_h5sj3I0s)

Основное отличие эксперимента на Рис.19 от эксперимента на Рис.9 заключается в замене прямых стен коридора на стены форму неперiodической синусоиды. Эксперимент показал, что предложенный алгоритм эффективно справляется с подобными сценами, цель управления выполнена, результат существенно не отличается от результатов эксперимента с прямыми стенами. Видео эксперимента доступно по следующей ссылке: <https://youtu.be/MMgw6tHZtUA>

Для проверки алгоритма с более высокой степенью достоверности при моделировании реального мира был также проведён эксперимент в симуляторе Gazebo (<https://gazebo.org/home>). Gazebo является продвинутым 3D робототехническим симуля-

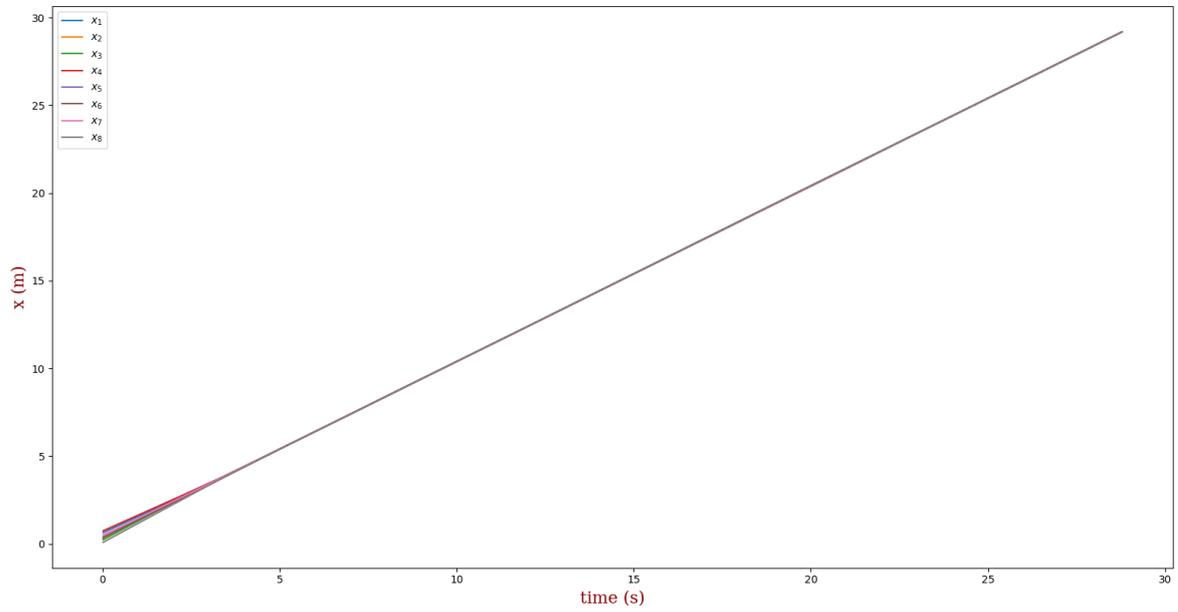


Рис. 8. График x_i , $i = 1, \dots, 8$, сцена с одним препятствием.

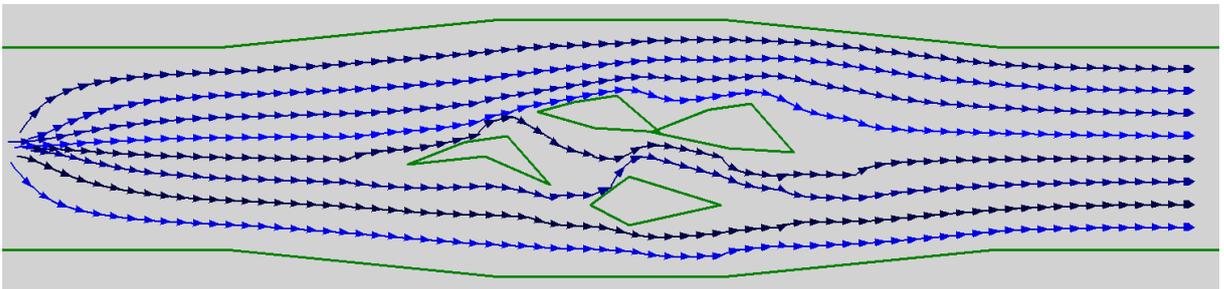


Рис. 9. Восемь роботов, сцена с тремя препятствиями.

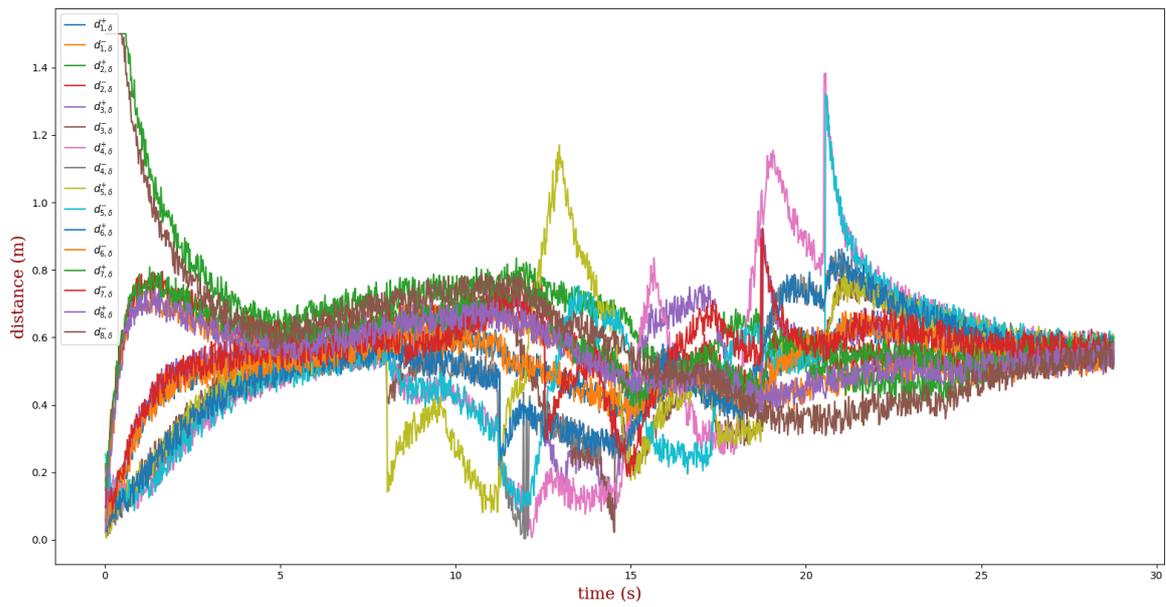


Рис. 10. График бокового расстояния до ближайшего верхнего/нижнего объекта $d_{i,\delta}^{\pm}(t)$, $i = 1, \dots, 8$, сцена с тремя препятствиями.

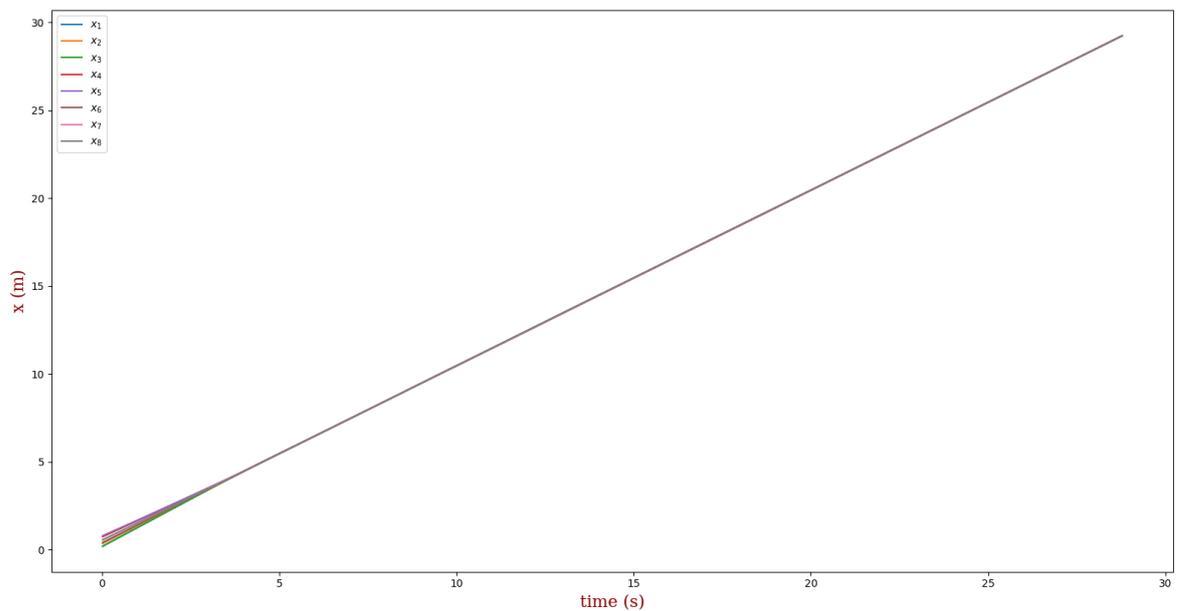


Рис. 11. График $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 8$, сцена с тремя препятствиями.

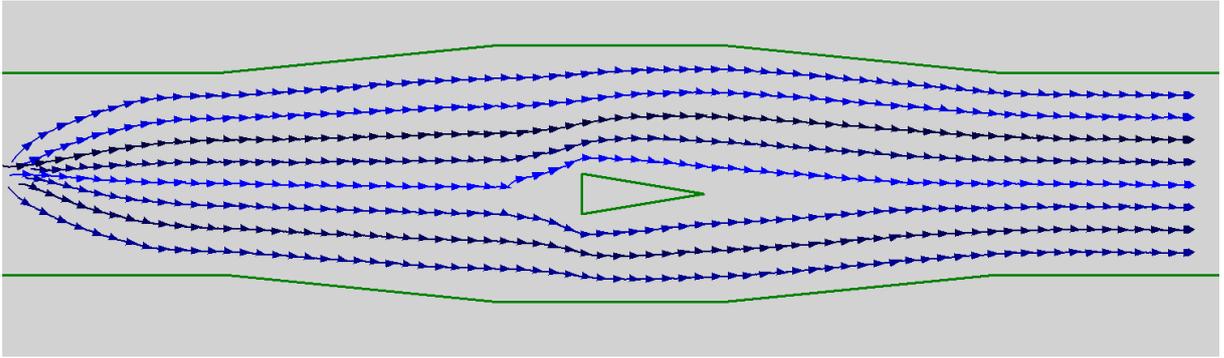


Рис. 12. Восемь роботов, сцена с одним препятствием с горизонтальной фронтальной частью.

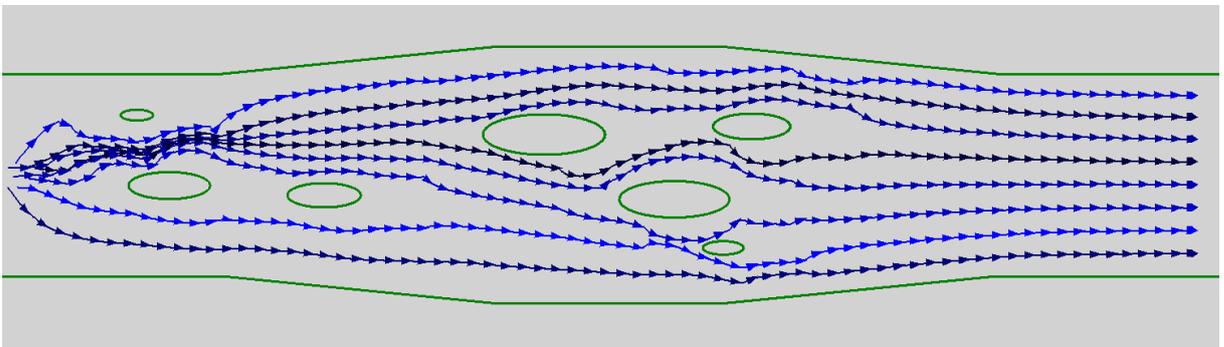


Рис. 13. Восемь роботов, сцена с овальными препятствиями.

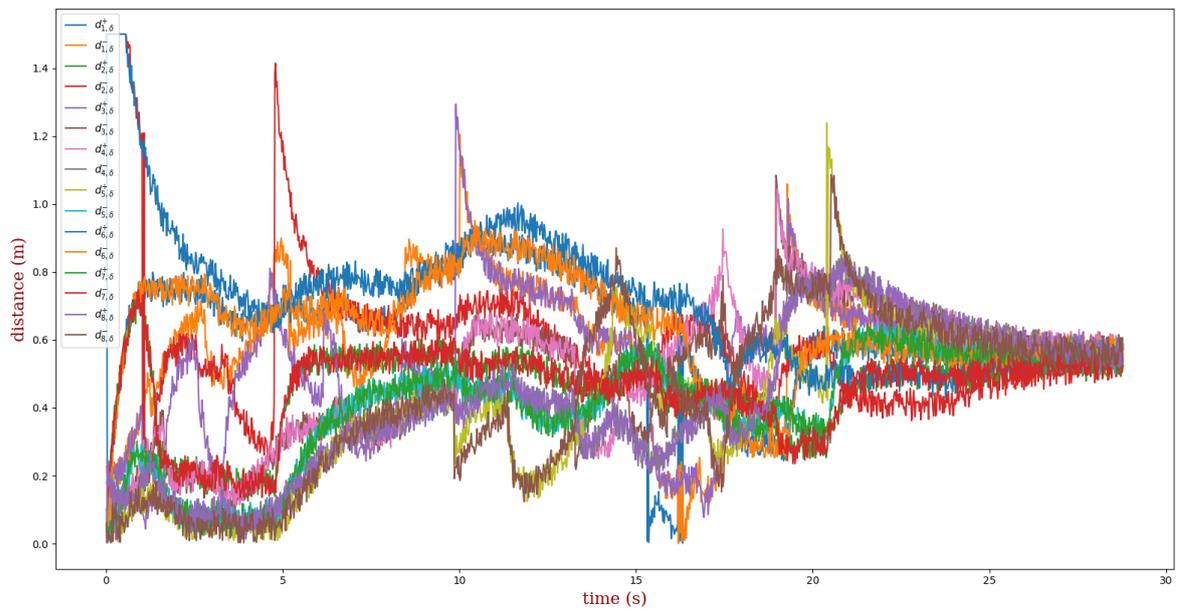


Рис. 14. График бокового расстояния до ближайшего верхнего/нижнего объекта $d_{i,\delta}^{\pm}(t)$, $i = 1, \dots, 8$, сцена с овальными препятствиями.

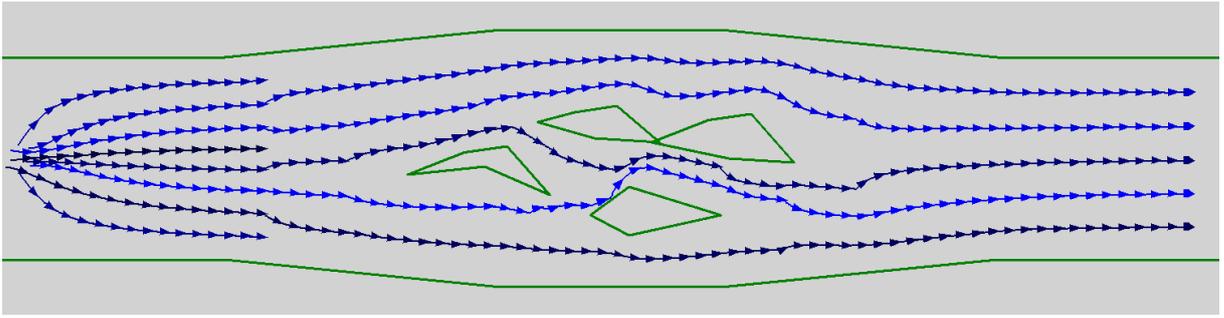


Рис. 15. Сценарий потери 3 роботов из 8 при прохождении сцены с тремя препятствиями.

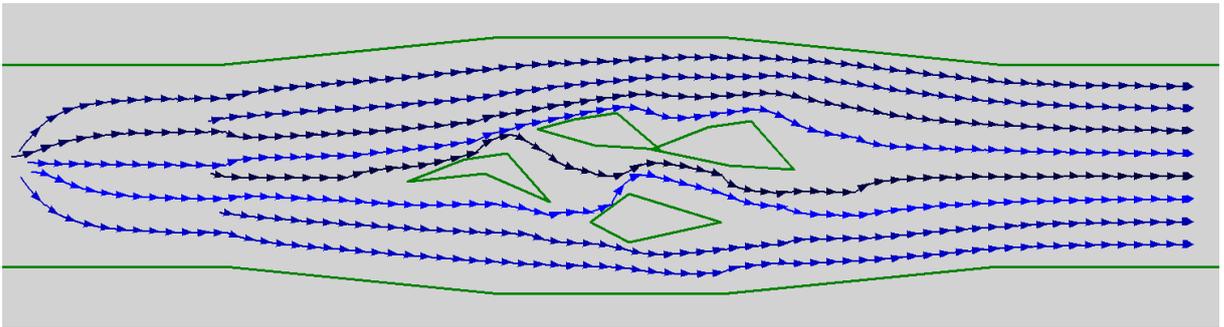


Рис. 16. Сценарий добавления 3 роботов в группу из 5 роботов при прохождении сцены с тремя препятствиями.

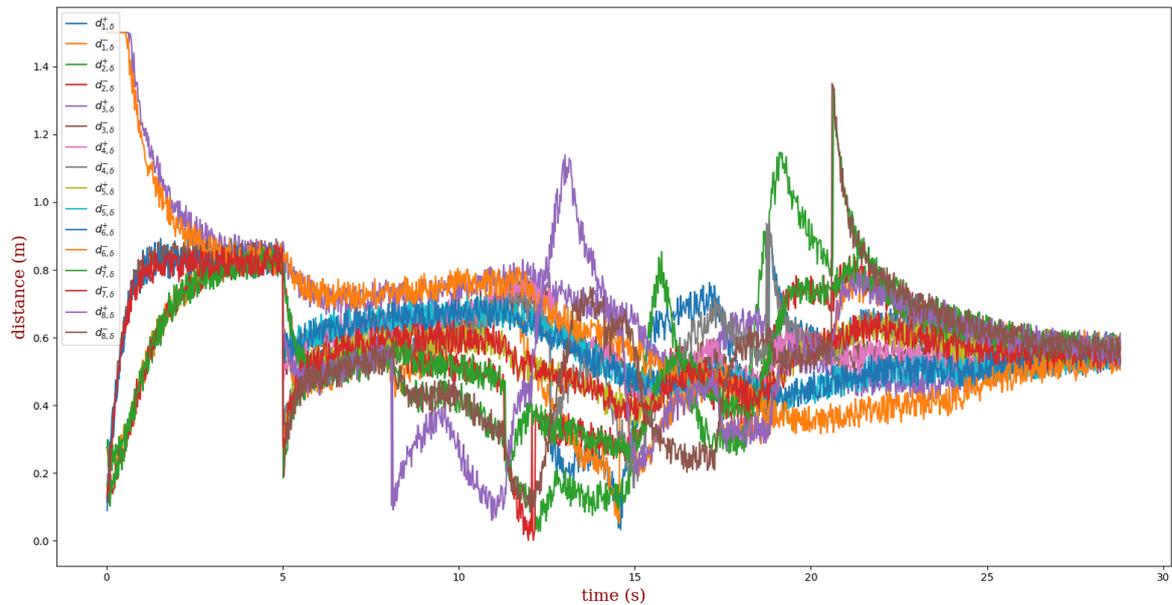


Рис. 17. График бокового расстояния до ближайшего верхнего/нижнего объекта $d_{i,\delta}^{\pm}(t)$, $i = 1, \dots, 8$, сценарий добавления 3 роботов.

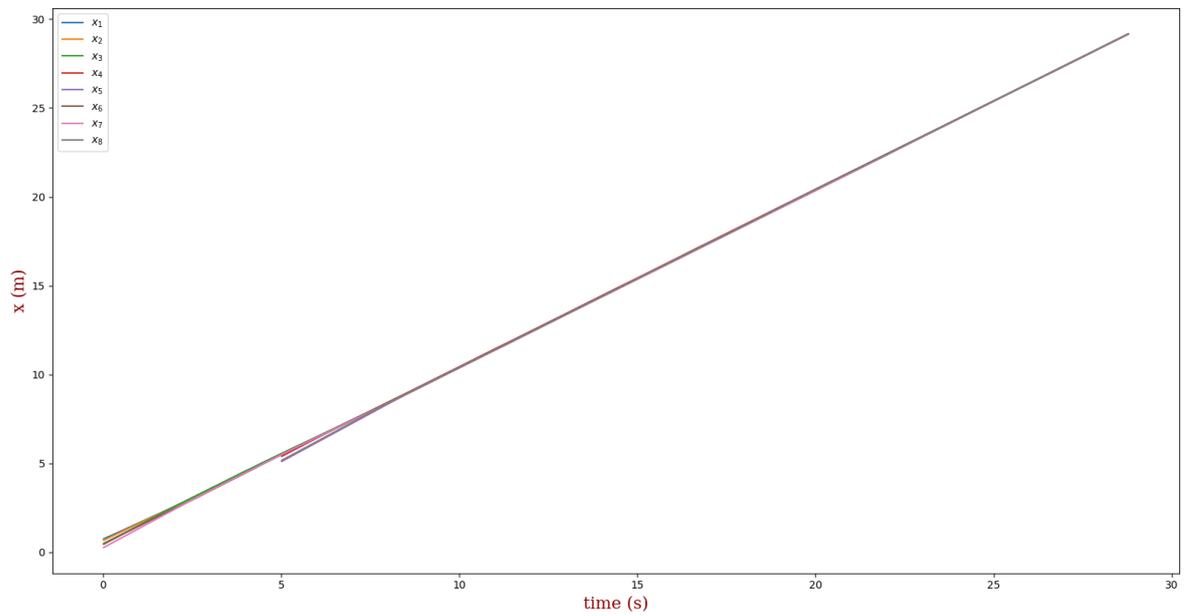


Рис. 18. График $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 8$, сценарий добавления 3 роботов.

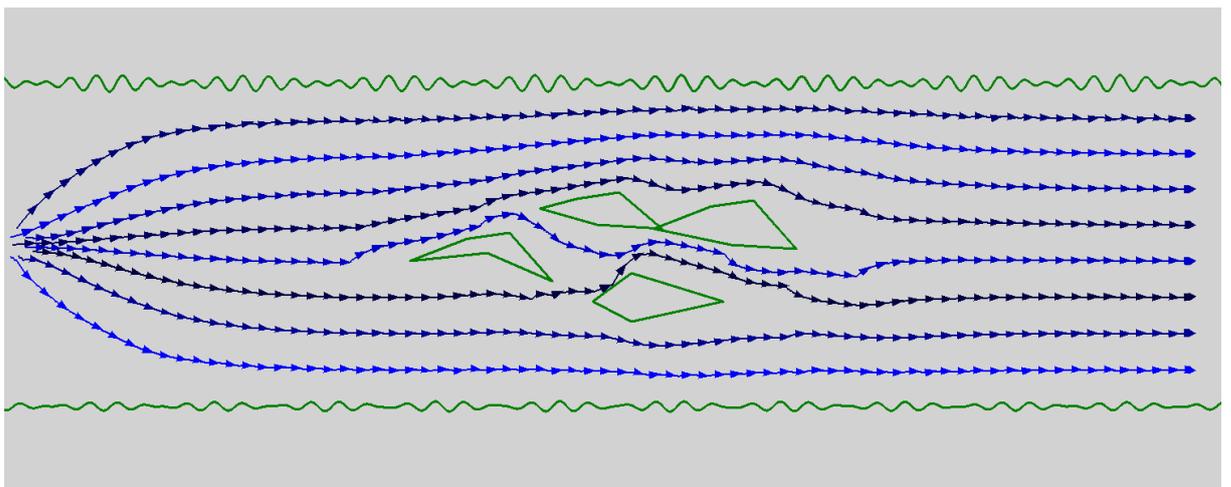


Рис. 19. Сценарий прохождения коридора с непрямыми стенами группой из 8 роботов.

тором. В качестве основной среды разработки был выбран Robot Operating System. Robot Operating System (далее ROS) – это фреймворк для программирования роботов. ROS имеет большое кол-во готовых пакетов (библиотек), инструментов для создания алгоритмов и визуализации данных, поддерживает Python и C++. ROS широко используется для разработки программного обеспечения для реальных роботов (например, промышленный робот Baxter [https://en.wikipedia.org/wiki/Baxter_\(robot\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Baxter_(robot))) и практически стал стандартом с индустрии. Главное преимущество Gazebo заключается в том, что он отлично интегрируется с ROS, а значит разработанную программу управления виртуальным роботом в Gazebo будет несложно перенести на реального робота.

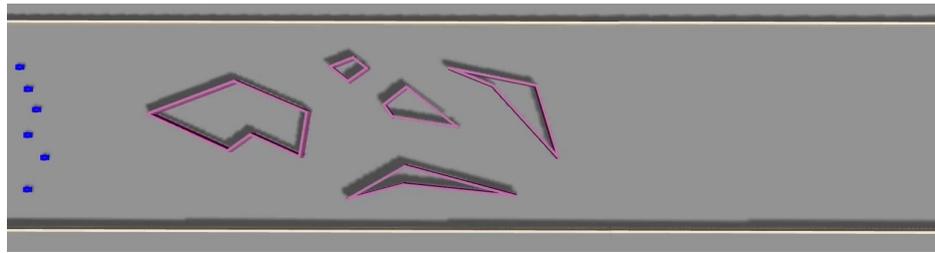
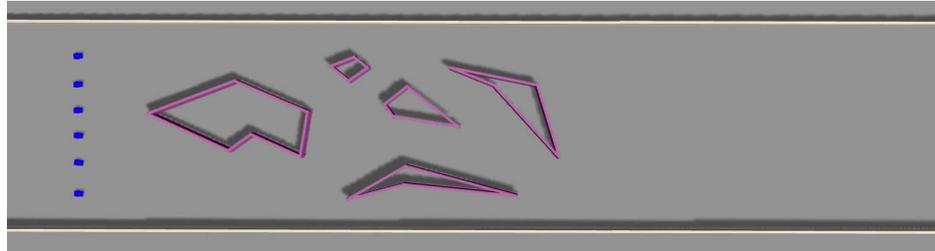
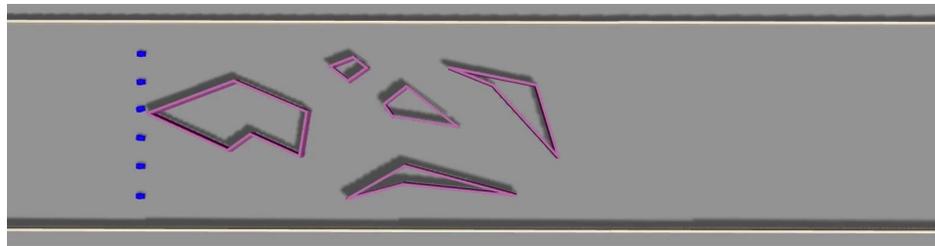
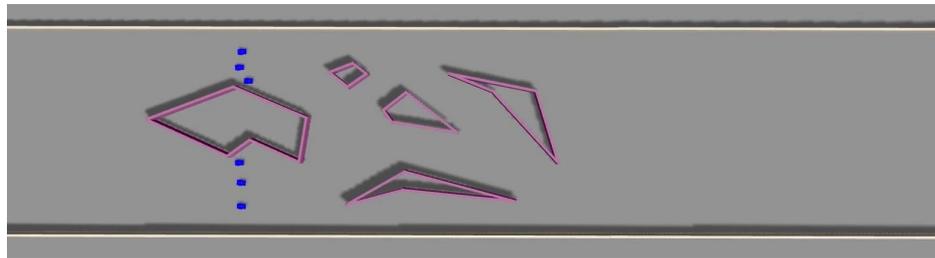
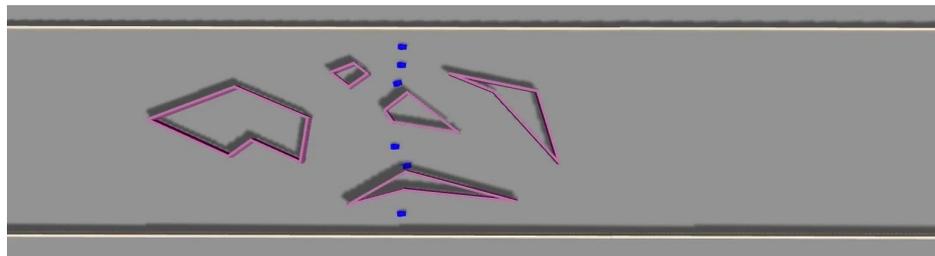
При моделировании в Gazebo были использованы следующие значения параметров алгоритма:

$$\bar{v} = 1.5 \text{ m/s}, R_{vis} = 4 \text{ m}, w = 5.5 \text{ m}, \delta = 3.4, v_{\rightarrow} = 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, R_{\Xi} = 0.8 R_{vis}, \Xi(d) = 0.1d, \Upsilon(x) = \frac{0.5x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ период дискретизации или частота обновления } \tau = 200 \text{ ms}, h(y) = \max \left\{ 1 - \frac{|y|}{h_*}; 0 \right\}, W(f) = \max \left\{ \frac{\bar{v}(f_* - |f|)}{f_*}; 0 \right\}, h_* = \frac{R_{vis}}{4}, \eta = 0.9.$$

В качестве роботов использовались двухколесные роботы с дифференциальным приводом. Для управления каждым из них использовалась двухуровневая система управления. Проверенный закон управления (12)–(16) используется для создания желаемого вектора скорости. Затем этот вектор подается в модуль управления нижнего уровня, роль которого заключается в выработке сигналов управления на левое и правое колеса, создающих требуемый вектор скорости. Этот модуль был разработан с использованием стандартных методов проектирования систем управления и включает в себя ПД регулятор.

Результат эксперимента показан на Рис. 21.

Роботы достигают требуемой скорости и равномерного распределения по коридору всего за 1.0с; см. Рис. 21(b). Группа роботов натывается на полосу препятствий через ≈ 3 с, как видно на Рис. 21(b). При преодолении полосы препятствий количество подгрупп меняется со временем следующим образом: (6) \mapsto (3 – 3) \mapsto (6) \mapsto (3 – 2 – 1) \mapsto (5 – 1) \mapsto (3 – 2 – 1) \mapsto (2 – 3 – 1) \mapsto (2 – 4) \mapsto (6). Между тем на Рис. 21(c-f) показано, что во время преодоления полосы препятствий роботы ни разу не столкнулись с препятствием; также они не сталкиваются друг с другом и со стенами коридора в течение всего времени эксперимента. Хотя роботы заметно дезорганизованы при выходе

(a) $t=0$ с(б) $t=1$ с(с) $t=2$ с(d) $t=4$ с(e) $t=6$ с

из полосы препятствий на Рис. 21(г), они быстро восстанавливают идеальный порядок на Рис. 21(и). Таким образом, эксперимент показал, что для роботов с более сложной кинематикой, предложенный закон управления подходит в качестве модуля управления верхнего уровня в рамках иерархической двухуровневой системы управления.

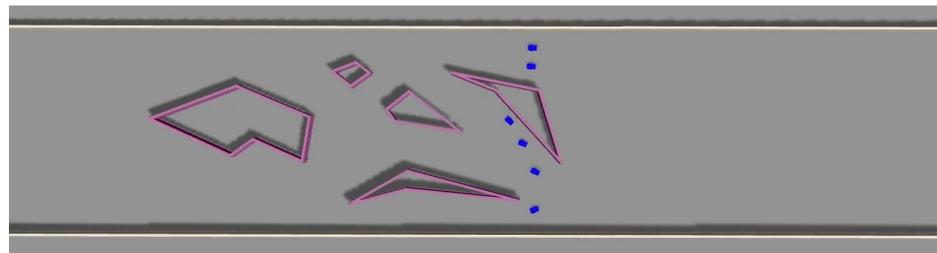
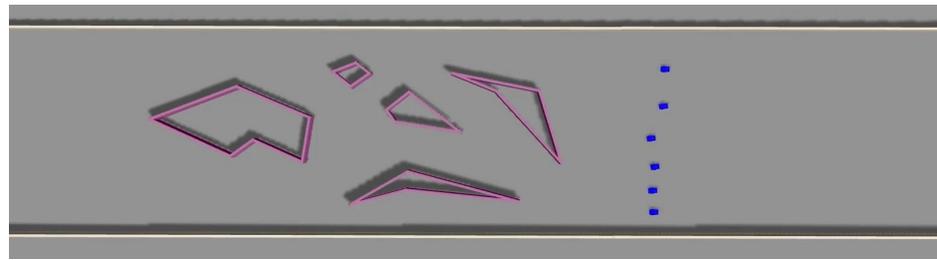
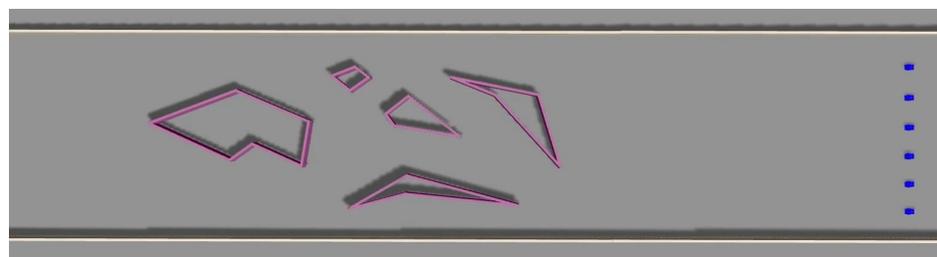
(e) $t=9$ с(ж) $t=11$ с(з) $t=16$ с

Рис. 21. Шесть роботов с дифференциальным приводом проходят через полосу препятствий с пятью препятствиями.

Видео запись эксперимента доступна по следующей ссылке: <https://youtu.be/F4csEkFEI5I>.

7. Заключение

В данной работе предложен распределённый закон управления, который автономно распределяет группу из неизвестного числа мобильных роботов в плотный барьер поперёк неизвестного коридора, в котором расположены неизвестные многоугольные препятствия. Предлагаемый закон управления также перемещает образовавшуюся формацию по коридору с заданной скоростью в заданном направлении. При этом равномерное распределение роботов по коридору обеспечивается только на свободных от препятствий участках коридора, а поперечная формация и заданная скорость по коридору сохраняются на всех участках коридора. Наряду с этим закон управления предотвращает столкновения роботов друг с другом, препятствиями и стенами коридора, а также опирается только на локальные сенсорные данные в заданном конечном диапазоне видимости и на доступе каждого робота к направлению коридора. Эффективность данного закона управления была подтверждена математически строгим доказательством глобальной сходимости и подтверждена тестами компьютерного моделирования.

Список литературы

1. Ren W., Cao Y. Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues. — London : Springer-Verlag, 2010.
2. Oh K., Park M., Ahn H. A survey of multi-agent formation control // *Automatica*. — 2015. — Vol. 53. — P. 424–440.
3. Path planning for robotic demining: Robust sensor-based coverage of unstructured environments and probabilistic methods / Acar E., Choset H., Zhang Y., and Schervish M. // *International Journal of Robotics Research*. — 2003. — Vol. 22, no. 7-8. — P. 441–466.
4. Jeremić A., Nehorai A. Design of chemical sensor arrays for monitoring disposal sites on the ocean floor // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. — 1998. — Vol. 23, no. 4. — P. 334–343.
5. Straight line path following for formations of underactuated marine surface vessels / Borhaug E., Pavlov A., Panteley E., and Pettersen K. // *IEEE Trans. Control Systems Technology*. — 2011. — Vol. 19, no. 3. — P. 493–506.
6. Zhu S., Wang D., Low C. Cooperative control of multiple UAVs for moving source seeking // *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. — 2014. — Vol. 74. — P. 333–346.
7. Wang W., Srinivasan V., Chua K. Coverage in hybrid mobile sensor networks // *IEEE Transactions on Mobile Computing*. — 2008. — Vol. 7, no. 11. — P. 1374–1387.
8. Deploying wireless sensor networks under limited mobility constraints / Chellappan S., Gu W., Bai X., Xuan D., Ma B., and Zhang K. // *IEEE Transactions on Mobile Computing*. — 2007. — Vol. 6, no. 10. — P. 1142–1157.
9. Tan G., Jarvis S., Kermarrec A. Connectivity-guaranteed and obstacle-adaptive deployment schemes for mobile sensor networks // *IEEE Transactions on Mobile Computing*. — 2009. — Vol. 8, no. 6. — P. 836–848.
10. Ma M., Yang Y. Adaptive triangular deployment algorithm for unattended mobile sensor networks // *IEEE Transactions on Computers*. — 2007. — Vol. 56, no. 7. — P. 946–958.

11. Galceran E., Carreras M. A survey on coverage path planning for robotics // *Robotics and Autonomous Systems*. — 2013. — Vol. 61, no. 12. — P. 1258–1276.
12. A survey on sensor placement for contamination detection in water distribution systems / Hu C., Li M., Zeng D., and Guo S. // *Wireless Networks*. — 2016. — September.
13. A Survey on Placement of Sensor Nodes in Deployment of Wireless Sensor Networks / Swetha K., Lahari V., Manikrisha G., and Sai K. // *2019 International Conference on Intelligent Sustainable Systems*. — Palladam, Tamilnadu, India. — 2019. — P. 132–139.
14. Basu P., Redi J. Movement Control Algorithms for Realization of Fault-Tolerant Ad Hoc Robot Networks // *IEEE Network*. — 2004. — Vol. 18, no. 4. — P. 36–44.
15. Heo N., Varshney P. Energy-Efficient Deployment of Intelligent Mobile Sensor Networks // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A*. — 2005. — Vol. 35, no. 1. — P. 78–92.
16. Coverage control for mobile sensing networks / Cortes J., Martinez S., Karatas T., and Bullo F. // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. — 2004. — Vol. 20, no. 4. — P. 243–255.
17. Schwager M., Rus D., Slotine J. Decentralized, adaptive coverage control for networked robots // *International Journal of Robotics Research*. — 2009. — Vol. 28, no. 3. — P. 357–375.
18. Razafindralambo T., Simplot-Ryl D. Connectivity preservation and coverage schemes for wireless sensor networks // *IEEE Transactions on Automatic control*. — 2011. — Vol. 56, no. 10. — P. 6819–6820.
19. Rout M., Roy R. Self-Deployment of Randomly Scattered Mobile Sensors to Achieve Barrier Coverage // *IEEE Sensors Journal*. — 2016. — Vol. 16, no. 18. — P. 6819–6820.
20. Santos M., Diaz-Mercado Y., Egerstedt M. Coverage Control for Multirobot Teams With Heterogeneous Sensing Capabilities // *IEEE Robotics and Automation Letters*. — 2018. — Vol. 3, no. 2. — P. 919–925.
21. Demetriou M. Guidance of mobile actuator-plus-sensor networks for improved control and estimation of distributed parameter systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2010. — Vol. 55, no. 7. — P. 1570–1584.
22. Decentralized Coverage Control Problems for Mobile Robotic Sensor and Actuator Networks / Savkin A., Cheng T., Li Z., Javed F., Matveev A., and Nguyen H. — Hoboken, NJ : IEEE Press and Wiley, 2015.

23. Matveev A., Konovalov P. Distributed reactive motion control for dense cooperative sweep coverage of corridor environments by swarms of non-holonomic robots // International journal of Control. — 2021. — P. 1–14. — doi:10.1080/00207179.2021.2005258.
24. Gage D. Command control for many-robot systems // Proceedings of the 19th Annual AUVS Technical Symposium. — 1992. — Vol. 4.
25. Cheng T., Savkin A. Decentralized control for mobile robotic sensor network self-deployment: Barrier and sweep coverage problems // Robotica. — 2011. — Vol. 29. — P. 283–294.
26. Filippov A. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. — Dordrecht, the Netherlands : Kluwer, 1988.
27. Moreau L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links // IEEE Trans. Autom. Control. — 2005. — Vol. 50, no. 2. — P. 169–182.
28. Danskin J. The theory of min-max, with applications // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1966. — Vol. 14, no. 4. — P. 641–644.
29. Hartman P. Ordinary Differential Equations. — Second ed. — Boston : Birkhäuser, 1982.