Санкт-Петербургский государственный университет

Борозна Анастасия Алексеевна

Выпускная квалификационная работа магистра

Модифицированный критерий экспоненциальной устойчивости для линейной системы с запаздыванием

Направление 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Образовательная программа «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Егоров Алексей Валерьевич

Рецензент:

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Плаксин Антон Романович

Санкт-Петербург

2022

Содержание

Введение

Для описания большинства динамических процессов могут быть использованы обыкновенные дифференциальные уравнения. Стоит отметить, что их рассмотрение возможно только для описания процессов, будущее состояние которых зависит только от одного, текущего состояния.

В современном мире существует множество различных явлений, при построении математических моделей которых возникают системы с запаздыванием. К ним относятся процессы в биологии, экономике, физике, экологии и другие, где важно учитывать прошлые состояния системы. В качестве запаздывания может выступать время ответа системы или время протекания физической реакции. Похожие ситуации возникают в случае, когда взаимодействие различных составляющих одной системы происходит с некоторой задержкой.

Как мы знаем, любые, даже самые малые, отклонения начального положения системы могут отражаться на последующих состояниях для неустойчивых систем. В связи с этим ключевым вопросом для систем с запаздыванием является вопрос их устойчивости. Данный раздел для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений хорошо изучен, и разработаны основные подходы к его решению. Одним из них является метод функций Ляпунова. Согласно ему, существование единственного решения уравнения Ляпунова, которое является симметричной, положительно определенной матрицей, достаточно для экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем дифференциальных уравнений.

К сожалению, прямого аналога для систем с запаздыванием не существует. В настоящее время разработаны некоторые подходы, обобщающие известный метод Ляпунова на случай систем с запаздыванием и дающие условия экспоненциальной устойчивости.

Один из таких обобщающих подходов позволил получить критерий экспоненциальной устойчивости, дающий возможность проверить систему на устойчивость/неустойчивость за конечное число математических операций. Главная идея данного критерия – проверка матрицы специального вида на положительную определённость. В основе построения этой блочной матрицы лежит фундаментальная матрица системы и матрица Ляпунова. От параметров системы, таких как размерность матриц и величина запаздывания зависит размерность построенной матрицы. Не редко это может быть довольно большое число, в связи с чем возникает сложность с проверкой на положительную определённость.

Постановка задачи

Главной целью данной работы является построение модификации полученного ранее критерия экспоненциальной устойчивости для линейной системы с одним запаздыванием. С помощью уточнения вида фундаментальной матрицы, а также некоторого обобщения оценок при аппроксимации функций из заранее определенного предкомпактного множества функциями специального вида, будет уменьшен размер рассматриваемой блочной матрицы.

Полученный результат оценивается относительно первоначальных достижений, а также некоторых модификаций, которые были достигнуты в предыдущих работах.

Еще одной целью является реализация полученного критерия в программной среде MATLAB.

Обзор литературы

В силу актуальности рассматриваемой темы появляется все больше работ, которые посвящены теории, а также приложениям дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Фундаментальная теоретическая информация приведена в [1], [2], [14]. Среди статей по этой теме можно выделить [10], [13], [17]. Множество процессов могут быть описаны с помощью уравнений с запаздыванием, например, в химии [22], экономике [18], биологии [24], электротехнике и машиностроении [23].

Важнейшее место в теории систем с запаздывающим аргументом занимает теория функционалов Ляпунова-Красовского полного типа. В книге [14] можно найти наиболее полный обзор сведений по этой теме. Также там вводится такое важное понятия, как матрица Ляпунова - решение системы специального вида, а также подробно рассматривается вопрос экспоненциальной устойчивости. Вопрос построения матрицы Ляпунова также рассматривается в работах [3], [6], [21]. В книге [14] и в статье [15] введены важные функционалы, которые базируются на матрице Ляпунова. С их помощью сформулированы и доказаны некоторые необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в терминах проверки функционала на положительную определённость.

В работах [2], [7-9] были предприняты попытки свести задачу проверки функционала полного типа на положительную определённость, и представлены некоторые последующие модификации. Для начала в статье [9] было сформулировано необходимое условие экспоненциальной устойчивости линейной системы с запаздыванием с использованием блочной матрицы, базирующейся на матрице Ляпунова. В свою очередь в статье [7], продолжающей рассуждения [9], представлено необходимое и достаточное условие и лемма, в которой рассматривается аппроксимация непрерывных функций функциями специального вида.

В статье [8], обобщающей полученные в [7] и [9] результаты, формулируется базовая теорема: определяется некоторое число, отвечающее за размерность матрицы специального вида. Эта матрица обладает следующими свойствами: положительно определена в случае, когда система экспоненциально устойчива, и не положительно определена в противном случае.

Необходимые условия устойчивости из [9] обобщаются для различных систем. Например, публикация [5] рассматривает случай несоизмеримых запаздываний, в [12] внимание уделяется периодическим системам с запаздыванием, статья [11] исследует системы с кратным соизмеримым запаздыванием.

В работе [2] была предложена модификация критерия экспоненциальной устойчивости для линейной стационарной системы с одним запаздыванием из [8]. Была реализована идея более рационального выбора точек дискретизации, за счет чего удалось улучшить аппроксимацию функций из заданного предкомпактного множества функциями специального вида. В конечном итоге удалось уменьшить размерность матрицы специального вида почти вдвое.

Глава 1.

1.1 Основные понятия и базовые утверждения

Будем рассматривать систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t > 0, \tag{1}$$

где h запаздывание, $x(t) \in R^n$, A_0 и A_1 – некоторые вещественные матрицы.

Пусть $\varphi \in H,$ где $H = PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ – пространство кусочно-непрерывных вектор функций, определенных на $[-h, 0]$. Начальное условие для системы (1) имеет вид:

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]. \tag{2}$$

Через $x(t, \varphi)$ обозначим решение задачи Коши (1)-(2).

Для любой $\varphi \in H$ определим равномерную норму

$$\| \varphi \|_H = \sup_{\theta \in [-h,0]} \| \varphi(\theta) \|,$$

где $\|\cdot\| -$ Евклидова норма вектора.

Определение 1 [14] Система (1) *экспоненциально устойчива*, если существуют положительные константы γ и σ такие, что для любой начальной функции φ

$$\| x(t, \varphi) \| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \| \varphi \|_H , \quad t \geqslant 0.$$

Определение 2 [14] *Фундаментальная матрица* K, размерности $n \times n$, для системы (1) - это единственное решение уравнения

$$\dot{K}(t) = A_0 K(t) + A_1 K(t-h), \quad t > 0, \tag{3}$$

с начальными условиями $K(0) = I$, $K(t) = 0$ при $t < 0$.

На отрезке $[0, h]$ решение матричного уравнения (3) можно получить методом шагов:

$$K(t) = e^{A_0 t}, \qquad t \in [0, h]. \tag{4}$$

Определение 3 [15] Матрица $U(\tau), \tau \in [-h, h]$, является *матрицей Ляпунова*, если она непрерывна и удовлетворяет следующим трём уравнениям

$$U'(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1, \quad \tau \in (0, h),$$

$$U(\tau) = U^T(-\tau), \quad \tau \in [-h, h],$$

$$[U(0)A_0 + A_0^T U(0)] + [U(-h)A_1 + A_1^T U(h)] = -W,$$

где W — заданная положительно определенная матрица.

Определение 4 [14] Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если не существует собственных чисел s_1 и s_2 системы (1), что

$$s_1 + s_2 = 0.$$

Лемма 1 [14] Матрица Ляпунова U существует и единственна для любой симметричной W тогда и только тогда, когда выполнено условие Ляпунова.

В работах [7-9] рассматриваются функционалы, являющиеся модификацией функционалов полного типа из [14, 15], следующего вида:

$$z(\varphi, \psi) = \varphi^T(0)U(0)\psi(0) + \varphi^T(0)\int_{-h}^{0} U(-s-h)A_1\psi(s)ds$$

$$+ \int_{-h}^{0} \varphi^T(s)A_1^T U^T(-s-h)ds\psi(0)$$

$$+ \int_{-h}^{0} \varphi^T(s_1)A_1^T \int_{-h}^{0} U(s_1 - s_2)A_1\psi(s_2)ds_2 ds_1 + \int_{-h}^{0} \varphi^T(s)W\psi(s)ds,$$

$$v_1(\varphi) = z(\varphi, \varphi) = \varphi^T(0)U(0)\psi(0) + 2\varphi^T(0)\int_{-h}^{0} U(-s-h)A_1\varphi(s)ds$$

$$+ \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \varphi^T(s_1)A_1^T \mathrm{U}(s_1 - s_2)A_1\psi(s_2)ds_2 ds_1 + \int_{-h}^{0} \varphi^T(s)W\varphi(s)ds.$$

Здесь $\varphi, \psi \in H$.

Лемма 2 [14] Существует $\alpha_2 > 0$, что

$$|z(\varphi,\psi)| \leqslant \alpha_2 \parallel \varphi \parallel_H \parallel \psi \parallel_H,$$

$$|\upsilon_1(\varphi)| \leqslant \alpha_2 \parallel \varphi \parallel_H^2$$

для любых $\varphi, \psi \in H$.

Доказательство:

Пусть $\nu = \max\limits_{\tau \in [-h;h]} \|U(\tau)\|$, тогда

$$|z(\varphi,\psi)| \leqslant \parallel \varphi \parallel_H \cdot \nu \cdot \parallel \psi \parallel_H + 2 \cdot \parallel \varphi \parallel_H \cdot \nu \cdot \|A_1\| \cdot h \cdot \parallel \psi \parallel_H$$

$$+ \parallel \varphi \parallel_H \cdot \nu \cdot \|A_1\|^2 \cdot h^2 \parallel \psi \parallel_H + \parallel \varphi \parallel_H \cdot \|W\| \cdot h \cdot \parallel \psi \parallel_H.$$

Всегда можно взять

$$\alpha_2 \geqslant \nu \cdot (1 + \|A_1\| \cdot h)^2 + \|W\| \cdot h. \qquad (5)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 1 [14] Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда выполнено условие Ляпунова и существует $\alpha_1 > 0$, что

$$\upsilon_1(\varphi) \geqslant \alpha_1 \parallel \varphi(0) \parallel^2 \quad \text{для любой } \varphi \in H.$$

Кроме того, если система экспоненциально устойчива, то

$$\upsilon_1(\varphi) \geqslant \alpha_1^* \parallel \varphi(0) \parallel^2, \qquad (6)$$

где $\alpha_1^* = \beta/2$. Здесь $\beta > 0$ такая, что матрица $P(\beta)$ положительно определена:

$$P(\beta) = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_0^T + A_0 & A_1 \\ A_1^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта задача всегда может быть сведена к задаче поиска собственных чисел следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_0^T + A_0 & A_1 \\ A_1^T & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Все собственные числа матрицы (7) вещественные, достаточно рассмотореть наименьшее собственное число υ, которое обязательно будет отрицательным, и тогда всегда можно построить положительное $\alpha_1^* = -\frac{1}{2\upsilon}$.

1.2 Вспомогательные результаты

Теорема 1 дает необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (1), но требует проверки функционала υ_1 на положительную определённость для всех кусочно-непрерывных функций φ из пространства H.

В работе [7] был предложен подход, который позволяет заменить в теореме 1 пространство H на пространство H_d функций вида:

$$\psi_r(\theta) = \sum_{i=1}^{r} K(\tau_i + \theta)\gamma_i, \quad \theta \in [-h, 0], \tag{8}$$

где $\tau_i \in (0, h]$, $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ — произвольные векторы.

Введем функцию $\chi(x)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Тогда (8), с учетом (4), можно переписать в следующем виде:

$$\psi_r(\theta) = \sum_{i=1}^{r} \chi(\tau_i + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_i + \theta)}\gamma_i, \qquad \theta \in [-h, 0]. \tag{9}$$

Для определённости будем считать, что

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_r = h.$$

Для удобства обозначений введём дополнительно $\tau_0 = 0$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$.

Теорема 2 [7] Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда выполнено условие Ляпунова и для любого $r \in N$ следующая блочная матрица размера $nr \times nr$ положительно определена:

$$\mathcal{K}_r = \left[U\left(\frac{j-i}{r}h\right)\right]_{i,j=1}^{r}. \qquad (10)$$

Теорема 2 гарантирует, что для любой неустойчивой системы существует некоторое натуральное число r, что матрица $\mathcal{K}_r$ не будет положительно определена. В рамках этой теоремы неизвестно ничего о том, как получить это число.

Теорема 3 [9] Для любой $\psi_r \in H_d$

$$v_1(\psi_r) = \gamma^T \mathcal{K}_r \gamma,$$

где $\gamma = (\gamma_1^T, \dots, \gamma_r^T)^T$.

Далее расматриваем подход, описанный в работе [19]. Вводим предкомпактное множество:

$$S = \{\varphi \in C^{(1)}([-h,0], R^n) \mid \| \varphi \|_H = \| \varphi(0) \| = 1, \| \varphi' \|_H \leqslant M\},$$

где $M = \|A_0\| + \|A_1\|$.

Следующий результат представлен в [8] и основывается на аналогичном результате из [19].

Теорема 4 [8] Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда выполнено условие Ляпунова и существует $\alpha_1 > 0$, что

$$v_1(\varphi) \geqslant \alpha_1 \quad \text{для любой } \varphi \in S.$$

В теореме 4 аналогично теореме 1, нужно проверить нижнюю оценку функционала v_1 для всех функций φ, принадлежащих пространству S.

1.4 Аппроксимация функций пространства *S*

Продолжим рассуждения, опираясь на идею, предложенную в [7]. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in S$ и аппроксимируем ее функцией $\psi_r \in H_d$.

Строим ψ_r^1 по аналоги с работами [7, 8]. Находим $\gamma_i, i = 1 \dots r$, из равенств:

$$\varphi(-\tau_k) = \psi_r^1(-\tau_k), \qquad k = 0 \dots r. \tag{11}$$

Получаем для $k = 1 \dots r$:

$$\varphi(-\tau_k) = \sum_{i=1}^{r} \chi(\tau_i - \tau_k) \cdot e^{A_0(\tau_i - \tau_k)} \gamma_i.$$

Отсюда следует, в частности, при $k = r$:

$$\varphi(-\tau_r) = \chi(\tau_r - \tau_r) \cdot e^{A_0(\tau_r - \tau_r)} \gamma_r = \gamma_r.$$

Далее, рекуррентно можно получить:

$$\begin{cases} \gamma_r = \varphi(-\tau_r), \\ \gamma_k = \varphi(-\tau_k) - e^{A_0(\tau_{k+1} - \tau_k)} \varphi(-\tau_{k+1}), \qquad k = 1, \dots, r-1. \end{cases}$$

С учетом этого (9) примет вид:

$$\psi_r^1(\theta) = \chi(\tau_1 + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_1 + \theta)} \cdot \varphi(-\tau_1) -$$

$$-\chi(\tau_1 + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_1 + \theta + \tau_2 - \tau_1)} \cdot \varphi(-\tau_2) + \chi(\tau_2 + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_2 + \theta)} \cdot \varphi(-\tau_2) -$$

$$-\chi(\tau_2 + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_2 + \theta + \tau_3 - \tau_1)} \cdot \varphi(-\tau_2) + \cdots$$

$$+ \chi(\tau_{r-1} + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_{r-1} + \theta)} \cdot \varphi(-\tau_{r-1}) -$$

$$-\chi(\tau_{r-1} + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_{r-1} + \theta + \tau_r - \tau_{r-1})} \cdot \varphi(-\tau_r) + \chi(\tau_r + \theta) \cdot e^{A_0(\tau_r + \theta)} \cdot \varphi(-\tau_r).$$

Формулу выше можно переписать в следующем виде:

$$\psi_r^1(\theta) = e^{A_0(\tau_i + \theta)} \cdot \varphi(-\tau_i), \qquad \theta \in [-\tau_i, -\tau_{i-1}).$$

Рассмотрим еще один вариант аппроксимации функций φ, предложенный в [2].

Пусть

$$\varphi\left(\frac{-\tau_k-\tau_{k-1}}{2}\right)=\psi_r^2\left(\frac{-\tau_k-\tau_{k-1}}{2}\right), \qquad k=1\ldots r. \tag{12}$$

Тогда, рассуждая аналогично, получим:

$$\begin{cases} \gamma_r = e^{A_0\left(\frac{\tau_{r-1}-\tau_r}{2}\right)}\cdot\varphi\left(\frac{-\tau_r-\tau_{r-1}}{2}\right), \\ \gamma_k = e^{A_0\left(\frac{\tau_{k-1}-\tau_k}{2}\right)}\cdot\varphi\left(\frac{-\tau_k-\tau_{k-1}}{2}\right)-e^{A_0\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{2}\right)}\varphi\left(\frac{-\tau_{k+1}-\tau_k}{2}\right), \\ k=1,\ldots,r-1. \end{cases}$$

В этом случае формула (9) примет вид

$$\psi_r^2(\theta)=e^{A_0\left(\frac{\tau_i+\tau_{i+1}}{2}+\theta\right)}\cdot\varphi\left(\frac{-\tau_i-\tau_{i-1}}{2}\right), \qquad \theta\in[-\tau_i,-\tau_{i-1}).$$

Таким образом, удалось получить два способа определения функций из (9) . Далее покажем, что за счет конкретизации формулы для фундаментальной матрицы (4) точность аппроксимации увеличилась по сравнению с предыдущими работами.

Пусть ошибка аппроксимации $R_r^i=\varphi-\psi_r^i,\ i=1,2$. И пусть L – такая константа, что $\| K'(t) \|\leq L$ на $[0,h]$ почти всюду.

Лемма 3 Для любой $\varphi\in S$

$$\| R_r^1 \|_H \leqslant (M+L)\max_{i\in\{1,\ldots,r\}}\delta_i.$$

Доказательство: Зафиксируем номер $i\in\{1,\ldots,r\}$ и будем рассматривать $\theta\in[-\tau_i,-\tau_{i-1})$:

$$\| \varphi(\theta)-\psi_r(\theta) \| = \|\varphi(\theta)-\varphi(-\tau_i)+\psi_r(-\tau_i)-\psi_r(\theta)\|$$

$$\leq \|\varphi(\theta)-\varphi(-\tau_i)\|+\left\|e^{A_0(\tau_i-\tau_i)}\cdot\varphi(-\tau_i)-\ e^{A_0(\tau_i+\theta)}\cdot\varphi(-\tau_i)\right\|.$$

В силу $\| K'(t) \|\leqslant L$ и $\| \varphi' \|_H\leqslant M$ соответственно получаем:

$$\| K(t_1)-K(t_2) \|\leqslant L|t_1-t_2|,$$

$$\| \varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2) \|\leqslant M|\theta_1-\theta_2|.$$

Следовательно,

$$\| \varphi(\theta) - \psi_r(\theta) \| \leqslant (M + L)\delta_i.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 4 Для любой $\varphi \in S$

$$\| R_r^2 \|_H \leqslant (M + L) \max_{i \in \{1,\dots,r\}} \frac{\delta_i}{2}.$$

Рассмотрим простейший частный случай. Пусть точки τ_i равномерно распределены по отрезку $[0, h]$, т.е.

$$\tau_i = \frac{ih}{r}, i = 1, \dots, r.$$

Тогда

$$\delta_i = \delta_r = \frac{h}{r}, \Upsilon_i = \Upsilon_r, i = 1, \dots, r.$$

Получаем следующие оценки:

$$\| R_r^1 \|_H \leqslant (M + L)\frac{h}{r},$$

$$\| R_r^2 \|_H \leqslant (M + L)\frac{h}{2r}.$$

Сравним с аналогичными оценками из [8] и [2]:

$$\| R_r^3 \|_H \leqslant \frac{(M + L)e^{Lh}}{\frac{r}{h} + L},$$

$$\| R_r^4 \|_H \leqslant \frac{1}{2} \frac{(M + L \cdot \Upsilon_0)e^{L \cdot \Upsilon_0 \cdot h}}{\frac{r}{h} + L \cdot \Upsilon_0},$$

где $\Upsilon_0 = \max_{\theta \in \left[0, \frac{h}{2r_0}\right]} \| K^{-1}(\theta) \|$, r_0 – некоторое фиксированное натуральное число такое, что $r \geqslant r_0$. Наименьшее возможное значение для Υ_0 – единица.

Несложно заметить, что в новых оценках отсутствует прямая зависимость от экспоненты. Правые части оценок R_r^1 и R_r^2 полиноминально зависят от параметра h. В свою очередь рост правых частей оценок R_r^3, R_r^4 относительно параметра h происходит экспоненциально, с увеличением h. Как известно алгоритмы с экспоненциальным временем считаются неэффективными.

В одном из следующих параграфов будут представлены системы, на примере которых также можно убедится в уменьшении оценок на ошибку нормы аппроксимации.

1.5 Конечный критерий экспоненциальной устойчивости

Введем положительно полуопределенную блочную матрицу:

$$\mathcal{A}_r = \left(K(\tau_1), \dots, K(\tau_r)\right)^T \cdot \left(K(\tau_1), \dots, K(\tau_r)\right). \tag{13}$$

Теорема 5 Пусть $\alpha_1 \in (0, \alpha_1^*), \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\lfloor \varepsilon \rfloor$ обозначает округление до ближайшего целого числа, которое не больше самого ε.

Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда выполнено условие Ляпунова и матрица

$$\mathcal{K}_r - \alpha_1 \mathcal{A}_r \tag{14}$$

положительно определена, где *r* выбирается как минимум из двух величин:

$$r = min\{r_1; r_2\}, \text{ где}$$

$$\begin{gathered} r_1 = 1 + \left\lfloor h(M+L)\left(\sqrt{\alpha(\alpha+1)} + \alpha\right)\right\rfloor, \\ r_2 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{4} h(M+L)\left(\sqrt{4\alpha + (2\alpha+1)^2} + 2\alpha + 1\right)\right\rfloor. \end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство: Начнем с необходимости. Теорема 1 позволяет показать, что для любого $\gamma \in \mathbb{R}^{nr}$ такого, что $\gamma^T \mathcal{A}_r \gamma > 0$,

$$\gamma^T \mathcal{K}_r \gamma - \alpha_1 \gamma^T \mathcal{A}_r \gamma > \gamma^T \mathcal{K}_r \gamma - \alpha_1^* \gamma^T \mathcal{A}_r \gamma = \upsilon_1(\psi_r) - \alpha_1^* \parallel \psi_r(0) \parallel^2 \geqslant 0.$$

Если $\gamma^T \mathcal{A}_r \gamma = 0, \gamma \neq 0$, тогда разность $\gamma^T \mathcal{K}_r \gamma - \gamma^T \mathcal{A}_r \gamma$ также положительна, так как по теореме 2 матрица $\mathcal{K}_r$ положительно определена.

Перейдем к достаточности. Рассматриваем произвольную функцию $\varphi \in S$, построим для нее соответствующую функцию ψ_r, определим $R_r^{\mathrm{i}} = \varphi - \psi_r^i$. Тогда

$$v_1(\varphi) = v_1\left(\psi_r^i + R_r^i\right) = z\left(\psi_r^i + R_r^i, \psi_r^i + R_r^i\right)$$

$$= z(\psi_r^i, \psi_r^i) + 2z(\psi_r^i, R_r^i) + z(R_r^i, R_r^i)$$

$$= z(\psi_r^i, \psi_r^i) + 2z(\varphi, R_r^i) - z(R_r^i, R_r^i) = v_1(\psi_r^i) + 2z(\varphi, R_r^i) - v_1(R_r^i).$$

По лемме 2

$$z(\varphi, R_r^i) \geqslant -\alpha_2 \parallel \varphi \parallel_H \parallel R_r^i \parallel_H \geqslant -\alpha_2 \parallel R_r^i \parallel_H,$$

$$v_1(R_r^i)) \geqslant -\alpha_2 \left\| R_r^i \right\|_H^2,$$

и следовательно,

$$v_1(\varphi) \geqslant v_1\left(\psi_r^i\right) - \alpha_1 \parallel \psi_r^i(0) \parallel^2 + \alpha_1 \parallel \psi_r^i(0) \parallel^2 - 2\alpha_2 \varepsilon_r^i - \alpha_2 (\varepsilon_r^i)^2, \qquad (16)$$

где $\left\| R_r^i \right\| \leq \varepsilon_r^i$.

Рассмотрим $i = 1$. В силу того, что:

$$\parallel \psi_r^1(0) \parallel = \parallel \varphi(0) \parallel = 1,$$

Оценка (16) примет вид

$$v_1(\varphi) \geqslant v_1(\psi_r^1) - \alpha_1 \parallel \psi_r^1(0) \parallel^2 - \alpha_2 (\varepsilon_r^1)^2 - 2\alpha_2 \varepsilon_r^1 + \alpha_1.$$

В силу (8)

$$v_1(\varphi) \geqslant \gamma^T \mathcal{K}_r \gamma - \alpha_1 \gamma^T \mathcal{A}_r \gamma - \alpha_2 (\varepsilon_r^1)^2 - 2\alpha_2 \varepsilon_r^1 + \alpha_1.$$

Для r_1 из условий теоремы

$$\frac{h(M+L)}{r_1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}+\alpha}.$$

С учетом леммы 3 и оценки выше:

$$\| R_r^1 \|_H \leqslant \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2(\alpha_1+2\alpha_2)}+\alpha_2}.$$

Из этого следует, что

$$-\alpha_2(\varepsilon_r^1)^2 - 2\alpha_2\varepsilon_r^1 + \alpha_1 \geqslant 0.$$

Приведем аналогичные рассуждения для случая $i = 2$.

Заметим, что

$$\| \psi_r^2(0) \| \geqslant \| \varphi(0) \| - \| \psi_r^2(0) - \varphi(0) \| \geqslant 1 - \varepsilon_r^2.$$

Получаем следующий вид (15):

$$v_1(\varphi) \geqslant v_1(\psi_r^2) - \alpha_1 \| \psi_r^2(0) \|^2 - \alpha_2(\varepsilon_r^2)^2 - 2\alpha_2\varepsilon_r^2 + \alpha_1(1-\varepsilon_r^2).$$

С учетом свойств пространства H_d:

$$v_1(\varphi) \geqslant \gamma^T\mathcal{K}_r\gamma - \alpha_1\gamma^T\mathcal{A}_r\gamma - \alpha_2(\varepsilon_r^2)^2 - (\alpha_1+2\alpha_2)\varepsilon_r^2 + \alpha_1.$$

Для r_2 из условий теоремы,

$$\frac{(M+L)h}{2r_2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{4\alpha+(2\alpha+1)^2}+2\alpha+1}$$

$$= \frac{2\alpha_1}{\sqrt{4\alpha_2\alpha_1+(\alpha_1+2\alpha_2)^2}+2\alpha_2+\alpha_1}.$$

По лемме 4

$$\| R_r^2 \|_H \leqslant \frac{2\alpha_1}{\sqrt{4\alpha_2\alpha_1+(\alpha_1+2\alpha_2)^2}+2\alpha_2+\alpha_1}.$$

Получаем, что

$$-\alpha_2(\varepsilon_r^2)^2 - 2\alpha_2\varepsilon_r^2 + \alpha_1(1-\varepsilon_r^2) \geqslant 0.$$

Из всего вышесказанного получаем:

$$v_1(\varphi) \geqslant \gamma^T \mathcal{K}_r \gamma - \alpha_1 \gamma^T \mathcal{A}_r \geqslant \lambda_{min} \parallel \gamma \parallel^2, \quad \varphi \in S,$$

где $\lambda_{min} > 0$ — наименьшее собственное число $\mathcal{K}_r - \alpha_1 \mathcal{A}_r$.

Чтобы применить теорему 4, осталось показать, что существует $\tilde{\alpha}_1 > 0$, что для каждого $\varphi \in S$ выполнено неравенство $\parallel \gamma \parallel^2 \geqslant \tilde{\alpha}_1$.

Нетрудно получить следующие две оценки:

$$1 = \parallel \varphi(0) \parallel^2 = \parallel \psi_r^1(0) \parallel^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{r} \parallel K(\tau_i) \parallel^2 \right) \parallel \gamma \parallel^2,$$

$$(1 - \varepsilon_r^2)^2 \leqslant \parallel \psi_r^2(0) \parallel^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{r} \parallel K(\tau_i) \parallel^2 \right) \parallel \gamma \parallel^2.$$

Что и требовалось доказать.

1.6 Анализ полученного результата

Сравним два полученных значения r_1 и r_2, для этого сравним два положительных числа, при $\alpha \in [0, \infty)$:

$$\kappa_1(\alpha) = \sqrt{\alpha(\alpha+1)} + \alpha \text{ и } \kappa_2(\alpha) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{4\alpha + (2\alpha+1)^2} + 2\alpha + 1\right).$$

Это монотонно возрастающие функции, такие что $\kappa_1(0) = 0$, $\kappa_2(0) = \frac{1}{2}$. Пусть существует $\tilde{\alpha} \in [0, \infty)$, что $\kappa_1(\tilde{\alpha}) = \kappa_2(\tilde{\alpha})$.

Тогда

$$\sqrt{16\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}+1)} + 4\tilde{\alpha} = \sqrt{4\tilde{\alpha} + (2\tilde{\alpha}+1)^2} + 2\tilde{\alpha} + 1,$$

$$4\tilde{\alpha}^2 + 8\tilde{\alpha} + 1 + 2(1-2\tilde{\alpha})\sqrt{4\tilde{\alpha}^2 + 8\tilde{\alpha} + 1} + (1-2\tilde{\alpha})^2 = 16\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}+1),$$

$$(1-2\tilde{\alpha})\sqrt{4\tilde{\alpha}^2 + 8\tilde{\alpha} + 1} = 4\tilde{\alpha}^2 + 6\tilde{\alpha} - 1,$$

$$(1 - 4\tilde{\alpha} + 2\tilde{\alpha}^2)(4\tilde{\alpha}^2 + 8\tilde{\alpha} + 1) = 16\tilde{\alpha}^4 + 8\tilde{\alpha}^2(6\tilde{\alpha} - 1) - (6\tilde{\alpha} - 1)^2.$$

Это выражение можно преобразовать к виду:

$$32\tilde{\alpha}^3 + 52\tilde{\alpha}^2 - 16\tilde{\alpha} = 0.$$

Тогда $\tilde{\alpha} = \left(-13 + 3\sqrt{33}\right)/16 \approx 0{,}2646$ – точка пересечения κ_1 и κ_2.

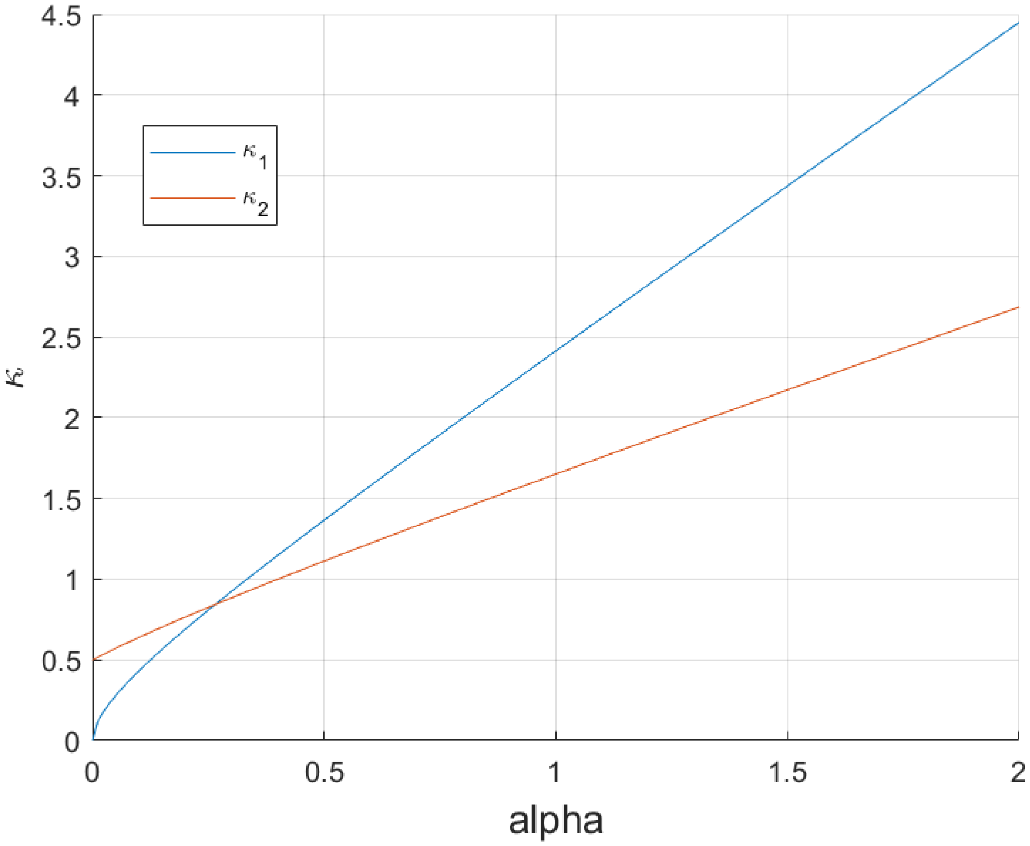

Рисунок 1

Таким образом, для r из условия теоремы 4:

$$r = \begin{cases} 1 + \left\lfloor h(M+L)\left(\sqrt{\alpha(\alpha+1)} + \alpha\right)\right\rfloor, & \alpha \le \tilde{\alpha}, \\ 1 + \left\lfloor \frac{1}{4} h(M+L)\left(\sqrt{4\alpha + (2\alpha+1)^2} + 2\alpha + 1\right)\right\rfloor, & \alpha > \tilde{\alpha}. \end{cases}$$

Обозначим r из [8], как r_3, а r из [2], как r_4:

$$r_3 = 1 + \left\lfloor he^{Lh}(M+L)\left(\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+1)}\right) - hL\right\rfloor, \tag{16}$$

$$r_4 = max\{r_0; \widetilde{r_4}\},$$

$$\widetilde{r_4} = 1 + \left\lfloor \frac{1}{4} he^{LY_0h}(M + LY_0)\left(\sqrt{4\alpha + (2\alpha+1)^2} + 2\alpha + 1\right) - LY_0h\right\rfloor. \tag{17}$$

Сравним r, r_3, r_4. Зафиксируем параметры h, M, L, Y_0 и построим график зависимости рассматриваемых переменных от α.

	Рисунок 2	Рисунок 3	Рисунок 4	Рисунок 5
h	0.2	0.8	0.8	2
M	2	10	25	10
L	2	2	3	2
Y_o	1	1	1	1
$r(\alpha = 1)$	2	16	37	40
$r_3(\alpha = 1)$	4	115	595	3161
$\widetilde{r_4}(\alpha = 1)$	2	77	406	2160
$r(\alpha = 4)$	4	46	106	114
$r_3(\alpha = 4)$	11	403	2091	11110
$\widetilde{r_4}(\alpha = 4)$	6	222	1162	6171

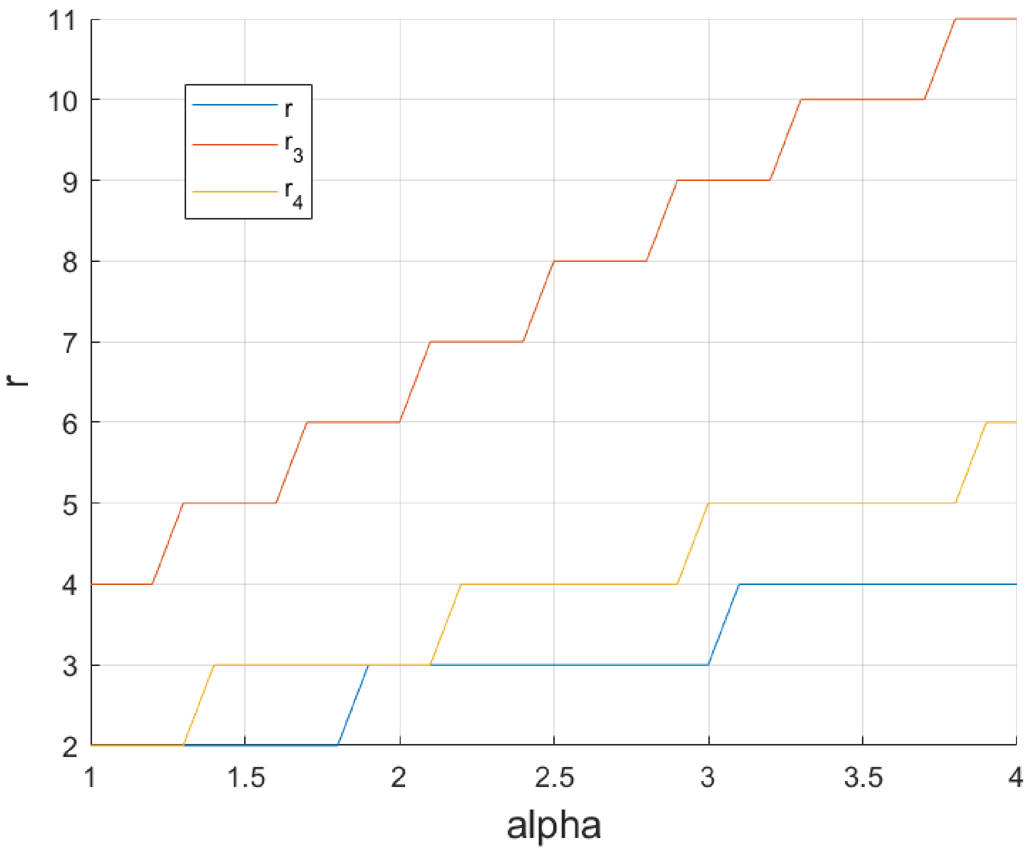

Рисунок 2

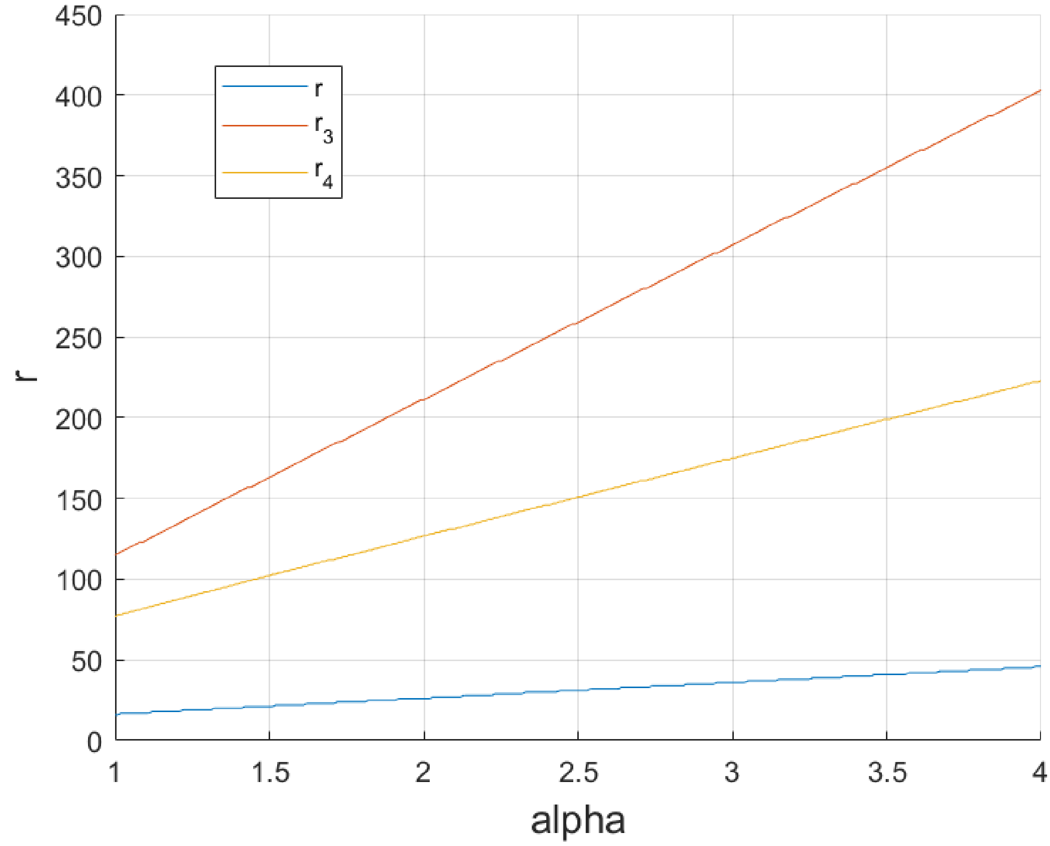

Рисунок 3

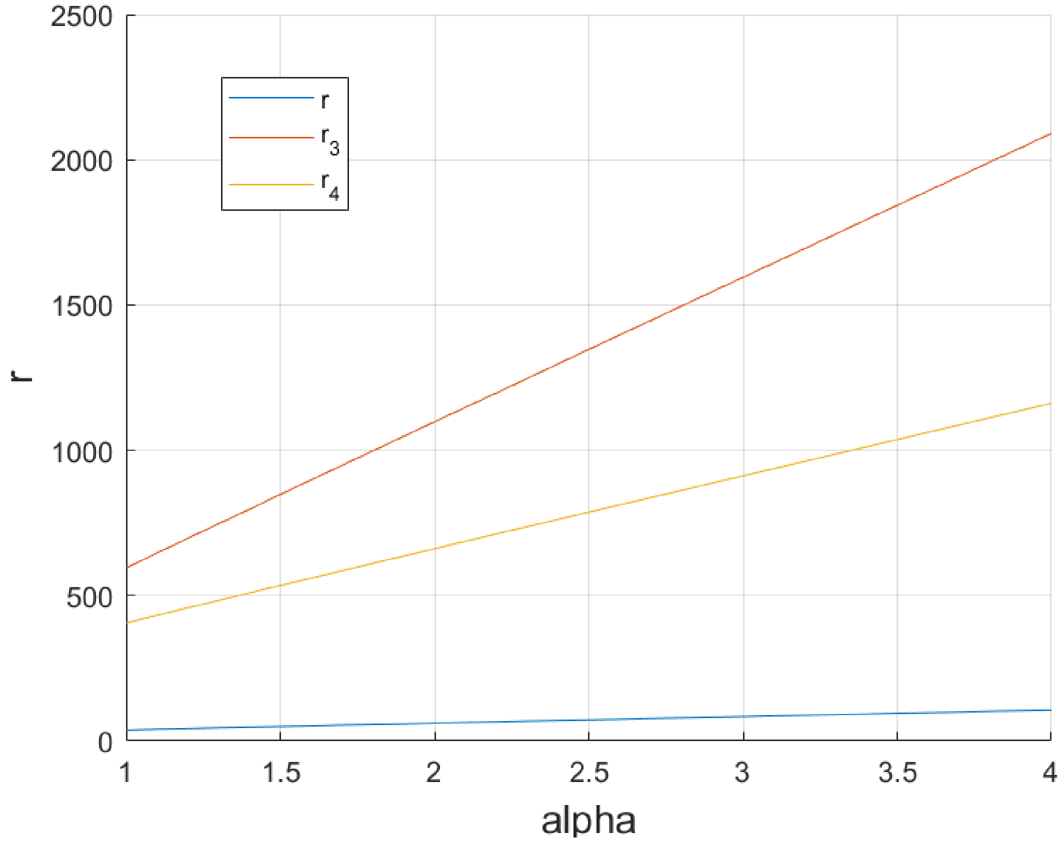

Рисунок 4

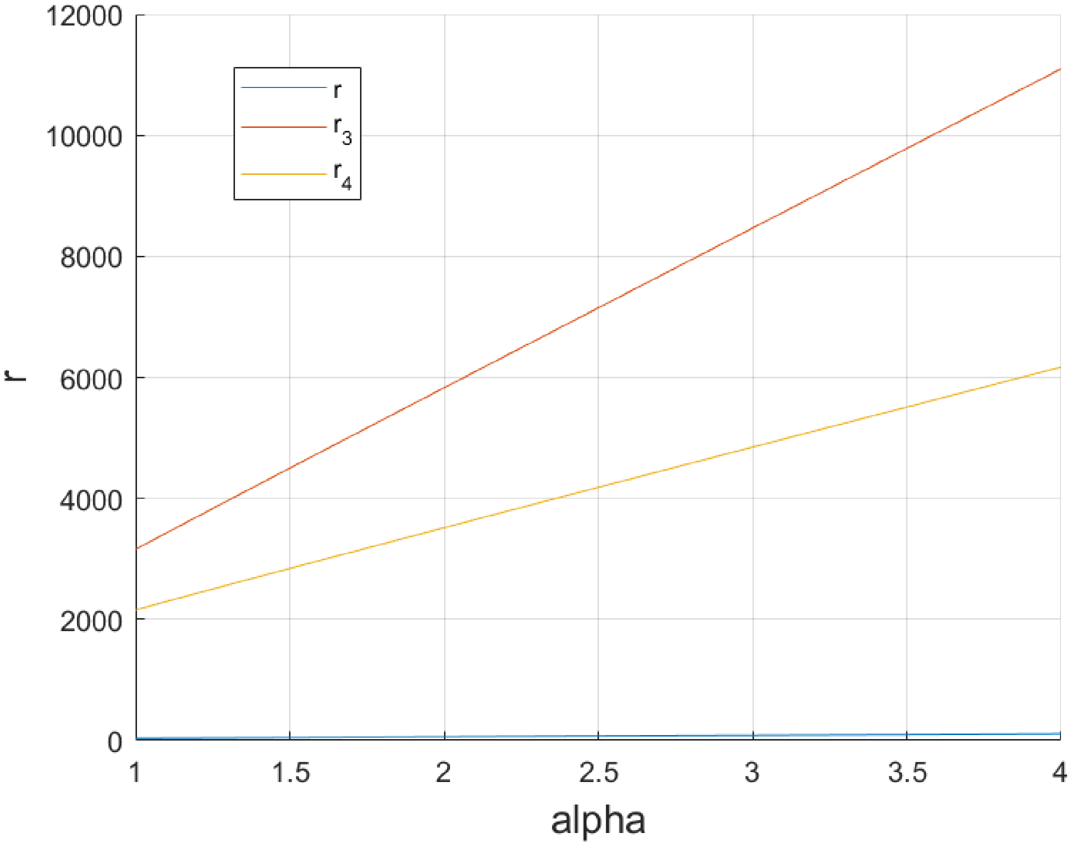

Рисунок 5

На рисунках r, r_3 и r_4 обозначены линиями синего, красного и желтого цветов соответственно. На основании представленных примеров можно проследить некоторую зависимость r, r_3, r_4 от параметров системы h, M, L. При увеличении параметров, значения r, r_3, r_4 могут увеличиваться в несколько раз.

Ранее в работе [2] уже было показано, что r_4 меньше, чем r_3 почти в два раза. В связи с этим остановимся подробнее на сравнении полученного результата r с r_4. Сейчас на рассмотренных выше примерах видно – r_4 превосходит новое r, с ростом α r_4 может быть больше r в 50 раз. Конечно, это связано с отсутствием явной экспоненциальной зависимости от параметров системы в формуле (15).

Ниже построен график отношения r_4 к r при фиксированных параметрах. Этот рисунок помогает проиллюстрировать зависимость между этими значениями, а также дает возможность предположить о существование предела этого соотношения при стремлении α к бесконечности.

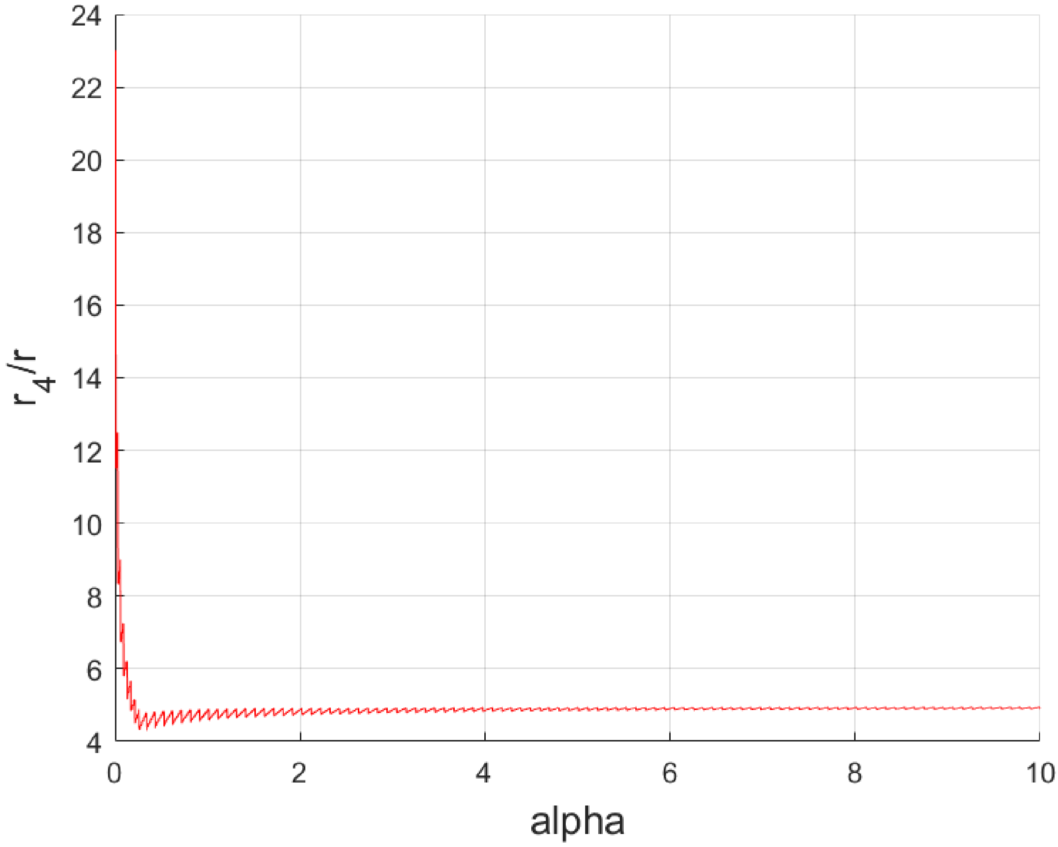

Рисунок 6

Для рисунка 6 параметры системы h, M, L, Y_0 были взяты аналогично параметрам рисунка 3.

Несложно показать существования предела $\frac{r_4}{r}$ при произвольных значениях параметров:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{r_4}{r}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1+\left\lfloor\frac{1}{4}he^{L\Upsilon_0 h}(M+L\Upsilon_0)\left(\sqrt{4\alpha+(2\alpha+1)^2}+2\alpha+1\right)-L\Upsilon_0 h\right\rfloor}{1+\left\lfloor\frac{1}{4}h(M+L)\left(\sqrt{4\alpha+(2\alpha+1)^2}+2\alpha+1\right)\right\rfloor}$$

$$=e^{L\Upsilon_0 h}.$$

Для графиков 7-9, отражающих зависимость r, r_3 и r_4 от величины запаздывания h, параметры системы рассматривались аналогично рисунку 3.

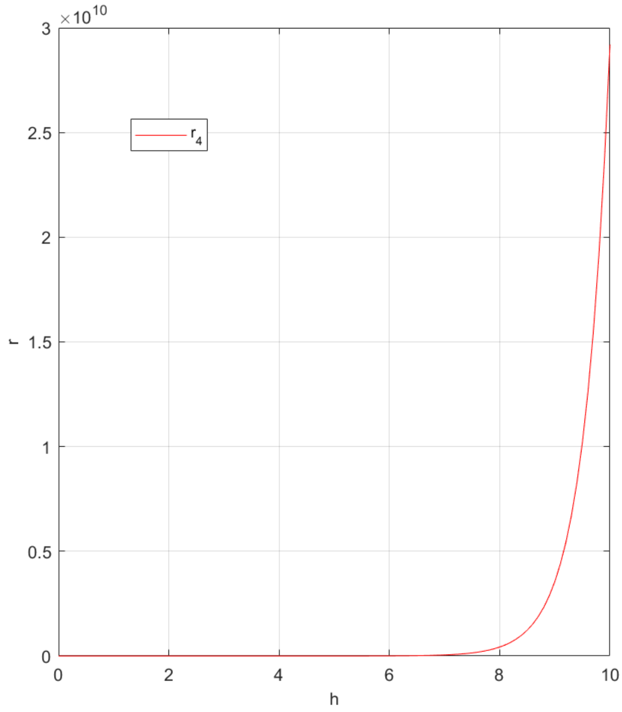

Рисунок 7

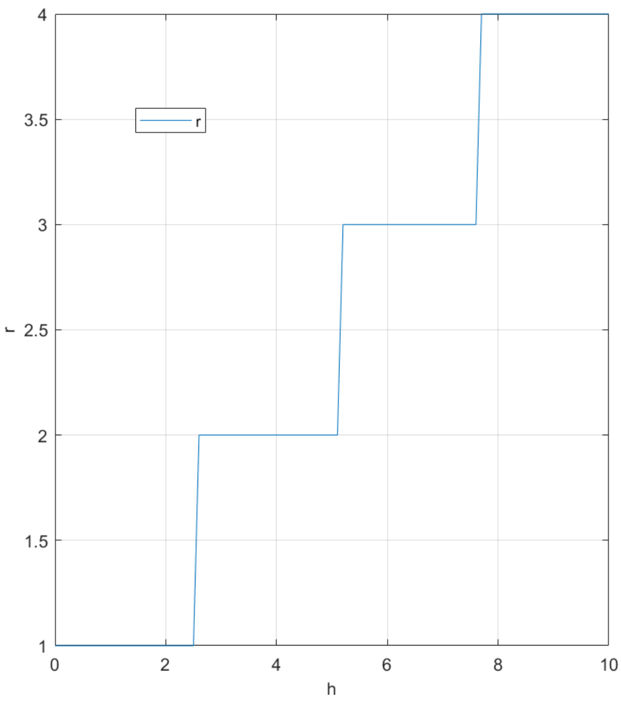

Рисунок 8

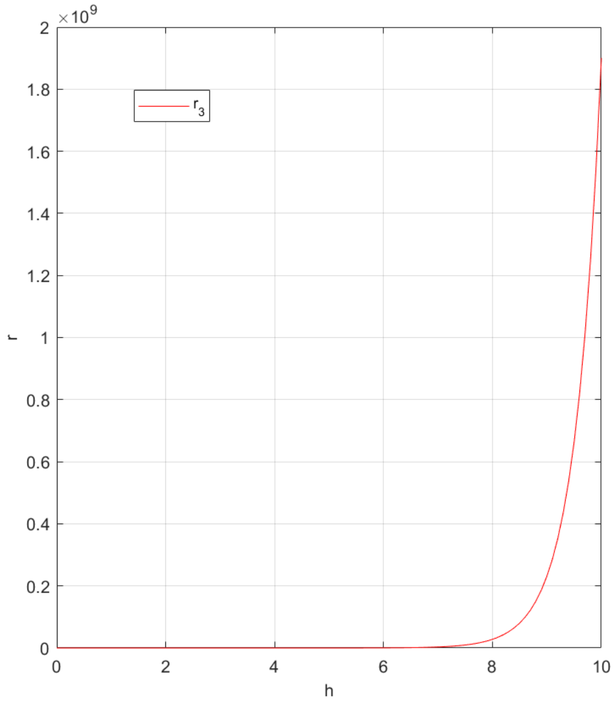

Рисунок 9

В силу того, что в формулах для вычисления r_3 и r_4 присутствует экспоненциальная зависимость от параметра h, даже при незначительном его увеличении значения r_3 и r_4 сильно возрастают. Получившееся r зависит от h полиноминально, что подтверждается рисунками выше.

Глава 2. Реализация в MATLAB

В программной среде MATLAB был реализован построенный выше алгоритм проверки линейной системы с одним запаздыванием на экспоненциальную устойчивость. Для сравнения были реализованы три варианта, размерность матрицы специального вида равна r, r_3 и r_4. На вход программа получает запаздывание h и две матрицы A_0, A_1. Предполагаем, что $W = I$, где I – единичная матрица. Далее опишем алгоритм работы.

1. Определение размерности системы – n.
2. Построение матрицы Ляпунова $U(\tau), \tau \in [0; h]$:

   Идея, взятая за основу, была описана во второй главе [14] и заключается в векторизации некоторой вспомогательной системы.

   Создаем три вспомогательные матрицы:

$$L = \begin{pmatrix} I \otimes A_0 & I \otimes A_1 \\ -A_1^T \otimes I & -A_0^T \otimes I \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} I \otimes I & 0_{n\times n} \otimes 0_{n\times n} \\ A_0^T \otimes I + I \otimes A_0 & I \otimes A_1 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} \otimes 0_{n\times n} & -I \otimes I \\ A_1^T \otimes I & 0_{n\times n} \otimes 0_{n\times n} \end{pmatrix},$$

   где

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{21}A & \cdots & b_{n1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & & b_{n2}A \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1n}A & b_{21}A & \cdots & b_{nn}A \end{pmatrix}.$$

   Для этого последовательно строились отдельные блоки матриц, всего их 12, а затем собирались матрицы L, M, N.

   Создаем вектор размерности $2n^2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$, где w вектор размерности n^2, который последовательно заполняется столбцами матрицы W.

   Находим начальные данные по формуле:

$$sol_0 = (M + Ne^{Lh})^{-1} \cdot \left(-\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \right).$$

Для построения матрицы Ляпунова $U(\tau)$ в любой точке отрезка $[0;h]$ достаточно вычислить $e^{L\tau} \cdot sol_o$. Первые n компонент полученного вектора являются столбцами исходной матрицы.

3. Построение чисел $r,\ r_4$ по формулам (15) и (17) соответственно:

3.1. Константа L найдена с помощью цикла for на отрезке $[0;h]$ с шагом h/100. Построен вектор с компонентами $\|A_0 e_0^{At}\|$, а затем найден максимум вектора.

3.2. Константа $M = \|A_0\| + \|A_1\|$.

3.3. Для построения α_1^* из оценки (6) достаточно найти число υ – минимальное отрицательное собственное число матрицы (7).

3.4. Необходимое условие экспоненциальной устойчивости:

$$\|U(0)\| = \max_{\tau \in [-h;h]} \|U(\tau)\|,$$

в связи с этим, α_2 можно взять из формулы (5) как минимально возможное:

$$\alpha_2 = \|U(0)\| \cdot (1 + h \cdot \|A_1\|)^2 + h \cdot \|W\|.$$

3.5. $\alpha = \alpha_2 / \alpha_1^*$.

3.6.1. Для r: находим минимум из двух величин r_1 и r_2, все участвующие в формулах константы определены.

3.6.2. Константа r_3 посчитывается по формуле (16).

3.6.3. Шаг, нужный для построения числа r_4. Выбираем $r_0 = 100$, Υ_0 по формуле (8) находится как максимум $\|e_0^{-At}\|$, где t изменяется на отрезке от 0 до h/200, это можно сделать аналогично пункту 3.1. Согласно [2] в качестве r_4 нужно взять $\max\{100; \widetilde{r_4}\}$.

3. Для построения матрицы $\mathcal{K}_r$ по формуле (10) необходимо вычислить значение матрицы $U(\tau)$ в *r* точках.

4. Составив вектор, компонентами которого является фундаментальная матрица *K(t)* в *r* точках, не составит труда получить $\mathcal{A}_r$ по формуле (13).

5. Матрица, определяемая по формуле (14), проверяется на положительную определённость с помощью встроенной функции chol.

Далее приведены несколько примеров, для которых было посчитаны значения r, r_3, r_4, а также время работы программы. Сама программа представлена в приложении.

Пример 1

Рассмотрим пример из [15] экспоненциально устойчивой системы

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t - 0.8).$$

r	808
t	1с
r_3	11102
t_3	538с
r_4	5672
t_4	57с

Как видно для данной системы, значение r_4 меньше, чем r_3 примерно в 1,96 раз. Полученное r_4 превышает новое r более чем в 7 раз, а время работы программы занимает всего одну секунду вместо почти 9 минут при изначальном r_3.

Пример 2

Следующий пример из [16] с двумя параметрами

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -a \end{pmatrix} x(t - 1).$$

Рассмотрим два случая: значения параметров, при которых система экспоненциально устойчива и неустойчива.

	r	r_3	r_4	t	t_3	t_4
a=0.2, b=0.01	1807	9813	4927	5с	356с	45с
a=3, b=4	2012	10915	5482	4с	252с	43с

Для данного примера применение нового подхода позволяет уменьшить размерность матрицы r в 5.4 раза от первоначального и в 2.7 от модифицированного ранее, что также сказывается на времени работы программы.

Пример 3

В статье [20] представлен пример системы размерности 3×3

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 13.5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -5.9 & 7.1 & -70.3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} x(t - 0.003).$$

r	3115
t	21с
r_3	6489
t_3	260с
r_4	3245
t_4	25с

Этот пример немного отличается от предыдущих, теперь размерность рассматриваемой системы увеличилась на единицу, что, в свою очередь, увеличивает размерность исследуемой матрицы в полтора раза по сравнению с аналогичной для системы размерности 2×2.

Для запаздывания в примере r_3 в 1.99 больше, чем r_4, а r незначительно меньше r_4. Но если начать увеличивать запаздывание, например, взять $h = 0.0035$, то исследуемую матрицу для r_3 уже не удается построить. Это связано с ограничениями на размерность матриц в MATLAB. Но благодаря модификациям удается вычислить матрицу для r, r_4 и выяснить вопрос устойчивости системы. Если продолжить увеличивать запаздывание, то уже при $h = 0.0055$ возникает аналогичная ситуация для r и r_4. При таких параметрах r получается равным 7616, а r_4 больше 8000, что является существенным ограничением для MATLAB.

Выводы

В данной работе удалось получить модификацию критерия экспоненциальной устойчивости для системы с запаздыванием.

Благодаря нахождению конкретного вида фундаментальной матрицы системы (4), а также рассмотрению двух вариантов построения функций специального вида для аппроксимации функций из предкомпакта, удалось уменьшить ошибку аппроксимации этих функций. За счет изменения этой ошибки также удалось уменьшить размерность матрицы специального вида. В случае, если система экспоненциально устойчива, эта матрица положительно определена и не положительно определена в обратном случае.

Ранее в работах [2], [8] размерность данной матрицы имела экспоненциальную зависимость от параметров системы, в настоящий момент удалось получить полиномиальную зависимость. Это повлекло за собой сильное уменьшение размерности матрицы.

Также, с учетом полученной модификации, был реализован критерий экспоненциальной устойчивости в программной среде MATLAB. Строится число r – размерность рассматриваемой матрицы, сама матрица $\mathcal{K}_r - \alpha_1 \mathcal{A}_r$, основывающаяся на матрице Ляпунова и фундаментальной матрице системы, а также осуществляется проверка матрицы на положительную определенность. Работа программы была проверена на нескольких примерах, а также было представлено сравнение с результатами из [2], [8].

Заключение

В настоящей работе был улучшен критерий экспоненциальной устойчивости для линейной системы с запаздыванием, предложенный в статье [8], модифицированный в [2]. Была уменьшена размерность матрицы, являющейся главным элементом этого критерия.

Будущие исследования могут быть направлены на обобщение этого критерия на случай систем с несколькими запаздываниями, а также возможные модификации, связанные с аппроксимацией функций из рассматриваемого предкомпакта.

Список литературы

1. Беллман Р, Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Борозна А. А. Модифицированнный критерий экспоненциальной устойчивости для линейной системы с запаздыванием. Процессы управления и устойчивость. 2020. 7(1), 33-38.
3. Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20.С. 315-327.
4. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Наука, 1971. 296 с.
5. Alexandrova I.V., Mondie S. Necessary stability conditions for linear systems with incommensurate delays // Automatica. 2021. Vol. 129.
6. Datko R. An algorithm for computing Liapunov functionals for some differentialdifference equations // Ordinary Differential Equations / Ed. by L.Weiss. New York. 1972. P. 387-398.
7. Egorov A.V. A new necessary and sufficient stability condition for linear time-delay systems // Proceedings of the 19th IFAC World Congress. Cape Town, South Africa. 2014. P. 11018-11023.
8. Egorov A. V. A finite necessary and sufficient stability condition for linear retarded type systems // Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, USA. 2016. 3155-3160.
9. Egorov A.V., Mondie S. Necessary stability conditions for linear delay systems // Automatica. 2014. Vol. 50(12). P. 3204-3208.
10. Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays // 2nd Symposium on System, Structure and Control.Oaxaca, Mexico. 2004. P. 102-106.

11. Gomez M. A., Egorov A.V., Mondie S. Necessary stability conditions for neutral-type systems with multiple commensurate delays // International Journal of Control. 2019. Vol. 92(5). P. 1155-1166.
12. Gomez M. A., Ochoa G., Mondie S. Necessary exponential stability conditions for linear periodic time-delay systems // Robust and Nonlinear Control. 2016. Vol. 26(18). P.3996-4007.
13. Kharitonov V. L. On the uniqueness of Lyapunov matrices for a time-delay system // Systems & Control Letters. 2012. Vol. 61(3). P. 397-402
14. Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.
15. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay system // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15-20.
16. Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
17. Marshall J. E., Gorecki H., Korytowski A., Walton K. Time-delay systems: stability and performance criteria with applications. Ellis Horwood, New York, 1992. 244 p.
18. Matsumoto A., Szidarovszky F. Delay Differential Nonlinear Economic Models / / Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences: Essays in Honour of John Barkley Rosscr Jr / Ed. by Gian Italo Bischi, Carl Chiarella, Laura Gardini. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. P. 195-214.
19. Medvedeva I.V., Zhabko A.P. Synthesis of Razumikhin and Lyapunov-Krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2015. №51. pp. 372-377.
20. Olgac N., Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2002. Vol. 47(5).

21.Razumikhin B. S. Application of Liapunov’s method to problems in the stability of systems with a delay // Automation and Remote Control. 1960. Vol. 21. P.515–520.
22.Rousscl M. R. The use of delay differential equations in chemical kinetics // The Journal of Physical Chemistry. 1996. Vol. 100 (20). P. 8323-8330.
23.Sipahi R., Niculescu S.-I., Abdallah C. T., Michiels W., Gu K. Stability and stabilization of systems with time delay: limitations and opportunities // IEEE Control Systems Magazine. 2011. Vol. 31 (1). P. 38–65.
24.Villasana M., Radunskaya A. A delay difTerential equation model for tumor growth / / Journal of Mathematical Biology, 2003. Vol. 47 (3). P. 270 - 294.

Приложение

```
%Ввод параметров системы
h=;
A=[];
B=[];
%Предварительные вычисления
AA=A';
BB=B';
n_1=size(A);
n=n_1(1);
v=ones(1,n);
W=diag(v);
m=n^2*2;
%Построение матрицы Ляпунова
I=diag(v);
O=zeros(n);
L11=zeros(n^2);L21=zeros(n^2);L12=zeros(n^2);L22=zeros(n^2);
M11=zeros(n^2);M21=zeros(n^2);M12=zeros(n^2);M22=zeros(n^2);
N11=zeros(n^2);N21=zeros(n^2);N12=zeros(n^2);N22=zeros(n^2);
k=1;
f=1;
for i=1:n
    for j=1:n
        L11(f:f+n-1,k:k+n-1)=I*A(j,i);
        L12(f:f+n-1,k:k+n-1)=I*B(j,i);
        L21(f:f+n-1,k:k+n-1)=-BB*I(j,i);
        L22(f:f+n-1,k:k+n-1)=-AA*I(j,i);
        M11(f:f+n-1,k:k+n-1)=I*I(j,i);
        M12(f:f+n-1,k:k+n-1)=O*O(j,i);
        M21(f:f+n-1,k:k+n-1)=AA*I(j,i)+I*A(j,i);
        M22(f:f+n-1,k:k+n-1)=I*B(j,i);
        N11(f:f+n-1,k:k+n-1)=O*O(j,i);
        N12(f:f+n-1,k:k+n-1)=-I*I(j,i);
        N21(f:f+n-1,k:k+n-1)=BB*I(j,i);
        N22(f:f+n-1,k:k+n-1)=O*O(j,i);
        k=k+n;
    end
    k=1;
    f=f+n;
end
L=[L11 L12;
    L21 L22];
M=[M11 M12;
    M21 M22];
N=[N11 N12;
    N21 N22];
K=M+N*expm(L*h);
KK_1=zeros(1,2*n^2);
p=1;
for i=1:n
    for j=1:n
```

```
            KK_1(n^2+p)=W(j,i);
            p=p+1;
        end
    end
    KK=-(KK_1)';
    sol_0=K\KK;
    toc
    tic
    U=zeros(n);
    p=1;
    for t=0
        sol_1=expm(L*t)*sol_0;
        for i=1:n
            U(i,1:n)=sol_1(p:p+n-1)';
            p=p+n;
        end
    end
    %Дополнительные построения
    P_11=[W O;
        O W];
    P_22=[AA+A B;
        BB O];
    v=eig(P_11\P_22);
    NA=norm(A);
    NB=norm(B);
    NW=norm(W);
    NU_0=norm(U);
    alfa_1=-1/(2*(min(v)));
    alfa_2=NU_0*(1+NB*h)^2+h*NW;
    alfa=alfa_2/alfa_1;
    hhh=zeros(1,100);
    i=1;
    for t=0:h/100:h
        hhh(i)=norm(A*expm(A*t));
        i=i+1;
    end
    L_L=max(hhh);
    M_M=NA+NB;
    %Построение числа r
    r=min(1+floor(h*(M_M+L_L)*(alfa+sqrt(alfa*(alfa+1)))),...
        1+floor(0.25*h*(M_M+L_L)*...
        (2*alfa+1+sqrt(4*alfa+(2*alfa+1)^2))));
    disp(r);
    %Построение числа r_3
    r_3=1+ceil(h*exp(L_L*h)*(M_M+L_L)*(alfa+sqrt(alfa*(alfa+1)))...
         -h*L_L);
    disp(r_3);
    %Построение числа r_4
    Y_00=zeros(1,100);
    z=h/200;
    i=1;
    for t=0:z/100:z
```

```
    Y_00(i)=norm(expm(-A*t));
    i=i+1;
end
Y_0=max(Y_00);
r_3=1+floor(0.25*h*exp(L_L*h*Y_0)*(M_M+L_L*Y_0)*...
    (2*alfa+1+sqrt(4*alfa+(2*alfa+1)^2))-h*L_L*Y_0);
disp(r_3);
%Построение матрицы K_r-α_1 A_r
K_r=zeros(n*r,n);
f=1;
for jj=1:r_2
    l=((jj-1)/(r_2-1))*h;
    sol_1=expm(L*l)*sol_0;
    sol=zeros(n);
    p=1;
    for i=1:n
        sol(1:n,i)=sol_1(p:p+n-1);
        p=p+n;
    end
    K_r(f:f+n-1,1:n)=sol;
    f=f+n;
end
K_r_1=zeros(r*n);
for i=1:n:r*n
    for j=1:n:r*n
        nn=j-i;
        if nn>=0
            K_r_1(i:i+n-1,j:j+n-1)=K_r(nn+1:nn+n,1:n);
        end
    end
end
K=zeros(n,n*r);
p=1;
for i=1:r_2
    t_i=((i-1)/(r-1))*h;
    K(1:n,p:p+n-1)=expm(A*t_i);
    p=p+n;
end
B_r=K_r_1-alfa_1*K'*K;
%Проверка K_r-α_1 A_r на положительную определённость
[~,flag]=chol(B_r);
if flag==0
    disp("Система устойчива")
else
    disp("Система неустойчива")
end
```