Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математической теории экономических решений

Миннигареева Лена Рашитовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Оценка области вероятностной устойчивости финансово-экономической деятельности компании (на примере ПАО «Татнефть»)

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,

старший преподаватель

Тумка О.А.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

Задачи оптимизации используются во многих сферах деятельности. Для эффективного управления предприятием активно применяется аппарат математического программирования, в том числе методы линейного программирования. При этом возникает вопрос учета параметрической неопределенности модели. Некоторые факторы производства, такие как спрос, стоимость ресурсов, заработная плата персонала и т.п., изменяются независимо от самого предприятия. В условиях вариации параметров среды приходится принимать решение, представляя эти параметры в виде случайных величин. Для этого применяется аппарат стохастического программирования [1].

Решение, принятое в подобных условиях, не всегда является оптимальным, что влечет за собой убытки, поэтому используется оценка области вероятностной устойчивости решения.

В данной работе рассмотрена транспортная модель со случайным спросом. В статье [2] приводится аппроксимация непрерывного распределения смесью нормальных распределений. Здесь же предложен алгоритм приближения функции распределения случайной величины в виде равномерно сходящихся функциональных рядов, составленных с использованием любой непрерывной функции распределения, что позволяет проводить математические операции дифференцирования, интегрирования, суммирования внутри агрегата приближения. На основе данных прошлых лет строятся функции распределения случайной величины спроса с помощью аппарата аппроксимации.

С помощью метода потенциалов производится поиск оптимального решения поставленной задачи, которое, в свою очередь, проходит оценку области вероятностной устойчивости.

Глава 1. Транспортная задача

1.1. Постановка транспортной задачи

Транспортная задача – это задача о поиске оптимального распределения поставок товара от поставщиков к потребителям с минимизацией затрат на перевозку. Она относится к задачам линейного программирования и заключается в нахождении наименьшего значения целевой функции, при заданных ограничениях. Целевая функция – функция, значение которой подлежит оптимизации, в нашем случае – минимизации. Транспортная задача имеет вид [3]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \\ x_{ij} \ge 0 \\ i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Где:

x_{ij} – количество продукции, доставляемой из пункта i в пункт j;

c_{ij} – затраты на транспортировку единицы товара из пункта i в пункт j;

a_i – запасы в пункте отправления i;

b_j – спрос в пункте назначения j;

m, n – количество пунктов отправления и назначения соответственно.

При решении данной задачи необходимо составить оптимальный план поставок – вектор x, минимизирующий целевую функцию, т.е. затраты на перевозку продукции.

Данная постановка транспортной задачи является классической. Ограничения в задаче представлены в виде неравенств. Такая задача называется открытой. В случае, когда ограничения имеют вид равенств, она называется закрытой.

Со временем значения спроса, запасов и стоимости перевозки могут изменяться, причиной может быть кризис, изменения цен и т.п. В связи с этим можно ввести постановку задачи с вероятностными характеристиками осуществления оптимального плана - использовать стохастическую постановку задачи, изменяющиеся параметры в которой – случайные величины, т.е. привлечь аппарат стохастического программирования.

1.2. Основные понятия из теории вероятностей

Вероятностное пространство – тройка (Ω, ∑, P), где Ω - множество, состоящее из элементарных событий ω, ∑ - сигма-алгебра подмножеств $A \in \Omega$, P – вероятностная мера, P(Ω)=1. Элементы A называются случайными событиями. Каждому множеству $A \in \sum$ соответствует число $P(A) \leq 1$ – неотрицательная действительная величина, называемая вероятностью случайного события A. [4]

Случайная величина может быть полностью описана, если задать функцию распределения $\Phi(x)$, которая позволяет определить вероятность того, что случайная величина примет значение меньше x:

$$\Phi(x) = P(X \leq x).$$

Плотность распределения непрерывной случайной величины – функция, являющаяся производной от дифференцируемой функции распределения $\Phi(x)$:

$$\varphi(x) = \Phi'(x).$$

Математическим ожиданием (моментом первого порядка) непрерывной случайной величины называется определенный интеграл:

$$M(x) = \int_a^b x\varphi(x)dx.$$

Дисперсией (центральным моментом второго порядка) непрерывной случайной величины называется интеграл:

$$D(x) = \int_a^b [x - M(x)]^2 \varphi(x)dx.$$

Среднеквадратическое отклонение вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma(x) = \left|\sqrt{D(x)}\right|.$$

1.3 Стохастическая постановка транспортной задачи

В отличие от классической постановки транспортной задачи, в стохастической задаче цена перевозки, спрос и предложение могут принимать случайные значения. В первом случае задача примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}}x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \\ x_{ij} \ge 0 \\ i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Здесь $\overline{c_{ij}}$ – математической ожидание цены перевозки.

Рассмотрим транспортную модель со случайным спросом. Преобразуем классическую постановку транспортной задачи. Т.к. спрос b_j является случайной величиной, система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \\ P[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j(\omega)] \ge \alpha_j \\ x_{ij} \ge 0 \\ i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n \\ \omega \in \Omega \end{cases} \qquad (1.1)$$

Случайная величина $b_j(\omega)$ имеет математическое ожидание $\overline{b_j}$ и среднеквадратическое отклонение σ_j. Преобразуем второе ограничение:

$$P\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j(\omega)\right] = P\left[\frac{b_j - \overline{b_j}}{\sigma_j} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \overline{b_j}}{\sigma_j}\right]$$

$$P\left[\frac{b_j - \overline{b_j}}{\sigma_j} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \overline{b_j}}{\sigma_j}\right] = \Phi\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \overline{b_j}}{\sigma_j}\right] \geq \alpha_j$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \overline{b_j}}{\sigma_j} \geq \Phi^{-1}(\alpha_j)$$

Перепишем систему (1.1) с учетом преобразований:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq \overline{b_j} + \Phi^{-1}(\alpha_j)\sigma_j \\ x_{ij} \geq 0 \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \qquad (1.2)$$

Здесь Φ – функция распределения спроса.

Транспортная модель со случайным предложением получается аналогичным образом.

Глава 2. Об аппроксимации функции распределения

В работе Зубова В.И. [5] установлены утверждения, что:

1) Множество линейных комбинаций $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j(x)$ будет всюду плотным во множестве всех непрерывных функций распределений F_1, где $g_j = g_0(\frac{x-\gamma_j}{\sigma_j})$, а α_j – неотрицательные константы, такие, что $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.

2) Всевозможные линейные комбинации распределений g_j: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) g_j(t)$ всюду плотны в пространстве $R_{1,t}$, где $\alpha_j(t)$ – произвольные неотрицательные непрерывные функции, заданные при $t \epsilon R$ и такие, что $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.

В дальнейшем в работе Жука В.В. [6] этот аппарат был развит для функций с ограниченной вариацией.

В статье [7] приводится аппарат, основанный на теореме Вейерштрасса об аппроксимации (аппроксимационная теорема Вейерштрасса):

Пусть $F(x)$ – непрерывная функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ достаточно высокой степени n, что для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство: $|F(x) - P(x)| < \varepsilon$.

В дальнейшем используется многочлен Бернштейна и на основании первой теоремы Зубова для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать степень n и коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n = 1$$

такие, чтобы выполнялось условие:

$$\max_x \left| F(x) - \sum_{j=1}^{n} b_j \varphi_j(x) \right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Здесь $\varphi_j(x)$ –многочлены Бернштейна:

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad j = \overline{1, n}.$$

В статье [7] приводится аппарат аппроксимации, позволяющий аппроксимировать непрерывную функцию распределения, рядами, равномерно сходящимися на промежутке [0;1], вида:

$$A_n(F,x) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k {F_0}^k(x)\big(1 - F_0(x)\big)^{n-k}, \text{ где } g\left(\frac{k}{n}\right) = F^\circ {F_0}^{-1}, \quad (3)$$

имеющий оценку приближения через модули непрерывности функции $F(x)$, в частности:

$$|F(x) - A_n(F,x)| \leq \omega\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$

Глава 3. Методы решения транспортной задачи

3.1. Дисбаланс и вырожденность в транспортной задаче

Выполнение условия сбалансированности ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) [8] очень важно при решении транспортной задачи. Оно означает, что в базисное допустимое решение входит m+n-1 базисная переменная. Рассмотрим случай, когда это условие не выполняется. Может возникнуть ситуация, что поставщики могут предложить больше, чем требуется заказчикам. Решением этой проблемы является введение фиктивного заказчика, спрос которого равен $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимость перевозки для этого заказчика равна 0. Таким образом, в ходе решения задачи излишки отправятся этому заказчику, и мы получим транспортную задачу, для которой выполняется условие сбалансированности.

Чтобы при решении транспортной задачи не возникло затруднений, необходимо также проверять решение на невырожденность. Опорный план транспортной задачи является невырожденным, если число базисных переменных равно n+m-1. Если оно меньше этого значения – опорный план вырожденный. Такая ситуация может возникнуть, если одновременно удовлетворены потребности заказчика и опустошен склад поставщика. Это приводит к тому, что система будет иметь не единственное значение. Для решения проблемы в такой ситуации, присваиваем переменной, стоящей в транспортной таблице рядом с базисной, нулевое значение.

3.2. Метод северо-западного угла

Метод заключается в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, которая включает в себя значения спроса, предложения и стоимости перевозок. Перебор начинается в левом верхнем углу, откуда и берется название метода. Последовательно выписывается максимальное количество отправляемой продукции в ячейки таблицы таким образом, чтобы максимальные запасы поставщика или потребности заказчика не были превышены. В этом методе не уделяется внимание цене перевозки, т.к. он дает лишь опорное решение, на основе которого в дальнейшем находят оптимальное решение.

Алгоритм метода:

Пусть имеется m складов с запасами $a_{1,}a_2,\dots,a_m$ и n пунктов потребления с потребностями $b_{1,}b_2,\dots,b_n$. Пусть запасы и потребности сбалансированы, то есть $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Заполнение начинаем с «северо-западного» угла. В эту клетку вписываем значение $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Здесь возможны два варианта:

1. $\min(a_1, b_1)$=a_1. В этом случае мы полностью опустошаем первый склад, поэтому все остальные поставки с этого склада становятся нулевыми, а запросы в первом пункте потребления останутся равными $b_1 - a_1$.
2. $\min(a_1, b_1)$=b_1. Тогда мы полностью удовлетворим потребности первого заказчика, а возможности первого поставщика станут равными $a_1 - b_1$.

Далее мы повторяем эти же действия, пока не будут удовлетворены потребности всех заказчиков и не будут опустошены все склады.

3.3. Метод потенциалов

Метод потенциалов является модификацией симплекс-метода, применяемого для решения транспортной задачи. Он заключается в улучшении опорного плана до оптимального решения за конечное число итераций.

Решение транспортной задачи является оптимальным, если для всех свободных клеток транспортной таблицы значение $d_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij}$ является неположительной величиной. Здесь c_{ij} - истинные затраты на перевозку, c_{ij}^* - расчетные затраты на перевозку, определяемые для незаполненных клеток.

Алгоритм метода:

Каждому поставщику ставится в соответствие величина u_i – потенциал поставщика i, а каждому заказчику v_j – потенциал заказчика j. Для каждой заполненной клетки $c_{ij} = u_i + v_j$. Предполагаем, что $u_1 = 0$ и, исходя из этого, находим значения всех потенциалов. Далее для каждой незаполненной клетки находим значение c_{ij}^*=$u_i + v_j$. Критерием оптимальности метода является значение d_{ij}, если для всех клеток его значение не положительно, то наш план перевозок является оптимальным. Если же это не выполняется, составляем новый план перевозок.

Для составления нового плана, необходимо найти клетку с максимальным значением d_{ij}. Для этой клетки строим многоугольник, соединяющий ее с другими базисными клетками. Каждый угол многоугольника обозначаем знаками «+» и «-», начиная с клетки, где d_{ij} принимает максимальное значение, ей мы присваиваем значение «-», а в остальных клетках чередуем эти знаки. В клетках, обозначенных «-», находим минимальную величину поставок D. Далее изменяем количество поставок следующим образом: в клетках со знаком «+» поставки увеличиваются на D, в клетках со знаком «-» наоборот, уменьшаются. Для нового плана поставок снова находим потенциалы и проверяем его на оптимальность.

Глава 4. Решение практической задачи

4.1. Постановка задачи

В работе ставится вопрос планирования бюджета на распределение нефтепродуктов с 5 нефтебаз по 3 автозаправочным станциям на ближайшие полгода. Рассматривается транспортная задача, в которой спрос является случайной величиной. Используется модель (1.2). Найденное оптимальное решение необходимо проверить на принадлежность к области вероятностной устойчивости. В случае, если это решение нам не подходит, ставится задача его коррекции. Известны данные прошлых лет ПАО «Татнефть» по перевозке, благодаря им мы можем найти оптимальный план поставок нефтепродуктов и минимизировать затраты на их транспортировку.

Также имеется ограничение на минимальный объем поставок, т.к. компания обладает собственным нефтеперерабатывающим заводом, который позволяет покупать нефтепродукты с более низкой стоимостью, что делает закупку нефтепродуктов с этого завода более выгодной, несмотря на большие затраты по перевозке.

4.2.Аппроксимация функции распределения

На основе данных прошлых лет имеем три дискретных функции распределения случайной величины спроса автозаправочных станций. Рассмотрим аппроксимацию первой АЗС.

За функцию распределения $F_0(x)$, на основе которой проводится аппроксимация, берем нормальное распределение со значениями математического ожидания и среднеквадратического отклонения, соответствующими имеющейся функции распределения спроса $F_1(x)$. Согласно статье [6] аппроксимация проводится для функции, определенной на промежутке от 0 до 1. Поэтому приведем имеющуюся функцию распределения $F_1(x)$ к нужному виду. Спрос первой АЗС лежит в промежутке (1280;2480). Проведем замену: $x^* = (x - 1100)/1380$. Таким образом, теперь спрос принимает значения от 0 до 1. Математическое ожидание спроса $M_1(x^*) = 0.58$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma_1(x^*) = 0.282$.

Полученная нами функция распределения случайной величины спроса первой автозаправочной станции выглядит следующим образом:

$$F_1(x) = -4.3571{F_0}^{10}(x) + 24.286{F_0}^{9}(x) - 41.786{F_0}^{8}(x) +$$

$$+8.5714{F_0}^{7}(x) + 60{F_0}^{6}(x) - 90{F_0}^{5}(x) + 60{F_0}^{4}(x) -$$

$$-17.143{F_0}^{3}(x) + 1.4286F_0(x)$$

Аналогично получаем спрос второй и третьей АЗС.

4.3. Область стохастической устойчивости

Изменение параметров задачи влечет за собой изменение оптимального решения. При решении задач линейного программирования очень важно знать, в каких пределах могут изменяться параметры, чтобы решение при этом оставалось оптимальным. Особенно актуально это в случае задачи стохастического программирования.

Область, в пределах которой решение задачи стохастического линейного программирования является устойчивым, называется областью стохастической (вероятностной) устойчивости. Определяется она путем нахождения математического ожидания и среднеквадратического отклонения решения.

План поставок $X = \{x_{ij}\}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ является устойчивым, если значения x_{ij} лежат в промежутке $[\overline{x_{ij}} - \sigma_{ij}; \overline{x_{ij}} + \sigma_{ij}]$. В том случае, если решение не устойчиво, его необходимо откорректировать.

С помощью метода потенциалов, опорное решение для которого было найдено методом северо-западного угла, получен следующий оптимальный план поставок в тоннах:

НБ / АЗС	1	2	3	4	5
1	50	0	1600	150	0
2	0	180	0	240	1270
3	0	0	790	50	1280

При этом на 4ой Нефтебазе остался излишек в 20 тонн.

Решение задачи является устойчивым, если принадлежит следующему промежутку:

НБ / АЗС	1	2	3	4	5
1	[37;53]	0	[1295;1885]	[135;195]	0
2	0	[144;208]	0	[170;246]	[1061;1545]
3	0	0	[649;945]	[67;97]	[1011;1471]

Поставка с 4 нефтебазы на 3 АЗС не входит в область устойчивости. Скорректируем это решение путем отправки на АЗС 20 тонн нереализованной продукции. Полученный план является оптимальным и принадлежит области стохастической устойчивости.

Полученный план поставок обойдется компании в 1961,5 тыс. рублей.

Выводы

В данной работе была рассмотрена транспортная задача со случайным спросом. Были получены следующие результаты:

1. Проведена аппроксимация функции распределения случайной величины с использованием равномерно сходящихся функциональных рядов.
2. Получено решение стохастической транспортной задачи.
3. Получен и применен алгоритм нахождения области устойчивости на короткие сроки с последующей корректировкой оптимального плана.

Также можно построить корреляционные функции с помощью подобного подхода построения функции распределения.

Список литературы

1. Колбин В. В. Стохастическое программирование. Palmarium Academic Publishing, 2013. 396с.
2. Тумка О. А. Об аппроксимации распределений начального состояния пучка заряженных частиц // BDO’2002 – Saint-Petersburg, June 24-27, 2002, P. 351-360.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М.: Советское радио, 1961. 491с.
4. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1968. 368с.
5. Зубов В. И. Интерполяция и аппроксимация вероятностных распределений // Доклады АН СССР, 1991. Т. 316, Вып. 6. С. 1298-1301.
6. Жук В. В. О приближении функций в пространстве C(R): Равенство типа Парсеваля// Мат. Вопросы анализа негладких моделей, 1995. Вып. 16. С. 105-118.
7. Zhuk V. V., Tumka O. A. About the uniform approximation on the all real axis of continuous distribution functions // International Conference on «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 – Proceedings, 7342141, 2015, P. 364-365.
8. Банди Б. Основы линейного программирования. М.: Радио и связь, 1989. 176с.