**Санкт–Петербургский государственный университет**

***Болатбек Айсана***

# Выпускная квалификационная работа

## *О задаче оптимального расходования ресурсов при наличии терминальных ограничений*

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2018 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Системный анализ, исследование операций и управление»

Научный руководитель:
доцент, кафедра математической теории игр и статистических решений, к.ф. - м.н.
Тур Анна Викторовна

Рецензент:
доцент, кафедра математической теории моделирования систем управления, к.ф. - м.н.
Тамасян Григорий Шаликович

Санкт-Петербург
2022 г.

# Содержание

# Введение

Многие задачи конфликтного управления могут быть разрешены с помощью теории игр. Задачи развиваются с течением времени, поэтому удобно рассматривать динамические математические модели. Дифференциальные игры являются удобными моделями для разрешения ряда задач в экологии, экономике и в других сферах жизнедеятельности.

В данной работе рассматривается теоретико-игровая задача добычи невозобновляемых ресурсов. Модель конфликтного управления построена для случая, где выигрыш игрока задается функционалом в форме Лагранжа, и накладываются граничные условия при кооперативном и некооперативном сценариях. При этом динамика, которая описывает общий уровень запаса ресурсов, имеет линейный и нелинейный вид. Более того, рассматривается влияние располагаемой информации о граничных условиях на величины выбираемых оптимальных управлений, и далее на соответствующие выигрыши. Это влияние исследуется через введение понятия «ценность информации».

Работа имеет следующую структуру. В Главе 1 описываются основные модели и математические методы построения управления. Рассматриваются две модели управления с линейной и нелинейной динамиками. Управления строятся по принципу максимума Понтрягина и равновесные по Нэшу. Вводится новая характеристика – ценность информации.

В Главах 2 и 3 строятся управления по методам описанным в Главе 1. Сперва строятся кооперативные управления, соответствующие им траектории и выигрыши для модели с линейной динамикой. Рассматривается влияние неточной информации о начальном уровне ресурсов и о граничных условиях при кооперативном сценарии. Далее, строятся управления равновесные по Нэшу, соответствующие им траектории и выигрыши. Аналогичные результаты для модели с нелинейной динамикой описываются в Главе 3.

В Главе 4 рассматривается практическая реализация модели для данных трех предприятий, добывающих ресурсы в Кузнецком угольном бассейне. Приближенная модель основывается на теоретических рассуждениях из Главы 2.

# Обзор литературы

Построение оптимальных управлений методом максимума Понтрягина описано в книге [1]. Применение принципа максимума и равновесие по Нэшу в дифференциальных играх описано в работах [2, 3]. Понятие «ценность информации» рассматривается в работах [4, 5].

Схожая модель управления может быть найдена в работах [6, 7] .

В данной работе были использованы оценки запаса ресурсов в Кузнецком угольном бассейне [9] и пояснение категорий ресурсов [8], к тому же данные трех угледобывающих предприятий [10, 11, 12].

# Постановка задачи

Рассмотрим две теоретико-игровые задачи добычи невозобновляемых запасов ресурса. Предполагается, что добычей определенного ресурса занимается $n$ предприятий добывающей промышленности, т. е. в играх участвуют игроки из множества $N = \{1, .., n\}$. Стратегия каждого $i$-игрока – выбор объема добычи ресурса $u_i$ из некоторого допустимого множества $U_i = [0, u_{max}], u_{max} > 0$.

Пусть у нас имеется общий уровень запасов ресурсов $x(t)$ на определенном промежутке времени $[t_0, T]$, который в первом случае зависит от объема добычи ресурсов $u_i$ линейно. По условиям задачи потребуем, чтобы были заданы уровни запасов ресурсов в начальный и конечный моменты времени, $x_0$ и $x_f$ соответственно. Динамика общего уровня запаса ресурса $x(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (1), с начальным условием (2) и с закрепленным концом (3), где $x_0, x_f \geqslant 0$ .

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n} u_i(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$x(T) = x_f, \tag{3}$$

Во втором случае рассмотрим общий уровень запасов ресурсов $x(t)$ на определенном промежутке времени $[t_0, T]$, который зависит от объема добычи ресурсов $u_i$ нелинейно, и задается следующим образом:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n} u_i^2(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{4}$$

Для двух случаев чистый выигрыш $i$-игрока в каждый момент времени $t$ определяется функцией:

$$R(u_i(t)) = c_i\sqrt{u_i}, \qquad i \in N.$$

Следовательно, интегральный выигрыш $i$-игрока описывается следующим образом:

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u) = \int\limits_{t_0}^{T} c_i \sqrt{u_i} dt,$$

где $u = \{u_i\}, i = \overline{1, n}$;
$c_i \geqslant 0$ – коэффициент, связывающий объем добычи и выигрыш $i$-го игрока.

В общей дифференциальной игре каждый $i$ - игрок стремится

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u) \to \max_{u_i}.$$

В данной работе также будет рассмотрен кооперативный вид игры. В данной игре игроки договариваются между собой, чтобы выбрать оптимальное управление $u^*(t) = (u_1^*(t), ..., u_n^*(t))$ таким образом, чтобы максимизировать функцию выигрыша:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, u) \to \max_{u_1, \ldots, u_n}.$$

Далее, мы будем рассматривать кооперативное и некооперативное решения данных двух случаев, заданных уравнениями (1),(2),(3) и (2),(3),(4).

# Глава 1. Основные математические методы

## 1.1 Основные методы построения оптимального управления

Рассмотрим дифференциальную игру $n$ лиц $\Gamma(t_0, x_0, T_f)$ с предписанной продолжительностью $(T_f - t_0)$ и с начальным состоянием $x_0$. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = g(x, u_1, ..., u_n), \quad x(t_0) = x_0 \in X \subset \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Полагается, что состояние $x(t) \in X$ для всех $t \in [t_0, T_f]$, где $X$ некоторое открытое подмножество $\mathbb{R}^m$ , а управления $u_i$ выбираются из множеств допустимых управлений $\mathcal{U}_i$, которые состоят из всех измеримых функций из $[t_0, T_f]$ в $U_i, i = 1, ..., n$. Множество допустимых значений управлений $U_i$ представляют собой выпуклые компактные подмножества $\mathbb{R}^k$, такие что $U_i \ni \{\mathbf{0}\}$. Введем $u = (u_1, ..., u_n)$, $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$, $\mathcal{U} = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$. Таким образом $u \in \mathcal{U}$ и $u(t) \in U, t \in [t_0, T_f]$. Программные управления зависят только от начального состояния игры $x_0$ и текущего момента времени $t$.

Предположим, что для $\forall u \in \mathcal{U}$, $\forall x_0 \in X$ существует решение системы (5) $x(t, t_0, x_0, u)$. Решение удовлетворяет условию $x(t, t_0, x_0, u) \in X, \forall t \in [t_0, T_f]$.

Выигрыш $i$-игрока описывается следующим образом:

$$K_i(x_0, t_0, T_f, u) = \int\limits_{t_0}^{T_f} f_i(x(t), u(t))dt + F_i(x(T_f)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $x(t)$ удовлетворяет системе (5), а функции $f_i(\cdot, \cdot)$, $F_i(\cdot)$ являются гладкими. Обозначим $f(x(t), u(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x(t), u(t))$, $F(x(T_f)) = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i(x(T_f))$.

Управление $u^*(t)$ - оптимальное управление, если доставляет максимум функционалу (6).

### 1.1.1 Принцип максимума Понтрягина

**Теорема (принцип максимума Понтрягина).** Для оптимальности управления $u^*(t)$ и соответствующей ему траектории $x^*(t)$ необходимо существование непрерывных сопряженных функций $\psi(t) \in \mathbb{R}^m$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1.
$$\begin{cases} \dot{x}^i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \psi^i} \\ \dot{\psi}^i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}, \\ i = \overline{1, m}, \end{cases}$$
где $H(x, \psi, u) = f(x(t), u(t)) + \langle \psi(t), g(x(t), u(t)) \rangle$ - гамильтониан.

2. условие максимальности
$$H(x^*(t), \psi(t), u^*(t)) = \max_{u(t) \in U} H(x(t), \psi(t), u(t)).$$

3. условие трансверсальности
$$\psi(T_f) = \frac{\partial F(x(T_f))}{\partial x}.$$

Заметим, что если перед нами задача с закрепленным концом, т. е. $x(T_f) = x_f$, то $F(x(T_f)) = const$. Таким образом, отсутствует терминальная составляющая функции выигрыша. Перепишем нашу теорему для данного случая.

**Теорема (принцип максимума Понтрягина).** Для оптимальности управления $u^*(t)$ и соответствующей ему траектории $x^*(t)$ необходимо существование непрерывных сопряженных функций $\psi(t) \in \mathbb{R}^m$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1.

$$\begin{cases} \dot{x}^i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \psi^i}, \\ \dot{\psi}^i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}, \\ i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где $H(x, \psi, u) = f(x(t), u(t)) + \langle \psi(t), g(x(t), u(t)) \rangle$ - гамильтониан.

2.

$$H(x^*(t), \psi(t), u^*(t)) = \max_{u(t) \in U} H(x(t), \psi(t), u(t)).$$

### 1.1.2 Равновесие по Нэшу

**Теорема.** Для того, чтобы набор стратегий $\{u_j^*(t), j \in N\}$ являлся равновесием по Нэшу в программных стратегиях, и $x^*(t)$ была соответствующей ему оптимальной траекторией, необходимо существование непрерывных сопряженных функций $\psi_j(t) \in \mathbb{R}^m$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1.

$$\begin{cases} \dot{x}^i(t) = \dfrac{\partial H_j}{\partial \psi_j^i} \\ \dot{\psi}_j^i(t) = -\dfrac{\partial H_j}{\partial x^i}, \\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где $H_j(x, \psi_j, u) = f_j(x(t), u(t)) + \langle \psi_j(t), g(x(t), u(t)) \rangle$ - гамильтониан.

2.

$$H_j(x^*(t), \psi_j(t), u^*(t)) =$$

$$= \max_{u_i(t) \in U_i} H_j(x(t), \psi_j(t), u_1^*(t), ..., u_{i-1}^*(t), u_i(t), u_{i-1}^*(t), ..., u_n^*(t)), j = \overline{1, n}.$$

## 1.2 Ценность информации

Выбор оптимального управления влияет на оптимальную траекторию и выигрыши игроков. В свою очередь, оптимальное управление выбирается таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия. Допустим, у нас имеется неточная информация о граничных условиях. Тогда соответствущий выигрыш игрока будет иметь другой вид. Для определения влияния точности информации о граничных условиях на управление и выигрыш введем понятие «ценность информации».

**Определение.** Ценность информации определяется как

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, u^*) - \sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*)}{\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, u^*)},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, u^*)$ – суммарный выигрыш, получаемый при точной информации, в то время как $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*)$ – выигрыш, получаемый при неточной.

# Глава 2. Задача оптимального управления с линейной динамикой

Переписав (1),(2),(3) в виде системы, динамика общего уровня запасов ресурсов задается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n} u_i(t), \quad t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_f. \end{cases} \tag{7}$$

Далее, наша цель определяется как получение максимально возможной прибыли за счет добычи ресуров:

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u) = \int_{t_0}^{T} c_i \sqrt{u_i} dt \to \max_{u_i(t) \in U_i}, \tag{8}$$

где $c_i \geqslant 0$ – коэффициент, связывающий объем добычи и общую прибыль.

Для кооперативного случая нам нужно максимизировать функцию выигрыша:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, u) \to \max_{u_1, \dots, u_n}. \tag{9}$$

## 2.1 Кооперативное решение

В задачах поиска оптимального управления мы можем применить принцип максимума Понтрягина, который является необходимым условием оптимальности. Построим функцию Гамильтона для нашей задачи (7),(9):

$$H(\psi, u) = \psi \left( -\sum_{i=1}^{n} u_i \right) + \left( \sum_{i=1}^{n} c_i \sqrt{u_i} \right).$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + \frac{c_i}{2\sqrt{u_i}} = 0.$$

Находим оптимальные управления

$$u_i^* = \left(\frac{c_i}{2\psi}\right)^2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Находим сопряженные переменные

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

$$\psi = \psi_0 = const.$$

Тогда управления имеют вид:

$$u_i^* = \left(\frac{c_i}{2\psi_0}\right)^2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим это в (7)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{2\psi_0}\right)^2 = -\left(\frac{1}{4\psi_0^2} \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right), \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_f. \end{cases}$$

Отсюда находим сопряженную переменную

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{(T - t_0)}{4(x_0 - x_f)} \sum_{j=1}^{n} c_j^2}.$$

Получим решение $x^*(t)$:

$$x^*(t) = \left(\frac{x_f - x_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0.$$

Тогда оптимальные управления имеют вид:

$$u_i^* = \frac{c_i^2(x_0 - x_f)}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2(T - t_0)}.$$

Далее, мы проверяем ограниченность управлений согласно условиям задачи, т. е. $u_i \in [0; u_{max}]$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$0 \leq \frac{c_i^2(x_0 - x_f)}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2(T - t_0)} \leq u_{max}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В силу этого, управления являются допустимыми и принадлежат компакту, если выполняется условие

$$x_f \geq x_0 - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2}{c_i^2} u_{max}(T - t_0), \quad i = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Найдем выигрыш каждого $i$-игрока

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = \frac{c_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2}} \sqrt{(x_0 - x_f)(T - t_0)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В итоге, подставив управление в функцию выигрыша, получим

$$K(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2(x_0 - x_f)(T - t_0)}. \tag{11}$$

## 2.2 Ценность информации о граничных условиях для кооперативной игры

Представим такую ситуацию, когда известное значение уровня запасов ресурсов отличается от истинного. Допустим, у нас имеется известное значение в начальный момент времени $\widehat{x}_0$. Тогда соответствующие этому значению оптимальные управление, траектория и функционал имеют вид:

$$\widehat{u}_i^*(t) = \frac{c_i^2(\widehat{x}_0 - x_f)}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2(T - t_0)}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\widehat{x}^*(t) = \left(\frac{x_f - \widehat{x}_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0,$$

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*) = \frac{c_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2}} \sqrt{(\widehat{x}_0 - x_f)(T - t_0)}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$K(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2(\widehat{x}_0 - x_f)(T - t_0)}.$$

Стоит обратить внимание на то, что управления должны принадлежать компакту, т. е. в определении (10) должны участвовать известные значения граничных условий.

Далее, определим $\widehat{x}_0 = \alpha x_0$ – известное начальное значение, где $\alpha > 1$ соответствует случаю, когда данные переоценены, а $\alpha < 1$ случаю, когда недооценены.

Для удобства определим значение в конечный момент времени как $x_f = \beta x_0$, где согласно постановке задачи $\beta \in [0, 1]$. При этом $\beta = 1$ соответствует случаю, когда истинные начальный и конечный уровни запасов совпадают, т. е. фактическая эксплуатация ресурса не осуществляется при точной информации. Определим для данного случая ценность информации максимально возможным значением, т.е 1. Далее, рассмотрим случаи, когда $\beta \neq 1$. Принимая во внимание данные обозначения и выигрыши для случая точной информации (11), получим величину ценности информации:

$$V_1 = \begin{cases} 1 - \sqrt{\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \beta}}, & \alpha \leqslant 1, \\ \sqrt{\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \beta}} - 1, & \alpha > 1. \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что величина $\alpha$ соответствует точности оценки запасов ресурсов, которая влияет и на терминальное ограничение, т. е. $x_f$. Таким образом, можем ввести $\widehat{x}_f = \alpha x_f$. Тогда оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория и функционал имеют вид:

$$\widetilde{u}_i^*(t) = \frac{c_i^2(\widehat{x}_0 - \widehat{x}_f)}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2(T - t_0)}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\widetilde{x}^*(t) = \left(\frac{\widehat{x}_f - \widehat{x}_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0,$$

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, \widetilde{u}^*) = \frac{c_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2}} \sqrt{(\widehat{x}_0 - \widehat{x}_f)(T - t_0)}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$K(x_0, x_f, T - t_0, \widetilde{u}^*) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2(\widehat{x}_0 - \widehat{x}_f)(T - t_0)}.$$

В данных обозначениях ценность информации примет вид:

$$V_2 = \begin{cases} 1 - \sqrt{\alpha}, & \alpha \leqslant 1, \\ \sqrt{\alpha} - 1, & \alpha > 1. \end{cases} \tag{13}$$

Далее, назовем ценности, полученные в (12), (13), случаями 1 и 2 соответственно.

## 2.3 Равновесие по Нэшу

Построим функцию Гамильтона для нашей задачи (7),(8):

$$H_i(\psi_i, u) = \psi_i \left(-\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + (c_i \sqrt{u_i}).$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\psi_i + \frac{c_i}{2\sqrt{u_i}} = 0.$$

Находим оптимальные управления

$$u_i^* = \left(\frac{c_i}{2\psi_i}\right)^2, \quad i = \overline{1,n}.$$

Находим сопряженные переменные

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

$$\psi_i = \psi_{0i} = const.$$

Тогда управления имеют вид:

$$u_i^* = \left(\frac{c_i}{2\psi_{0i}}\right)^2, \quad i = \overline{1,n}.$$

Подставим это в (7)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{2\psi_{0i}}\right)^2, \\ \quad x(t_0) = x_0, \\ \quad x(T) = x_f. \end{cases}$$

Решая данную систему, приходим к условию

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{c_i}{2\psi_{0i}}\right)^2 = \frac{x_0 - x_f}{T - t_0}.$$

Предположим, что коэффициенты равны между собой, т. е. $c_i = c_j = c$. Тогда игроки являются симметричными, значит оптимальные управления у них должны быть одинаковыми, т. е. $u_i = u_j$. Рассмотрим первое уравнение системы относительно одного игрока

$$\dot{x} = -nu_1 = -n\left(\frac{c}{2\psi_{01}}\right)^2.$$

Решаем и находим $\psi_{01}$:

$$\psi_{01} = \frac{c}{2\sqrt{\frac{X_0 - X_f}{n(T-t_0)}}}.$$

Получим решение $x^*(t)$ и оптимальное управление :

$$x^*(t) = \left(\frac{x_f - x_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0,$$

$$u_1^* = \frac{(x_0 - x_f)}{n(T - t_0)}.$$

Для других игроков аналогично.

Далее, мы проверяем ограниченность управления согласно условиям задачи, т. е. $u_i \in [0, u_{max}]$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$0 \leq \frac{x_0 - x_f}{n(T - t_0)} \leq u_{max}.$$

В силу этого, управления являются допустимыми и принадлежат компакту, если выполняется условие

$$x_f \geq x_0 - nu_{max}(T - t_0).$$

Найдем выигрыш каждого $i$-игрока

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = c\sqrt{\frac{(x_0 - x_f)(T - t_0)}{n}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В итоге, подставив управление в функцию выигрыша, получим

$$K(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = c\sqrt{n(X_0 - X_f)(T - t_0)}.$$

Можно аналогично вычислениям из раздела 2.2 рассмотреть два случая неопределенности при некооперативном сценарии отдельно для каждого игрока. При этом ценности информации совпадают с выражениями (12), (13).

## 2.4 Сравнительный анализ

Подытожим полученные результаты в следующей таблице:

| Пример 1 | Кооперативная игра | Некооперативная игра |
| --- | --- | --- |
| Динамика | $\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(t), \quad t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_f \end{cases}$ | |
| Функция выигрыша $i$-го игрока | $\int\limits_{t_0}^{T} c_i \sqrt{u_i} dt$ | $\int\limits_{t_0}^{T} c \sqrt{u_i} dt$ |
| Оптимальное управление $i$-го игрока | $\dfrac{c_i^2 (x_0 - x_f)}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2 (T - t_0)}$ | $\dfrac{(x_0 - x_f)}{n(T - t_0)}$ |
| Оптимальная траектория | $\left(\frac{x_f - x_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0$ | |
| Выигрыш $i$-го игрока | $\dfrac{c_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2}} \sqrt{(x_0 - x_f)(T - t_0)}$ | $c\sqrt{\dfrac{(x_0 - x_f)(T - t_0)}{n}}$ |
| Полный выигрыш | $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2 (x_0 - x_f)(T - t_0)}$ | $c\sqrt{n(X_0 - X_f)(T - t_0)}$ |

# Глава 3. Задача оптимального управления с нелинейной динамикой

Переписав (2),(3),(4) в виде системы, динамика общего уровня запасов ресурсов задается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2(t), \quad t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_f. \end{cases} \tag{14}$$

Далее, наша цель определяется как получение максимально возможной прибыли за счет добычи ресуров:

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u) = \int\limits_{t_0}^{T} c_i \sqrt{u_i} dt \to \max_{u_i(t) \in U_i}, \tag{15}$$

где $c_i \geqslant 0$ – коэффициент, связывающий объем добычи и выигрыш.

Для кооперативного случая нам нужно максимизировать функцию выигрыша:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, x_f, T - t_0, u) \to \max_{u_1, \ldots, u_n}. \tag{16}$$

## 3.1 Кооперативное решение

В задачах поиска оптимального управления мы можем применить принцип максимума Понтрягина, который является необходимым условием оптимальности. Построим функцию Гамильтона для нашей задачи (14),(16):

$$H(\psi, u) = \psi \left( -\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right) + \left( \sum_{i=1}^{n} c_i \sqrt{u_i} \right).$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -2\psi u_i + \frac{c_i}{2\sqrt{u_i}} = 0.$$

Находим оптимальные управления

$$u_i^* = \left(\frac{c_i}{4\psi}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Находим сопряженные переменные

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

$$\psi = \psi_0 = const.$$

Тогда управления имеют вид:

$$u_i^* = \left(\frac{c_i}{4\psi_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Подставим это в (14), получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{c_i}{4\psi_0}\right)^{\frac{4}{3}} = -\left(\frac{1}{4\psi_0}\right)^{\frac{4}{3}}\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{\frac{4}{3}}, \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_f. \end{cases}$$

Отсюда находим сопряженную переменную

$$\psi_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{(T-t_0)}{(x_0-x_f)}\sum_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Получим решение $x^*(t)$:

$$x^*(t) = \left(\frac{x_f - x_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0.$$

Тогда оптимальные управления имеют вид:

$$u_i^* = \frac{c_i^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt{\frac{x_0 - x_f}{T - t_0}}.$$

Далее, мы проверяем ограниченность управлений согласно условиям задачи, т. е. $u_i \in [0; u_{max}]$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$0 \leq \frac{c_i^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt{\frac{x_0 - x_f}{T - t_0}} \leq u_{max}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В силу этого, управления являются допустимыми и принадлежат компакту, если выполняется условие

$$x_f \geq x_0 - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}{c_i^{\frac{4}{3}}} u_{max}^2 (T - t_0), \quad i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Найдем выигрыш каждого $i$-игрока

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = \frac{c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(x_0 - x_f)(T - t_0)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В итоге, подставив управление в функцию выигрыша, получим

$$K(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(x_0 - x_f)(T - t_0)}.$$

## 3.2 Ценность информации о граничных условиях для кооперативной игры

Представим такую ситуацию, когда известное значение уровня запасов ресурсов отличается от истинного. Допустим, у нас имеется известное значение в начальный момент времени $\widehat{x}_0$. Тогда соответствующие этому значению оптимальные управление, траектория и функционал имеют вид:

$$\widehat{u}_i^*(t) = \frac{c_i^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt{\frac{\widehat{x}_0 - x_f}{T - t_0}}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\widehat{x}^*(t) = \left(\frac{x_f - \widehat{x}_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0,$$

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*) = \frac{c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(\widehat{x}_0 - x_f)(T - t_0)}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$K(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(\widehat{x}_0 - x_f)(T - t_0)}.$$

Стоит обратить внимание на то, что управления должны принадлежать компакту, т. е. в определении (17) должны участвовать известные значения граничных условий.

Далее, определим $\widehat{x}_0 = \alpha x_0$ – известное начальное значение, где $\alpha > 1$ соответствует случаю, когда данные переоценены, а $\alpha < 1$ случаю, когда недооценены.

Для удобства определим значение в конечный момент времени как $x_f = \beta x_0$, где согласно постановке задачи $\beta \in [0, 1]$. При этом $\beta = 1$ соответствует случаю, когда истинные начальный и конечный уровни запасов совпадают, т. е. фактическая эксплуатация ресурса не осуществляется при точной информации. Определим для данного случая ценность информации максимально возможным значением, т.е 1. Далее, рассмотрим случаи, когда $\beta \neq 1$. Принимая во внимание данные обозначения и выигрыши для случая точной информации (11), получим величину ценности информации:

$$V_3 = \begin{cases} 1 - \sqrt[4]{\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \beta}}, & \alpha \leqslant 1, \\ \sqrt[4]{\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \beta}} - 1, & \alpha > 1. \end{cases} \tag{18}$$

Заметим, что величина $\alpha$ соответствует точности оценки запасов ресурсов, которая влияет и на терминальное ограничение, т. е. $x_f$. Таким образом, можем ввести $\widehat{x}_f = \alpha x_f$. Тогда оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория и функционал имеют вид:

$$\widehat{u}_i^*(t) = \frac{c_i^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt{\frac{\widehat{x}_0 - \widehat{x}_f}{T - t_0}}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\widehat{x}^*(t) = \left( \frac{\widehat{x}_f - \widehat{x}_0}{T - t_0} \right) (t - t_0) + x_0,$$

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*) = \frac{c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(\widehat{x}_0 - \widehat{x}_f)(T - t_0)}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$K(x_0, x_f, T - t_0, \widehat{u}^*) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(\widehat{x}_0 - \widehat{x}_f)(T - t_0)}.$$

В данных обозначениях ценность информации примет вид:

$$V_4 = \begin{cases} 1 - \sqrt[4]{\alpha}, & \alpha \leqslant 1, \\ \sqrt[4]{\alpha} - 1, & \alpha > 1. \end{cases} \tag{19}$$

### 3.3 Равновесие по Нэшу

Построим функцию Гамильтона для нашей задачи (14),(15):

$$H_i(\psi_i, u) = \psi_i \left( -\sum_{j=1}^{n} u_j^2 \right) + \left( c_i \sqrt{u_i} \right).$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -2\psi_i u_i + \frac{c_i}{2\sqrt{u_i}} = 0.$$

Находим оптимальные управления

$$u_i^* = \left( \frac{c_i}{4\psi_i} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Находим сопряженные переменные

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial x} = 0.$$

$$\psi_i = \psi_{0i} = const.$$

Тогда управления имеют вид

$$u_i^* = \left( \frac{c_i}{4\psi_{0i}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим это в (14), получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{c_i}{4\psi_{0i}} \right)^{\frac{4}{3}}, \\ \quad x(t_0) = x_0, \\ \quad x(T) = x_f. \end{cases}$$

Решая данную систему, приходим к условию:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{c_i}{4\psi_{0i}}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{x_0 - x_f}{T - t_0}.$$

Предположим, что коэффициенты равны между собой, т. е. $c_i = c_j = c$. Тогда игроки являются симметричными, значит оптимальные управления у них должны быть одинаковыми, т. е. $u_i = u_j$. Рассмотрим первое уравнение системы относительно одного игрока

$$\dot{x} = -nu_1 = -n\left(\frac{c}{4\psi_{01}}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Решаем и находим $\psi_{01}$:

$$\psi_{01} = \frac{c}{4}\left(\frac{n(T - t_0)}{x_0 - x_f}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Получим решение $x^*(t)$:

$$x^*(t) = \left(\frac{x_f - x_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0.$$

Находим оптимальное управление:

$$u_1^* = \sqrt{\frac{(x_0 - x_f)}{n(T - t_0)}}.$$

Для других игроков аналогично.

Далее, мы проверяем ограниченность управления согласно условиям задачи, т. е. $u_i \in [0; u_{max}]$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$0 \leq \sqrt{\frac{(x_0 - x_f)}{n(T - t_0)}} \leq u_{max}.$$

В силу этого, управления являются допустимыми и принадлежат компакту, если выполняется условие

$$x_f \geq x_0 - n u_{max}^2 (T - t_0).$$

Найдем выигрыш каждого $i$-игрока

$$K_i(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = c \sqrt[4]{\frac{(x_0 - x_f)(T - t_0)}{n}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В итоге, подставив управление в функцию выигрыша, получим

$$K(x_0, x_f, T - t_0, u^*) = c \sqrt[4]{n^3 (X_0 - X_f)(T - t_0)}.$$

Можно аналогично вычислениям из раздела 3.2 рассмотреть два случая неопределенности при некооперативном сценарии отдельно для каждого игрока. При этом ценности информации совпадают с выражениями (18), (19).

## 3.4 Сравнительный анализ

Подытожим полученные результаты в следующей таблице:

| Пример 2 | Кооперативная игра | Некооперативная игра |
|---|---|---|
| Динамика | $\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2(t), \quad t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_f \end{cases}$ | |
| Функция выигрыша $i$-го игрока | $\int\limits_{t_0}^{T} c_i \sqrt{u_i} dt$ | $\int\limits_{t_0}^{T} c \sqrt{u_i} dt$ |
| Оптимальное управление $i$-го игрока | $\dfrac{c_i^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt{\dfrac{x_0 - x_f}{T - t_0}}$ | $\sqrt{\dfrac{(x_0 - x_f)}{n(T - t_0)}}$ |
| Оптимальная траектория | $\left(\frac{x_f - x_0}{T - t_0}\right)(t - t_0) + x_0$ | |
| Выигрыш $i$-го игрока | $\dfrac{c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(x_0 - x_f)(T - t_0)}$ | $c\sqrt[4]{\dfrac{(x_0 - x_f)(T - t_0)}{n}}$ |
| Полный выигрыш | $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{\frac{4}{3}}}} \sqrt[4]{(x_0 - x_f)(T - t_0)}$ | $c\sqrt[4]{n^3(X_0 - X_f)(T - t_0)}$ |

# Глава 4. Теоретико-игровая задача добычи невозобновляемого ресурса на примере угледобывающих предприятий Кузнецкого угольного бассейна

Производство минерально-сырьевой базы играет важную роль в экономике России и обеспечивает значительную часть поступлений в федеральный бюджет. В частности, за счет богатой сырьевой базы Россия занимает ведущие позиции на мировом рынке угля. 2020 год характеризуется определенными трудностями на рынке производства и потребления из-за пандемии, однако, угледобывающая отрасль продолжала развивать новые проекты и наращивать имеющиеся. Значимость угля, как энергетического ресурса, выражается его долей в мировом энергобалансе, который составляет 26%. Согласно государственному докладу Роснедра, в России эксплуатировались 108 угольных шахт и 224 разреза в 2020 г. [9]. Основная доля угольных активов находится в Кузнецком угольном бассейне Кемеровской области (Кузбасс), который обеспечивает более половины российской угледобычи (53% в 2020 г.). Таким образом, рациональное использование данного минерального ресурса и точная оценка его запасов значительно влияет на экономику страны.

В российской угольной отрасли действует огромное количество добывающих предприятий, но значительную часть добычи данного ресурса обеспечивает шесть компаний. Для задачи рассмотрим только некоторые из них. К примеру, угольными активами в Кузнецком бассейне обладают три компании и холдинги: АО «СУЭК», которое специализируется на энерго-угольной промышленности; ПАО «МЕЧЕЛ» и ООО «ЕВРАЗ», которые занимаются металлургическим и коксохимическим производствами.

На основе имеющихся данных [10, 11, 12] формализуем теоретическую задачу добычи угля в виде дифференциальной кооперативной игры трех лиц, где игроками являются следующие компании: АО «СУЭК», ПАО «МЕЧЕЛ» и ООО «ЕВРАЗ». Можно аналогично рассмотреть некооперативный сценарий.

## 4.1 Параметры модели

Для определения коэффициентов $c_i$, определяющих выигрыши (8) и (15), воспользуемся данными о выручке компаний за 2020 г.. Коэффициенты $c_i$ будут определяться по следующей формуле:

$$c_i = \frac{R_i}{E_i}, \tag{20}$$

где $R_i$ - выручка, $E_i$ - объем добычи $i$-компании за 2020 г..

Таблица 1 содержит информацию о выручке трех компаний за 2020 г. [10, 11, 12].

| **Угледобывающая компания** | $R_i$ **(млн долл. США)** | $E_i$ **(млн т)** |
|---|---|---|
| АО «СУЭК» | 4817 | 101,2 |
| ПАО «МЕЧЕЛ» | 1125 | 15,9 |
| ООО «ЕВРАЗ» | 1490 | 20,7 |

**Таблица 1:** Данные о предприятиях

Учитывая (20), можно получить значения $c_i$ для данной задачи и представить в таблице 2.

| **Угледобывающая компания** | $c_i$ |
|---|---|
| АО «СУЭК» | 47,59 |
| ПАО «МЕЧЕЛ» | 70,78 |
| ООО «ЕВРАЗ» | 71,98 |

**Таблица 2:** Данные о предприятиях

По условиям задачи необходимо задать граничные условия для систем (7) и (14), т. е. нужно определить начальный и конечный уровни запасов ресурса. Можно рассмотреть задачу для добычи ресурса на протяжении одного календарного года, т. е. $t_0 = 0, T = 365$. Для определения состояния сырьевой базы можно обратиться к оценке запасов ресурса.

Согласно приказу «Об утверждении Классификации запасов и прогнозных ресурсов твердых полезных ископаемых», запасы полезных ископаемых по степени геологической изученности подразделяются на категории:

$A, B, C_1, C_2$. Данные категории различаются на основе разных характеристик, но первые три отличаются от последней тем, что для запасов данных категорий должны быть определены природные разновидности и промышленные (технологические) типы полезного ископаемого, установлены общие закономерности их пространственного распространения и количественные соотношения промышленных (технологических) типов и сортов полезного ископаемого. Более того, имеются категории прогнозных ресурсов $P_1, P_2, P_2$, которые подразделяются по степени их обоснованности [8].

Таблица 3 содержит информацию о запасах угля по категориям в Кузнецком угольном бассейне [9].

| **Категория** | **Запасы категорий, млрд т** |
|---|---|
| $A + B + C_1$ | 55,2 |
| $C_2$ | 13,9 |
| $P_1 + P_2 + P_2$ | 222,5 |

**Таблица 3:** Распределение запасов угля

В качестве точной оценки о начальном состоянии ресурса можно взять запасы категорий $A, B, C_1, C_2$. Таким образом, определим $x_0 = 69,1$ млрд т. При этом, стоит обратить внимание на то, что для запасов категории $C_2$ необязательно должны быть установлены закономерности распространения ресурса, иными словами, предприятие может не обладать точной информацией о месторождении. Запасы категории $C_2$ определяют около 20% всех известных ресурсов, а прогнозные ресурсы значительно превышают более точно оцененные запасы ресурсов, что является излишним. По этим соображениям определим коэффициент неопределенности $\alpha \in [0.8, 1.4]$.

Запасы в конечный момент времени ранее определялись как $x_f = \beta x_0$. Можно взять в качестве параметра $\beta$ значения из интервала $[0.4, 0.7]$.

## 4.2 Оптимальные управления игроков

Определим $\beta = 0.4$, т. е. $x_f = 27640$ млрд т. Оптимальные управления для такого параметра задачи с линейной (7), (8) и нелинейной (14), (15) динамиками, т. е. примеров 1 и 2 выражаются в таблицах 4, 5 и в рис. 1.

| Игрок | Кооперативное решение |
|---|---|
| АО «СУЭК» | 20,65 |
| ПАО «МЕЧЕЛ» | 45,69 |
| ООО «ЕВРАЗ» | 47,25 |

**Таблица 4:** Распределение добычи в примере 1

| Игрок | Кооперативное решение |
|---|---|
| АО «СУЭК» | 5,06 |
| ПАО «МЕЧЕЛ» | 6,59 |
| ООО «ЕВРАЗ» | 6,67 |

**Таблица 5:** Распределение добычи в примере 2

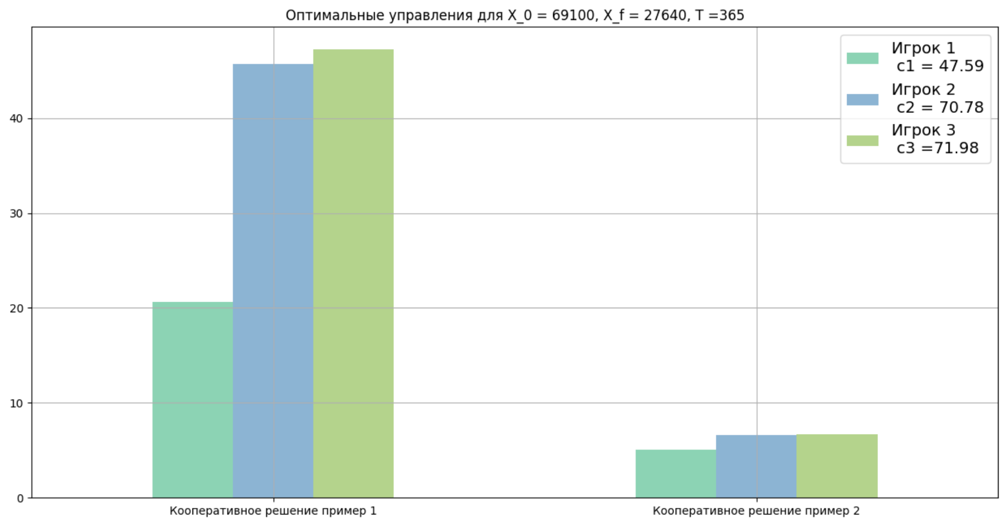


**Рис. 1:** Оптимальные управления игроков

## 4.3 Оптимальная траектория

Для данных оптимальных управлений оптимальная траектория выражается следующей формулой и совпадает для двух примеров:

$$x^*(t) = 69100 - \frac{69100 - 27640}{365}t.$$

Можно показать график измения состояния ресурса (см. рис 2).

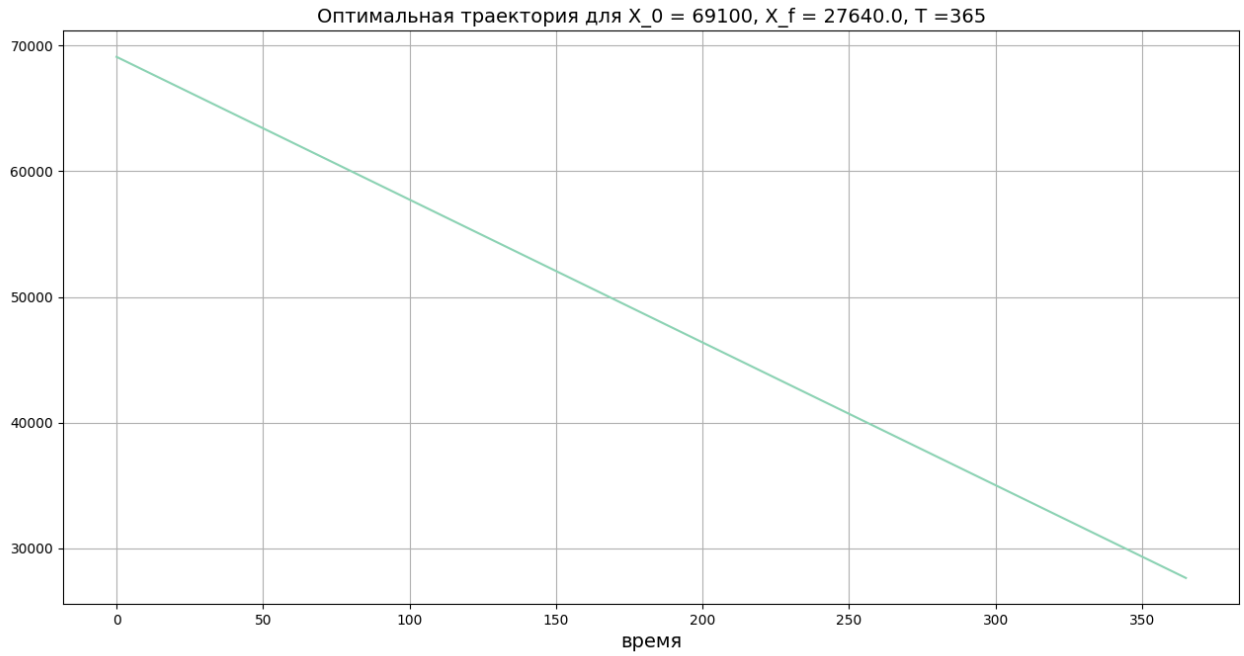


**Рис. 2:** Оптимальные управления игроков

## 4.4 Выигрыши игроков

Рис. 3 содержит информации о выигрышах при кооперативном случае для примеров 1 и 2, где динамика задается линейно и нелинейно от управления.

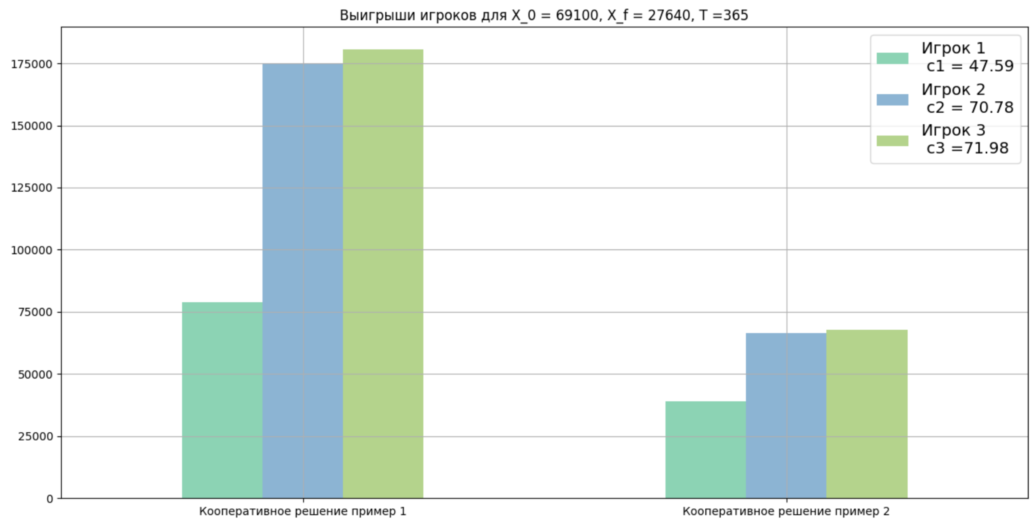


**Рис. 3:** Выигрыши игроков

## 4.5 Ценность информации при кооперативном случае для примера с линейной динамикой

Ценность информации о граничных условиях для двух случаев неопределенности были получены в разделах 2.2 и 3.2 для систем с линейной и нелинейной динамиками соответственно. Следующие результаты были получены для задачи добычи ресурса, которая задается системой с линейной динамикой (7) и выигрышем (8). Для нелинейной системы можно получить аналогичные результаты.

Ранее была определена ценность информации о граничных условиях для данной задачи, которая выражается формулами (12) и (13), в зависимости от количества информации о граничных условиях.

Коэффициент неопределенности $\alpha$ влияет на значения оптимальных управлений и далее на соответствующую траекторию. Случаем 1 называется случай, когда имеется неточная информация о начальном уровне запаса ресурса. Для наглядности построены полученные оптимальные управления и оптимальные траектории для данного случая (см. рис.4).

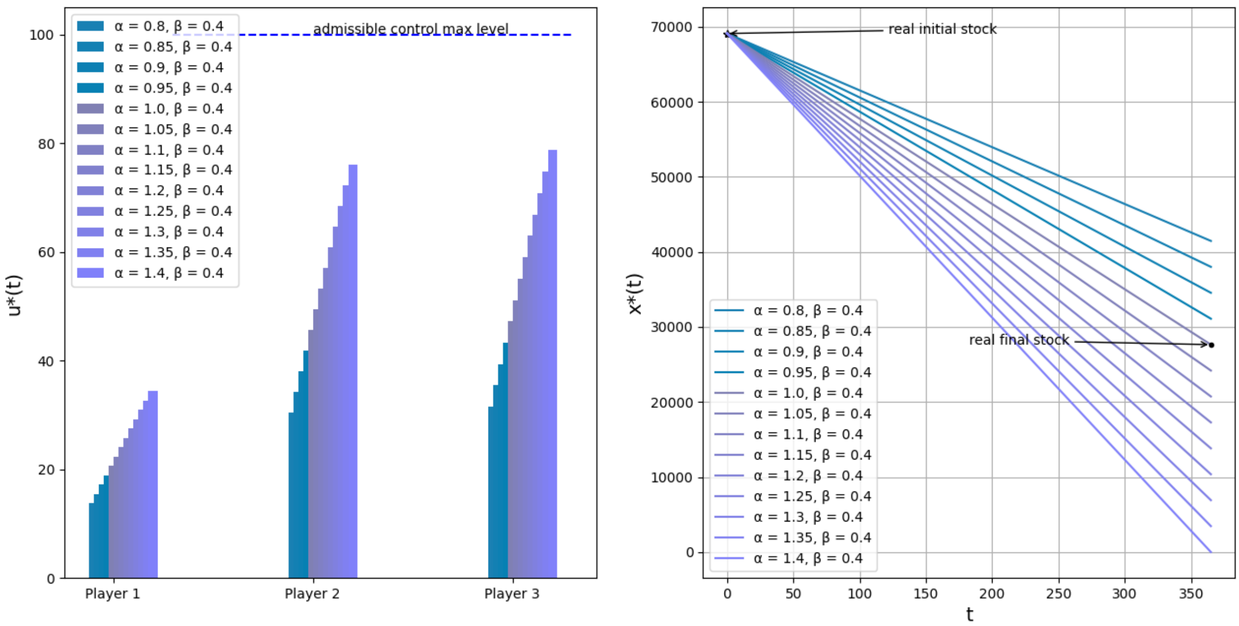


**Рис. 4:** Оптимальные управления и траектории для случая 1

Для случая 2, когда имеется неточная информация о начальном и конечном уровнях, также можно получить оптимальные управления и соответствующие траектории (см. рис. 5).

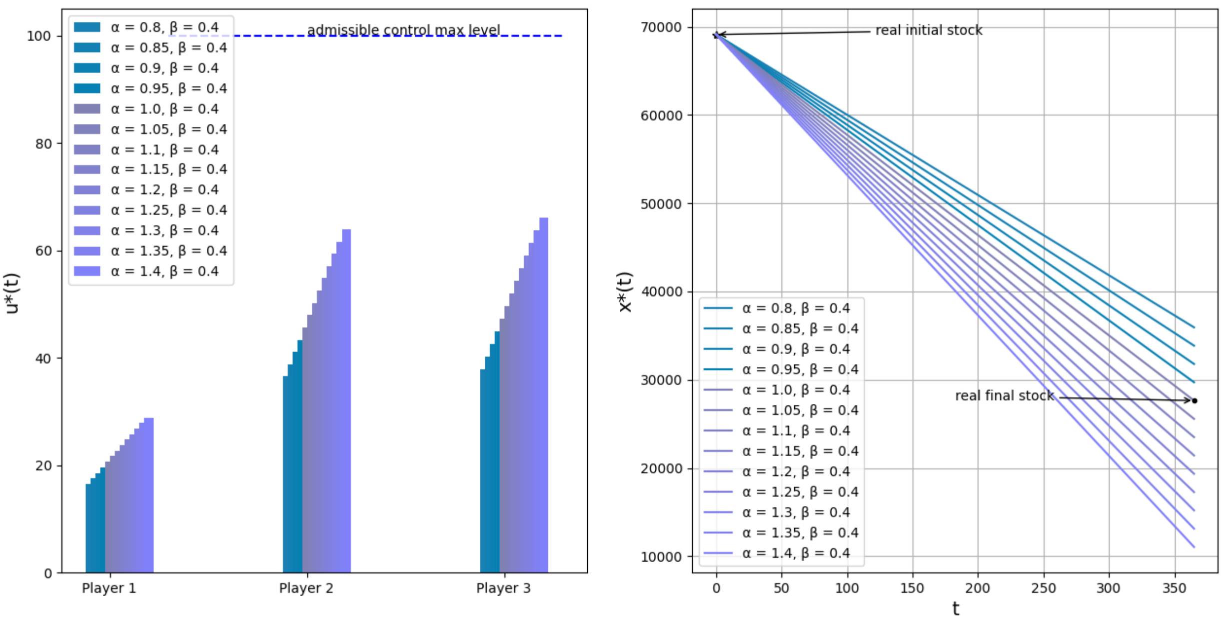


**Рис. 5:** Оптимальные управления и траектории для случая 2

Оптимальные управления влияют на выигрыши игроков. Данное влияние можно показать через график зависимости ценности информации от параметра неопределенности $\alpha$ для случаев 1 и 2. Более того, можно построить логарифм ценности информации, так как данная величина показывает относительный рост значения (см. рис. 6).

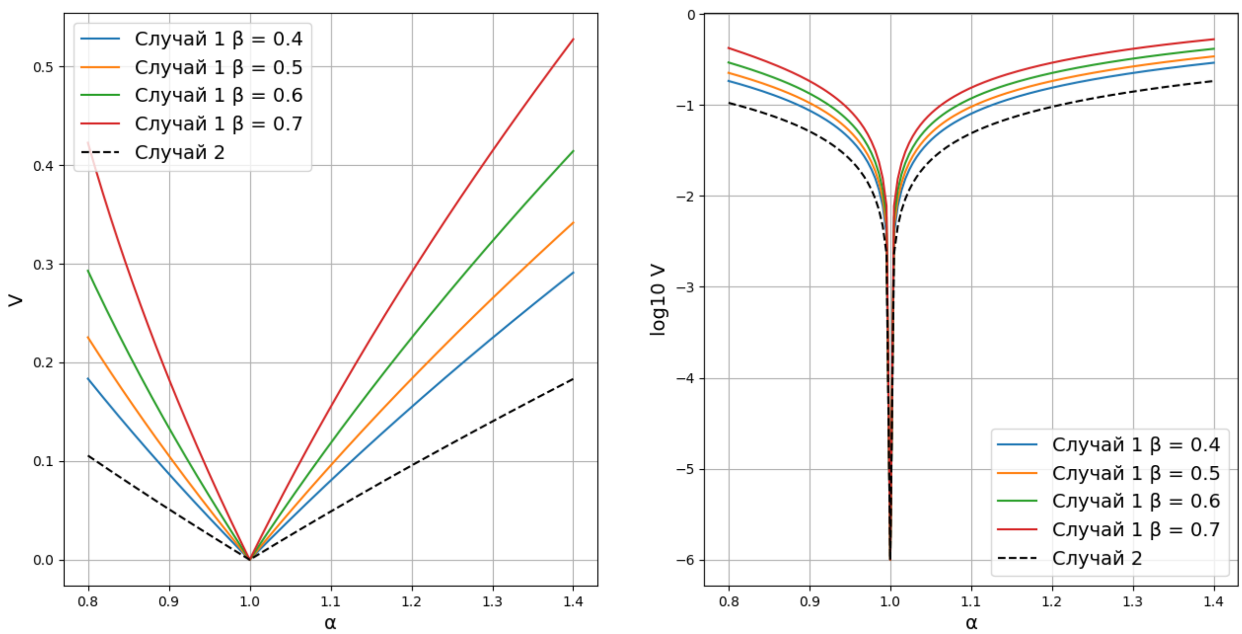


**Рис. 6:** Ценность информации и логарифм ценности информации для двух случаев на примере добычи угля

# Выводы

В данной работе была рассмотрена теоретико-игровая задача добычи невозобновляемых ресурсов при терминальных ограничениях. Задача была рассмотрена для добычи угля в Кузнецком угольном бассейне для трех предприятий. Основываясь на работе можно сделать следующие выводы.

Во-первых, рассматривались случаи кооперативного и некооперативного расходования ресурса для систем с линейной и нелинейной динамиками. Применяя принцип максимума Понтрягина и равновесие по Нэшу были найдены оптимальные управления, соответствующие им оптимальные траектории и выигрыши для всех случаев, и сравнивались между собой для определенной динамики.

Во-вторых, была введена новая характеристика для дифференциальных игр – ценность информации. Данная величина оценивает влияние точности информации о граничных условиях на выигрыши игроков. Согласно теоретическим рассуждениям, были получены виды ценности информации для случаев неопределенности условий в начальный и в конечный моменты времени для кооперативного сценария. Для некооперативного сценария можно аналогично ввести ценности информации для отдельного игрока, которые также совпадут с выводами для кооперативного сценария.

В-третьих, задача была реализована для кооперативной добычи угля в Кузбассе. Оптимальные управления, траектории и выигрыши игроков построены на основе реальных данных угледобывающих предприятий. Более того, ценность информации была изучена для кооперативного сценария задачи с линейной динамикой, и построены графики зависимости от параметра неопределенности и графики логарифма ценности информации для изучения относительного роста характеристики.

## Заключение

В данной работе рассматриваются две теоретические модели задачи эксплуатации невозобновляемых ресурсов с кооперативным и некооперативным сценариями. Выигрыши задаются функционалом в форме Лагранжа, при этом динамика рассматривается в линейном и нелинейном видах. Задаются граничные условия, которые соответствуют общему уровню добываемых ресурсов в начальный и конечный моменты времени. В рамках задач получены оптимальные управления, соответствующие им траектории и выигрыши. Понятие «ценность информации» применяется для оценки влияния неточной информации о граничных условиях для фазовой переменной на результирующие оптимальные управления и выигрыши. Для каждой задачи с кооперативным сценарием рассматриваются два случая неопределенности в зависимости от параметров, которые соответствуют точности располагаемой информации о граничных условиях для фазовой переменной. Теоретические результаты демонстрируются на примере добычи минерального ресурса.

# Список литературы


[1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

[2] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

[3] Громова Е. В. Теоретико игровые задачи со случайной продолжительностью: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, 2016.

[4] Tur A., Gromova E., Gromov D. On the estimation of the initial stock in the problem of resource extraction // Mathematics. 2021. Vol. 9. P. 3099.

[5] Chebotareva A., Shimai S., Tretyakova S., Gromova E. On the value of the preexisting knowledge in an optimal control of pollution emissions // Contributions to Game Theory and Management. 2021. Vol. 14. P. 49–58.

[6] Павлова Е. Д., Цепелева Р. В., Чеботарева А. А. Линейно-квадратичная дифференциальная игра с объемами вредных выбросов с функционалом в форме Больца // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 484–488.

[7] Gromova E. The Shapley value as a sustainable cooperative solution in differential games of three players // Static and Dynamic Game Theory: Foundations and Applications. 2016. P. 67-91.

[8] Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов [Электронный ресурс] // URL:https://docs.cntd.ru/document/902021575.

[9] Министерство природных ресурсов и экологии Российской Федерации [Электронный ресурс] // URL:https://www.mnr.gov.ru/docs/gosudarstvennye_doklady/gosudarstvennyy_doklad_o_sostoyanii_i_ispolzovanii_mineralno_syrevykh_resursov_2020/.

[10] СУЭК АО [Электронный ресурс] // URL:https://www.suek.ru/investors/highlights/#highlights.

[11] ПАО «Мечел» [Электронный ресурс] // URL:https://www.mechel.ru/upload/iblock/12f/12f65d9038d906d59b9dd99c77c73f2e.pdf.

[12] ООО «ЕВРАЗ» [Электронный ресурс] // URL:https://www.evraz.com/upload/iblock/7a6/Evraz_AR2020_Book.pdf.