Санкт-Петербургский государственный университет

КОРЕНЕВСКАЯ Анастасия Максимовна

Выпускная квалификационная работа

«Многомерный пуассоновский телеком-процесс и связанная с ним предельная теорема»

Уровень образования:
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2018 «Математика»

Научный руководитель:
Профессор,
Факультет математики и компьютерных наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»,
доктор физико-математических наук,
Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент:
Профессор,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»,
доктор физико-математических наук, доктор технических наук,
Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербург
2022

Содержание

1 Введение

В этой работе рассматривается обобщение пуассоновского телеком-процесса, а также связанной с ним предельной теоремы на случай «многомерного» времени.

Теорема о сходимости интегральной нагрузки к пуассоновскому телеком-процессу для одномерных систем обслуживания была впервые представлена в статье Kaj и Taqqu [4]. Одномерная модель и телеком-процессы также изучались в [5], [6], [7]. Что касается многомерных систем, рассматривались также модели с дискретной нагрузкой и соответствующие предельные теоремы для них [3].

Прежде чем переходить к основному результату, вспомним некоторые понятия и утверждения, характеризующие многомерное обобщение системы обслуживания. А именно, определим «систему загрязнения».

Итак, мы рассматриваем модель системы загрязнения, в которой пятно загрязнения — это шар $B_u(s)$ с центром в точке s и радиуса u, а r — уровень загрязнения внутри шара.

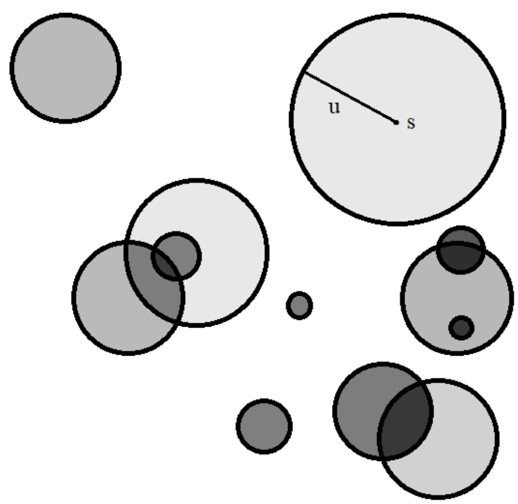

Рис. 1: Модель загрязнения. Чем темнее шар, тем выше уровень загрязнения.

Шары загрязнения могут пересекаться, причем мы будем предполагать, что уровень загрязнения внутри одного шара постоянен. Исходя из этого допущения, можно определить точечное загрязнение системы в точке x:

$$W^{\circ}(x) = \sum_j r_j \mathbf{1}_{\{x \in B_{s_j}(u_j)\}}.$$

Физический смысл этого понятия — суммарный уровень загрязнения в точке x. Нас в основном будет интересовать интегральное загрязнение на произвольном множестве $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$W^*(A) = \int_A W^\circ(x) d\lambda_n(x).$$

Интегральное загрязнение описывает суммарный уровень загрязнения внутри множества A.

Для построения математической модели системы загрязнения нам потребуются некоторые предположения о ее параметрах. А именно:

1. радиусы шаров и уровни загрязнения являются случайными величинами,

2. характеристики различных пятен загрязнения одинаково распределены и независимы,

3. распределение количества пятен загрязнения одинаково в шарах одинаковых радиусов,

4. радиусы пятен и уровни загрязнения в них независимы.

Теперь опишем систему строго. Рассмотрим множество
$\mathcal{R} = \{(s, u, r)\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Это множество триплетов описывает всевозможные шары загрязнения. Первый элемент триплета — s — центр шара, второй — u — его радиус, и третий — r — уровень загрязнения. У системы следующие параметры:

- $\lambda > 0$ — интенсивность загрязнения — среднее число шаров загрязнения с центрами в множестве единичного объема,

- $F_U(du)$ — распределение радиусов шаров загрязнения,

- $F_R(dr)$ — распределение уровней загрязнения.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности: $\mu(ds, du, dr) = \lambda ds F_U(du) F_R(dr)$.

Пусть N — соответствующая пуассоновская случайная мера. Можно рассматривать реализации случайной меры N (множества триплетов (s, u, r), в которых каждый триплет отвечает некоторому пятну загрязнения) как варианты (траектории) функционирования нашей системы.

Отметим, что многомерная система является стационарной, ведь мера Лебега λ_n инвариантна относительно сдвигов. Структура произведения мер $F_U(du)F_R(dr)$ вместо совместного распределения $F_{UR}(du, dr)$ общего вида указывает на независимость радиуса и уровня загрязнения.

Теперь мы можем выразить некоторые характеристики системы через соответствующие пуассоновские интегралы.

Так, точечное загрязнение системы в точке x записывается как:

$$W^{\circ}(x) = \int_{\mathcal{R}} r \mathbf{1}_{\{x \in B_u(s)\}} dN,$$

а интегральное загрязнение на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$W^*(A) = \int_A W^{\circ}(x) d\lambda_n(x) = \int_{\mathcal{R}} r \int_A \mathbf{1}_{\{x \in B_u(s)\}} d\lambda_n(x) dN = \int_{\mathcal{R}} r V_A(s, u) dN,$$

где $V_A(s, u) := \lambda_n (B_u(s) \cap A)$.

Нетрудно заметить, что $W^{\circ}(\cdot)$ является стационарным процессом, а соответствующий интеграл $W^*(\cdot)$ является процессом со стационарными приращениями.

Чтобы получить разумные свойства системы, нам необходимо будет сделать определенные предположения о распределениях F_U и F_R. Обозначим через U и R случайные величины, имеющие соответственно распределения F_U и F_R.

Пусть $M(x)$ — это количество шаров загрязнения, содержащих точку x:

$$M(x) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{x \in B_u(s)\}} dN.$$

По определению, $M(x)$ является пуассоновской случайной величиной с интенсивностью

$$\begin{aligned} \mu\left(\{(s, u, r) : x \in B_u(s)\}\right) &= \mu\left(\{(s, u, r) : s \in B_u(x)\}\right) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u) F_U(du) F_R(dr) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du), \end{aligned}$$

где $V(B_u) = \lambda_n(B_u)$. Ясно, что интенсивность конечна тогда и только тогда, когда математическое ожидание объема шара загрязнения

$$\mathbb{E}V(B_U(0)) = \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du)$$

конечно. Или, что то же самое, $\mathbb{E}U^n$ конечно. Если же $\mathbb{E}U^n = +\infty$, то $M(x)$ бесконечно почти наверное.

Воспользуемся тем, что пуассоновский интеграл общего вида

$$\int_{\mathcal{R}} f dN$$

корректно определен, если выполнено условие

$$\int_{\mathcal{R}} \min\{|f|,1\} d\mu < \infty.$$

В частности, для любого $\varepsilon > 0$ должно быть выполнено условие $\mu\left(|f| > \varepsilon\right) < \infty$. Посмотрим с этой точки зрения на интегральное выражение мгновенной нагрузки. Для его корректности необходимым условием будет

$$\begin{aligned}\mu\left(\{(s,u,r) : r\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}} > \varepsilon\}\right) &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{r>\varepsilon\}} F_R(dr) \cdot \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{s\in B_u(x)\}} d\lambda_n F_U(du) \\ &= \lambda \mathbb{P}(R > \varepsilon) \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du) \\ &= \lambda \mathbb{P}(R > \varepsilon) \mathbb{E} V(B_U(0)) < +\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, помимо патологического случая $\mathbb{P}(R = 0) = 1$, мгновенная нагрузка корректно определена, только если верно

$$\mathbb{E} U^n < +\infty. \tag{1}$$

Мы будем предполагать также, что

$$\mathbb{E} R = \int_{\mathbb{R}_+} r F_R(dr) < \infty. \tag{2}$$

Тогда математические ожидания мгновенной и интегральной нагрузки конечны, поскольку

$$\begin{aligned}\mathbb{E} W^\circ(x) &= \mathbb{E} \int_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}} dN \\ &= \int_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}} d\mu \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} r F_R(dr) \cdot \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{s\in B_u(x)\}} d\lambda_n(s) F_U(du) \\ &= \lambda \mathbb{E} R \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du) \\ &= \lambda \cdot \mathbb{E} R \cdot const \cdot \mathbb{E} U^n\end{aligned}$$

и

$$\mathbb{E} W^*(A) = \int_A \mathbb{E} W^\circ(x) d\lambda_n(x) = \lambda \cdot \mathbb{E} R \cdot const \cdot \mathbb{E} U^n \cdot V(A).$$

Теперь приступим к вычислению дисперсий. Начнем с мгновенной нагрузки:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}W^{\circ}(x) &= \mathbb{D}\int_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}}dN \\
&= \int_{\mathcal{R}} r^2\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}}d\mu \\
&= \lambda\int_{\mathbb{R}_+} r^2F_R(dr)\cdot\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{\{s\in B_u(x)\}}d\lambda_n(s)F_U(du) \\
&= \lambda\cdot\mathbb{E}R^2\int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0))F_U(du) \\
&= \lambda\cdot\mathbb{E}R^2\cdot const\cdot\mathbb{E}U^n.
\end{aligned}$$

Заметим, что дисперсия конечна тогда и только тогда, когда R имеет конечный второй момент, а U^n — конечное математическое ожидание.

Аналогично, для ковариации значений мгновенной нагрузки в различных точках пространства $x_1 \neq x_2$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}\,(W^{\circ}(x_1),W^{\circ}(x_2)) &= \int_{\mathcal{R}} r^2\mathbf{1}_{\{x_1\in B_u(s)\}}\mathbf{1}_{\{x_2\in B_u(s)\}}d\mu \\
&= \lambda\int_{\mathbb{R}_+} r^2F_R(dr)\int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(x_1)\cap B_u(x_2))F_U(du) \\
&= \lambda\mathbb{E}R^2\int_{\frac{||x_1-x_2||}{2}}^{\infty} V(B_u(x_1)\cap B_u(x_2))F_U(du).
\end{aligned}$$

Отметим, что ковариация всегда оказывается неотрицательной.

Аналогичным образом можно вычислить и проанализировать дисперсию интегральной нагрузки

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}W^{*}(A) &= \mathbb{D}\int_{\mathcal{R}} rV_A(s,u)dN \\
&= \int_{\mathcal{R}} r^2V_A(s,u)^2d\mu \\
&= \lambda\int_{\mathbb{R}_+} r^2F_R(dr)\cdot\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} V_A(s,u)^2d\lambda_nF_U(du)ds \\
&= \lambda\mathbb{E}R^2\int_{dist(s,A)}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} V(B_u(s)\cap A)^2F_U(du)ds.
\end{aligned}$$

2 Одномерный случай

Чтобы подготовить читателя к результатам для многомерного обобщения, рассмотрим сперва одномерный случай: напомним определение одномерного пуассоновского телеком-процесса и связанную с ним предельную теорему [1].

Итак, мы рассматриваем интегральную нагрузку системы обслуживания (или, что то же самое, одномерной системы загрязнения) как процесс, наблюдаемый на больших интервалах времени. Наша задача — получить предельную картину при определенных условиях на параметры системы.

Для начала наложим дополнительные предположения на распределения случайных величин U и R, а именно: либо

$$\mathbb{P}(U > u) \sim \frac{c_U}{u^\gamma}, \;\; u \to \infty, \; 1 < \gamma < 2, \; c_U > 0,$$

либо

$$\mathbb{E}U^2 < \infty.$$

В последнем случае мы формально полагаем $\gamma := 2$.
Аналогично, либо

$$\mathbb{P}(R > r) \sim \frac{c_R}{r^\delta}, \;\; r \to \infty, \; 1 < \delta < 2, \; c_R > 0, \tag{3}$$

либо

$$\mathbb{E}R^2 < \infty.$$

В последнем случае мы формально полагаем $\delta := 2$.

Чтобы получить осмысленный предел, необходимо выполнить следующие предварительные операции:

- отнормировать время так, чтобы оно пробегало стандартный интервал времени $[0, 1]$;
- центрировать процесс нагрузки;
- отнормировать нагрузку, разделив ее на подходящий скалярный множитель.

Поскольку мы намерены изучать поведение нагрузки на большом интервале времени $[0, a], a \to \infty$, нагрузку следует записать в следующем виде: $W^*(at), t \in [0, 1]$. Центрирование и нормирование на соотвествующий множитель b приведут нас к нормированному процессу интегральной нагрузки:

$$Z_a(t) = \frac{W^*(at) - \mathbb{E}R \cdot \mathbb{E}U \cdot a\lambda t}{b}, \; t \in [0, 1].$$

Интенсивность нагрузки λ, наравне с длиной горизонта событий a, играет здесь роль параметра. Именно с этим процессом связана интересующая нас предельная теорема:

Теорема 1. *Пусть $1 < \gamma < \delta \le 2$, $a \to \infty$ и выполнено условие критической интенсивности:*

$$\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to L, \quad L < \infty.$$

Тогда при нормировке $b := a$ имеется сходимость конечномерных распределений:

$$Z_a \xrightarrow{\text{к.м.р.}} Y_{\gamma,R},$$

где предельный процесс $Y_{\gamma,R}(t)$, называемый пуассоновским телеком-процессом, допускает интегральное представление

$$Y_{\gamma,R}(t) = \int_{\mathcal{R}} r\ell_t(s,u)\widetilde{N}'(ds,du,dr).$$

Здесь $\ell_t(s,u) := \big|[s,s+u] \cap [0,t]\big|$ — ядро, а $\widetilde{N}'$ — центрированная пуассоновскаая мера с интенсивностью

$$\mu' = \frac{Lc_U\gamma\, dsdu}{u^{1+\gamma}} F_R(dr).$$

Условие критической интенсивности можно проинтерпретировать так: долгих, то есть сравнимых с a по продолжительности процессов не слишком много.

Наконец, перейдем к многомерному случаю.

3 Основные результаты

Итак, мы рассматриваем систему загрязнения внутри шара $B_a(0)$. Наша задача — выяснить, как будет вести себя интегральная нагрузка системы при $a \to \infty$ в случае, если ограничения на параметры системы аналогичны одномерным условиям.

Первым делом в многомерном случае следует пересмотреть определение параметра γ. Вклад, вносимый в интегральную нагрузку отдельным загрязнением имеет вид $const \cdot U^n R$. И поскольку в определении интегральных нагрузок важен объем шара $const \cdot U^n$, условие, определяющее γ, примет вид

$$P(U^n > u) \sim c_U u^{-\gamma}, \;\; 1 < \gamma < 2,$$

что эквивалентно

$$P(U > u) \sim c_U u^{-\gamma n}, \;\; 1 < \gamma < 2. \tag{4}$$

Что касается параметра δ, то его определение не меняется по сравнению с одномерным случаем, так как в упомянутое произведение R входит в первой степени.

Вслед за изменением γ должно измениться и условие критической интенсивности. В одномерном случае оно представляло собой ограничение на количество долгих процессов обслуживания. В нашем же случае аналог этого условия будет ограничивать число шаров загрязнения большого радиуса.

Зафиксируем некоторое $h \in [0, 1]$. Количество больших шаров загрязнения можно описать следующей случайной величиной: $Q_{a,h}$ — число шаров загрязнения, содержащих одновременно точку 0 и точку нормы ha. Очевидно, $Q_{a,h}$ выражается через пуассоновскую меру (см. рисунок 2):

$$Q_{a,h} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{s \in B_u(x),\ ||s|| \leq u\}} dN.$$

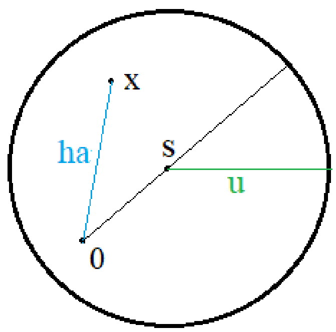

Рис. 2: Шар, содержащий ноль и точку x нормы ha.

Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Q_{a,h} &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{s \in B_u(x),\ ||s|| \leq u\}} d\mu \\
&= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{||x-s|| \leq u,\ ||s|| \leq u\}} d\mu \\
&= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{u \geq max(||s||, ||x-s||)\}} d\mu \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{u \geq max(||s||, ||x-s||)\}} F_U(du) ds \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}\{U \geq max(||s||, ||x-s||)\} ds \triangleq T \qquad (5)
\end{aligned}$$

Попробуем оценить полученное выражение сверху и снизу. Для начала получим оценку сверху. Продолжим равенство (5):

$$
\begin{aligned}
T &\overset{(4)}{\sim} \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_U}{max(||s||, ||x-s||)^{\gamma n}} ds \\
&= \lambda c_U \left(\int_{||s|| \geq ||x-s||} \frac{1}{||s||^{\gamma n}} ds + \int_{||x-s|| \geq ||s||} \frac{1}{||x-s||^{\gamma n}} ds \right) \triangleq T_1 \quad (6)
\end{aligned}
$$

Посмотрим внимательней на области интегрирования:

$$||x-s|| \geq ||s|| \Leftrightarrow \langle s, x \rangle \leq \frac{||x||^2}{2},$$

$$||x-s|| \leq ||s|| \Leftrightarrow \langle s, x \rangle \geq \frac{||x||^2}{2}.$$

Воспользуемся заменой $y = s - x$:

$$||x-s|| \geq ||s|| \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \leq -\frac{||x||^2}{2},$$

и продолжим равенство (6) с учетом этой замены:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \lambda c_U \left(\int_{\langle s,x \rangle \geq \frac{||x||^2}{2}} \frac{1}{||s||^{\gamma n}} ds + \int_{\langle y,x \rangle \leq -\frac{||x||^2}{2}} \frac{1}{||y||^{\gamma n}} dy \right) \\
&= \lambda c_U \int_{|\langle s,x \rangle| \geq \frac{||x||^2}{2}} \frac{1}{||s||^{\gamma n}} ds \\
&\leq \lambda c_U \int_{||s|| > \frac{||x||}{2}} \frac{1}{||s||^{\gamma n}} ds \\
&= \lambda c_U \int_{\frac{||x||}{2}}^{\infty} c \cdot r^{n-1} \frac{1}{r^{\gamma n}} dr \\
&= \lambda \cdot \tilde{c} \cdot \left(\frac{||x||}{2} \right)^{n-\gamma n} = \lambda \cdot \tilde{c} \cdot \left(\frac{ha}{2} \right)^{n-\gamma n}.
\end{aligned}
$$

Предпоследнее равенство выполнено благодаря предположению $1 < \gamma < 2$.

Оценка сверху получена. Теперь перейдем к оценке снизу.

Продолжим равенство (5):

$$\begin{aligned}
T &= \lambda\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{P}\{U\geq max(||s||,||s-x||)\}ds\\
&\overset{y=s-\frac{x}{2}}{=} \lambda\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{P}\left(U\geq\max\left(\left\|y+\frac{x}{2}\right\|,\left\|y-\frac{x}{2}\right\|\right)\right)dy\\
&\geq \lambda\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{P}\left(U\geq\sqrt{\left\|y+\frac{x}{2}\right\|^2+\left\|y-\frac{x}{2}\right\|^2}\right)dy\\
&= \lambda\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{P}\left(U\geq\sqrt{2\left\|y\right\|^2+2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2}\right)dy \qquad (7)\\
&\geq \lambda\int_{\left\{||y||\geq\frac{\|x\|}{2}\right\}}\mathbb{P}\left(U\geq\sqrt{2\left\|y\right\|^2+2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2}\right)dy\\
&\geq \lambda\int_{\left\{||y||\geq\frac{\|x\|}{2}\right\}}\mathbb{P}\left(U\geq\sqrt{4\left\|y\right\|^2}\right)dy\\
&= \lambda\int_{\left\{||y||\geq\frac{\|x\|}{2}\right\}}\frac{c_U}{(2||y||)^{\gamma n}}dy\\
&= \lambda\cdot c_U\cdot 2^{-\gamma n}\int_{\frac{\|x\|}{2}}^{\infty}c\cdot y^{n-1}\frac{1}{y^{\gamma n}}dy\\
&= \lambda\cdot c'\cdot\left(\frac{ha}{2}\right)^{n-\gamma n}.
\end{aligned}$$

В переходе (7) было использовано тождество параллелограмма, а в последнем равенстве мы снова воспользовались тем, что $1<\gamma<2$.

Итого, комбинируя верхнюю и нижнюю оценки матожидания, получаем $\mathbb{E}Q_{a,h}\sim\lambda a^{n-\gamma n}$. Поэтому условие критической интенсивности принимает вид

$$\frac{\lambda}{a^{\gamma n-n}}\to L,\ \ 0<L<\infty. \qquad (8)$$

Видоизменим выражение для интегрального загрязнения по аналогии с одномерным случаем: поскольку мы изучаем поведение интегрального загрязнения внутри большого шара $B_a(0), a\to\infty$, его следует записать в виде $W^*(aA), A\subset B_1(0)$. Центрирование и нормирование на соотвествующий множитель b приведут нас к нормированному процессу следующего вида:

$$Z_a(A)=\frac{W^*(aA)-\lambda\mathbb{E}R\cdot\mathbb{E}V(B_U(0))\cdot V(aA)}{b},\ \ A\subset B_1(0).$$

Наконец, перейдем к обобщенной версии теоремы.

Теорема 2. *Пусть $1<\gamma<\delta\leq 2$ и выполнено условие критической интенсивности (8). Тогда при нормировке $b:=a^n$ имеется сходимость ко-*

нечномерных распределений:

$$Z_a \xrightarrow{\text{к.м.р.}} Y_{\gamma,R},$$

где предельный процесс $Y_{\gamma,R}(A)$, допускает интегральное представление

$$Y_{\gamma,R}(A) = \int_{\mathcal{R}} rV_A(s,u)\widetilde{N}'(ds,du,dr).$$

Здесь $V_A(s,u) := \lambda_n(B_u(s) \cap A)$ — ядро, а $\widetilde{N}'$ — центрированная пуассоновская мера с интенсивностью

$$\mu' = \frac{Lc_U \gamma n \, dsdu}{u^{1+\gamma n}} F_R(dr).$$

Определение 1. *Процесс $Y_{\gamma,R}(A)$ будем называть многомерным пуассоновским телеком-процессом.*

Существуют результаты и для иных областей параметров [2].

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Докажем для начала сходимость одномерных распределений.
Напомним, что

$$Z_a(A) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r}{a^n} V_{aA}(s,u) d\widetilde{N}.$$

Для краткости записи введем следующие обозначения:

$$f_a(s,u,r) = \frac{r}{a^n} V_{aA}(s,u),$$

$$f(s,u,r) = rV_A(s,u).$$

С учетом этих обозначений мы можем переписать интегральные представления $Z_a(A)$ и $Y_{\gamma,R}(A)$ в более компактном виде:

$$Z_a(A) = \int_{\mathcal{R}} f_a d\widetilde{N},$$

$$Y_{\gamma,R}(A) = \int_{\mathcal{R}} f d\widetilde{N}'.$$

Сходимость одномерных распределений, как известно, равносильна поточечной сходимости характеристических функций, на доказательстве которой мы и сосредоточимся.

Учитывая, что характеристические функции стохастических интегралов по центрированной пуассоновской мере имеют следующий вид

$$\mathbb{E}\left(it \int_{\mathcal{R}} f_a d\widetilde{N}\right) = exp\left\{\int_{\mathcal{R}} (e^{itf_a} - 1 - itf_a) d\mu\right\}, \tag{9}$$

нам остается установить следующую сходимость по t:

$$\int_{\mathcal{R}} (e^{itf_a} - 1 - itf_a) d\mu \longrightarrow \int_{\mathcal{R}} (e^{itf} - 1 - itf) d\mu'.$$

Предположим для начала, что имеется сходимость мер:

$$\mu \left\{ f_a(s, u, r) \geq x \right\} \longrightarrow \mu' \left\{ f(s, u, r) \geq x \right\}.$$

В наших первоначальных обозначениях это предположение выглядит следующим образом:

$$\mu \left\{ \frac{rV_{aA}(s, u)}{a^n} \geq x \right\} \longrightarrow \mu' \left\{ rV_A(s, u) \geq x \right\}. \tag{10}$$

Проделаем вспомогательное вычисление:

$$\begin{aligned} \mu\{f_a \geq \varepsilon\} &= \mu \left\{ (s, u, r) : \frac{rV_{aA}(s, u)}{a^n} \geq \varepsilon \right\} \\ &\leq \mu \left\{ \frac{r}{a^n} \cdot a^n \cdot \kappa \geq \varepsilon,\ ||s|| \leq u + a \right\} && (11) \\ &= \mu \left\{ r \cdot \kappa \geq \varepsilon,\ ||s|| \leq u + a \right\} \\ &= \mathbb{P} \left(r \geq \frac{\varepsilon}{\kappa} \right) \cdot \mu\{||s|| \leq u + a\}. && (12) \end{aligned}$$

В переходе (11) мы воспользовались тем, что ядро $V_{aA}(s, u) \leq \kappa \cdot a^n$, где κ — объем единичного шара размерности n, а также тем, что ядро обращается в ноль, когда s находится на расстоянии больше u от шара $B_a(0)$.
Меру в последнем выражении вычислим отдельно:

$$\begin{aligned} \mu\{||s|| \leq u + a\} &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{||s|| \leq u+a\}} ds F_U(du) F_R(dr) \\ &= \lambda \int_0^\infty \kappa \cdot (u + a)^n F_U(du) \\ &= \lambda \cdot \kappa \cdot \mathbb{E}(u + a)^n. \end{aligned}$$

Итого, комбинируя (3) и (12), получаем

$$\mu\{f_a \geq \varepsilon\} \leq \lambda \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\kappa} \right)^{-\delta} \cdot \mathbb{E}(u + a)^n < \infty \tag{13}$$

в силу предположения (1) о конечности моментов U. Поскольку $\mu\{\mathcal{R}\} = \infty$, аналогичное вычисление для $f_a < \varepsilon$ приводит нас к бесконечному значению. Выходит, что f_a не равна нулю лишь на множестве конечной меры, а мера ее попадания в окрестность нуля бесконечна.

Теперь у нас все готово для проверки сходимости характеристических функций. Руководствуясь только что полученным соображением, выберем малое $\varepsilon > 0$ и разделим выражение в показателе (9) на 2 части:

$$\int_{f_a \le \varepsilon} (e^{itf_a} - 1 - itf_a) d\mu + \int_{f_a \ge \varepsilon} (e^{itf_a} - 1 - itf_a) d\mu. \tag{14}$$

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно. Для первой части воспользуемся неравенством

$$|e^{itu} - 1 - itu| \le |tu|^2,$$

которое применимо для малых значений u. Выбирая достаточно маленькое ε, можем оценить первое слагаемое следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int_{f_a \le \varepsilon} (e^{itf_a} - 1 - itf_a) d\mu &\le \int_{f_a \le \varepsilon} f_a^2 d\mu \\
&\le \int_{f_a \le \varepsilon} \varepsilon \cdot f_a d\mu \\
&\le \varepsilon \cdot \int_{\mathcal{R}} f_a d\mu.
\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} f_a d\mu &= \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{r}{a^n} V_{aA}(s,u) ds F_U(du) F_R(dr) \\
&= \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{B_{u+a}(0)} \frac{r}{a^n} V_{aA}(s,u) ds F_U(du) F_R(dr) \\
&= \frac{\lambda}{a^n} \mathbb{E}R \left\{ \int_0^a \int_{B_{u+a}(0)} V_{aA}(s,u) ds F_U(du) + \int_a^\infty \int_{B_{u+a}(0)} V_{aA}(s,u) ds F_U(du) \right\} \\
&\le \frac{\lambda}{a^n} \mathbb{E}R \left\{ \int_0^a \int_{B_{2a}(0)} \kappa \cdot u^n ds F_U(du) + \int_a^\infty \int_{B_{2u}(0)} \kappa \cdot a^n ds F_U(du) \right\} \qquad (15) \\
&= \frac{\lambda\kappa}{a^n} \mathbb{E}R \left\{ \int_0^a u^n \int_{B_{2a}(0)} ds F_U(du) + \int_a^\infty a^n \int_{B_{2u}(0)} ds F_U(du) \right\} \\
&= \frac{\lambda\kappa}{a^n} \mathbb{E}R \left\{ \int_0^a u^n \cdot \kappa \cdot (2a)^n F_U(du) + \int_a^\infty a^n \cdot \kappa \cdot (2u)^n F_U(du) \right\} \\
&= \frac{2^n \lambda \kappa^2}{a^n} \mathbb{E}R \left\{ \int_0^a u^n \cdot a^n F_U(du) + \int_a^\infty a^n \cdot u^n F_U(du) \right\} \\
&\le 2^n \lambda \kappa^2 \cdot \mathbb{E}R \left\{ \int_0^\infty u^n F_U(du) + \int_0^\infty u^n F_U(du) \right\} \\
&= 2^{n+1} \lambda \kappa^2 \cdot \mathbb{E}R \cdot \mathbb{E}U^n.
\end{aligned}$$

В переходе (15) мы воспользовались тем, что ядро $V_{aA}(s,u) \le \kappa \cdot u^n$ в первом слагаемом, и тем, что $V_{aA}(s,u) \le \kappa \cdot a^n$ во втором. Здесь κ — объем единичного шара размерности n. А также тем, что ядро обращается в ноль, когда

s находится на расстоянии больше u от шара $B_a(0)$.
Полученное выражение равномерно ограниченно по a в силу (1) и (2). Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{a\to\infty}\int_{f_a\le\varepsilon}(e^{itf_a}-1-itf_a)d\mu \quad\le\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{a\to\infty}\varepsilon\cdot\int_{\mathcal{R}} f_a d\mu = 0. \tag{16}$$

Теперь разберемся со вторым слагаемым в (14). Сделаем замену переменной $u = f_a(r)$ и получим:

$$\begin{aligned}\int_{f_a\ge\varepsilon}(e^{itf_a}-1-itf_a)d\mu &= \int_{\varepsilon}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)d\mu\{f_a>u\}\\ &\overset{(10)}{\longrightarrow} \int_{\varepsilon}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)d\mu\{f>u\}\\ &= \int_{f\ge\varepsilon}(e^{itf}-1-itf)d\mu.\end{aligned}$$

Соотвественно, устремляя ε к нулю и a к бесконечности, получаем требуемую сходимость. Поэтому для доказательства теоремы нам остается лишь проверить предположение (10), которое мы потребовали выше.

Итак, перейдем к доказательству сходимости (10). Воспользуемся следующим соображением: поскольку $V_A(s,u) = \lambda_n(B_u(s)\cap A)$, верно

$$V_{aA}(s,u) = a^n\cdot V_A(\tilde{s},\tilde{u}), \tag{17}$$

где $\tilde{s} = \frac{s}{a}$ и $\tilde{u} = \frac{u}{a}$.

С учетом этой замены, запишем:

$$\begin{aligned}\mu\left\{\frac{rV_{aA}(s,u)}{a^n}\ge x\right\} &= \lambda\int\int\int \mathbf{1}_{\left\{\frac{rV_{aA}(s,u)}{a^n}\ge x\right\}}F_U(du)dsF_R(dr)\\ &\overset{(17)}{=} a^n\lambda\int\int\int \mathbf{1}_{\{rV_A(\tilde{s},\tilde{u})\ge x\}}F_{\frac{U}{a}}(d\tilde{u})d\tilde{s}F_R(dr)\\ &\sim L\int\int\int a^{\gamma n}\mathbf{1}_{\{rV_A(\tilde{s},\tilde{u})\ge x\}}F_{\frac{U}{a}}(d\tilde{u})d\tilde{s}F_R(dr).\end{aligned}$$

Последней переход верен в силу условия критической интенсивности.

В силу (4), имеется слабая сходимость:

$$a^{\gamma n}F_{\frac{U}{a}}(du)\Longrightarrow\frac{c_U\gamma n\, d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}}. \tag{18}$$

Действительно, вне любой окрестности нуля, $\forall y > 0$:

$$\begin{aligned} a^{\gamma n} F_{\frac{U}{a}}([y,\infty)) &= a^{\gamma n}\mathbb{P}\{U \geq ay\} \\ &\sim a^{\gamma n}\cdot c_U \cdot (ay)^{-\gamma n} \\ &= c_U y^{-\gamma n} \\ &= \int_y^{\infty} \frac{c_U \cdot \gamma n \, d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}}. \end{aligned}$$

Сходимость в нуле следует из следующих выкладок:

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \frac{a^{\gamma n} F_{\frac{U}{a}}([0,y))}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}}} &= \lim_{y\to 0} \frac{a^{\gamma n}\mathbb{P}(\frac{U}{a} < y)}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}}} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{a^{\gamma n}(1-\mathbb{P}(U \geq ay))}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}}} \\ &\sim \lim_{y\to 0} \frac{a^{\gamma n} - c_U y^{-\gamma n}}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}}} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-c_U(-\gamma n) y^{-\gamma n -1}}{\frac{c_U \gamma n}{y^{1+\gamma n}}} = 1. \end{aligned} \tag{19}$$

В переходе (19) было использовано правило Лопиталя.

Таким образом, получаем, что для любого фиксированного $\tilde{s}$ верно:

$$\int \mathbf{1}_{\{rV_A(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} a^{\gamma n} F_{\frac{U}{a}}(du) \longrightarrow \int \mathbf{1}_{\{rV_A(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} \frac{c_U \gamma n \, d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}}.$$

Интегрируя полученный предел по $\tilde{s}$ и по r, получаем:

$$\begin{aligned} \mu\left\{\frac{rV_{aA}(s,u)}{a^n} \geq x\right\} &\longrightarrow L\int\int\int \mathbf{1}_{\{rV_A(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} \frac{c_U \gamma n \, d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma n}} d\tilde{s} F_R(dr) \\ &= \mu'\left\{rV_a(s,u) \geq x\right\}, \end{aligned}$$

как и требовалось в (8).

Теперь перейдем к сходимости многомерных распределений. По теореме Крамера-Волда достаточно показать,что сходятся все одномерные проекции, то есть, что для любых вещественных $c_1,...,c_n$ и любых $A_1,...,A_n \subset B_1(0)$ верно:

$$\sum_{j=1}^n c_j Z_a(A_j) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r}{a^n} \sum_{j=1}^n V_{aA_j}(s,u) d\widetilde{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j Y_{\gamma,R}(A_j).$$

Для этого достаточно просто заменить ядро $V_{aA_j}(s,u)$ на сумму $\sum_{j=1}^n V_{aA_j}(s,u)$ в доказательстве сходимости одномерных распределений. $\square$

Список литературы

[1] М. А. Лифшиц. *Случайные процессы: от теории к практике.* Лань. 2015. 306 с.

[2] Михайлов И.Т., Многомерные аналоги пуассоновских моделей телетрафика. Бакалаврская ВКР, СПбГУ, 2020.

[3] Аззо Е. О многомерных вариантах систем обслуживания с дискретной нагрузкой. Магистрская ВКР, СПбГУ, 2019.

[4] Kaj, I. and Taqqu, M. S. (2008). Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach, In and Out of Equilibrium. II., ser.: Progress in Probability, Vol. 60,(Birkhäuser, Basel), pp. 383–427

[5] Cohen, S. and Taqqu, M. (2004). Small and large scale behavior of the Poissonized Telecom Process, Methodol. Comput. Appl. Probab. 6, pp. 363–379.

[6] Gaigalas, R. (2006). A Poisson bridge between fractional Brownian motion and stable L evy motion, Stoch. Proc. Appl. 116, pp. 447–462.

[7] Lifshits M.A, Nikitin S.E. Large deviations of Telecom process (joint with S.E.Nikitin). Preprint http://arxiv.org/abs/2107.11846. To appear in J. Appl. Probab., 2023.