Санкт-Петербургский государственный университет

КАЗОВСКАЯ Анастасия Александровна

Выпускная квалификационная работа

«Многомерный устойчивый телеком-процесс и связанная с ним предельная теорема»

Бакалавриат:
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2018 «Математика»

Научный руководитель:
Профессор,
Факультет математики и компьютерных наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»,
доктор физико-математических наук,
Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент:
Профессор,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»,
доктор физико-математических наук, доктор технических наук,
Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Введение

В работе будет представлено обобщение устойчивого телеком-процесса и связанной с ним предельной теоремы на случай «многомерного времени».

Одномерная постановка задачи о сходимости нормированной интегральной нагрузки системы обслуживания к телеком-процессу впервые была представлена Kaj и Taqqu в [4]. Сами одномерные телеком-процессы и их свойства были исследованы в [5, 6, 7]. Кроме того, отметим, что многомерные обобщения, аналогичные представленному в данной работе, уже рассматривались, однако в их основе лежат иные модели и области параметров: [2, 3].

Суть обобщения системы обслуживания на случай «многомерного времени» заключается в том, что вместо процессов обслуживания на отрезках времени мы будем рассматривать шары в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для наглядности и удобства будем называть построенное обобщение моделью системы загрязнения. Отсюда соответствующая терминология — вместо ресурсов, затрачиваемых в процессе обслуживания, будет фигурировать уровень загрязнения шара. Теперь формально определим модель системы загрязнения и многомерный телеком-процесс, а также приведем необходимые понятия и вычисления.

Область загрязнения представляет из себя набор шаров загрязнения, каждый из которых расположен в определенной точке n-мерного пространства s, имеет радиус u и обладает уровнем загрязнения в r единиц. Предполагается, что уровень загрязнения постоянен по всему объему шара загрязнения. Введем стандартное обозначение для шара с центром в точке s радиуса u — $B_u(s)$.

Несколько шаров загрязнения могут пересекаться. Исходя из этого, определяется точечное загрязнение системы в точке x:

$$W^\circ(x) = \sum_j r_j \mathbf{1}_{\{x \in B_{u_j}(s_j)\}}.$$

Сумма берется по всем шарам загрязнения. Физический смысл этого понятия — общий уровень загрязнения шаров, содержащих точку x.

Также определим интегральное загрязнение на произвольном борелевском ограниченном множестве $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$W^*(A) = \int_A W^\circ(x)dx, \text{ где } dx \text{ — интегрирование по мере Лебега в } \mathbb{R}^n.$$

Интегральное загрязнение описывает общий уровень загрязнения на множестве A.

Чтобы построить математическую модель области загрязнения, сделаем некоторые предположения о ее параметрах. А именно:

(1) радиусы шаров и уровни загрязнения являются случайными величинами,

(2) характеристики различных шаров загрязнения одинаково распределены и независимы,

(3) центры шаров загрязнения распределены однородно по пространству,

(4) радиусы шаров и уровни загрязнения в них независимы.

Напомним понятие пуассоновской случайной меры.

Определение 1. *Пусть* $(\mathcal{R}, \mu)$ *— пространство с мерой и* $\boldsymbol{A} = \{A \subset \mathcal{R}, \mu(A) < \infty\}$ *. Семейство случайных величин* $\{N(A), A \in \boldsymbol{A}\}$ *называется пуассоновской случайной мерой, если каждая величина* $N(A)$ *имеет распределение Пуассона* $\mathcal{P}(\mu(A))$*, а* $N(\cdot)$ *является случайной мерой с независимыми значениями. Мера* μ *называется мерой интенсивности для* N*.*

Теперь опишем модель строго. Рассмотрим множество $\mathcal{R} = \{(s, u, r)\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Это множество триплетов описывает всевозможные шары загрязнения. Первый элемент триплета — s — центр шара, второй — u — его радиус, и третий — r — уровень загрязнения. У модели следующие параметры:

- $\lambda > 0$ — среднее число шаров загрязнения с центрами в множестве единичного объема,
- $F_U(du)$ — распределение радиусов шаров загрязнения,
- $F_R(dr)$ — распределение уровней загрязнения.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности: $\mu(ds, du, dr) = \lambda\, ds\, F_U(du) F_R(dr)$.

Пусть N — соответствующая пуассоновская случайная мера. Можно рассматривать реализации случайной меры N (множества триплетов

(s, u, r), в которых каждый триплет отвечает некоторому загрязнению) как варианты случайного загрязнения.

Отметим, что многомерная система является стационарной в силу инвариантности меры Лебега ds относительно сдвигов. Структура произведения мер $F_U(du)F_R(dr)$ вместо совместного распределения $F_{UR}(du, dr)$ общего вида в этом случае соответствует независимости радиуса и уровня загрязнения.

Теперь мы можем выразить некоторые характеристики системы через соответствующие пуассоновские интегралы.

Точечное загрязнение системы в точке x записывается как

$$W^{\circ}(x) = \int_{\mathcal{R}} r \mathbf{1}_{\{x \in B_u(s)\}} dN,$$

а интегральное загрязнение на борелевском ограниченном множестве $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$W^*(A) = \int_A W^{\circ}(x)dx = \int_{\mathcal{R}} r \int_A \mathbf{1}_{\{x \in B_u(s)\}} dx dN = \int_{\mathcal{R}} r V_A(s, u) dN,$$

где $V_A(s, u) := \lambda_n \left(B_u(s) \cap A\right)$.

Отметим, что $W^{\circ}(\cdot)$ и $W^*(\cdot)$ являются стационарными полями. При любом сдвиге точки x распределение точечного загрязнения неизменно. То же можно сказать о распределении интегрального загрязнения при сдвигах множества A.

Чтобы получить разумные свойства модели, нам придется сделать определенные предположения о распределениях F_U и F_R. Обозначим через U и R случайные величины, имеющие соответственно распределения F_U и F_R.

Пусть $A(x)$ — это количество шаров загрязнения, содержащих точку x:

$$A(x) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{x \in B_u(s)\}} dN.$$

По определению, $A(x)$ является пуассоновской случайной величиной с интенсивностью

$$\begin{aligned}\mu\left(\{(s,u,r) : x \in B_u(s)\}\right) &= \mu\left(\{(s,u,r) : s \in B_u(x)\}\right) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du) F_R(dr) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du),\end{aligned}$$

где объём шара $V(B_u(0)) := c_n u^n$, $c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. Ясно, что интенсивность конечна тогда и только тогда, когда математическое ожидание объема шара загрязнения

$$\mathbb{E}V(B_U(0)) = c_n \cdot \mathbb{E}U^n = c_n \int_{\mathbb{R}_+} u^n F_U(du)$$

конечно. Если $\mathbb{E}U^n = +\infty$, то $A(x)$ бесконечно почти наверное.

Воспользуемся тем, что пуассоновский интеграл общего вида

$$\int_{\mathcal{R}} f dN$$

в соответствии с [1, Определение интеграла по нецентрированной пуассоновской случайной мере, с. 130] корректно определен, если выполнено условие

$$\int_{\mathcal{R}} \min\{|f|, 1\} d\mu < \infty.$$

В частности, для любого $\varepsilon > 0$ должно быть выполнено условие $\mu\left(|f| > \varepsilon\right) < \infty$. Посмотрим с этой точки зрения на интегральное выражение точечного загрязнения. Для его корректности необходимым условием будет

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{(s,u,r) : r\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}} > \varepsilon\right\}\right) &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{r>\varepsilon\}} F_R(dr) \cdot \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{s\in B_u(x)\}} ds F_U(du) \\ &= \lambda \mathbb{P}(R > \varepsilon) \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du) \\ &= \lambda \mathbb{P}(R > \varepsilon) c_n \mathbb{E}U^n < +\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, помимо патологического случая $\mathbb{P}(R=0)=1$, точечное загрязнение корректно определено, только если верно

$$\mathbb{E}U^n = \int_{\mathbb{R}_+} u^n F_U(du) < +\infty.$$

Мы будем предполагать также, что

$$\mathbb{E}R = \int_{\mathbb{R}_+} r F_R(dr) < \infty.$$

Тогда математические ожидания точечного и интегрального загрязнения конечны, поскольку

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}W^\circ(x) &= \mathbb{E}\int_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}} dN \\
&= \int_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{x\in B_u(s)\}} d\mu \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} rF_R(dr)\cdot \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{s\in B_u(x)\}} ds F_U(du) \\
&= \lambda \mathbb{E}R \int_{\mathbb{R}_+} V(B_u(0)) F_U(du) \\
&= \lambda \mathbb{E}R\cdot c_n \mathbb{E}U^n
\end{aligned}$$

и

$$\mathbb{E}W^*(A) = \int_A \mathbb{E}W^\circ(x)dx = \lambda\mathbb{E}R\cdot c_n\mathbb{E}U^n\cdot V(A),$$

где $V(A) := \lambda_n(A)$, где λ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Основные результаты

Для доказательства основной теоремы мы будем предполагать несколько большее, чем просто конечность математических ожиданий U^n и R. Будем считать, что либо

$$\mathbb{P}(U^n > u) \sim \frac{c_U}{u^\gamma}, \qquad u \longrightarrow \infty, \qquad 1<\gamma<2, \qquad c_U>0,$$

что эквивалентно

$$\mathbb{P}(U > \tilde{u}) \sim \frac{c_U}{\tilde{u}^{\gamma n}}, \qquad \tilde{u} \longrightarrow \infty, \qquad 1<\gamma<2, \qquad c_U>0,$$

либо

$$\mathbb{E}U^{2n} < \infty \text{ (формально полагаем } \gamma := 2).$$

Аналогично, либо

$$\mathbb{P}(R > r) \sim \frac{c_R}{r^\delta}, \qquad r \longrightarrow \infty, \qquad 1 < \delta < 2, \qquad c_R > 0,$$

либо

$$\mathbb{E}R^2 < \infty \text{ (формально полагаем } \delta := 2).$$

Теперь мы будем исследовать поведение интегрального загрязнения как процесса, наблюдаемого на ограниченных борелевских множествах «большого» объема, при параметрах $1 < \gamma < \delta < 2$.

Чтобы получить осмысленный предел, необходимо выполнить следующие предварительные операции:

- масштабировать множество так, чтобы оно пробегало стандартное параметрическое пространство;
- центрировать процесс загрязнения;
- нормировать загрязнение, разделив его на подходящий скалярный множитель.

В качестве стандартного параметрического пространства зафиксируем набор T борелевских множеств произвольной формы и объема, ограниченных шаром $B_1(0)$. Ясно, что для произвольного ограниченного борелевского множества A существуют масштаб $a \in \mathbb{R}_+$ и множество из стандартного параметрического пространства $A_0 \in T$ такие, что $aA_0 = A$. Поскольку мы намерены изучать загрязнение внутри «больших» множеств при масштабе от 0 до a при $a \longrightarrow \infty$, загрязнение будем записывать как $W^*(aA_0) = W^*(A),\ A_0 \in T$, так что когда A_0 пробегает набор T, aA_0 пробегает набор из масштабированных копий A.

Центрирование и нормирование на соответствующий множитель b приводит к *нормированному процессу интегрального загрязнения*

$$Z_a(A_0) := \frac{W^*(aA_0) - \lambda \mathbb{E}R \cdot c_n \mathbb{E}U^n \cdot V(aA_0)}{b}, \qquad A_0 \in T,$$

где $V(aA_0) := \lambda_n(aA_0) = a^n\lambda_n(A_0)$, где λ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем масштаб a и интенсивность загрязнения λ рассматриваются как переменные, по крайней мере одна из которых должна стремиться к бесконечности, чтобы обеспечить нас достаточно большим количеством шаров загрязнения. Нормирующий множитель b зависит от этих переменных, а форма этой зависимости определяется параметрами системы δ, λ.

Нас будет интересовать случай сильной зависимости. Она появляется, когда имеется достаточно много «больших» шаров загрязнения. Зафиксируем $x \in B_1(0)\setminus\{0\}$ и рассмотрим количество $Q_{a,x}$ шаров загрязнения, захватывающих точки пространства 0 и ax. Получим пуассоновскую случайную величину

$$Q_{a,x} := \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{0,ax\in B_u(s)\}} dN$$

с математическим ожиданием

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Q_{a,x} &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{0,ax\in B_u(s)\}} d\mu \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{s\in B_u(ax);\ \|s\|\leqslant u\}} ds F_U(du) \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{s\in B_u(ax);\ \|s\|\leqslant u\}} F_U(du) ds \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}(U \geqslant \max(\|s\|, \|s-ax\|)) ds \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}\left(U \geqslant \max\left(\left\|\tilde{s}+\frac{ax}{2}\right\|, \left\|\tilde{s}-\frac{ax}{2}\right\|\right)\right) d\tilde{s} \\
&\geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}\left(U \geqslant \sqrt{\left\|\tilde{s}+\frac{ax}{2}\right\|^2 + \left\|\tilde{s}-\frac{ax}{2}\right\|^2}\right) d\tilde{s} \\
&= [\text{тождество параллелограмма}] \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}\left(U \geqslant \sqrt{2\|\tilde{s}\|^2 + 2\left\|\frac{ax}{2}\right\|^2}\right) d\tilde{s} \\
&\geq \lambda \int_{\left\{\tilde{s}\,:\,\|\tilde{s}\|\geqslant\|\frac{ax}{2}\|\right\}} \mathbb{P}\left(U \geqslant \sqrt{2\|\tilde{s}\|^2 + 2\left\|\frac{ax}{2}\right\|^2}\right) d\tilde{s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \lambda \int_{\left\{\tilde{s}\,:\,\|\tilde{s}\|\geqslant\|\frac{ax}{2}\|\right\}} \mathbb{P}\left(U \geqslant \sqrt{4\left\|\tilde{s}\right\|^2}\right) d\tilde{s} \\
&\geq \frac{\lambda}{2^n} \int_{\{v\,:\,\|v\|\geqslant\|ax\|\}} \mathbb{P}(U \geqslant \|v\|) dv \sim \frac{\lambda}{2^n} \int_{\{v\,:\,\|v\|\geqslant\|ax\|\}} \frac{c_U}{\|v\|^{\gamma n}} dv \\
&= \frac{\lambda}{2^n} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\|ax\|}^{\infty} \frac{c_U \rho^{n-1} \sin\,\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin^{n-2}\,\alpha_{n-1}}{\rho^{\gamma n}} d\rho\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_{n-1} \\
&= \frac{\lambda}{2^n} c_{U,n} \int_{\|ax\|}^{\infty} \rho^{-n(\gamma-1)-1} d\rho = \frac{\lambda \tilde{c}_{U,n}}{\|ax\|^{\gamma n - n}},
\end{aligned}
$$

если $1 < \gamma < 2$ и $a \longrightarrow \infty$. Поэтому если мы хотим иметь *много* «больших» шаров загрязнения, порождающих сильную зависимость, достаточно ввести предположение

$$
\frac{\lambda}{a^{\gamma n - n}} \longrightarrow \infty,
$$

называемое *условием высокой интенсивности.*

Зафиксируем нормирующий множитель $b := Ba^{(\delta n + n - \gamma n)/\delta} \lambda^{1/\delta}$, где число B определяется соотношением $B^{\delta} = c_R c_U \delta \gamma n$. Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть $1 < \gamma < \delta < 2$, выполнено условие высокой интенсивности и b выбран по указанной выше формуле. Тогда при условии $a \longrightarrow \infty$ верно*

$$
Z_a \xrightarrow{\text{к.м.р.}} \mathcal{Z}_{\gamma,\delta},
$$

где процесс $\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_0)$ (называемый многомерным устойчивым телеком-процессом) допускает интегральное представление

$$
\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_0) = \int\int \lambda_n(B_u(s) \cap A_0) X(ds, du).
$$

Здесь X — δ-устойчивая случайная мера с независимыми значениями и интенсивностью $u^{-\gamma n - 1} ds du$, отвечающая спектрально положительному строго δ-устойчивому распределению $\tilde{S}(0, 1, \delta)$, а λ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы, сформулируем вспомогательное утверждение, доказанное в [1, Следствие 8.5, с. 144].

Утверждение 1. *Пусть $\alpha \in (1,2)$, μ — мера интенсивности, соответствующая центрированной пуассоновской случайной мере $\tilde{N}$ и для некоторых c_+, $c_- \geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\{f_n \geqslant x\} = \frac{c_+}{\alpha x^\alpha}, \qquad \forall x > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\{f_n \leqslant -x\} = \frac{c_-}{\alpha x^\alpha}, \qquad \forall x > 0, \tag{2}$$

и, кроме того,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \ \ : \ \ \mu\{|f_n| \geqslant u\} \leqslant \frac{C}{u^\alpha}, \qquad \forall u > 0,\ \forall n \geqslant n_0. \tag{3}$$

Тогда распределения случайных величин $\int_{\mathcal{R}} f_n d\tilde{N}$ сходятся к устойчивому распределению $\tilde{S}(c_-, c_+, \alpha)$.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Доказательство. Проверим сходимость одномерных распределений. Ясно, что

$$Z_a(A_0) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r\,\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}} d\tilde{N},$$

где $\tilde{N}$ — центрированная пуассоновская случайная мера, соответствующая пуассоновской случайной мере N.
С другой стороны, случайная величина $\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_0)$ имеет устойчивое распределение $\tilde{S}(0, \sigma_{A_0}, \delta)$, где параметр σ_{A_0} можно найти по формуле

$$\sigma_{A_0} = \|\lambda_n(B_u(s)\cap A_0)\|_\delta^\delta = \int\int \lambda_n(B_u(s)\cap A_0)^\delta \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}}.$$

Прежде всего проверим корректность, то есть убедимся, что интеграл конечен. Ясно, что $\lambda_n(B_u(s)\cap A_0)^\delta \leq \lambda_n(B_u(s)\cap B_1(0))^\delta$. Рассмотрим интеграл $\int\int \lambda_n(B_u(s)\cap B_1(0))^\delta \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}}$, разобьем его на 2 части и воспользуемся неравенствами $\gamma < \delta$ и $1 < \gamma < 2$:

$$\int_{\{u\leqslant 1\}}\int \lambda_n(B_u(s)\cap B_1(0))^\delta \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}} \leqslant$$

$$\int_0^1 \int_{\{\|s\|\leqslant u+1\}} (c_n u^n)^\delta \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}} \ \ = \ \ \int_0^1 (c_n u^n)^\delta c_n (u+1)^n \frac{du}{u^{\gamma n+1}} \leqslant$$

$$c_n^{\delta+1}2^n\int_0^1\frac{du}{u^{n(\gamma-\delta)+1}}<\infty,$$

$$\int_{\{u>1\}}\int\lambda_n(B_u(s)\cap B_1(0))^\delta\frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}}\leqslant$$

$$\int_1^\infty\int_{\{\|s\|\leqslant u+1\}}c_n^\delta\frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}} \;=\; \int_1^\infty c_n^\delta c_n(u+1)^n\frac{du}{u^{\gamma n+1}}\leqslant$$

$$c_n^{\delta+1}\int_1^\infty(2u)^n\frac{du}{u^{\gamma n+1}} \;=\; c_n^{\delta+1}2^n\int_1^\infty\frac{du}{u^{\gamma n-n+1}}<\infty.$$

Таким образом, мы можем проверять сходимость $Z_a(A_0)\Rightarrow\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_0)$ с помощью достаточных условий сходимости распределений пуассоновских интегралов к устойчивому распределению.

Воспользуемся указанным выше вспомогательным утверждением. Требуется проверить предельные соотношения (1) и (2), а также равномерную оценку (3). Поскольку подынтегральные выражения положительны, соотношение (2), очевидно, выполнено. Проверим (1). Необходимо убедиться, что для любого $x>0$ верно

$$\lim_{a\longrightarrow\infty}\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\}=\frac{\sigma_{A_0}}{\delta x^\delta}.$$

Начнем с тождества

$$\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\} \;=\; \lambda\int\int\mathbb{P}\left\{R\geqslant\frac{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}x}{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}\right\}F_U(du)ds.$$

Используя неравенство $\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)\leqslant\lambda_n(B_u(s)\cap B_a(0))\leqslant c_na^n$ при достаточно больших a и условие высокой интенсивности, получаем оценку:

$$\frac{a^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}\geqslant\frac{1}{c_n}\left(\frac{\lambda}{a^{\gamma n-n}}\right)^{1/\delta}\longrightarrow\infty$$

равномерно по s и u. Следовательно, применима асимптотика хвостовых вероятностей для R:

$$\begin{aligned}\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\} &\sim \lambda\,c_R\int\int\left(\frac{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}x}{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}\right)^{-\delta}F_U(du)ds\\ &= \frac{c_R}{B^\delta x^\delta}\int\int\frac{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)^\delta}{a^{\delta n+n-\gamma n}}F_U(du)ds.\end{aligned}$$

Далее, сделаем замену переменных $s := a\tilde{s}$ и $u := a\tilde{u}$ и воспользуемся формулой самоподобия

$$\lambda_n(B_u(s) \cap aA_0) = a^n \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_0).$$

Получим

$$\int\int \frac{\lambda_n(B_u(s) \cap aA_0)^\delta}{a^{\delta n+n-\gamma n}} F_U(du)ds = a^{\gamma n} \int\int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_0)^\delta F_{U/a}(d\tilde{u})d\tilde{s}.$$

В силу предположения об асимптотике хвостовых вероятностей для U меры $a^{\gamma n} F_{U/a}(d\tilde{u})$ слабо сходятся к мере $\frac{c_U \gamma n d\tilde{u}}{\tilde{u}^{\gamma n+1}}$ вне любой окрестности нуля, так как для любого $y > 0$

$$a^{\gamma n} F_{U/a}[y, \infty) = a^{\gamma n} \mathbb{P}\{U \geqslant ya\} \sim a^{\gamma n} \frac{c_U}{(ya)^{\gamma n}} = \int_y^\infty \frac{c_U \gamma n}{\tilde{u}^{\gamma n+1}} d\tilde{u}.$$

Проверим, что меры $a^{\gamma n} F_{U/a}(d\tilde{u})$ слабо сходятся к мере $\frac{c_U \gamma n d\tilde{u}}{\tilde{u}^{\gamma n+1}}$ в 0. Для этого необходимо проверить:

$$a^{\gamma n} F_{U/a}[0; y] \overset{?}{\sim} \int_0^y \frac{c_U \gamma n}{\tilde{u}^{\gamma n+1}} d\tilde{u}, \qquad y \to 0^+$$

Воспользуемся предположением об асимптотике хвостовых вероятностей для U и правилом Лопиталя:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 0^+} \frac{a^{\gamma n} F_{U/a}[0; y]}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n}{\tilde{u}^{\gamma n+1}} d\tilde{u}} &= \lim_{y \to 0^+} \frac{a^{\gamma n}(1 - \mathbb{P}(U > ya))}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n}{\tilde{u}^{\gamma n+1}} d\tilde{u}} \\
&\sim \lim_{y \to 0^+} \frac{a^{\gamma n}\left(1 - \frac{c_U}{(ya)^{\gamma n}}\right)}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n}{\tilde{u}^{\gamma n+1}} d\tilde{u}} \\
&= \lim_{y \to 0^+} \frac{a^{\gamma n} - \frac{c_U}{y^{\gamma n}}}{\int_0^y \frac{c_U \gamma n}{\tilde{u}^{\gamma n+1}} d\tilde{u}} \\
&= \lim_{y \to 0^+} \frac{\frac{c_U \gamma n}{y^{\gamma n+1}}}{\frac{c_U \gamma n}{y^{\gamma n+1}}} = 1
\end{aligned}$$

Отсюда для любого фиксированного $\tilde{s}$ верно

$$a^{\gamma n} \int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_0)^\delta F_{U/a}(d\tilde{u}) \longrightarrow c_U \gamma n \int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_0)^\delta \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{\gamma n+1}}.$$

Остается обосновать интегрирование по $\tilde{s}$. Для этого воспользуемся теоремой Лебега о мажорированной сходимости, так как располагаем интегрируемой мажорантой

$$\begin{aligned}
a^{\gamma n}\int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s})\cap A_0)^{\delta}F_{U/a}(d\tilde{u}) &\leqslant a^{\gamma n}\int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s})\cap B_1(0))^{\delta}F_{U/a}(d\tilde{u})\\
&\leqslant \begin{cases} a^{\gamma n}\mathbb{E}\min\left(c_n\left(\frac{U}{a}\right)^{\delta n},1\right) < C_1 & \|s\|\leqslant 1,\\ a^{\gamma n}\mathbb{P}\left(\frac{U}{a}\geqslant \|s\|-1\right) < \frac{C_2}{\|s\|^{\gamma n}} & \|s\|>1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Интегрирование дает

$$a^{\gamma n}\int\int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s})\cap A_0)^{\delta}F_{U/a}(d\tilde{u})d\tilde{s} \longrightarrow c_U\gamma n\int\int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s})\cap A_0)^{\delta}\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{\gamma n+1}}d\tilde{s},$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{a\longrightarrow\infty}\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\} &= \frac{c_Rc_U\gamma n}{B^{\delta}x^{\delta}}\int\int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s})\cap A_0)^{\delta}\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{\gamma n+1}}d\tilde{s}\\
&= \frac{c_Rc_U\gamma n\sigma_{A_0}}{B^{\delta}x^{\delta}}.
\end{aligned}$$

Определение B позволяет упростить выражение и получить требуемое.

Аналогичным образом проверим равномерную оценку (3). Необходимо проверить, что для некоторого $C>0$, начиная с некоторого $a_0\geq 0$, для любых $x>0$ и $a\geq a_0$, :

$$\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\}\leqslant \frac{C}{x^{\delta}}.$$

Нам уже известно, что применима асимптотика хвостовых вероятностей для R:

$$\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\} \sim \frac{c_R}{B^{\delta}x^{\delta}}\int\int\frac{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)^{\delta}}{a^{\delta n+n-\gamma n}}F_U(du)ds.$$

Значит, для некоторого $\tilde{C}>0$:

$$\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\} \leq \frac{\tilde{C}}{x^{\delta}}\int\int\frac{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)^{\delta}}{a^{\delta n+n-\gamma n}}F_U(du)ds.$$

Используя доказанную сходимость

$$\int\int \frac{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)^\delta}{a^{\delta n+n-\gamma n}}F_U(du)ds \quad\longrightarrow\quad c_U\gamma n\sigma_{A_0},$$

получаем для достаточно больших a и некоторого $C>0$:

$$\mu\left\{\frac{r\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\} \quad\leq\quad \frac{C}{x^\delta}.$$

Таким образом, мы доказали сходимость одномерных распределений.

Теперь проверим сходимость конечномерных распределений. Для любого $m\geq 2$ и любых $A_{0_1},\ldots,A_{0_m}\in T$ имеет место слабая сходимость конечномерных распределений:

$$P^{Z_a}_{A_{0_1},\ldots,A_{0_m}}\Rightarrow P^{\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}}_{A_{0_1},\ldots,A_{0_m}}$$

Введем следующие обозначения векторов:

$$\mathbf{Z}_a := (Z_a(A_{0_1}),\ldots,Z_a(A_{0_m}))$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{\gamma,\delta} := (\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_{0_1}),\ldots,\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_{0_m}))$$

По теореме Крамера-Волда [1, Теорема 4.8, с. 66] достаточно доказать, что сходятся все одномерные проекции случайных векторов, то есть для любых $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R}$ и любых $A_{0_1},\ldots,A_{0_m}\in T$ верно

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m c_j(\mathbf{Z}_a)_j \quad&=\quad \sum_{j=1}^m c_jZ_a(A_{0_j})\\ &\overset{?}{\Rightarrow}\quad \sum_{j=1}^m c_j\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_{0_j})\\ &=\quad \sum_{j=1}^m c_j(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{\gamma,\delta})_j\end{aligned}$$

Доказательство почти в точности повторяет упомянутое в одномерном случае. Заметим в силу линейности интеграла по центрированной пуассоновской мере:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m c_j(\mathbf{Z}_a)_j \quad&=\quad \sum_{j=1}^m c_jZ_a(A_{0_j})\\ &=\quad \int_{\mathcal{R}}\frac{r\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}d\tilde{N}\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу линейности интеграла по δ-устойчивой случайной мере с независимимыми значечниями:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} c_j(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{\gamma,\delta})_j &= \sum_{j=1}^{m} c_j \mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(A_{0_j}) \\
&= \int\int \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_n(B_u(s)\cap A_{0_j}) X(ds,du)
\end{aligned}$$

Это случайная величина, имеющая устойчивое рапсределение $\tilde{S}(0,\sigma_{A_{0_{1,\ldots,m}}},\delta)$, где параметр $\sigma_{A_{0_{1,\ldots,m}}}$ можно найти по формуле

$$\begin{aligned}
\sigma_{A_{0_{1,\ldots,m}}} &= \left\| \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_n(B_u(s)\cap A_{0_j}) \right\|_{\delta}^{\delta} \\
&= \int\int \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_n(B_u(s)\cap A_{0_j}) \right)^{\delta} \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}}.
\end{aligned}$$

Корректность очевидным образом следует из аналогичной проверки для одномерного случая:

$$\begin{aligned}
\int\int \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_n(B_u(s)\cap A_{0_j}) \right)^{\delta} \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}} &\leq \int\int \left(\sum_{j=1}^{m} |c_j| \lambda_n(B_u(s)\cap A_{0_j}) \right)^{\delta} \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}} \\
&\leq \int\int \left(\sum_{j=1}^{m} |c_j| \lambda_n(B_u(s)\cap B_1(0)) \right)^{\delta} \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} |c_j| \right)^{\delta} \int\int \lambda_n(B_u(s)\cap B_1(0))^{\delta} \frac{ds\,du}{u^{\gamma n+1}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем снова проверять сходимость $\sum_{j=1}^{m} c_j(\mathbf{Z}_a)_j \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{j=1}^{m} c_j(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{\gamma,\delta})_j$ с помощью достаточных условий сходимости распределений пуассоновских интегралов к устойчивому распределению.

Вновь воспользуемся указанным выше вспомогательным утверждением. Требуется проверить предельные соотношения (1) и (2), а также равномерную оценку (3). Поскольку подынтегральные выражения положительны, соотношение (2), очевидно, выполнено. Проверим (1). Необходимо убедиться, что для любого $x > 0$ верно

$$\lim_{a\longrightarrow\infty} \mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}} \geqslant x\right\} = \frac{\sigma_{A_{0_{1,\dots,m}}}}{\delta x^\delta}.$$

Начнем с тождества

$$\mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}} \geqslant x\right\} =$$

$$\lambda\int\int\mathbb{P}\left\{R \geqslant \frac{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}x}{\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}\right\}F_U(du)ds.$$

Рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j}) &\leq \sum_{j=1}^m |c_j|\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})\\ &\leq \sum_{j=1}^m |c_j|\lambda_n(B_u(s)\cap B_a(0))\\ &\leqslant c_na^n\sum_{j=1}^m |c_j|\end{aligned}$$

при достаточно больших a. Воспользовавшись условием высокой интенсивности, получаем оценку:

$$\frac{a^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}{\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})} \geqslant \frac{1}{c_n\sum_{j=1}^m |c_j|}\left(\frac{\lambda}{a^{\gamma n-n}}\right)^{1/\delta} \longrightarrow \infty$$

равномерно по s и u. Следовательно, применима асимптотика хвостовых вероятностей для R:

$$\begin{aligned}\mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}} \geqslant x\right\} &\sim \lambda\, c_R\int\int\left(\frac{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}x}{\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}\right)^{-\delta}F_U(du)ds\\ &= \frac{c_R}{B^\delta x^\delta}\int\int\frac{\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})\right)^\delta}{a^{\delta n+n-\gamma n}}F_U(du)ds.\end{aligned}$$

Далее, сделаем замену переменных $s := a\tilde{s}$ и $u := a\tilde{u}$ и воспользуемся формулой самоподобия

$$\lambda_n(B_u(s) \cap aA_0) = a^n \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_0).$$

Получим

$$\begin{aligned} &\int\int \frac{\left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_n(B_u(s) \cap aA_{0_j})\right)^\delta}{a^{\delta n + n - \gamma n}} F_U(du)ds \\ &= a^{\gamma n} \int\int \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_{0_j})\right)^\delta F_{U/a}(d\tilde{u})d\tilde{s}. \end{aligned}$$

Мы уже доказали, что в силу предположения об асимптотике хвостовых вероятностей для U меры $a^{\gamma n} F_{U/a}(d\tilde{u})$ слабо сходятся к мере $\frac{c_U \gamma n d\tilde{u}}{\tilde{u}^{\gamma n+1}}$. Отсюда для любого фиксированного $\tilde{s}$ верно

$$a^{\gamma n} \int \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_{0_j})\right)^\delta F_{U/a}(d\tilde{u}) \longrightarrow c_U \gamma n \int \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_{0_j})\right)^\delta \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{\gamma n+1}}.$$

Остается обосновать интегрирование по $\tilde{s}$. Для этого воспользуемся теоремой Лебега о мажорированной сходимости, так как располагаем интегрируемой мажорантой

$$\begin{aligned} &a^{\gamma n} \int \left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_{0_j})\right)^\delta F_{U/a}(d\tilde{u}) \\ &\leq a^{\gamma n} \int \left(\sum_{j=1}^m |c_j| \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap A_{0_j})\right)^\delta F_{U/a}(d\tilde{u}) \\ &\leq a^{\gamma n} \int \left(\sum_{j=1}^m |c_j| \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap B_1(0))\right)^\delta F_{U/a}(d\tilde{u}) \\ &= a^{\gamma n} \left(\sum_{j=1}^m |c_j|\right)^\delta \int \lambda_n(B_{\tilde{u}}(\tilde{s}) \cap B_1(0))^\delta F_{U/a}(d\tilde{u}) \\ &\leqslant \begin{cases} C a^{\gamma n} \mathbb{E} \min\left(c_n \left(\frac{U}{a}\right)^{\delta n}, 1\right) < C_1 & \|s\| \leqslant 1, \\ C a^{\gamma n} \mathbb{P}\left(\frac{U}{a} \geqslant \|s\| - 1\right) < \frac{C_2}{\|s\|^{\gamma n}} & \|s\| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Интегрирование дает

$$a^{\gamma n}\int\int\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_{\tilde u}(\tilde s)\cap A_{0_j})\right)^{\delta}F_{U/a}(d\tilde u)d\tilde s\longrightarrow$$
$$c_U\gamma n\int\int\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_{\tilde u}(\tilde s)\cap A_{0_j})\right)^{\delta}\frac{d\tilde u}{\tilde u^{\gamma n+1}}d\tilde s,$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}&\lim_{a\longrightarrow\infty}\mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\}\\
=\ &\frac{c_Rc_U\gamma n}{B^{\delta}x^{\delta}}\int\int\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_{\tilde u}(\tilde s)\cap A_{0_j})\right)^{\delta}\frac{d\tilde u}{\tilde u^{\gamma n+1}}d\tilde s\\
=\ &\frac{c_Rc_U\gamma n\sigma_{A_{0_{1,\dots,m}}}}{B^{\delta}x^{\delta}}.\end{aligned}$$

Определение B позволяет упростить выражение и получить требуемое.

Аналогичным образом проверим равномерную оценку (3). Необходимо проверить, что для некоторого $C>0$, начиная с некоторого $a_0\geq 0$, для любых $x>0$ и $a\geq a_0$, :

$$\mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\}\leqslant\frac{C}{x^{\delta}}.$$

Нам уже известно, что применима асимптотика хвостовых вероятностей для R:

$$\mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\}\ \sim\ \frac{c_R}{B^{\delta}x^{\delta}}\int\int\frac{\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})\right)^{\delta}}{a^{\delta n+n-\gamma n}}F_U(du)ds.$$

Значит, для некоторого $\tilde C>0$:

$$\mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}}\geqslant x\right\}\ \leq\ \frac{\tilde C}{x^{\delta}}\int\int\frac{\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})\right)^{\delta}}{a^{\delta n+n-\gamma n}}F_U(du)ds.$$

Используя доказанную сходимость

$$\int\int \frac{\lambda_n(B_u(s)\cap aA_0)^\delta}{a^{\delta n+n-\gamma n}} F_U(du)ds \quad\longrightarrow\quad c_U\gamma n\sigma_{A_{0_1},\ldots,A_{0_m}},$$

получаем для достаточно больших a и некоторого $C>0$:

$$\mu\left\{\frac{r\sum_{j=1}^m c_j\lambda_n(B_u(s)\cap aA_{0_j})}{Ba^{(\delta n+n-\gamma n)/\delta}\lambda^{1/\delta}} \geqslant x\right\} \quad\leq\quad \frac{C}{x^\delta}.$$

Таким образом, мы доказали сходимость распределений одномерных проекций, а значит, завершили доказательство теоремы.

$\square$

Список литературы

[1] М. А. Лифшиц. *Случайные процессы: от теории к практике.* Лань. 2015.

[2] Е. Аззо. *О многомерных вариантах систем обслуживания с дискретной нагрузкой. Магистерская ВКР.* СПбГУ. 2019.

[3] И. Т. Михайлов. *Многомерные аналоги пуассоновских моделей телетрафика. Бакалаврская ВКР.* СПбГУ. 2020.

[4] I. Kaj and M. S. Taqqu. *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach.* In and Out of Equilibrium. II., ser.: Progress in Probability, Vol. 60, (Birkhäuser, Basel), pp. 383–427. 2008.

[5] S. Cohen and M. Taqqu. *Small and large scale behavior of the Poissonized Telecom Process.* Methodol. Comput. Appl. Probab. 6, pp. 363–379. 2004.

[6] R. Gaigalas. *A Poisson bridge between fractional Brownian motion and stable Lévy motion*, Stoch. Proc. Appl. 116, pp. 447–462. 2006.

[7] M. A. Lifshits, S. E. Nikitin. *Large deviations of Telecom process.* Preprint http://arxiv.org/abs/2107.11846. To appear in J. Appl. Probab. 2023.