

Санкт-Петербургский государственный университет

***ЛИТВИШКО Ирина Романовна***

**Выпускная квалификационная работа**

***Динамическое позиционирование автономных подводных аппаратов***

Уровень образования: бакалавриат

Направление *01.03.02 «Прикладная математика и информатика»*

Основная образовательная программа *СВ.5005 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»*

Научный руководитель:

доцент кафедры компьютерных технологий и систем,

к. ф.-м. н.,

Жабко Наталия Алексеевна

Рецензент:

доцент кафедры механики управляемого движения,

к. ф.-м. н.,

Шиманчук Дмитрий Викторович

Санкт-Петербург

2022

# СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ .....	2
ВВЕДЕНИЕ.....	3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	4
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	5
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АПА .....	7
ГЛАВА 2. СИСТЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ДЛЯ АПА .....	10
2. 1. Структура системы динамического позиционирования.....	10
2. 2. Определение дополнительного слагаемого в управлении .....	13
2. 3. Обеспечение экономичного режима работы регулятора .....	16
2. 3. 1. Случай одной доминирующей частоты волнового спектра.....	16
2. 3. 2. Случай конечного числа доминирующих частот волнового спектра.....	21
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ SIMULINK .....	25
ВЫВОДЫ.....	29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	30
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	31
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	33

## ВВЕДЕНИЕ

Автономные подводные аппараты (АПА) широко используются для проведения океанографических исследований, обезвреживания морских мин и разведки дна в мелководной зоне. Мелководная зона в среднем определяется глубиной воды до 10 метров. Типичная миссия состоит в слежении аппарата за неизвестным дном на желаемой высоте при воздействии на него волн и течений. Некоторые аппараты поддерживают функцию стыковки с автономной станцией для передачи данных и подзарядки аккумуляторов. При исследовании морского дна часто необходимо получение детальной информации, для чего аппарат необходимо зафиксировать в определенной точке для многократного получения данных и более точной дальнейшей их оценки. Указанные режимы работы подразумевают стабилизацию аппарата в заданной точке. Для этого используются системы динамического позиционирования — комплекс аппаратного и программного обеспечения, предназначенный для перевода аппарата в желаемое положение в пространстве.

Основные проблемы, которые возникают при создании систем динамического позиционирования, — отсутствие измерений скорости аппарата и воздействие шумов на измерения положения и ориентации, приводящие к увеличению амплитуды управляющего сигнала и, как следствие, изнашиванию приводов. В данной работе предложен метод построения системы динамического позиционирования, в функции которой входят, во-первых, восстановление скорости аппарата на основе его положения и ориентации, во-вторых, формирование управления, устанавливающее аппарат в заданном положении, имеет небольшую амплитуду при воздействии высокочастотных внешних возмущений, обеспечивает астатизм замкнутой системы, обладает достаточно простой структурой.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью работы является создание системы динамического позиционирования для АПА в мелководной зоне, обеспечивающей экономичный режим работы приводов и астатизм аппарата. Под динамическим позиционированием подразумевается перевод аппарата в заданное положение в пространстве и дальнейшая стабилизация. С практической точки зрения достижение астатизма и экономичного режима работы управляющих компонентов необходимо во избежание отклонения аппарата от заданного положения при воздействии на него постоянного возмущения (например, подводных или ветровых течений), износа приводов и увеличения затрачиваемой энергии.

Для выполнения поставленной цели необходимо решить ряд задач:

1. Проанализировать динамику АПА.
2. Изучить существующий метод создания системы динамического позиционирования подводных аппаратов на основе принципа разделения [8], [9].
3. Изучить существующий подход к улучшению свойств системы динамического позиционирования в горизонтальной плоскости, построенной на основе принципа разделения, для морских судов [15] и проанализировать возможность его расширения на АПА.
4. Рассмотреть модель замкнутой системы для АПА.
5. Провести симуляцию полученной модели в среде Simulink и сделать выводы об ее эффективности.

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Система динамического позиционирования состоит из двух основных компонентов — наблюдателя и регулятора.

В большинстве случаев измерение скорости для АПА недоступно или затруднено, например, применение доплеровского лага ограничивается из-за преобразования сигнала от аппарата и морского дна при их непосредственной близости [4], поэтому для вычисления скорости, как правило, синтезируется динамический наблюдатель на основе измерений положения и ориентации АПА. К сожалению, измерения положения и ориентации АПА искажаются некоторым шумом, обусловленным действием волн, а также помехами датчиков. Использование таких измерений при работе системы управления может привести к изнашиванию приводов, значительному увеличению затрат энергии и вовсе к потере устойчивости объекта. Поэтому при помощи наблюдателя необходимо выделить из поступающего сигнала с измерительных приборов оценки положения и ориентации аппарата без шума, которые должны быть подавлены системой управления. Стандартный метод фильтрации и оценки компонент положения и ориентации — фильтр Калмана [1], однако для его использования необходимо линеаризовать динамическое уравнение в окрестности заранее заданного набора углов крена, дифферента и рыскания и для каждой линеаризованной модели строить фильтр Калмана, что очень трудоемко, к тому же многочисленные параметры настройки могут быть слабо соотнесены с физическими величинами.

Переход в желаемое положение и подавление внешнего воздействия должны быть осуществлены с помощью регулятора. Задачей синтеза является обеспечение глобальной устойчивости системы. Регулятор должен быть достаточно простым в реализации для уменьшения затрат при его внедрении в объект. Кроме того, желательно, чтобы регулятор работал в экономичном режиме при подавлении высокочастотной части волнового спектра в целях уменьшения затрат энергии и износа компонентов системы управления.

Использование программного управления приемлемо при малой амплитуде внешних возмущений, действующих на аппарат [5]. Однако в большинстве случаев аппарат испытывает значительное воздействие волн и подводных течений, что делает применение такого управления невозможным. Даже в случае известных доминирующих частот волнового спектра измерения положения и ориентации аппарата подвержены некоторому стохастическому шуму как из-за немоделируемых внешних возмущений, так и из-за помех в измерениях, поэтому аппарат неизбежно отклоняется от модельной траектории при использовании программного управления, с течением времени невязка увеличивается. Робастность системы может быть достигнута при использовании управления с обратной связью.

В работе [10] предложен метод конструирования системы управления надводным судном для позиционирования в горизонтальной плоскости на основе принципа разделения, в работе [9] этот метод расширяется для позиционирования АПА в пространстве в мелководной зоне. Необходимо отметить, что предложенный наблюдатель является глобально асимптотически устойчивым, выполняет фильтрацию волн и оценку недоступных для измерения скоростных компонент, а регулятор решает задачу динамического позиционирования. В работе [15] обосновывается введение дополнительного слагаемого в закон управления морским надводным судном, которое обеспечивает астатизм замкнутой системы управления и экономичный режим работы регуляторов. В данной работе этот подход расширяется на систему динамического позиционирования АПА в мелководье.

В отличие от классических ПИД-регуляторов предложенный метод построения управления решает задачу обеспечения приводов экономичным режимом работы. Кроме того, как будет доказано далее, данный подход позволяет доставить астатизм замкнутой системы без использования интегрального слагаемого, что упрощает практическое применение регулятора.

# ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АПА

Для определения модели аппарата рассматриваются две системы координат: абсолютная и относительная. Движение в относительной системе координат описывается шестью компонентами скорости  $\boldsymbol{\nu} = [u, v, w, p, q, r]^T$  — линейные скорости продольной, поперечной и вертикальной качки, угловая скорость крена, дифферента и рыскания соответственно. В абсолютной системе координат, связанной с Землей, используются три компоненты положения и три угла ориентации аппарата  $\boldsymbol{\eta} = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T$ . Связь скоростей в обеих системах координат описывается выражением

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu},$$

где матрица поворота

$$J(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} J_1(\boldsymbol{\eta}) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_2(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix},$$

$$J_1(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & (c\psi s\theta s\varphi - s\psi c\varphi) & (s\psi s\varphi + c\psi c\varphi s\theta) \\ s\psi c\theta & (c\psi c\theta + s\varphi s\theta s\psi) & (s\theta s\psi c\varphi - c\psi s\varphi) \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}, \quad J_2(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & s\varphi \operatorname{tg}\theta & c\varphi \operatorname{tg}\theta \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & \frac{s\varphi}{c\theta} & \frac{c\varphi}{c\theta} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что аппарат является твердым телом (что позволяет исключить рассмотрение сил между отдельными элементами объекта) и абсолютная система координат считается инерциальной (что позволяет исключить рассмотрение сил, обусловленных движением Земли). С учетом введенных предположений в общем случае динамическую модель АПА можно записать в следующем виде [5]:

$$M\dot{\boldsymbol{\nu}} + C(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + D(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}(t),$$

где  $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  — матрица инерции и добавленной массы (положительно определенная);  $C(\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  — матрица кориолисовых и центробежных сил;  $D(\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  — матрица демпфирования;  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^6$  — вектор восстанавливающих сил и моментов;  $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^6$  — вектор сил и моментов внешнего возмущения любой природы;  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$  — вектор управляющего воздействия.

Матрицу  $M$  можно записать как сумму двух матриц  $M = M_{RB} + M_A$ , где  $M_{RB}$  — матрица инерции,  $M_A$  — матрица добавленной массы.  $M_{RB}$  определяется массой аппарата, его формой и положением центра тяжести [5]. Когда объект ускоряется в жидкости, жидкость вокруг него возмущается и также ускоряется. Введение матрицы добавленной массы  $M_A$  позволяет учесть давление возмущенной жидкости. Аналитических формул для получения коэффициентов матрицы нет, их расчет проводится либо экспериментально, либо с помощью различных методов оценки [5], [11].

Слагаемое  $C(\nu)\nu$  учитывает вращательное движение аппарата и влияние добавленной массы на это движение. Согласно [5], постоянные коэффициенты матрицы  $C(\nu)$  определяются элементами матриц  $M_{RB}$  и  $M_A$ . Слагаемое  $D(\nu)\nu$  соответствует вынужденным колебаниям. Колебания имеют сложную нелинейную структуру, но в подавляющем большинстве случаев используют только линейные и квадратичные компоненты демпфирования, определение коэффициентов представляет собой отдельную задачу, которую можно решить с помощью аналитических [7] или компьютерных [6] методов. Вектор  $g(\eta)$  отвечает за действие сил гравитации и плавучести, которые в гидродинамике называются восстанавливающими силами [5]. Вид  $d(t)$  в рамках рассматриваемой задачи рассмотрен в параграфе 2.1, более подробно моделирование внешнего возмущения представлено в [5]. Вектор управляющего воздействия  $\tau$  включает в себя силы и моменты, индуцируемые приводами относительно каждой из осей относительной системы координат. Стоит отметить, что для каждого аппарата существует связь между  $\tau$  и силами, создаваемыми каждым из управляющих компонентов, которая позволяет восстановить силы приводов по вектору  $\tau$ , который определяется аналитически.

В задаче динамического позиционирования основная цель — достичь заданной позиции и ориентации. В таком случае при рассмотрении движения аппарата в мелководной зоне относительная скорость аппарата по отношению к воде будет очень мала. Как следствие, правомерно ввести следующие



упрощения модели при предположении малой скорости аппарата [13]: действием кориолисовой и центробежной сил можно пренебречь ( $C(\nu)\nu \approx 0$ ), постоянная часть матрицы демпфирования будет доминирующей, членами более высокого порядка можно пренебречь ( $D(\nu)\nu \approx D\nu$ , где  $D$  — постоянная положительно определенная матрица). Таким образом, движение АПА в мелководной зоне описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} M\dot{\nu} + D\nu + g(\eta) &= \tau + d(t), \\ \dot{\eta} &= J(\eta)\nu. \end{aligned} \tag{1}$$

## ГЛАВА 2. СИСТЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ДЛЯ АПА

### 2. 1. Структура системы динамического позиционирования

Как было сказано ранее, измерение компонент скорости аппарата обычно не доступно, поэтому любой закон управления должен быть построен на базе измерений положения и ориентации. От замкнутой системы управления требуется, чтобы:

1. существовало положение равновесия  $\nu = \mathbf{0}$ ,  $\eta = \eta_d$ , где  $\eta_d = (x_d, y_d, z_d, \varphi_d, \theta_d, \psi_d)$  — желаемое положение аппарата;
2. положение равновесия было глобально асимптотически устойчивым;
3. управление обеспечивало астатизм по отношению к низкочастотным компонентам возмущения, обусловленным течениями, и осуществляло экономичный режим работы приводов при воздействии на объект высокочастотного возмущения.

Рассмотрим систему динамического позиционирования в виде

$$\begin{aligned} M\dot{z}_\nu &= -Dz_\nu - \mathbf{g}(\eta) + \boldsymbol{\tau} + J^T(\eta)K_1(\eta - z_\eta), \\ \dot{z}_\eta &= J(\eta)z_\nu + K_2(\eta - z_\eta), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\eta) - K_d z_\nu - J^T(\eta)K_p(z_\eta - \eta_d) + F(s)(\eta - z_\eta), \quad (3)$$

где  $s$  — переменная Лапласа,  $z_\nu \in \mathbb{R}^6$  и  $z_\eta \in \mathbb{R}^6$  — оценки векторов  $\nu$  и  $\eta$  соответственно,  $K_1, K_2, K_d, K_p \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  — заданные постоянные матрицы.

Наблюдатель вида (2) построен на основе наблюдателя, представленного в работе [8], в которой доказано, что для обеспечения глобальной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия системы ошибок

$$\begin{aligned} M\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\nu &= -D\boldsymbol{\epsilon}_\nu - J^T(\eta)K_1\boldsymbol{\epsilon}_\eta + \mathbf{d}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\eta &= J(\eta)\boldsymbol{\epsilon}_\nu - K_2\boldsymbol{\epsilon}_\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

полученной вычитанием (2) из (1), где  $\boldsymbol{\epsilon}_\nu = z_\nu - \nu$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_\eta = z_\eta - \eta$ , при  $\mathbf{d}(t) \equiv 0$  достаточно, чтобы матрицы  $K_1, K_2$  имели диагональный вид и были

положительно определенными. Глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия (4) гарантирует стремление оценок положения и скоростей аппарата к реальному их значению с течением времени, другими словами, полученные оценки будут достаточно точны для дальнейшего их использования при построении закона управления.

Закон управления (3) построен на основе управления, представленного в работе [9], с добавлением слагаемого  $F(s)(\eta - z_\eta)$ . с принципом разделения, доказанном в [9], матрицы  $K_p, K_d$  необходимо взять такими, чтобы управление

$$\tau^* = g(\eta) - K_d \nu - J^T(\eta) K_p (\eta - \eta_d) \quad (5)$$

при замыкании системы (1) стабилизировало ее в положении равновесия  $\nu = \mathbf{0}, \eta = \eta_d$ , при этом оно являлось глобально асимптотически устойчивым, Тогда закон управления, использующий оценки положений и скоростей, будет обладать теми же свойствами. Матрицы  $K_p, K_d$  при этом достаточно взять положительно определенными.

Замкнутая система (1)—(3) без учета слагаемого  $F(s)(\eta - z_\eta)$  удовлетворяет введенным требованиям 1—2. Требование 3 важно при практическом применении системы динамического позиционирования. Экономичный режим работы регуляторов позволяет уменьшить нагрузку на них, минимизировать их изнашивание и продлить срок службы. Астатизм замкнутой системы позволяет исключить отклонение аппарата от заданного положения при воздействии на него постоянного возмущения. Например, на аппарат может воздействовать подводное течение с постоянной скоростью или, если аппарат находится близко к поверхности воды, порыв ветра и создаваемое им ветровое течение. Такие возмущения характерны для морских подвижных объектов и стандартно моделируются постоянной величиной.

Задача синтеза оптимального закона управления сводится к определению поправки  $F(s)(\eta - z_\eta)$ . Во-первых, ее присутствие в законе

управление не должно изменять положение равновесие замкнутой системы (1)—(3) и в целом нарушать устойчивость системы. Во-вторых, она должна обеспечивать систему астатизмом и выполнять роль режекторного фильтра с желаемыми динамическими свойствами, другими словами, управление должно подавлять низкочастотные возмущения и иметь небольшую амплитуду в ответ на высокочастотное внешнее воздействие. Формально это слагаемое должно доставлять минимум функционалу  $R(F)$ , определяющему интенсивность управления

$$R(F) \rightarrow \min_{F \in \Omega_c}, \quad (6)$$

где  $\Omega_c$  — множество передаточных функций, доставляющих глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы (1)—(3) и астатизм.

В частности, при представлении векторы внешних возмущений в виде

$$\mathbf{d}(t) = A_d \sin(\boldsymbol{\omega}t),$$

где  $A_d$  — матрица амплитуд размерности  $6 \times N$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$  — вектор частот, разумно взять функционал в виде

$$R(F) = \|\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d)\|,$$

где  $\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d) = (A_{\tau 1}, A_{\tau 2}, A_{\tau 3}, A_{\tau 4}, A_{\tau 5}, A_{\tau 6})^T \in \mathbb{R}^6$  — вектор интенсивности управляющего воздействия,  $A_{\tau i}, i = \overline{1,6}$  — интенсивность  $i$ -ой компоненты управления. В качестве нормы вектора рассматривается

евклидова норма, то есть, 
$$\|\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^6 A_{\tau i}^2}.$$

Стоит отметить, что в общем случае внешние возмущения имеют сложную математическую модель со множеством параметров. Так как основная цель синтеза управления — обеспечение экономичного режима работы приводов при подавлении движения аппарата, вызванного волнами с частотами  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ , то достаточно рассматривать упрощенную модель  $\mathbf{d}(t) = A_d \sin(\boldsymbol{\omega}t)$ . Такой вид функции позволяет имитировать регулярное

волнение, что в рамках рассматриваемой задачи является хорошим приближением.

## 2. 2. Определение дополнительного слагаемого в управлении

Для начала определим условия, при которых слагаемое  $F(s)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta)$  в законе управления не ухудшает динамических свойств системы. Для этого введем постоянные матрицы  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}$ , при этом матрица  $\boldsymbol{\alpha}$  — гурвицева, и запишем передаточную матрицу в виде  $F(s) = \boldsymbol{\gamma}(E_l s - \boldsymbol{\alpha})^{-1} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$ , ей соответствует система в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \\ \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l$  — вектор состояний системы,  $\boldsymbol{\varepsilon}_\eta = \mathbf{z}_\eta - \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^6$  — вход системы,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6$  — выход системы.

Формулировка следующей теоремы повторяет формулировку соответствующей теоремы для морского надводного судна, представленной в [15], но рассматриваемые системы имеют иную структуру из-за увеличения числа компонент, описывающих движение аппарата, и учета влияния гравитационных и восстанавливающих сил и моментов  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ .

**Теорема 1:** *Если система (7) асимптотически устойчива, то положение равновесия  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$  замкнутой системы (1)—(3) глобально асимптотически устойчиво.*

**Доказательство:** Заметим, что  $\mathbf{z}_\eta, \mathbf{z}_\nu$  можно исключить из уравнения (3), используя векторы ошибки наблюдателя  $\boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \boldsymbol{\varepsilon}_\nu$ . Принимая во внимание системы (4), (7) и уравнение (5), можно переписать уравнения (1)—(2) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\nu &= -M^{-1} D \boldsymbol{\varepsilon}_\nu - M^{-1} J^T(\boldsymbol{\eta}) K_1 \boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\eta &= J(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\varepsilon}_\nu - K_2 \boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \\ \dot{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= -M^{-1} D \boldsymbol{\nu} - M^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) + M^{-1} \boldsymbol{\tau}^* + M^{-1} (K_d \boldsymbol{\varepsilon}_\nu + J^T(\boldsymbol{\eta}) K_p \boldsymbol{\varepsilon}_\eta + \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\eta), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= J(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом вида  $\tau^*$  четвертое уравнение системы (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\nu} = & (-M^{-1}D - M^{-1}K_d)\nu - M^{-1}J^T(\eta)K_p(\eta - \eta_d) + \\ & + M^{-1}(K_d\epsilon_\nu + J^T(\eta)K_p\epsilon_\eta + \gamma p + \mu\epsilon_\eta) \end{aligned} \quad (9)$$

Введем новые переменные:  $x_1 = (p^T \ \nu^T \ (\eta - \eta_d)^T)^T$ ,  $x_2 = (\epsilon_\nu^T \ \epsilon_\eta^T)^T$  и запишем систему (8) с учетом (9) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_c(x_1)x_1 + g_a(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_o(x_1)x_2. \end{aligned}$$

Данная система, с учетом увеличения размерности матриц, идентична системе, полученной в работе [14], где устойчивость положения равновесия замкнутой системы доказывается для морских судов. Таким образом, доказательство глобально асимптотической устойчивости положения равновесия  $\nu = \mathbf{0}$ ,  $\eta = \eta_d$  замкнутой системы (1)—(3) полностью повторяет доказательство, представленное в работе [14]. ■

Эта теорема — в некотором роде продолжение принципа разделения, представленного в работе [9]. Из нее следует, что наблюдатель, матрицы  $K_p, K_d$  и передаточную функцию  $F(s)$  в регуляторе можно настраивать отдельно друг от друга. Имеющаяся свобода в построении передаточной матрицы позволяет обеспечить систему желаемыми динамическими свойствами как относительно высокочастотных компонент внешнего возмущения, так и низкочастотных. В частности, для обеспечения астатизма замкнутой системы, то есть, для обеспечения стремления невязки  $e_\eta = \eta - \eta_d$  к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  при воздействии на систему постоянного возмущения  $d(t) \equiv d_0$  используется следующая теорема. Ее формулировка совпадает с формулировкой аналогичной теоремы для морского судна из [15], но рассматриваемые объекты соответствуют модели подводного аппарата.

**Теорема 2:** Если выполняется следующее условие

$$\det \begin{pmatrix} -D & -J^T(\eta_d)K_1 \\ J(\eta_d) & -K_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (10)$$

и если передаточная матрица  $F(s)$  удовлетворяет равенству

$$F(0) = K_{\Delta},$$

где

$$K_{\Delta} = -(D + K_d)J^T(\eta_d)K_2 - J^T(\eta_d)(K_p + K_1),$$

тогда система (1)—(3) является астатической относительно вектора невязки  $e_{\eta} = \eta - \eta_d$  для любого  $d_0 \in \mathbb{R}^6$ .

**Доказательство:** Предположим, что положение равновесия  $\nu = 0, \eta = \eta_d$  замкнутой системы (1)—(3) существует при некотором фиксированном внешнем возмущении  $d(t) \equiv d_0$ . Рассмотрим систему (4) в положении равновесия

$$\begin{aligned} 0 &= -D\varepsilon_{\nu} - J^T(\eta_d)K_1\varepsilon_{\eta} + d_0, \\ 0 &= J(\eta_d)\varepsilon_{\nu} - K_2\varepsilon_{\eta}. \end{aligned}$$

Учитывая первое условие теоремы, правомерно утверждать, что приведенная выше система имеет единственное решение  $(\varepsilon_{\nu 0}^T \ \varepsilon_{\eta 0}^T)^T$  при любом  $d_0 \in \mathbb{R}^6$ .

Теперь рассмотрим уравнения наблюдателя и регулятора (2)—(3) для положения равновесия

$$\begin{aligned} 0 &= -Dz_{\nu} - g(\eta_d) + \tau + J^T(\eta)K_1\varepsilon_{\eta 0}, \\ 0 &= J(\eta_d)z_{\nu} + K_2\varepsilon_{\eta 0}, \\ \tau &= g(\eta_d) - K_d z_{\nu} - J^T(\eta_d)K_p(z_{\eta} - \eta_d) + F(0)\varepsilon_{\eta 0}. \end{aligned}$$

Из данной системы с помощью простых математических действий можно получит второе условие теоремы:  $F(0) = K_{\Delta}$ .

Из доказательства теоремы видно, что два условия, приведенные в ее формулировке, гарантируют нулевую ошибку  $e_{\eta} = \eta - \eta_d$  при  $t \rightarrow +\infty$ , так как  $e_{\eta} = \varepsilon_{\eta} - \varepsilon_{\eta d}$ . Это эквивалентно тому, что для каждого постоянного внешнего возмущения  $d(t) \equiv d_0$  управление  $\tau$ , определенное формулой (3), обеспечивает астатизм замкнутой системы. ■

Следует отметить, что самый простой способ выполнения условий теоремы — это применение регулятора без динамики, то есть использование  $F(s) \equiv K_{\Delta}$ .

### 2. 3. Обеспечение экономичного режима работы регулятора

Основная задача конструирования регулятора (3) — это обеспечение экономичного режима работы, иначе говоря результатом применения данного регулятора должна быть малая реакция приводов на достаточно высокие частоты волнового спектра. При этом он должен гарантировать асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\nu = \mathbf{0}, \eta = \eta_d$  замкнутой системы (1)—(3) и доставлять свойство астатизма, что эквивалентно выполнению условий теорем 1 и 2. С математической точки зрения имеем задачу оптимизации (6).

#### 2. 3. 1. Случай одной доминирующей частоты волнового спектра

Для начала рассмотрим решение задачи, предполагая, что воздействие волн на объект определено единственной доминирующей частотой  $\omega_0$ . В этом случае высокочастотная часть внешних возмущений может быть представлена как вектор

$$d(t) = a_d \sin(\omega_0 t),$$

где  $a_d \in \mathbb{R}^6$  — вектор амплитуд. Определим функционал интенсивности управления как  $R(F) = \|a_{\tau}(F, \omega_0, \eta_d)\|$ , где  $a_{\tau}(F, \omega_0, \eta_d) \in \mathbb{R}^6$  — вектор интенсивности управляющего воздействия для замкнутой системы (1)—(3) относительно заданного внешнего возмущения.

Для дальнейшего рассмотрения оптимизационной задачи сделаем некоторые предварительные преобразования. Введем обозначение

$$e = \eta - \eta_d \Rightarrow \dot{e} = \dot{\eta}, \eta = e + \eta_d.$$

Это позволит переписать систему (1), используя вектор состояний  $(\nu^T | e^T)^T$ , в следующем виде:

$$\begin{aligned} M\dot{\nu} &= -D\nu - g(\eta) + \tau + d(t); \\ \dot{e} &= J(e + \eta_d)\nu. \end{aligned} \tag{11}$$



Используя обозначение для ошибки позиционирования, введем вспомогательную переменную  $z_e$ , определяемую формулой

$$z_e = z_\eta - \eta_d \Rightarrow \dot{z}_e = \dot{z}_\eta, z_\eta = z_e + \eta_d.$$

Очевидно, имеют место следующие равенства:

$$\epsilon_\eta = \eta - z_\eta = e + \eta_d - z_e - \eta_d = e - z_e,$$

которые дают возможность переписать систему для наблюдателя (2) в виде

$$\begin{aligned} M\dot{z}_\nu &= -Dz_\nu - g(\eta) + \tau + J^T(e + \eta_d)K_1(e - z_e), \\ \dot{z}_e &= J(e + \eta_d)z_\nu + K_2(e - z_e). \end{aligned} \quad (12)$$

Систему (12) можно принять как асимптотический наблюдатель для уравнений динамики (11). В сущности, векторы ошибок  $\epsilon_\nu = \nu - z_\nu$ ,  $\epsilon_e = e - z_e$  с (11), (12) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} M\dot{\epsilon}_\nu &= -D\epsilon_\nu - J^T(e + \eta_d)K_1\epsilon_e + d(t), \\ \dot{\epsilon}_e &= J(e + \eta_d)\epsilon_\nu - K_2\epsilon_e, \end{aligned} \quad (13)$$

которая, аналогично системе (4), имеет асимптотически устойчивое нулевое положение равновесия при  $d(t) \equiv 0$ , из чего следует, что  $z_\nu \rightarrow \nu$ ,  $z_e \rightarrow e$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Следует отметить, что равенства (12), (13) и (3) полностью определяют управляющее воздействие для системы динамического позиционирования в каждый момент времени. Запишем эти уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} M\dot{\epsilon}_\nu &= -D\epsilon_\nu - J^T(\eta)K_1\epsilon_e + d(t), \\ \dot{\epsilon}_e &= J(\eta)\epsilon_\nu - K_2\epsilon_e, \\ \xi &= F(s)\epsilon_e, \\ M\dot{z}_\nu &= -(D + K_d)z_\nu - J^T(\eta)K_p z_e + J^T(\eta)K_1\epsilon_e + \xi, \\ \dot{z}_e &= J(\eta)z_\nu + K_2\epsilon_e, \\ \tau &= g(\eta) - K_d z_\nu - J^T(\eta)K_p z_e + \xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Перепишем последние три уравнения системы (14) в матричном виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z}_\nu \\ \dot{z}_e \end{pmatrix} &= A_z(\eta) \begin{pmatrix} z_\nu \\ z_e \end{pmatrix} + B_z(\eta) \begin{pmatrix} \epsilon_e \\ \xi \end{pmatrix}, \\ \tau &= C_z(\eta) \begin{pmatrix} z_\nu \\ z_e \end{pmatrix} + D_z \begin{pmatrix} \epsilon_e \\ \xi \end{pmatrix} + g(\eta), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$A_z(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} -M^{-1}(D + K_d) & -M^{-1}J^T(\boldsymbol{\eta})K_p \\ J(\boldsymbol{\eta}) & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$B_z(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} M^{-1}J^T(\boldsymbol{\eta})K_1 & M^{-1} \\ K_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$C_z(\boldsymbol{\eta}) = (-K_d \mid -J^T(\boldsymbol{\eta})K_p), \quad D_z = (\mathbb{O} \mid E).$$

Следующая теорема решает задачу оптимизации (6) для заданной доминирующей частоты волн  $\omega_0$ .

**Теорема 3:** Если блок  $P_2(s, \boldsymbol{\eta}_d)$  размерности  $6 \times 6$  матрицы

$$P(s, \boldsymbol{\eta}_d) = C_z(\boldsymbol{\eta}_d)(E_{12}s - A_z(\boldsymbol{\eta}_d))^{-1}B_z(\boldsymbol{\eta}_d) + D_z = (P_1(s, \boldsymbol{\eta}_d) \mid P_2(s, \boldsymbol{\eta}_d)) \quad (16)$$

где

$$A_z(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} -M^{-1}(D + K_d) & -M^{-1}J^T(\boldsymbol{\eta})K_p \\ J(\boldsymbol{\eta}) & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad B_z(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} M^{-1}J^T(\boldsymbol{\eta})K_1 & M^{-1} \\ K_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$C_z(\boldsymbol{\eta}) = (-K_d \mid -J^T(\boldsymbol{\eta})K_p), \quad D_z = (\mathbb{O} \mid E).$$

удовлетворяет условию

$$\det P_2(j\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) \neq 0,$$

тогда существует передаточная матрица  $F = F^* \in \Omega_c$  регулятора такая, что

$$\mathbf{a}_\tau(F, \omega, \boldsymbol{\eta}_d) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d).$$

**Доказательство:** Систему (15), используя передаточную матрицу (16), можно представить как

$$\boldsymbol{\tau} = P(s, \boldsymbol{\eta}_d) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}).$$

Принимая во внимание (16) и равенство  $\boldsymbol{\xi} = F(s)\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , перепишем формулу для  $\boldsymbol{\tau}$ , представленную выше

$$\boldsymbol{\tau} = (P_1(s, \boldsymbol{\eta}_d) + P_2(s, \boldsymbol{\eta}_d)F(s))\boldsymbol{\varepsilon}_e + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}).$$

Из вида данной формулы можно сделать вывод, что для любого асимптотически устойчивого регулятора с передаточной матрицей  $F(s)$ , удовлетворяющей условию

$$F = F^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) = -P_2^{-1}(j\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d)P_1(j\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d), \quad (17)$$

для вектора интенсивности управляющего воздействия верно равенство  $\mathbf{a}_\tau(F, \omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d)$ . С точки зрения динамики АПА такое управление является оптимальным, так как оно противодействует единственной внешней силе, действующей на объект, что гарантирует сохранение объекта в состоянии покоя при достижении желаемого положения. Для сохранения АПА в состоянии покоя невозможно использовать управление, меньшее по норме, так как в таком случае действие гравитационных сил на аппарат будет сильнее действия управления и объект будет всплывать/тонуть в зависимости от его характеристик.

Далее докажем существование такой матрицы  $F = F^* \in \Omega_c$ . В первую очередь необходимо вспомнить, что кроме удовлетворения условию (17) матрица  $F(s) = \{F_i(s)\}_{i=\overline{1,6}}$ , где  $F_i(s) = (f_{i1}(s), f_{i2}(s), f_{i3}(s), f_{i4}(s), f_{i5}(s), f_{i6}(s))$  —  $i$ -ая строка передаточной матрицы  $F(s)$ , должна обеспечивать устойчивость и астатизм системы. То есть необходимо найти такую матрицу динамического фильтра

$$\boldsymbol{\xi} = F(s)\boldsymbol{\epsilon}_e = F(s)\boldsymbol{\epsilon}_\eta, \quad (18)$$

чтобы, с теоремой 2, выполнялись следующие условия:

$$F(0) = K_\Delta = \{K_{\Delta i}\}_{i=\overline{1,6}}, \quad F(j\omega_0) = F^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) = \{F_i^*\}_{i=\overline{1,6}}, \quad (19)$$

где  $K_{\Delta i}$  и  $F_i^* = F_i^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d)$  —  $i$ -ые строки матриц  $K_\Delta$  и  $F^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d)$  соответственно. Более того, общий знаменатель  $f_{ik}(s)$  ( $i, k = \overline{1,6}$ ) должен быть гурвицевым для удовлетворения условий теоремы 1.

с введенными обозначениями (19)  $i$ -ую компоненту выхода фильтра (18)  $\xi_i$  можно представить в виде системы в tf-форме

$$\xi_i = F_i(s)\boldsymbol{\epsilon}_\eta, \quad i = \overline{1,6},$$

которой соответствует система в ss-форме

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= \alpha_i p_i + \beta_i \varepsilon_\eta, \\ \xi_i &= \gamma_i p_i + \mu_i \varepsilon_\eta.\end{aligned}\quad (20)$$

Далее покажем, что равенства (19) могут быть удовлетворены передаточной матрицей со строками

$$F_i(s) = \gamma_i(E_2 s - \alpha_i)^{-1} \beta_i + \mu_i, \quad i = \overline{1,6}, \quad (21)$$

которые соответствуют системе (20), где  $p_i \in \mathbb{R}^2$ . Для этого выберем любые гурвицевы матрицы  $\alpha_i$  размерности  $2 \times 2$  ( $i = \overline{1,6}$ ). Введя обозначения

$$R_i(\eta_d) = \operatorname{Re} F_i^*(\omega_0, \eta_d), \quad I_i(\eta_d) = \operatorname{Im} F_i^*(\omega_0, \eta_d), \quad i = \overline{1,6},$$

перепишем условия (19)

$$F_i(0) = K_{\Delta i}, \quad F_i(j\omega_0) = R_i(\eta_d) + I_i(\eta_d)j, \quad i = \overline{1,6},$$

при этом, учитывая (21), окончательно получаем

$$\begin{aligned}-\gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i + \mu_i &= K_{\Delta i}, \quad i = \overline{1,6}, \\ \gamma_i (E_2 j\omega_0 - \alpha_i)^{-1} + \mu_i &= R_i(\eta_d) + I_i(\eta_d)j.\end{aligned}\quad (22)$$

Обратим внимание, что матрицы  $E_2 j\omega_0 - \alpha_i$  являются невырожденными (так как  $\alpha_i$  — гурвицевы), и определим

$$\begin{aligned}\alpha_{Ri}(\eta_d) &= \operatorname{Re}(E_2 j\omega_0 - \alpha_i)^{-1}, \\ \alpha_{Ii}(\eta_d) &= \operatorname{Im}(E_2 j\omega_0 - \alpha_i)^{-1}.\end{aligned}\quad (23)$$

После постановки (23) в (22), выражения  $\mu_i$  из первого набора уравнений (22) и его подстановки во второй, выделения действительной и мнимой частей получим

$$\begin{aligned}\gamma_i (\alpha_{Ri} + \alpha_i^{-1}) \beta_i &= R_i(\eta_d) - K_{\Delta i}, \\ \gamma_i \alpha_{Ii} \beta_i &= I_i(\eta_d), \quad i = \overline{1,6}.\end{aligned}\quad (24)$$

Выберем в качестве  $\gamma_i$  любые векторы-строки размерности  $1 \times 2$ , например,  $\gamma_i = (0, 1)$ . Отношения (24) для каждого  $i$  представляют системы из двенадцати уравнений с двенадцатью неизвестными (компонентами матриц  $\beta_i$  размерности  $2 \times 6$ ). Единственными решениями таких систем при условии, что матрицы систем не является вырожденными (этого всегда

можно добиться, так как матрицы  $\alpha_i$  выбираются любыми гурвицевыми), являются

$$\beta_i = \beta_i^*(\eta_d) = \begin{pmatrix} \gamma_i(\alpha_{Ri} + \alpha_i^{-1}) \\ \gamma_i \alpha_{Li} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_i(\eta_d) - K_{\Delta i} \\ I_i(\eta_d) \end{pmatrix}, i = \overline{1,6}. \quad (25)$$

Окончательно, из первого равенства системы (22) можно найти  $\mu_i$

$$\mu_i = \mu_i^*(\eta_d) = K_{\Delta i} + \gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i^*(\eta_d), i = \overline{1,6}. \quad (26)$$

Таким образом, определены все матрицы для (20) при  $i = \overline{1,6}$ , что позволяет записать оптимальный динамический фильтр (18), соответствующий доминирующей частоте  $\omega_0$ , в ss-форме

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \\ \dot{p}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1^*(\eta_d) \\ \beta_2^*(\eta_d) \\ \beta_3^*(\eta_d) \\ \beta_4^*(\eta_d) \\ \beta_5^*(\eta_d) \\ \beta_6^*(\eta_d) \end{pmatrix} \varepsilon_\eta, \quad (27)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1^*(\eta_d) \\ \mu_2^*(\eta_d) \\ \mu_3^*(\eta_d) \\ \mu_4^*(\eta_d) \\ \mu_5^*(\eta_d) \\ \mu_6^*(\eta_d) \end{pmatrix} \varepsilon_\eta.$$

Передаточная матрица  $F(s)$ , соответствующая данной системе, будет удовлетворять условиям (19) и, следовательно, будет решением задачи оптимизации (6) при условии наличия внешнего возмущения с доминирующей частотой  $\omega_0$ . ■

2. 3. 2. Случай конечного числа доминирующих частот волнового спектра

В реальных условиях внешнее возмущение определяется единственной доминирующей частотой в редких случаях, поэтому для приближения

условий к действительным рассмотрим случай, когда волновой спектр определяется конечным числом доминирующих частот  $\omega_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . При данном предположении высокочастотная часть внешних возмущений может быть представлена как вектор

$$\mathbf{d}(t) = A_d \sin(\boldsymbol{\omega}t),$$

где  $A_d \in \mathbb{R}^{6 \times N}$  — матрица амплитуд,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$  — вектор частот.

Определим функционал интенсивности управления как

$$R(F) = \|\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d)\|,$$

где  $\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d) \in \mathbb{R}^6$  — вектор интенсивности управляющего воздействия для замкнутой системы (1)—(3) относительно заданного внешнего возмущения.

Далее представлена теорема аналогичная теореме 3, но с учетом представленных выше условий на внешнее возмущение.

**Теорема 4:** Если выполнено условие теоремы 3 и если матрицы размерности  $2N \times 2N$

$$A_i = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} \gamma_i(\alpha_{i1}^R(\boldsymbol{\eta}_d) + \alpha_i^{-1}) \\ \gamma_i \alpha_{i1}^I(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \dots \\ \gamma_i(\alpha_{iN}^R(\boldsymbol{\eta}_d) + \alpha_i^{-1}) \\ \gamma_i \alpha_{iN}^I(\boldsymbol{\eta}_d) \end{array} \right) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, 6}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ik}^R(\boldsymbol{\eta}_d) &= \operatorname{Re}(E_{2N} j\omega_k - \alpha_i)^{-1}, \\ \alpha_{ik}^I(\boldsymbol{\eta}_d) &= \operatorname{Im}(E_{2N} j\omega_k - \alpha_i)^{-1}, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (28)$$

являются невырожденными, тогда существует передаточная матрица  $F = F^* \in \Omega_c$  регулятора такая, что

$$\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d),$$

при этом  $\alpha_i$  — любые гурвицевы матрицы размерности  $2N \times 2N$  ( $i = \overline{1, 6}$ ),  $\gamma_i$  — любые векторы-строки размерности  $1 \times 2N$ , например,  $\gamma_i = (0, 0, \dots, 1)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ .

**Доказательство:** В отличие от теоремы 3 фильтр (20) должен быть сконструирован не только для единственной частоты  $\omega_0$ , а для набора частот  $\omega_k, k = \overline{1, N}$ . Чтобы добиться такого результата, предположим, что векторы состояний систем (20) имеют размерность  $\rho = 2N$ , то есть  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^\rho, i = \overline{1, 6}$ , и при этом

$$F_i(s) = \gamma_i(E_\rho s - \alpha_i)^{-1} \beta_i + \mu_i, i = \overline{1, 6}.$$

Соответственно, условия корректировки  $i$ -ой компоненты фильтра (18)  $\xi_i$  относительно  $k$ -ой частоты  $\omega_k$  примут следующий вид:

$$\begin{aligned} -\gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i + \mu_i &= K_{\Delta i}, i = \overline{1, 6}, k = \overline{1, N}, \\ \gamma_i (E_{2N} j \omega_k - \alpha_i)^{-1} + \mu_i &= R_{ik}(\boldsymbol{\eta}_d) + I_{ik}(\boldsymbol{\eta}_d) j, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$R_{ik}(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Re} F_i^*(\omega_k, \boldsymbol{\eta}_d), I_{ik}(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Im} F_i^*(\omega_k, \boldsymbol{\eta}_d), i = \overline{1, 6}.$$

Учитывая, что матрицы  $E_{2N} j \omega_k - \alpha_i$  являются невырожденными, и подставляя введенные обозначения (28) в (29), выражая  $\mu_i$  из первого набора уравнений (29) и подставляя во второй, выделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_i (\alpha_{ik}^R + \alpha_i^{-1}) \beta_i &= R_{ik}(\boldsymbol{\eta}_d) - K_{\Delta i}, \\ \gamma_i \alpha_{ik}^I \beta_i &= I_{ik}(\boldsymbol{\eta}_d), i = \overline{1, 6}, k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (30)$$

Выберем любые гурвицевы матрицы  $\alpha_i$  размерности  $2N \times 2N$  и любые векторы-строки  $\gamma_i$  размерности  $1 \times 2N$ , например,  $\gamma_i = (0, 0, \dots, 1), i = \overline{1, 6}$ . Отношения (30) при каждом  $i$  представляют собой систему из  $2N \times 6$  уравнений с  $2N \times 6$  неизвестными, которыми являются компоненты матриц  $\beta_i$ ,

$$A_i \beta_i = B_i$$

где  $A_i$  — матрицы из формулировки теоремы,  $B_i$  имеет следующий вид:

$$B_i = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} R_{i1}(\boldsymbol{\eta}_d) - K_{\Delta i} \\ I_{i1}(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \dots \\ R_{iN}(\boldsymbol{\eta}_d) - K_{\Delta i} \\ I_{iN}(\boldsymbol{\eta}_d) \end{array} \right) \end{pmatrix}, i = \overline{1,6}.$$

Эта система имеет единственное решение

$$\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\beta}_i^*(\boldsymbol{\eta}_d) = A_i^{-1} B_i. \quad (31)$$

Используя этот результат, можно найти  $\boldsymbol{\mu}_i$  из системы (29)

$$\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_i^*(\boldsymbol{\eta}_d) = K_{\Delta i} + \gamma_i \boldsymbol{\alpha}_i^{-1} \boldsymbol{\beta}_i^*(\boldsymbol{\eta}_d), i = \overline{1,6}. \quad (32)$$

Таким образом, для заданных доминирующих частот волнового спектра оптимальный регулятор (27) может быть построен, используя формулы (31), (32). ■



### ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ SIMULINK

Для иллюстрации эффективности данного подхода проведем моделирование в среде Simulink на примере АПА Kambara, исследованного в работе [12]. Аппарат имеет длину, ширину и высоту 1,2 м, 1,5 м и 0,9 м соответственно, масса аппарата равна 117 кг. Центр плавучести относительно неподвижной системы координат с началом в центре тяжести имеет координаты  $r_B = (-0,017; 0; -0,115)^T$ . Сила тяжести и сила плавучести соответственно равны  $W = 1148 \text{ N}$  и  $B = 1108 \text{ N}$ .

Рассматриваемый аппарат является неполноприводным: Kambara имеет пять подруливающих устройств, установленных в двух отдельных плоскостях, которые позволяют ему двигаться с пятью степенями свободы — совершать прямолинейное движение в направлении осей  $x$  и  $z$  и поворот вокруг осей  $x, y$  и  $z$ . У аппарата нет подруливающего устройства, которое создает тягу в направлении оси  $y$ , поэтому нельзя гарантировать достижение желаемого положения по этой оси. Для учета неполноприводности аппарата в управление (3) вторая компонента должна быть нулевой.

При теоретическом анализе данного подхода рассматривалось упрощенное уравнение динамики аппарата (1), но для приближения условий к реальным при моделировании рассмотрим общую систему

$$\begin{aligned} M\dot{\nu} + C(\nu)\nu + D(\nu)\nu + g(\eta) &= \tau + d(t), \\ \dot{\eta} &= J(\eta)\nu. \end{aligned} \tag{33}$$

Вид матриц  $M$ ,  $C(\nu)$ ,  $D(\nu)$  и вектора  $g(\eta)$  представлен в [12]. Применение теории, построенной на упрощенной модели, к более полной и точной модели часто используется в прикладной математике. Во-первых, многие реальные явления невозможно или очень сложно выразить с помощью математического аппарата, что неизбежно ведет к рассмотрению упрощенной модели реального объекта. Во-вторых, слишком подробная модель усложняет или делает недоступным строгое доказательство теории, которая при применении в реальных условиях дает необходимые результаты. В данном случае наблюдатель и регулятор строится на основе упрощенного уравнения

динамики, а моделирование проводится с использованием общего уравнения, которое имитирует лишь достаточно хорошее приближение реальной динамики аппарата.

Связь сил, создаваемых двигателями, и сил и моментов, действующих на динамику скоростных компонент, описывается выражением

$$\boldsymbol{\tau} = L \cdot \boldsymbol{u},$$

где  $L$  — матрица преобразования [12],  $\boldsymbol{u}$  — силы, создаваемые двигателями.

Обратная связь описывается выражением

$$\boldsymbol{u} = (L^+L)^{-1}L^+\boldsymbol{\tau}.$$

где  $L^+$  — псевдообратная матрица.

Начальное положение аппарата принималось равным  $\eta_0 = (1, 0, 2, 0, 0, 1)$ , желаемое положения —  $\eta_d = (6, 0, 5, 0, 0, 0)$ .

Для моделирования волн использовались суммы передаточных функций вида

$$h_i(s) = \frac{\sigma s}{s^2 + 2\zeta\omega_i s + \omega_i^2}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Такой подход к учету влияния внешнего возмущения подробно представлен в [5]. Каждая передаточная функция соответствует влиянию волн одной частоты. В качестве доминирующих частот волнового спектра взяты  $\omega_1 = 0,6283$  рад/с ,  $\omega_2 = 0,7628$  рад/с ,  $\omega_3 = 0,2762$  рад/с . П а р а м е т р , отвечающий за интенсивность волн, принимался  $\sigma = 1$  , параметры режекторного фильтра  $\zeta_{ni} = 20$ ,  $\omega_{ci} = 2$ ,  $i = \overline{1,3}$  , коэффициент демпфирования  $\zeta = 0,5$ .

Матрицы  $K_1$ ,  $K_2$  для наблюдателя (2) взяты следующим образом [8]:

$$K_1 = E_{6 \times 6}, K_2 = \begin{pmatrix} 30,0063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35,3594 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15,9928 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При моделировании в волновой модели используется гауссовый белый шум, хотя при анализе шум принимался равным нулю. Это сделано для демонстрации хорошей работы наблюдателя и регулятора при наличии стохастического шума. Матрицы управляющего воздействия (3) выбраны в следующем виде:

$$K_d = 16E_{6 \times 6}, K_p = 32E_{6 \times 6}.$$

В качестве матриц  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1,6}$  взяты матрицы размерности  $6 \times 6$  в форме Фробениуса с собственными числами

$$\begin{aligned} i = 1 &\Leftrightarrow [-0,228; -0,216; -0,235; -0,213; -0,207; -0,205], \\ i = 2 &\Leftrightarrow [-0,190; -0,183; -0,186; -0,184; -0,197; -0,185], \\ i = 3 &\Leftrightarrow [-0,242; -0,248; -0,244; -0,238; -0,242; -0,286], \\ i = 4 &\Leftrightarrow [-0,253; -0,250; -0,248; -0,245; -0,243; -0,240], \\ i = 5 &\Leftrightarrow [-0,208; -0,205; -0,202; -0,198; -0,195; -0,192], \\ i = 6 &\Leftrightarrow [-0,307; -0,301; -0,294; -0,288; -0,285; -0,282]. \end{aligned}$$

Векторы  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1,6}$  принимаются равными  $\gamma_i = \gamma_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ . Вычисления матриц  $\beta, \mu$  проводятся в среде MATLAB (см. Приложение А). Модель системы в Simulink приведена в приложении Б. Внутреннее строение блоков *plant (AUV)*, *observer*, *controller*, построенных в соответствии с системами (33), (2), (3) соответственно, более подробно представлено в приложении В.

Позиционирование аппарата начинается в 50 с. Кроме того для иллюстрации астатизма замкнутой системы, начиная с 25 с на аппарат действует постоянное возмущение в направлении осей  $x$  и  $z$ . Стоит отметить, что данный скачок недостижим в реальных условиях, однако для проверки регулятора во время имитационного моделирования использование такого рода сигналов возможно.

Далее рассмотрим результат моделирования. Аппарат действительно устанавливается в заданной позиции с заданной ориентацией с учетом неуправляемости по компоненте  $y$  (см. Приложение Г), при этом интенсивность управления при подавлении высокочастотных внешних возмущений мала (см. Приложение Д).

Для сравнения приведена интенсивность управления при замене передаточной матрицы  $F(s)$  в законе управления на постоянную матрицу  $K_{\Delta}$  (см. Приложение Е). При такой замене замкнутая система остается устойчивой, регулятор так же доставляет астатизм замкнутой системе, но его реакция на высокочастотные возмущения имеет амплитуду значительно больше, чем в первом случае, что в практических случаях нежелательно во избежание износа приводов и увеличения расхода энергии.

Также приведены графики изменения компонент положения и ориентации АПА при отсутствии поправки  $F(s)(\eta - z_{\eta})$  (см. Приложение Ж). Регулятор в таком случае не подавляет постоянное возмущение, из-за чего аппарат отклоняется от желаемого положения, замкнутая система не является астатической.

Эффективность применения приведенного подхода очевидна.

## ВЫВОДЫ

Предложенный подход к созданию системы динамического позиционирования позволяет обеспечить замкнутую систему управления следующими свойствами:

1. Управление стабилизирует аппарат в заданном положении.
2. Замкнутая система является астатической, то есть аппарат не отклоняется от желаемого положения при воздействии на него постоянного возмущения.
3. Управление осуществляет экономичный режим работы приводов при воздействии на объект высокочастотного возмущения заданного спектра.
4. Управление имеет достаточно простую структуру с легко настраиваемыми параметрами. Матрицы наблюдателя  $K_1$ ,  $K_2$ , матрицы регулятора  $K_p$ ,  $K_d$  и передаточную матрицу  $F(s)$  можно настраивать отдельно друг от друга для получения желаемого переходного процесса системы.

Сложность, которая может возникнуть при применении данного метода, — определение доминирующих частот волнового спектра на основе измерения внешнего возмущения, например, с помощью быстрого дискретного преобразования Фурье [2] или алгоритма [3], что само по себе является нетривиальной задачей. Кроме того не для всех аппаратов возможно измерить силу внешнего воздействия. Если рассматриваемый объект не оснащен измерителем воздействия подводных течений и волн на аппарат, то рассматриваемый подход можно применить, заменив передаточную матрицу  $F(s)$  в (3), которая строится на основе доминирующих частот, на постоянную матрицу  $K_\Delta$ , которая вычисляется при помощи известных матриц уравнения движения аппарата, наблюдателя и регулятора. Такое управление будет доставлять астатизм замкнутой системы, но не будет гарантировать экономичный режим работы приводов.

Если известен спектр доминирующих частот, то введенная поправка играет значительную роль при практическом применении данного подхода к синтезу закона управления.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения проведенных исследований получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Рассмотрена модель автономного подводного аппарата в мелководной зоне и предложено усовершенствование системы динамического позиционирования, разработанной в [8], [9], путем введения поправки.

2. Получены условия, при которых введенная поправка не нарушает динамических свойств исходной системы, а также доставляет экономичный режим работы приводов при известных доминирующих частотах волнового спектра и астатизм замкнутой системы.

3. Разработан компьютерный имитационный моделирующий комплекс, в котором реализована работа полученной системы.

4. Для конкретного аппарата, управляемого в режиме динамического позиционирования, проведен анализ его переходного процесса и интенсивности работы управляющих компонентов и сделаны выводы о преимуществах системы с введенной поправкой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веремей, Е. И. Линейные системы с обратной связью: учебное пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 448 с.
2. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Обработка сигналов и проектирование фильтров: учебное пособие. Москва: СОЛОН-ПРЕСС, 2009. 577 с.
3. A robust algorithm for identification of the frequency of a sinusoidal signal / S. V. Aranovskiy et al. // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. Vol. 46. No. 3. P. 39–44.
4. Bandara D. Technologies for under-ice AUV navigation // IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles (AUV), Tokyo, Japan, November 6–9, 2016. 2016. P. 108–114.
5. Fossen T. I. Guidance and Control of Ocean Vehicles. New York: John Wiley & Sons, 1994. 480 p.
6. Irwin R. P., Chauvet C. Quantifying hydrodynamic coefficients of complex structures // OCEANS 2007 - Europe, 2007. P. 1-5.
7. The calculation of hydrodynamic coefficients for underwater vehicles: Report / D. A. Jones et al. // DSTO Platforms Sciences Laboratory, Fishermans Bend, Australia, 2002. 31 p.
8. Liu S., Wang D., Poh E. K. A nonlinear observer for AUVs in shallow water environment // 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2004. Vol. 2. P. 1130–1135.
9. Dynamic positioning of AUVs in shallow water environment: Observer and controller design / S. Liu et al. // Proceedings, 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. 2005. Vol. 1. P. 705–710.
10. Loria A., Fossen T. I., Panteley E. A separation principle for dynamic positioning of ships: Theoretical and experimental results // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2000. Vol. 8. No 2. P. 332–343.

11. Severholt J. Generic 6-DOF added mass formulation for arbitrary underwater vehicles based on existing semi-empirical methods: Master's Degree Project. Royal Institute of Technology, Sweden, 2017. 50 p.
12. Silpa-Anan C. Autonomous underwater robot: Vision and control: Master's thesis. The Australian National University, Canberra, 2001. 158 p. 9
13. Strand J. P. Nonlinear position control system design for marine vessels: Ph.D dissertation. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 1999. 184 p.
14. Veremey E. Dynamical correction of positioning control laws // 9th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems. 2013. Vol. 25. Issue 33. P. 31–36.
15. Veremey E. I., Sotnikova M. V. Optimal filtering correction for marine dynamical positioning control system // Journal of Marine Science and Application. 2016. Vol. 15. P. 452–462.



# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение А

```
clear
% MODEL COEFFICIENTS
M = diag([117, 117, 117, 10.7, 11.8, 13.4])+diag([58.4, 23.8,
23.8, 3.38, 1.18, 2.67]); % inertia and added mass
inv_M = inv(M);
D = diag([120,90,150,15,15,18]); % constant part of damping
matrix
D_coeff = [90 0 0 0 0 0; 0 90 0 0 0 0; 0 0 120 0 0 0; 0 0 0 10 0
0; 0 0 0 0 12 0; 0 0 0 0 0 15]; % linear coefficients of damping
matrix
W = 1148; % vehicle weight
B_f = 1108; % buoyancy force
x_b= -0.017; z_b = -0.015; % coordinates of center of buoyancy
% vector of restoring forces and moments
g = @(phi, theta) [(W-B_f)*sin(theta); -(W-
B_f)*cos(theta)*sin(phi);...
-(W-B_f)*cos(theta)*cos(phi);
-z_b*B_f*cos(theta)*sin(phi);...
-z_b*B_f*sin(theta)-x_b*B_f*cos(theta)*cos(phi);
x_b*B_f*cos(theta)*sin(phi)];
gsym=g(sym('x'), sym('y'));
matlabFunction(gsym, 'File', 'vector_g');
% transfer matrix
J = @(phi, theta, psi) [cos(psi)*cos(theta)...
(cos(psi)*sin(theta)*sin(phi)-sin(psi)*cos(phi))...
(sin(psi)*sin(phi)+cos(psi)*cos(phi)*sin(theta)) 0 0 0;...
sin(psi)*cos(theta)...
(cos(psi)*cos(phi)+sin(phi)*sin(theta)*sin(psi))...
(sin(theta)*sin(psi)*cos(phi)-cos(psi)*sin(phi)) 0 0 0;...
-sin(theta) cos(theta)*sin(psi) cos(theta)*cos(psi) 0 0 0;
0 0 0 1 sin(phi)*tan(theta) cos(phi)*tan(theta);...
0 0 0 0 cos(phi) -sin(phi);...
0 0 0 0 sin(phi)/cos(theta) cos(phi)/cos(theta)];
Jsym=J(sym('x'), sym('y'), sym('z'));
matlabFunction(Jsym, 'File', 'matrix_J');
% coriolis matrix
C = @(u, v, w, p, q, r) [0 0 0 0 140.8*w -140.8*v;...
0 0 0 -140.8*w 0 175.4*u;...
0 0 0 140.8*v -175.4*u 0;...
0 140.8*w -140.8*v 0 16.07*r -12.98*q;...
-140.8*w 0 175.4*u -16.07*r 0 14.08*p;...
140.8*v -175.4*u 0 12.98*q -14.08*p 0];
Csym=C(sym('u'), sym('v'), sym('w'),sym('p'), sym('q'),
sym('r'));
matlabFunction(Csym, 'File', 'matrix_C');
% thrust mapping matrix
L = [1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0; 0 0 -1 -1 -1; 0 0 -0.28 0.28 0; -0.05
-0.05 -0.32 -0.32 0.43; 0.47 -0.47 0 0 0];
```

```

L_plus = (L'*L)\L';
L_tau = (L_plus*L)\L_plus;

eta0 = [1;0;2;0;0;1]; % initial position
etad = [6;0;5;0;0;0]; % desired position

% MODELING OF EXTERNAL DISTURBANCES
w = [0.6283, 0.7628, 0.2762]; % dominant frequencies
dz = 0.5; % damping coefficient
sigma = 1; % parameter of intensity of the waves
nw = 3; % number of dominant frequencies

% OBSERVER'S MATRICES
K2 = [diag([2*w(1)*19+2, 2*w(2)*19+2, 2*w(3)*19+2]) zeros(3);
zeros(3) eye(3)];
K1 = eye(6);

% CONTROLLER'S MATRICES
Kd = 16*eye(6);
Kp = 32*eye(6);

% DEFINITION OF AN ADDITIONAL TERM
Kdelta=-(D+Kd)*(J(etad(4),etad(5),etad(6)))'*K2-
(J(etad(4),etad(5),etad(6)))'*(Kp+K1));

alpha{1}
=compan(poly([-0.228;-0.216;-0.235;-0.213;-0.207;-0.205]));
alpha{2}
=compan(poly([-0.190;-0.183;-0.186;-0.184;-0.197;-0.185]));
alpha{3}
=compan(poly([-0.242;-0.248;-0.244;-0.238;-0.242;-0.286]));
alpha{4}
=compan(poly([-0.253;-0.250;-0.248;-0.245;-0.243;-0.240]));
alpha{5}
=compan(poly([-0.208;-0.205;-0.202;-0.198;-0.195;-0.192]));
alpha{6}
=compan(poly([-0.307;-0.301;-0.294;-0.288;-0.285;-0.282]));

gamma{1}=[0 0 0 0 0 1];
gamma{2}=gamma{1};
gamma{3}=gamma{1};
gamma{4}=gamma{1};
gamma{5}=gamma{1};
gamma{6}=gamma{1};

for i=1:6
    for k=1:nw
        alphaR{i,k}=real(inv(eye(2*nw).*1j.*w(k)-alpha{i}));
        alphaI{i,k}=imag(inv(eye(2*nw).*1j.*w(k)-alpha{i}));
    end
end
end

```

```

%F^*
Az=@(eta) [-M\ (D+Kd) -M\ (J(etad(4), etad(5), etad(6)))' *Kp;
J(etad(4), etad(5), etad(6)) zeros(6)];
Bz=@(eta) [M\ (J(etad(4), etad(5), etad(6)))' *K1 inv(M); K2
zeros(6)];
Cz=@(eta) [-Kd - (J(etad(4), etad(5), etad(6)))' *Kp];
Dz=[zeros(6) eye(6)];
P=@(s, eta_a) Cz(eta_a) * ((eye(12) *s -Az(eta_a)) \Bz(eta_a)) +Dz;
Fstar=@(w0, eta_a) funcF(P(w0*1j, eta_a));

%R, I
for k=1:nw
    Fhelp=Fstar(w(k), etad);
    for i=1:6
        Re{i, k}=real(Fhelp(i, :));
        I{i, k}=imag(Fhelp(i, :));
    end
end

%betta, mu
for i=1:6
    Ahelp=zeros(2*nw, 6);
    for k=1:2:2*nw
        Ahelp(k, :)=gamma{i} * (alphaR{i, (k+1)/2} +inv(alpha{i}));
        Ahelp(k+1, :)=gamma{i} *alphaI{i, (k+1)/2};
    end
    A{i}=Ahelp;
end
for i=1:6
    Bhelp=zeros(2*nw, 6);
    for k=1:2:2*nw
        Bhelp(k, :)=Re{i, (k+1)/2} -Kdelta(i, :);
        Bhelp(k+1, :)=I{i, (k+1)/2};
    end
    B{i}=Bhelp;
end
for i=1:6
    betta{i}=A{i} \B{i};
    mu{i}=Kdelta(i, :) +gamma{i} * ((alpha{i}) \betta{i});
end

% ss-model corresponding to tf-model with transfer matrix F(s)
Ass=[alpha{1} zeros(6) zeros(6) zeros(6) zeros(6) zeros(6);...
zeros(6) alpha{2} zeros(6) zeros(6) zeros(6) zeros(6);...
zeros(6) zeros(6) alpha{3} zeros(6) zeros(6) zeros(6);...
zeros(6) zeros(6) zeros(6) alpha{4} zeros(6) zeros(6);...
zeros(6) zeros(6) zeros(6) zeros(6) alpha{5} zeros(6);...
zeros(6) zeros(6) zeros(6) zeros(6) zeros(6) alpha{6}];...
Bss=[betta{1}; betta{2}; betta{3}; betta{4}; betta{5};
betta{6}];
Css=[gamma{1} zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6)
zeros(1,6)];...

```

```

        zeros(1,6) gamma{2} zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6)
zeros(1,6);...
        zeros(1,6) zeros(1,6) gamma{3} zeros(1,6) zeros(1,6)
zeros(1,6);...
        zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6) gamma{4} zeros(1,6)
zeros(1,6);...
        zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6) gamma{5}
zeros(1,6);...
        zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6) zeros(1,6)
gamma{6}];
Dss=[mu{1}; mu{2}; mu{3}; mu{4}; mu{5}; mu{6}];

```

## Приложение Б

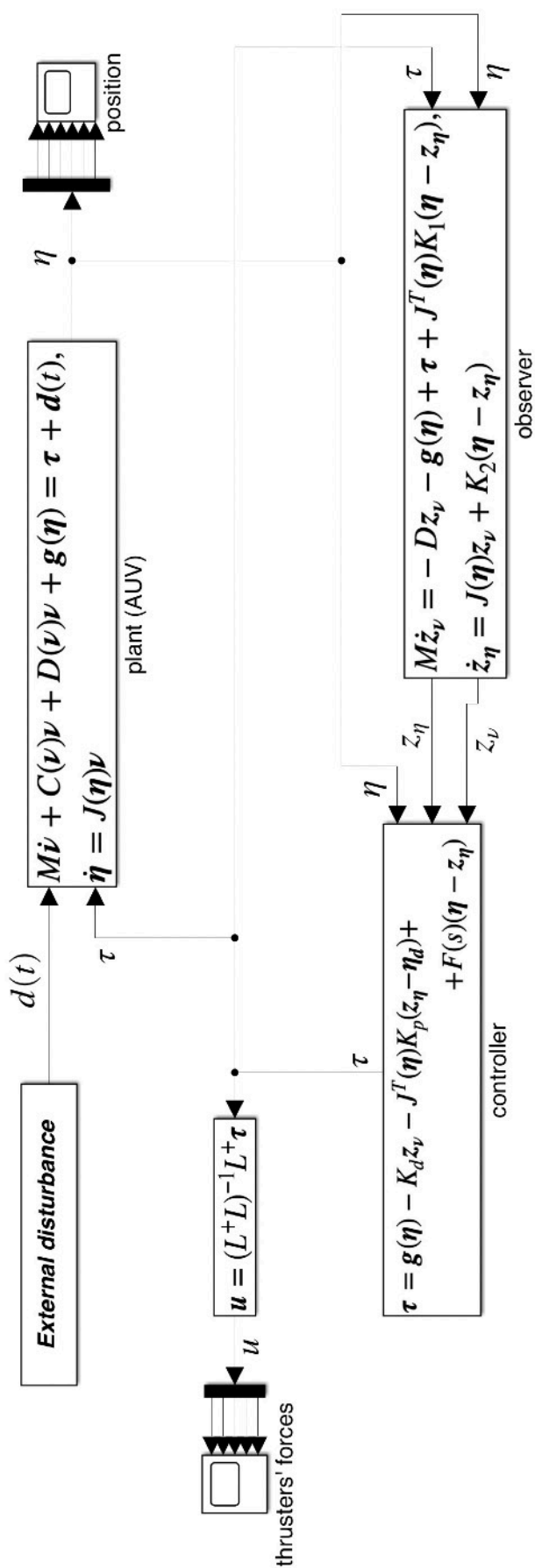


Рисунок 1 — Модель Simulink

## Приложение В

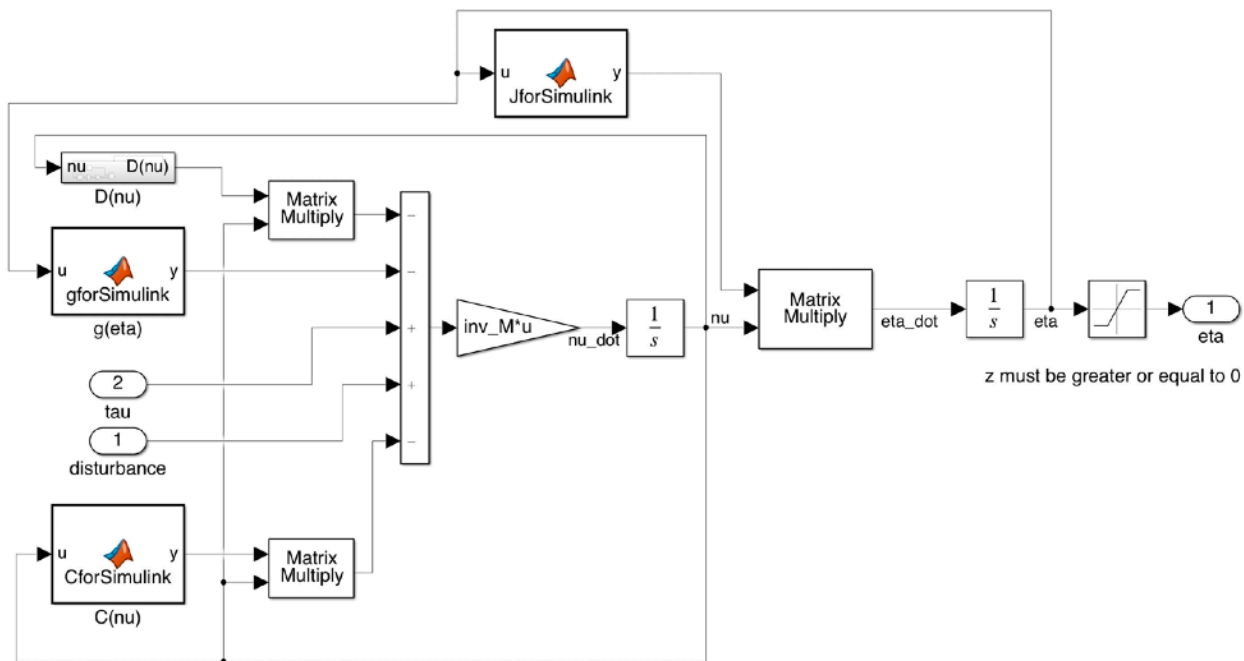


Рисунок 2 — блок-схема модели аппарата (блок *plant (AUV)*)

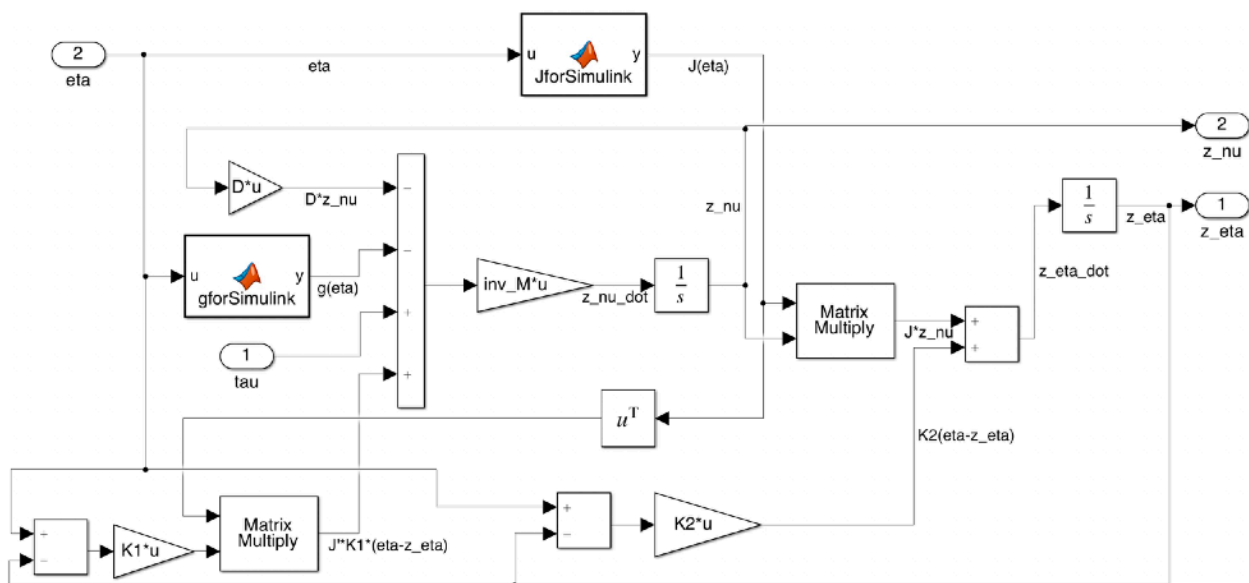


Рисунок 3 — блок-схема наблюдателя (блок *observer*)

## Продолжение Приложения В

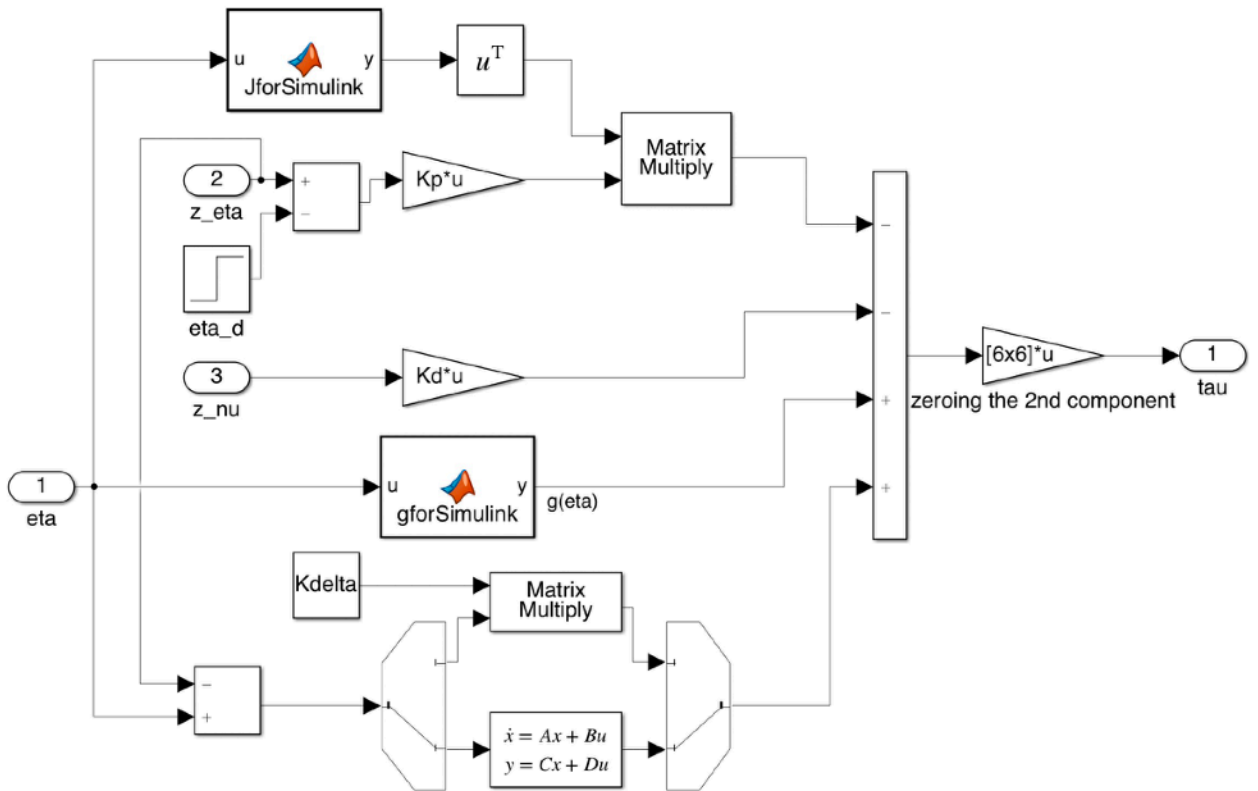


Рисунок 4 — блок-схема управления (блок *controller*)

## Приложение Г

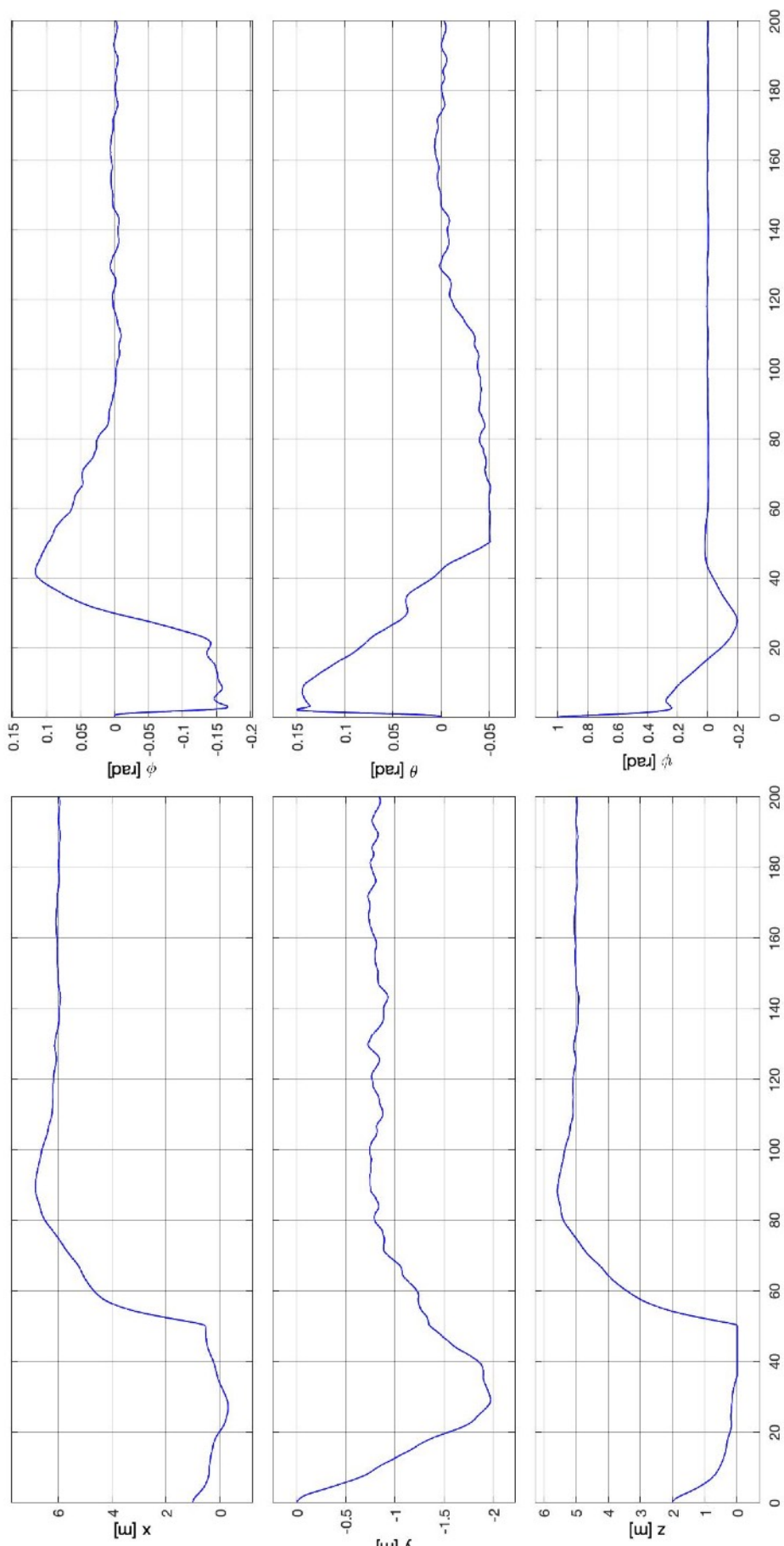


Рисунок 5 — Переходный процесс замкнутой системы при наличии в законе управления слагаемого  $F(s)(\eta - z_\eta)$



## Приложение Д

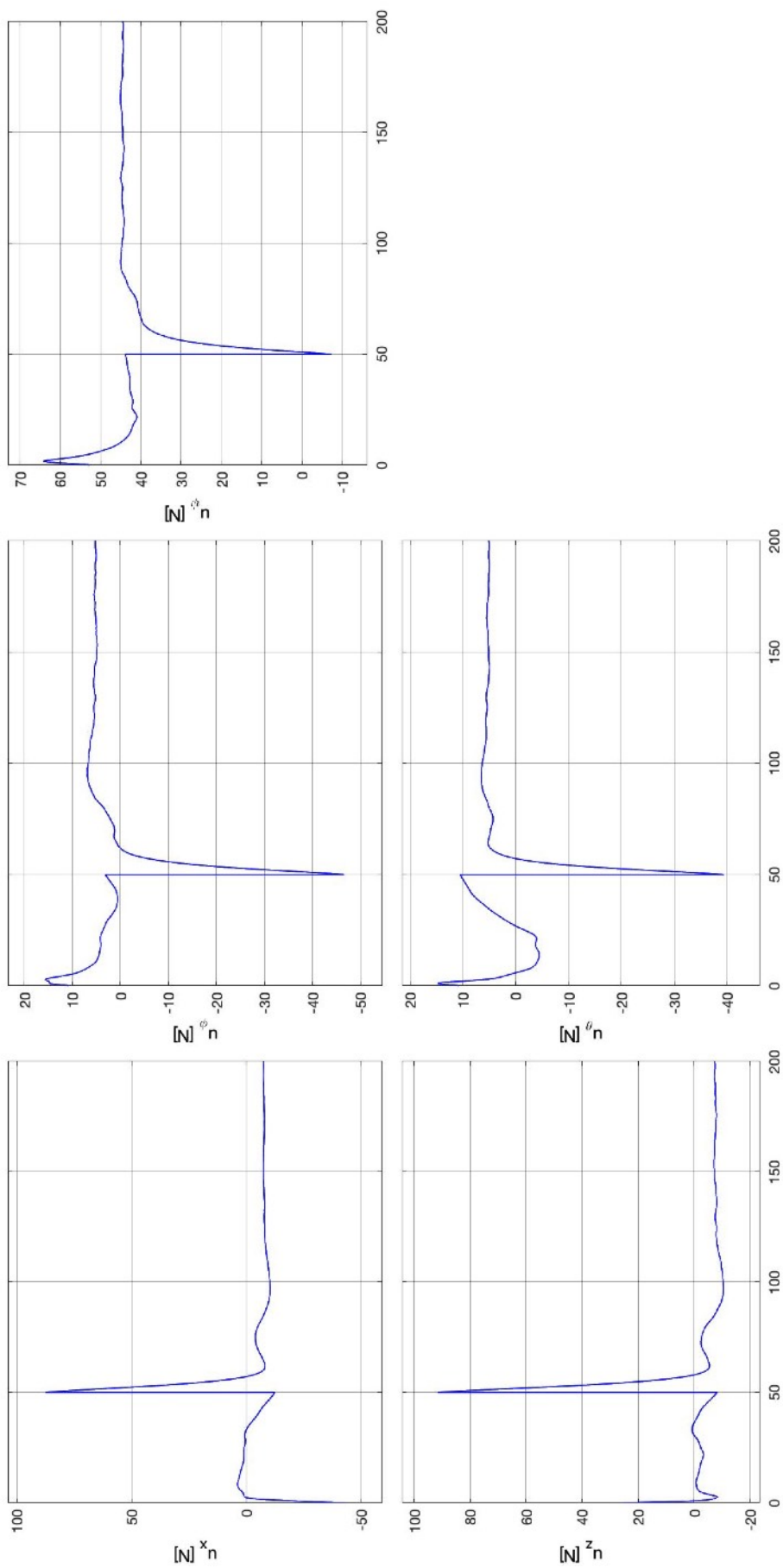


Рисунок 6 — Действие управляющих приводов при наличии в законе управления слагаемого  $F(s)(\eta - z_\eta)$

## Приложение Е

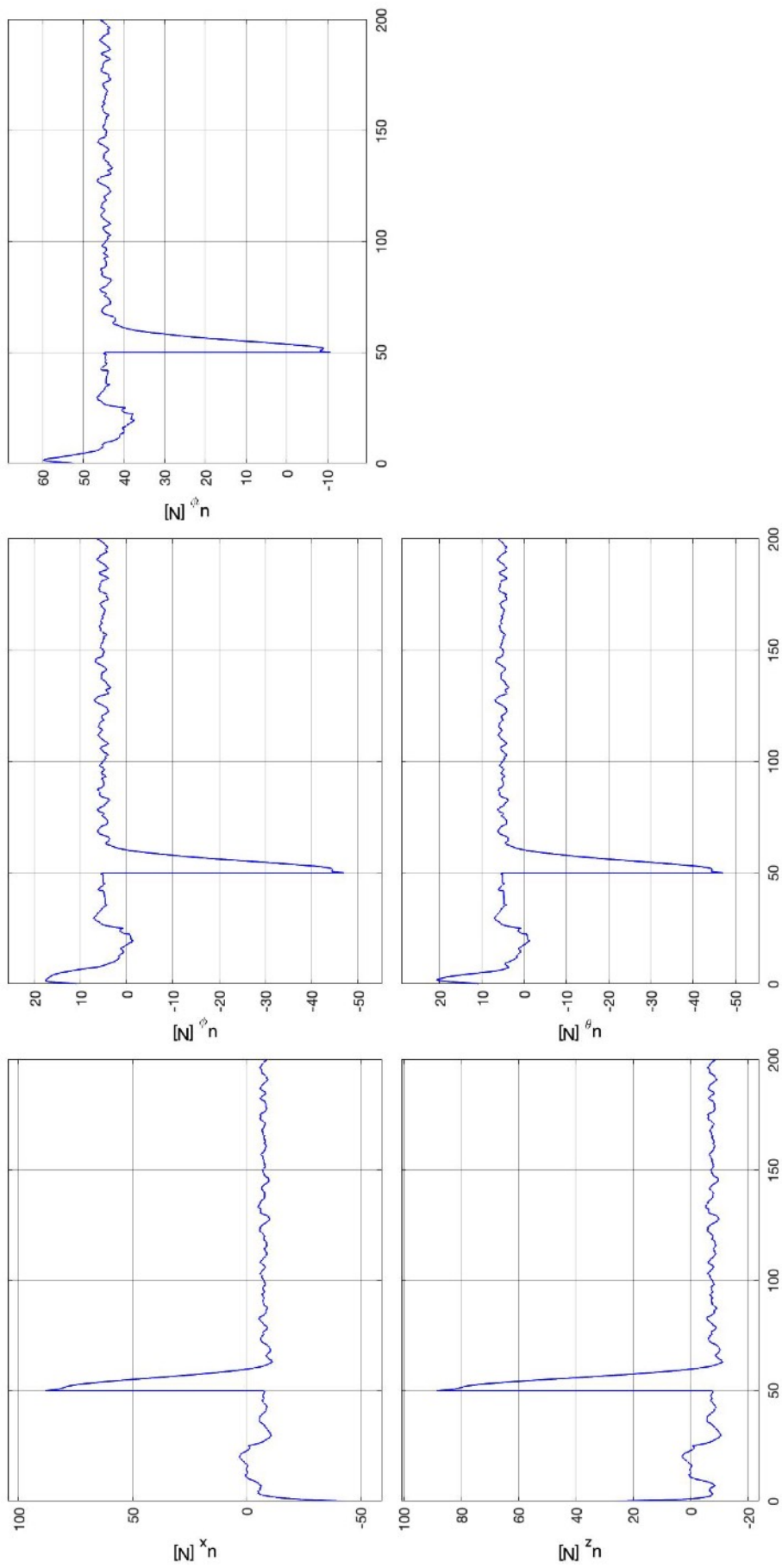


Рисунок 7 — Действие управляющих приводов при замене в законе управления  $F(s)$  на  $K_\Delta$

## Приложение Ж

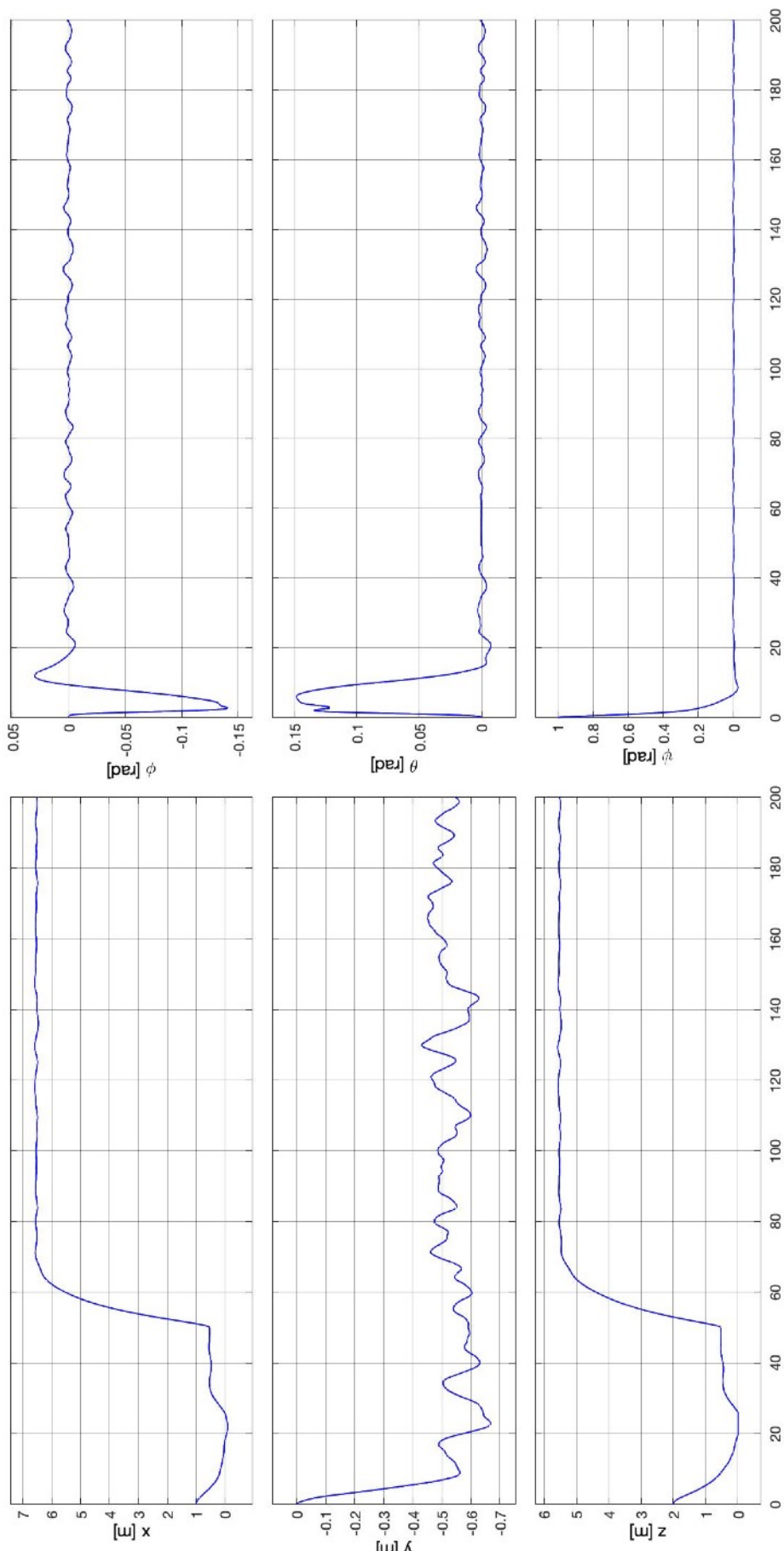


Рисунок 8 — Переходный процесс замкнутой системы при отсутствии слагаемого  $F(s)(\eta - z_\eta)$