САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теории управления

Кудряков Дмитрий Александрович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Критерий экспоненциальной устойчивости линейных систем с распределенным запаздыванием и его применение в задаче о робастной устойчивости

Направление: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

ООП: Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Александрова Ирина Васильевна

Рецензент:

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Пономарев Антон Александрович

Санкт-Петербург

2022

Содержание

Введение **3**

Обозначения **4**

Постановка задачи **6**

Обзор литературы **7**

Глава 1. Предварительные сведения **11**

1.1. Существование и единственность решения 13

1.2. Функционал v_0 15

1.3. Оценки неустойчивого собственного числа 23

1.4. Непрерывность матрицы Ляпунова по параметрам 32

1.5. Непрерывность нулей аналитической функции 36

Глава 2. Основной результат **39**

Глава 3. Задача о робастной устойчивости **43**

3.1. Применение теоремы 10 47

3.2. Применение теоремы 11 48

3.3. Итоговый результат 50

3.4. Итерационная схема 50

3.5. Непрерывное условие робастной устойчивости 55

Выводы **58**

Заключение **59**

Список литературы **60**

Введение

В настоящей работе рассматривается задача проверки устойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа, а также задача робастной устойчивости. Класс линейных систем с запаздыванием исключительно важен для приложений, поскольку во многих нелинейных задачах об устойчивости системы можно судить по ее линейному приближению. Этот класс наиболее хорошо изучен, известны критерии устойчивости линейных систем. Однако и здесь имеются фундаментальные нерешенные проблемы.

Традиционно для анализа устойчивости линейных систем с запаздыванием применяются первый и второй методы Ляпунова. Первый метод основан на анализе собственных чисел системы. Спектральные методы анализа устойчивости хорошо развиты в настоящее время. Тем не менее, возникающие здесь сложности объясняются бесконечностью спектра систем с запаздыванием. При исследовании систем больших размерностей возрастают вычислительные затраты и накапливаются погрешности, а в нестационарном случае такой подход и вовсе не применим. Второй метод Ляпунова для дифференциально-разностных систем известен как метод функционалов Ляпунова – Красовского. Развитию этого метода посвящена настоящая работа.

Обозначения

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – множества натуральных, действительных и комплексных чисел, $0 \in \mathbb{N}$;
- I – единичная матрица порядка $n \in \mathbb{N}$;
- F^n – множество векторов высоты n, состоящих из элементов поля $F \in \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$;
- $F^{n\times n}$ – множество матриц размера $n \times n$, состоящих из элементов поля $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$;
- $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{C}^n$;
- $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$ – норма матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, подчиненная векторной норме $\|\cdot\|$;
- $\mathrm{PC}(A, B)$ – множество кусочно-непрерывных функций (непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода), действующих из множества $A \subset \mathbb{R}$ в нормированное пространство B;
- $\mathrm{C}(A, B)$ – множество непрерывных функций, действующих из нормированного пространства A в нормированное пространство B;
- $\mathrm{C}^1(A, B)$ – множество непрерывно-дифференцируемых функций, действующих из нормированного пространства A в нормированное пространство B;
- $\|\varphi\|_h = \sup\limits_{\theta\in[-h,0]} \|\varphi(\theta)\|$ – функциональная норма ($h > 0$);
- $0_h \in \mathrm{PC}([-h, 0], B)$ – нулевая функция;
- $A^* = (\overline{A})^T$ – эрмитово сопряжение матрицы A;

- j – мнимая единица, $j^2 = -1$;
- $\mathrm{Re}(z)$ – действительная часть $z \in \mathbb{C}$;
- $\mathrm{Im}(z)$ – мнимая часть $z \in \mathbb{C}$;
- $\lambda(A)$ – собственное число матрицы A;
- $\lambda_{\min}(A)$ – минимальное собственное число матрицы A;
- $\lambda_{\max}(A)$ – максимальное собственное число матрицы A;
- $\mu(A) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A^* + A)$ – мера (логарифмическая норма) матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ [1];
- $A > 0$ – матрица A положительно определена;
- $A < 0$ – матрица A отрицательно определена;
- $\square$ – конец доказательства.

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{m} \left(A_k x(t-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta) x(t+\theta) \mathrm{d}\theta \right) \quad \forall t \geqslant 0. \tag{1}$$

Будем считать, что

$$A_k \in \mathbb{R}^{n\times n},\ G_k \in \mathrm{C}\big([-h_k, 0], \mathbb{R}^{n\times n}\big),\ 0 = h_0 \leqslant h_k \quad \forall k \in \{0, \ldots, m\};$$
$$h = \max_{k\in\{0,\ldots,m\}} \{h_k\};\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\};\ x \in \mathrm{C}((0,\infty), \mathbb{C}^n).$$

Пусть $\varphi \in \mathrm{PC}([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ – начальная функция:

$$x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta) \quad \forall \theta \in [-h, 0],$$

$x(t, \varphi)$ – решение системы (1), функция

$$x_t(\varphi) :\ \theta \mapsto x(t+\theta, \varphi) \quad \forall \theta \in [-h, 0],$$

– состояние системы. Можно заметить, что на сегменте $[0, h]$ правая часть уравнения (1) может терпеть конечное число разрывов первого рода. Производная решения в этих точках определена не однозначно, поэтому будем считать, что решение x не удовлетворяет уравнению (1) в этих точках. Тем не менее, из требования $x \in \mathrm{C}((0,\infty), \mathbb{C}^n)$ следует, что любое решение системы (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = \varphi(0) + \int\limits_{0}^{t} \sum_{k=0}^{m} \left(A_k x(s-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta) x(s+\theta) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}s \quad \forall t \geqslant 0.$$

Введем множество

$$S = \left\{\varphi \in \mathrm{PC}([-h, 0], \mathbb{C}^n) :\ \|\varphi(\theta)\| \leqslant \|\varphi(0)\| \quad \forall \theta \in [-h, 0]\right\}.$$

Целью настоящей работы является разработка новых условий экспоненциальной устойчивости на основе применения множества S в условии об отрицательной определенности производных функционалов Ляпунова – Красовского в силу системы (1) для анализа устойчивости.

Обзор литературы

Для линейных стационарных систем с запаздыванием метод функционалов основан на следующем критерии экспоненциальной устойчивости: существование положительно-определенного и непрерывного в нуле функционала, производная которого вдоль решений системы ограничена сверху некоторым отрицательно-определенным функционалом, является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости. В литературе можно встретить два пути применения этого критерия. В первом случае берутся различные конструкции положительно-определенных функционалов, которые затем дифференцируются вдоль решений системы. Достаточные условия устойчивости в этом случае выражаются в терминах отрицательной определенности полученной производной, проверка которой сводится к решению системы линейных матричных неравенств [2]. Такой подход может быть довольно эффективным с вычислительной точки зрения (см., например, метод дискретизации функционалов [3]–[5], в котором применяются функционалы Ляпунова – Красовского общей структуры с произвольными кусочно-линейными ядрами в интегральных слагаемых). Однако его основной недостаток заключается в том, что используемые конструкции функционалов подбираются вне связи с исследуемой системой, «навязываются» ей. Как следствие, таким способом довольно сложно получить критерии, то есть необходимые и достаточные условия устойчивости, а получаемые достаточные условия могут иметь весьма ограниченную область применения.

Второй путь применения критерия устойчивости в терминах функционалов носит название метода функционалов с заданной производной. Он заключается в том, что, напротив, сначала задается отрицательно-определенная производная функционала, а затем, по исследуемой системе, строится функционал с такой производной вдоль ее решений. Положительная определенность такого функционала является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости системы, что объясняется его «точностью», приспособленностью к анализу конкретной системы. Подход был развит в работах [6]–[8]. В дальнейшем были построены так называемые функционалы полного типа [9]. Их ключевой особенностью является существование для них квадратичных оценок снизу в случае экспоненциальной устойчивости, за счет чего такие функционалы нашли применение в задаче о робастной устойчивости [9]–[14], построении экспоненциальных оценок решений и вычислении интегральных критериев качества [15]. Отметим, что сначала в качестве заданной производной бралась, по аналогии со случаем ОДУ, отрицательно-определенная квадратичная форма, $-x^T(t)Wx(t)$, где W – положительно-определенная матрица [8]. Для функционалов полного типа производная совпадает с заранее заданным отрицательно-определенным квадратичным функционалом. Функционалы с заданной производной имеют конкретную, известную структуру и полностью определяются специальной функциональной матрицей, называемой матрицей Ляпунова.

Основная проблема, которая возникает при применении метода функционалов с заданной производной, – проблема проверки положительной определенности построенных функционалов. В последние годы появились работы, в которых такая проверка сводится к анализу положительной определенности всего одной блочной матрицы, составленной из матрицы Ляпунова, вычисленной в различных точках [12, 16, 17]. Другими словами, получен конечный критерий экспоненциальной устойчивости линейных стационарных систем, выраженный исключительно в терминах матрицы Ляпунова. Недостаток этого критерия кроется в том, что размерность полученной блочной матрицы на практике оказывается высокой.

Другой подход к решению проблемы проверки положительной определенности функционалов с заданной производной был предложен в работе [18]. Идея заключается в том, что для проверки устойчивости достаточно исследовать положительную определенность функционалов с заданной производной лишь на специальном множестве функций вида

$$S = \{\varphi \in \mathrm{PC}([-h,0],\mathbb{R}^n):\ \|\varphi(\theta)\| \leqslant \|\varphi(0)\| \quad \forall\theta \in [-h,0]\},$$

где h – максимальное запаздывание системы. На самом деле, для линейных стационарных систем здесь достаточно и проверки на специальном множестве функций, определяемых экспонентами с комплексными показателями. С помощью такого подхода были разработаны конструктивные методы проверки положительной определенности функционалов с заданной производной, а также получен конечный критерий экспоненциальной устойчивости. Его преимущество, по сравнению с упомянутым выше критерием, заключается в полиномиальной по параметрам системы оценке погрешности рассматриваемых приближений.

Условие, накладываемое на функции множеством S, представляет собой аналог известного условия Разумихина [19]. Метод Разумихина применяется в настоящее время в основном для анализа нелинейных либо линейных нестационарных систем с запаздыванием. Для этих классов метод Разумихина представляет собой мощный инструмент разработки достаточных условий устойчивости. В нем для анализа систем с запаздыванием, как и для систем ОДУ, применяются функции Ляпунова, а запаздывающие члены в производных этих функций вдоль решений исследуемых систем устраняются за счет использования условия Разумихина. Таким образом, дополнительное условие используется в методе Разумихина для работы именно с производными функций Ляпунова. Внимательный анализ структуры множества S и производных функционалов Ляпунова – Красовского вдоль решений систем с запаздыванием показывает, что использование этого множества было бы полезным не только совместно с условием положительной определенности самих функционалов, как это делалось ранее, но и совместно с условием отрицательной определенности производных функционалов. Возникает вопрос: достаточно ли для проверки устойчивости (и если да, то для каких классов систем) исследовать отрицательную определенность производных функционалов Ляпунова – Красовского только на множестве функций, удовлетворяющих аналогу условия Разумихина? Этот вопрос представляет практический интерес для широкого класса нелинейных систем с запаздыванием. Начальные результаты по этому вопросу получены в статье [20].

На основе метода функционалов Ляпунова – Красовского в данной работе получен новый способ исследования устойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем с распределенным запаздыванием. А именно, было показано, что аналог условия Разумихина может быть применен и для проверки положительной определенности функционалов, и для проверки отрицательной определенности производных функционалов вдоль решений системы. Доказаны новые критерии экспоненциальной устойчивости, основанные на применении функционалов, определенных на комплекснозначных начальных функциях. Кроме того, значительно сужено множество S в доказанных критериях.

В качестве вспомогательных результатов получены уточнения классических оценок так называемого «неустойчивого» собственного числа (собственного числа с неотрицательной вещественной частью, которое обязательно существует у неустойчивых систем рассматриваемого класса). С учетом этих оценок доказанные критерии применены в задаче о робастной устойчивости по отношению к неопределенностям, содержащимся в матрицах и запаздываниях системы. Кроме того, для частного случая обоснована сходимость итерационного метода к точным границам области устойчивости и рассмотрен пример. Получены непрерывные условия робастной устойчивости, позволяющие оценивать производную функционала лишь на комплексных экспонентах единичного модуля.

Глава 1. Предварительные сведения

Введем базовые утверждения.

Определение 1 ([21, 22]). *Система* (1) *называется экспоненциально устойчивой, если существуют* $\gamma \geqslant 1$ *и* $\sigma > 0$, *такие что для любых начальных функций* $\varphi \in \mathrm{PC}([-h,0],\mathbb{R}^n)$ *выполняется неравенство*

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant \gamma\, \mathrm{e}^{-\sigma t}\, \|\varphi\|_h \quad \forall t \geqslant 0.$$

Заметим, что система (1) определена на комплекснозначных начальных функциях, в то время как анализ устойчивости касается лишь вещественнозначных решений. Допущение комплексных решений является техническим моментом, без которого доказательство основного результата работы значительно усложняется.

Определение 2 ([21, 22]). *Число* $s \in \mathbb{C}$ *называется собственным числом системы* (1), *если оно является корнем уравнения*

$$\det\left(sI - \sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{-sh_k} A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta}\, G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right) = 0.$$

Определение 3 ([21, 22]). *Функциональная матрица* $K \in \mathrm{PC}([-h,\infty),\mathbb{R}^{n\times n})$, *столбцы которой являются решениями системы* (1), *удовлетворяющая начальным условиям* $K(t) = 0 \quad \forall t < 0,\ K(0) = I$, *называется фундаментальной матрицей системы* (1).

Теорема 1 ([21, 22]). *Система* (1) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех ее собственных чисел отрицательны.*

Теорема 2 ([15]). *Система* (1) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существует функционал* $v:\ \mathrm{PC}([-h,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющий условиям*

1. $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}: \ \alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0,$

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2 \|\varphi\|_h^2 \quad \forall \varphi \in \mathrm{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n);$$

2. функционал v дифференцируем вдоль решений системы (1)*, существует $\beta \in \mathbb{R}$, такое что $\beta > 0$, вдоль решений системы (1) выполняется*

$$\dot{v}(x_t) \leqslant -\beta \|x(t)\|^2 \quad \forall t > h.$$

Определение 4. *Непрерывная в точке $\tau = 0$ матрица $U(\tau), \ \tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая*

1. динамическому свойству

$$U'(\tau) = \sum_{k=0}^{m} \left(U(\tau - h_k) A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} U(\tau + \theta) G_k(\theta) \mathrm{d}\theta \right) \quad \forall \tau \geqslant 0;$$

2. симметрическому свойству

$$U(-\tau) = U^T(\tau) \quad \forall \tau \geqslant 0;$$

3. алгебраическому свойству

$$-W = \sum_{k=0}^{m} \Bigg(U(-h_k) A_k + A_k^T U(h_k) + \\ + \int\limits_{-h_k}^{0} \big(U(\theta) G_k(\theta) + G_k^T(\theta) U(-\theta) \big) \, \mathrm{d}\theta \Bigg);$$

называется матрицей Ляпунова системы (1)*, ассоциированной с матрицей* $W = W^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

В последнем определении при $\tau = 0$ имеется в виду правая производная $U(\tau)$.

Определение 5. *Если система* (1) *не имеет собственных чисел, симметричных относительно нуля, то говорят, что система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова.*

Замечание 1 ([15])**.** *Если система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова, то для любой вещественной матрицы* $W > 0$ *существует единственная матрица Ляпунова. Кроме того, она непрерывна и вещественна.*

1.1 Существование и единственность решения

Рассмотрим известный результат, который понадобится для обоснования существования и единственности решения системы (1).

Теорема 3 (Теорема Банаха о неподвижной точке [23])**.** *Пусть* (M, ρ) *– полное метрическое пространство,* $M \neq \varnothing$, $f: M \to M$, $\exists q \in [0, 1)$, *такое что*

$$\rho(f(a), f(b)) \leqslant q\rho(a, b) \quad \forall a, b \in M.$$

Тогда $\exists!\ c \in M:\ c = f(c)$.

Введем обозначения $K = \sum\limits_{k=0}^{m} \left(\|A_k\| + Q_k\right),\ Q_k = \int\limits_{-h_k}^{0} \|G_k(\theta)\|\mathrm{d}\theta$. Доказательство следующей теоремы представляет собой упрощенный вариант доказательства соответствующей теоремы из [15].

Теорема 4. *Для любой* $\varphi \in \mathrm{PC}([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ *существует* $\tau > 0$, *такое что системе* (1) *удовлетворяет единственное решение* $x(t, \varphi)$, *определенное на сегменте* $[-h, \tau]$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\| \leqslant K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_h \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{PC}([-h, 0], \mathbb{C}^n), \tag{2}$$

где

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{m} \left(A_k\varphi(-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta \right).$$

Выберем $\tau > 0$, так что

$$\tau K < 1. \tag{3}$$

Определим множество

$$U = \left\{u : [-h, \tau] \to \mathbb{C}^n,\ u(\theta) = \varphi(\theta) \quad \forall\theta \in [-h, 0],\ u|_{[0,\tau]} \in \mathrm{C}([0, \tau], \mathbb{C}^n)\right\},$$

где $u|_{[0,\tau]} : [0, \tau] \to \mathbb{C}^n,\ u|_{[0,\tau]}(\theta) = u(\theta)\ \forall\theta \in [0, \tau]$. Для любого $u \in U$ определим оператор

$$\mathcal{A}(u)(t) = \begin{cases} \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \\ \varphi(0) + \int\limits_0^t f(u_s)\mathrm{d}s, \quad t \in [0, \tau], \end{cases}$$

где $u_s : \theta \mapsto u(s + \theta)\ \forall\theta \in [-h, 0]$. Взяв произвольный элемент $u \in U$, покажем, что $\mathcal{A}(u) \in U$. В самом деле, из $u \in \mathrm{PC}([-h, \tau], \mathbb{C}^n)$ следует, что $f(u_s) \in \mathrm{PC}([0, \tau], \mathbb{C}^n)$, поэтому $\mathcal{A}(u)(t) \in \mathrm{C}([0, \tau], \mathbb{C}^n)$. Таким образом,

$$\mathcal{A}(u) :\ U \to U. \tag{4}$$

Заметим, что (2) влечет $\forall u^1, u^2 \in U$

$$\left\|\mathcal{A}(u^1)(t) - \mathcal{A}(u^2)(t)\right\| \leqslant \begin{cases} 0, \quad \text{если } t \in [-h, 0], \\ \displaystyle\int\limits_0^\tau \left\|f(u_s^1) - f(u_s^2)\right\| \mathrm{d}s \leqslant K \int\limits_0^\tau \left\|u_s^1 - u_s^2\right\|_h \mathrm{d}s, \\ \text{если } t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sup_{s\in[-h,\tau]} \left\|\mathcal{A}(u^1)(t) - \mathcal{A}(u^2)(t)\right\| \leqslant \tau K \sup_{s\in[-h,\tau]} \left\|u^1(s) - u^2(s)\right\|. \tag{5}$$

Покажем, что U с равномерной нормой замкнуто. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset U$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$. Тогда $u_n(\theta) = \varphi(\theta) \implies u_0(\theta) = \varphi(\theta)\ \forall\theta \in [-h, 0]$; $\mathrm{C}([0, \tau], \mathbb{C}^n)$ полно, поэтому замкнуто, а значит $u_0|_{[0,\tau]} \in \mathrm{C}([0, \tau], \mathbb{C}^n)$. Следовательно, U с равномерной нормой замкнуто. Кроме того, U является метрическим подпространством полного пространства ограниченных на $[-h, \tau]$

функций. Таким образом, U с равномерной нормой полно. Отсюда, с учетом (3), (4) и (5) по теореме 3 получаем

$$\exists!\; u^* \in U : u^*(t) = \mathcal{A}(u^*)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h, 0], \\ \varphi(0) + \int\limits_0^t f(u_s^*)\mathrm{d}s, & t \in [0, \tau]. \end{cases} \tag{6}$$

Легко видеть, что $f(u_s^*) \in \mathrm{C}((h, \tau], \mathbb{C}^n)$, если $\tau > h$. Поэтому, дифференцируя (6), получаем, что u^* удовлетворяет системе (1) при $t \in (h, \tau]$. При $t \in$ $\in [0, \min\{h, \tau\}]$, дифференцируя (6) в точках непрерывности функции $f(u_s^*)$, получаем тот же результат. Осталось заметить, что все решения системы (1) лежат в U, и доказательство завершено. □

1.2 Функционал v_0

Рассмотрим функционал v_0: $\mathrm{PC}([-h, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ вида

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) = \varphi^*(0)U(0)\varphi(0) + 2\,\mathrm{Re}\Bigg(\varphi^*(0)\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0} U(-h_k-\theta)A_k\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta + \\ + \varphi^*(0)\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0}\int\limits_{-h_k}^{\theta} U(\xi-\theta)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta + \\ + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0}\varphi^*(\theta_1)A_k^T\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{-h_i}^{0}\int\limits_{-h_i}^{\theta_2} U(h_k+\theta_1-\theta_2+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi\varphi(\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1\Bigg) + \\ + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Bigg(\int\limits_{-h_i}^{0}\varphi^*(\theta_1)A_i^T\int\limits_{-h_k}^{0} U(\theta_1+h_i-\theta_2-h_k)A_k\varphi(\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1 + \\ + \int\limits_{-h_k}^{0}\varphi^*(\theta_1)\int\limits_{-h_i}^{0}\int\limits_{-h_k}^{\theta_1} G_k^T(\xi_1)\int\limits_{-h_i}^{\theta_2} U(\theta_1-\theta_2-\xi_1+\xi_2)G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1\varphi(\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1\Bigg), \end{aligned}$$

где $U(\tau)$ – матрица Ляпунова, ассоциированная с данной матрицей W.

Приведем обобщение известного результата, полученного в [8], на случай комплексных начальных функций.

Теорема 5. *Если система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова, то функционал* v_0 *существует и удовлетворяет равенству*

$$\dot{v}_0(x_t) = -x^*(t)Wx(t) \quad \forall t \geqslant 0, \tag{7}$$

за исключением конечного числа точек из отрезка $[0, h]$.

Доказательство. Из замечания 1 следует существование такого функционала, а также вещественность, непрерывность на $\mathbb{R}$ и непрерывная дифференцируемость при $\tau \neq 0$ матрицы Ляпунова. Это потребуется для оправдания замещения сопряжения транспонированием для U и ее производных, смены порядка интегрирования и дифференцирования под знаком интеграла. Пусть $x(t, \varphi)$ – решение системы (1). Тогда при тех $t \geqslant 0$, в которых решение удовлетворяет системе, имеет место

$$\begin{aligned}
R_0(t) &= x^*(t)U(0)x(t),\\
\dot{R}_0(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^*(t)U(0)x(t)\right) =\\
&= \sum_{k=0}^{m}\left(A_k x(t-h_k) + \int_{-h_k}^{0} G_k(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right)^* U(0)x(t) +\\
&\qquad + x^*(t)U(0)\sum_{k=0}^{m}\left(A_k x(t-h_k) + \int_{-h_k}^{0} G_k(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right) =\\
&= 2\sum_{k=0}^{m}\mathrm{Re}\left(\underline{x^*(t)U(0)A_k x(t-h_k)} + \underline{x^*(t)U(0)\int_{-h_k}^{0} G_k(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1(t) &= 2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\left(x^*(t)\int_{-h_k}^{0} U(-h_k-\theta)A_k x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right) =\\
&= 2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\left(x^*(t)\int_{t-h_k}^{t} U(-h_k-s+t)A_k x(s)\mathrm{d}s\right),
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_1(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re} \left(\underbrace{\dot{x}^*(t) \int\limits_{t-h_k}^{t} U(-h_k - s + t)A_k x(s)\mathrm{d}s +}_{} \right.$$

$$+ \underline{x^*(t)U(-h_k)A_k x(t)} - \underline{x^*(t)U(0)A_k x(t-h_k)} -$$

$$\left. - \underbrace{\underbrace{x^*(t) \int\limits_{t-h_k}^{t} \left[U'(h_k + s - t)\right]^T A_k x(s)\mathrm{d}s}_{}}_{} \right),$$

$$R_2(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re} \left(x^*(t) \int\limits_{-h_k}^{0} \int\limits_{-h_k}^{\theta} U(\xi - \theta) G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(t+\theta)\mathrm{d}\theta \right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re} \left(x^*(t) \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} U^T(-\xi - t + s) G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(s)\mathrm{d}s \right),$$

$$\dot{R}_2(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re} \left(\underline{\underline{\dot{x}^*(t) \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} U^T(-\xi - t + s) G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(s)\mathrm{d}s +}} \right.$$

$$+ \underline{x^*(t) \int\limits_{-h_k}^{0} U(\xi) G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(t)} - \underline{x^*(t)U(0) \int\limits_{t-h_k}^{t} G_k(s-t)x(s)\mathrm{d}s} -$$

$$\left. - x^*(t) \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} \left[U'(-\xi + s - t)\right]^T G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(s)\mathrm{d}s \right),$$

$$R_3(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re} \left(\int\limits_{-h_k}^{0} x^*(t+\theta_1) A_k^T \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{-h_i}^{0} \int\limits_{-h_i}^{\theta_2} U(h_k + \theta_1 - \theta_2 + \xi) G_i(\xi)\mathrm{d}\xi x(t+\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}\theta_1 \right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re} \left(\int\limits_{t-h_k}^{t} x^*(s_1) A_k^T \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{t-h_i}^{t} \int\limits_{-h_i}^{s_2-t} U(h_k + s_1 - s_2 + \xi) G_i(\xi)\mathrm{d}\xi x(s_2)\mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 \right),$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_3(t) = 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Re}\Bigg(& x^*(t)\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_i}^{s_2-t} A_k^T U(h_k+t-s_2+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi x(s_2)\mathrm{d}s_2 - \\
& -(A_k x(t-h_k))^*\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_i}^{s_2-t} U(t-s_2+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi x(s_2)\mathrm{d}s_2 + \\
& +\int\limits_{t-h_k}^{t} x^*(s_1)\int\limits_{-h_i}^{0} A_k^T U(h_k+s_1-t+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s_1 x(t) - \\
& -\int\limits_{t-h_k}^{t}\int\limits_{t-h_i}^{t} x^*(s_1)A_k^T U(h_k+s_1-t)G_i(s_2-t)x(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
R_4(t) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{t-h_i}^{t} x^*(s_1)A_i^T\int\limits_{t-h_k}^{t} U(s_1+h_i-s_2-h_k)A_k x(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_4(t) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Bigg(& x^*(t)A_i^T\int\limits_{t-h_k}^{t} U(t+h_i-s_2-h_k)A_k x(s_2)\mathrm{d}s_2 - \\
& -x^*(t-h_i)A_i^T\int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-h_k-s_2)A_k x(s_2)\mathrm{d}s_2 + \\
& +\int\limits_{t-h_i}^{t} x^*(s_1)A_i^T U(s_1+h_i-t-h_k)\mathrm{d}s_1 A_k x(t) - \\
& -\int\limits_{t-h_i}^{t} x^*(s_1)A_i^T U(s_1+h_i-t)\mathrm{d}s_1 A_k x(t-h_k)\Bigg) = \\
= 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Re}\Bigg(& x^*(t)A_i^T\int\limits_{t-h_k}^{t} U(t+h_i-s-h_k)A_k x(s)\mathrm{d}s - \\
& -x^*(t-h_i)A_i^T\int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-h_k-s)A_k x(s)\mathrm{d}s\Bigg).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_5(t) = {} & \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{-h_k}^{0} x^*(t+\theta_1)\int\limits_{-h_i}^{0}\int\limits_{-h_k}^{\theta_1} G_k^T(\xi_1)\int\limits_{-h_i}^{\theta_2} U(\theta_1-\theta_2-\xi_1+\xi_2)\times\right.\\
& \left.\times\, G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 x(t+\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1\right) = \\
= {} & \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{t-h_k}^{t} x^*(s_1)\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_k}^{s_1-t} G_k^T(\xi_1)\int\limits_{-h_i}^{s_2-t} U(s_1-s_2-\xi_1+\xi_2)\times\right.\\
& \left.\times\, G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 x(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_5(t) = {} & \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x^*(t)\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_k}^{0} G_k^T(\xi_1)\times\right.\\
& \times\int\limits_{-h_i}^{s_2-t} U(t-s_2-\xi_1+\xi_2)G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 x(s_2)\mathrm{d}s_2+\\
& +\int\limits_{t-h_k}^{t} x^*(s_1)\int\limits_{-h_k}^{s_1-t} G_k^T(\xi_1)\int\limits_{-h_i}^{0} U(s_1-t-\xi_1+\xi_2)G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}s_1 x(t)-\\
& -\int\limits_{t-h_k}^{t} x^*(s_1)\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_i}^{s_2-t} G_k^T(s_1-t)U(-s_2+t+\xi_2)G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2 x(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1-\\
& \left.-\int\limits_{t-h_k}^{t} x^*(s_1)\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_k}^{s_1-t} G_k^T(\xi_1)U(s_1-\xi_1-t)G_i(s_2-t)\mathrm{d}\xi_1 x(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\right) = \\
= {} & 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Re}\left(x^*(t)\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_k}^{0} G_k^T(\xi_1)\times\right.\\
& \times\int\limits_{-h_i}^{s-t} U(t-s-\xi_1+\xi_2)G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 x(s)\mathrm{d}s-\\
& -\underline{\underline{\left(\int\limits_{t-h_k}^{t} G_k(s_1-t)x(s_1)\mathrm{d}s_1\right)^*\times}}
\end{aligned}
$$

$$\underline{\underline{\times \int\limits_{t-h_i}^{t} \int\limits_{-h_i}^{s_2-t} U(-s_2+t+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi x(s_2)\mathrm{d}s_2}}\Bigg).$$

Соберем вместе все слагаемые, подчеркнутые одной линией:

$$S_1(t) = 2\sum_{k=0}^{m} \mathrm{Re}\left(x^*(t)U(-h_k)A_k x(t) + x^*(t)\int\limits_{-h_k}^{0} U(\xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(t) \right) =$$

$$= x^*(t)\sum_{k=0}^{m}\Bigg(U(-h_k)A_k + A_k^T U(h_k) +$$

$$+ \int\limits_{-h_k}^{0} \big(U(\theta)G_k(\theta) + G_k^T(\theta)U(-\theta) \big)\,\mathrm{d}\theta \Bigg) x(t) = -x^*(t)Wx(t).$$

Теперь соберем слагаемые, подчеркнутые одной скобкой:

$$S_2(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\left(\left(\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m}\left(A_i x(t-h_i) + \int\limits_{-h_i}^{0} G_i(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta \right)\right)^* \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-s-h_k)A_k x(s)\mathrm{d}s \right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\left(x^*(t)A_0^T \int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-s-h_k)A_k x(s)\mathrm{d}s \right).$$

Далее, слагаемые, подчеркнутые двумя скобками:

$$S_3(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(x^*(t)\int\limits_{t-h_k}^{t} \Bigg(-U'(\tau_k) + \sum_{i=1}^{m}\Bigg(U(\tau_k - h_i)A_i +$$

$$+ \int\limits_{-h_i}^{0} U(\tau_k+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi \Bigg)\Bigg|_{\tau_k = h_k + s - t} \Bigg)^T A_k x(s)\mathrm{d}s \Bigg) =$$

$$= -2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\left(x^*(t)A_0^T \int\limits_{t-h_k}^{t} U(t-s-h_k)A_k x(s)\mathrm{d}s \right) = -S_2(t),$$

т. к. $h_k + s - t \in [0, h_k]$. Слагаемые, подчеркнутые двумя линиями:

$$S_4(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\left(\left(\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m}\left(A_i x(t-h_i) + \int\limits_{-h_i}^{0} G_i(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right)^* \times\right.$$

$$\left.\times \int\limits_{t-h_k}^{t}\int\limits_{-h_k}^{s-t} U(-s+t+\xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(s)\mathrm{d}s\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\left(x^*(t)A_0^T \int\limits_{t-h_k}^{t}\int\limits_{-h_k}^{s-t} U(-s+t+\xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(s)\mathrm{d}s\right).$$

Наконец, не подчеркнутые слагаемые:

$$S_5(t) = 2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\left(x^*(t)\int\limits_{t-h_k}^{t}\int\limits_{-h_k}^{s-t}\left(-U'(\tau) + \sum_{i=1}^{m}\left(U(\tau-h_i)A_i + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int\limits_{-h_i}^{0} U(\tau+\xi_1)G_i(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\right)\Bigg|_{\tau=-\xi+s-t}\right)^T G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(s)\mathrm{d}s\right) =$$

$$= -2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\left(x^*(t)A_0^T\int\limits_{t-h_k}^{t}\int\limits_{-h_k}^{s-t} U(t-s+\xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi x(s)\mathrm{d}s\right) = -S_4(t),$$

т. к. $s - \xi - t \geqslant 0$. Теорема доказана. $\square$

Из симметричности матриц $U(0)$ и W, непрерывности U и G, кусочной непрерывности φ, симметрического свойства, а также теоремы о смене порядка интегрирования следует

Замечание 2. *Функционалы $v_0(\varphi), \dot{v}_0(x_t)$ принимают только вещественные значения для любых $\varphi \in \mathrm{PC}([-h, 0], \mathbb{C}^n)$.*

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Если система (1) экспоненциально устойчива и $W > 0$, то функционал v_0 допускает квадратичную оценку снизу вида*

$$\exists \alpha_0 > 0 : \; v_0(\varphi) \geqslant \alpha_0 \|\varphi(0)\|^2 \quad \forall \varphi \in S.$$

Доказательство. Доказательство использует идеи из [8, 18]. Интегрируя систему и используя теорему о смене порядка интегрирования, получаем

$$\|x(t)\| \leqslant \|\varphi\|_h + \sum_{k=0}^{m}\left(\|A_k\|\int\limits_0^t \|x(s-h_k)\|\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \int\limits_{-h_k}^0 \|G_k(\theta)\|\|x(s+\theta)\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \|\varphi\|_h + \sum_{k=0}^{m}\left(\|A_k\|\int\limits_{-h_k}^{t-h_k}\|x(\xi)\|\mathrm{d}\xi + \int\limits_{-h_k}^{0}\|G_k(\theta)\|\int\limits_{\theta}^{t+\theta}\|x(\xi)\|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\theta\right) \leqslant$$

$$\leqslant L\|\varphi\|_h + K\int\limits_0^t \|x(s)\|\mathrm{d}s \quad \forall t \geqslant 0,$$

где $L = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m}\left(\|A_k\|h_k + \int\limits_{-h_k}^{0}\|G_k(\theta)\|(-\theta)\mathrm{d}\theta\right),$

K определено в разделе 1.1. Следовательно, из леммы Гронуолла–Беллмана получаем

$$\|x(t)\| \leqslant L\,\mathrm{e}^{Kt}\,\|\varphi\|_h \quad \forall t \geqslant 0. \tag{8}$$

Также нетрудно видеть, что

$$\|x(t)\| \leqslant L\,\mathrm{e}^{K\delta}\,\|\varphi\|_h \quad \forall t \in [-h, 0], \tag{9}$$

для всех $\delta \geqslant 0$. Из $\varphi \in S$ видно, что $\|\varphi\|_h = \|\varphi(0)\|$. Поэтому с помощью интегрирования системы и (8)–(9) получаем, что при $\delta \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \delta$ имеет место

$$\|x(t) - \varphi(0)\| \leqslant \sum_{k=0}^{m}\left(\|A_k\|\int\limits_0^{\delta}\|x(s-h_k)\|\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\delta}\int\limits_{-h_k}^{0}\|G_k(\theta)\|\|x(s+\theta)\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\right) \leqslant K\delta L\,\mathrm{e}^{K\delta}\,\|\varphi(0)\|.$$

Найдем $\delta > 0$ из условия $KL\,\mathrm{e}^{K\delta} = (2\delta)^{-1}$ ($K > 0$ в силу экспоненциальной устойчивости системы (1)). Следовательно,

$$\|x(t) - \varphi(0)\| \leqslant \frac{\|\varphi(0)\|}{2} \quad \forall t \in [0, \delta].$$

Обратное неравенство треугольника дает

$$\|x(t)\| \geqslant \frac{\|\varphi(0)\|}{2} \quad \forall t \in [0, \delta].$$

После интегрирования (7) по $t \in [0, \infty)$ получаем

$$v(\varphi) = \int\limits_0^\infty x^*(t)Wx(t)\mathrm{d}t \geqslant \lambda_{\min}(W) \int\limits_0^\delta \|x(t)\|^2\mathrm{d}t \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_0\|\varphi(0)\|^2, \quad \text{где } \alpha_0 = \frac{\lambda_{\min}(W)\delta}{4} > 0.$$

Заметим, что последнем равенстве использовались экспоненциальная устойчивость системы (1) и непрерывность функционала $v_0(\varphi)$ при $\varphi = 0_h$. Нетрудно видеть, что непрерывность v_0 в нуле следует из теоремы о мажорируемой сходимости. □

1.3 Оценки неустойчивого собственного числа

Под неустойчивым будем понимать такое собственное число, действительная часть которого неотрицательна. Для получения оценок используется понятие матричной меры.

Определение 6 ([1]). *Мерой матрицы $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется выражение*

$$\mu(Z) = \lim_{\theta\to+0} \frac{\|I + \theta Z\| - 1}{\theta}.$$

Пусть $Z, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ниже приведены основные свойства матричной меры [1].

- $\mathrm{Re}(\lambda(Z)) \leqslant \mu(Z) \leqslant \|Z\|$;

- $\mathrm{Im}(\lambda(Z)) \leqslant \mu(-jZ)$;

- $\mu(Z+Y) \leqslant \mu(Z) + \mu(Y)$;

- $\mu(aZ) = a\mu(Z) \quad \forall a \in \mathbb{R}: \ a \geqslant 0$;

- $\mu(Z) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(Z + Z^*) \in \mathrm{C}(\mathbb{C}^{n\times n}, \mathbb{R})$.

Следующая лемма обобщает идеи из [24, 25] на случай систем с распределенным запаздыванием.

Лемма 2. *Пусть система* (1) *имеет собственное число* s*, такое что* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$*. Тогда*

$$
\begin{aligned}
|s| &\leqslant K,\\
\mathrm{Re}(s) &\leqslant K_{\mathrm{Re}}^{(3)} \leqslant K_{\mathrm{Re}}^{(2)} \leqslant K_{\mathrm{Re}}^{(1)},\\
\mathrm{Im}(s) &\leqslant K_{\mathrm{Im}}^{(3)} \leqslant K_{\mathrm{Im}}^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Здесь величина K *определена в разделе 1.1,* $K_{\mathrm{Re}}^{(1)} = \mu(A_0) + K - \|A_0\|$, $K_{\mathrm{Im}}^{(1)} = \mu(-jA_0) + K - \|A_0\|$, $K_{\mathrm{Re}}^{(2)}$ *– решение уравнения*

$$
K_{\mathrm{Re}}^{(2)} = \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m}\Big(\mathrm{e}^{-K_{\mathrm{Re}}^{(2)} h_k}\|A_k\| + Q_k\Big), \tag{10}
$$

$$
K_{\mathrm{Re}}^{(3)} = \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m}\left(\max_{r\in[0,2\pi]} \mu\big(\mathrm{e}^{-jr} A_k\big) + Q_k\right),
$$

$$
K_{\mathrm{Im}}^{(3)} = \mu(-jA_0) + \sum_{k=1}^{m}\left(\max_{r\in[0,2\pi]} \mu\big(-j\,\mathrm{e}^{-jr} A_k\big) + Q_k\right),\ Q_k = \int\limits_{-h_k}^{0} \|G_k(\theta)\|\mathrm{d}\theta.
$$

Доказательство. Из определения 2 и $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ следует, что существует $C \in \mathbb{C}^n$, такой что $C \neq 0$,

$$
\big\|s\,\mathrm{e}^{st}\, C\big\| = \left\|\sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{s(t-h_k)}\, A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s(t+\theta)}\, G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right) C\right\|,
$$

$$
|s| \leqslant \sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(s) h_k}\, \|A_k\| + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(s)\theta}\, \|G_k(\theta)\|\mathrm{d}\theta\right) \leqslant K.
$$

Используя свойства матричной меры, можно получить, что

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}(s) = {} & \operatorname{Re}\left(\lambda\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{-sh_k} A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right)\right) \leqslant \\
& \leqslant \mu\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{-sh_k} A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right) \leqslant \\
& \leqslant \sum_{k=0}^{m}\left(\mu\big(\mathrm{e}^{-sh_k} A_k\big) + \mu\left(\int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right) \leqslant \qquad (11) \\
& \leqslant \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m}\left(\|\mathrm{e}^{-sh_k} A_k\| + \left\|\int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right\|\right) \leqslant \\
& \leqslant \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m}\left(\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(s)h_k} \|A_k\| + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(s)\theta} \|G_k(\theta)\|\, \mathrm{d}\theta\right) \leqslant \qquad (12) \\
& \leqslant \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m}(\|A_k\| + Q_k) = K_{\operatorname{Re}}^{(1)}, \\
\operatorname{Im}(s) = {} & \operatorname{Im}\left(\lambda\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{-sh_k} A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right)\right) \leqslant \\
& \leqslant \mu\left(-j\sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{-sh_k} A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right) \leqslant \\
& \leqslant \sum_{k=0}^{m}\left(\mu\big(-j\,\mathrm{e}^{-sh_k} A_k\big) + \mu\left(-j\int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right) \leqslant \qquad (13) \\
& \leqslant \mu(-jA_0) + \sum_{k=1}^{m}\left(\|-j\,\mathrm{e}^{-sh_k} A_k\| + \left\|-j\int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right\|\right) \leqslant \\
& \leqslant \mu(-jA_0) + \sum_{k=1}^{m}\left(\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(s)h_k} \|A_k\| + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(s)\theta} \|G_k(\theta)\|\, \mathrm{d}\theta\right) \leqslant \\
& \leqslant \mu(-jA_0) + \sum_{k=1}^{m}(\|A_k\| + Q_k) = K_{\operatorname{Im}}^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что (11), (13) и периодичность $\mu(\mathrm{e}^{-j\operatorname{Im}(s)h_k} A_k)$, $\mu(-j\times$

$\times\, \mathrm{e}^{-j\,\mathrm{Im}(s)h_k}\, A_k)$ по $\mathrm{Im}(s)$ гарантирует, что

$$\mathrm{Re}(s) \leqslant \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m} \left(\max_{\substack{\mathrm{Re}(s)\in[0,K_{\mathrm{Re}}^{(1)}] \\ r\in[0,2\pi]}} \mathrm{e}^{-\,\mathrm{Re}(s)h_k}\, \mu\big(\mathrm{e}^{-jr}\, A_k\big) + Q_k \right),$$

$$\mathrm{Im}(s) \leqslant \mu(-jA_0) + \sum_{k=1}^{m} \left(\max_{\substack{\mathrm{Re}(s)\in[0,K_{\mathrm{Re}}^{(1)}] \\ r\in[0,2\pi]}} \mathrm{e}^{-\,\mathrm{Re}(s)h_k}\, \mu\big(-j\,\mathrm{e}^{-jr}\, A_k\big) + Q_k \right).$$

Предположим, что $\mu(\mathrm{e}^{-jr}\, Z) < 0\; \forall r \in [0, 2\pi]$, где $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\lambda_{\max}\left(\mathrm{e}^{-jr}\, Z + \mathrm{e}^{jr}\, Z^*\right) < 0,$$

Таким образом, $\mathrm{e}^{-jr}\, Z + \mathrm{e}^{jr}\, Z^* < 0$. С одной стороны, положим $r = \pi$. В этом случае

$$\mathrm{e}^{-jr}\, Z + \mathrm{e}^{jr}\, Z^* = -Z - Z^* < 0. \tag{14}$$

С другой стороны, можно взять $r = 0$. Тогда $\mathrm{e}^{-jr}\, Z + \mathrm{e}^{jr}\, Z^* = Z + Z^* < 0$, что противоречит (14). Таким образом, $\exists r \in [0, 2\pi]:\ \mu(\mathrm{e}^{-jr}\, Z) \geqslant 0$. Поэтому, взяв $Z \in \{A_k, -jA_k\}$, получим

$$\max_{r\in[0,2\pi]} \mu(\mathrm{e}^{-jr}\, A_k) \geqslant 0, \qquad \max_{r\in[0,2\pi]} \mu(-j\,\mathrm{e}^{-jr}\, A_k) \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}(s) \leqslant \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m} \left(\max_{r\in[0,2\pi]} \mu\big(\mathrm{e}^{-jr}\, A_k\big) + Q_k \right) = K_{\mathrm{Re}}^{(3)},$$

$$\mathrm{Im}(s) \leqslant \mu(-jA_0) + \sum_{k=1}^{m} \left(\max_{r\in[0,2\pi]} \mu\big(-j\,\mathrm{e}^{-jr}\, A_k\big) + Q_k \right) = K_{\mathrm{Im}}^{(3)}.$$

Из (12) следует, что

$$0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{m} \Big(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{Re}(s)h_k}\, \|A_k\| + Q_k \Big).$$

Поскольку в последнем выражении стоит неотрицательная и невозрастающая функция от $\mathrm{Re}(s)$, то существует единственное решение $K_{\mathrm{Re}}^{(2)}$ уравнения (10), дающее еще одну оценку $\mathrm{Re}(s) \leqslant K_{\mathrm{Re}}^{(2)}$. □

Рассмотрим вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n,\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B > 0$. *Тогда*

$$2a^T Ab \leqslant a^T AB^{-1}A^T a + b^T Bb.$$

Доказательство. Очевидно, что $2a^T Ab = 2a^T AB^{-1/2}B^{1/2}b$. Применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$2a^T Ab \leqslant 2\left\|B^{-1/2}A^T a\right\|\left\|B^{1/2}b\right\| \leqslant \left\|B^{-1/2}A^T a\right\|^2 + \left\|B^{1/2}b\right\|^2.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следующей леммы использует идеи из работ [26, 17].

Лемма 4. *Пусть система* (1) *имеет собственное число* s, *такое что* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$. *Тогда* $\mathrm{Re}(s) < \alpha$, *где величина* α *такова, что следующая система матричных неравенств относительно* $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *совместна:*

$$\begin{cases} Q - PB(\alpha)P > 0, \\ P > 0,\ Q > 0,\ (A_0 - \alpha I)^T P + P(A_0 - \alpha I) = -\beta Q, \end{cases} \tag{15}$$

где $\beta = 1 + m + \sum\limits_{k=1}^{m} h_k$,

$$B(\alpha) = \sum_{k=1}^{m}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha h_k} A_k Q^{-1} A_k^T + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{2\alpha\theta} G_k(\theta) Q^{-1} G_k^T(\theta)\mathrm{d}\theta\right).$$

Доказательство. Положим $\widehat{A}_0 = A_0 - \alpha I,\ \widehat{A}_k = \mathrm{e}^{-\alpha h_k} A_k,\ \widehat{G}_k(\theta) = \mathrm{e}^{\alpha\theta} G_k(\theta)$ $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$. Будем исследовать устойчивость системы (1), в которой матрицы A_k, G_k заменены на $\widehat{A}_k, \widehat{G}_k$ (обозначим ее через $\widehat{(1)}$). С этой целью зададим $P > 0,\ Q > 0$ и рассмотрим функционал

$$v(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{-h_i}^{0} \varphi^T(\theta)Q(1 + \theta + h_i)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Обозначим через $\widehat{x}$ решение системы $\widehat{(1)}$ и продифференцируем v вдоль вещественных решений этой системы:

$$\dot{v}(\widehat{x}_t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widehat{x}^T(t)P\widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{-h_i}^{0}\widehat{x}^T(t+\theta)Q(1+\theta+h_i)\widehat{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\left(\widehat{A}_k\widehat{x}(t-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0}\widehat{G}_k(\theta)\widehat{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right)^T P\widehat{x}(t) +$$

$$+ \widehat{x}^T(t)P\sum_{k=0}^{m}\left(\widehat{A}_k\widehat{x}(t-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0}\widehat{G}_k(\theta)\widehat{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right) +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t-h_i}^{t}\widehat{x}^T(\xi)Q(1+\xi-t+h_i)\widehat{x}(\xi)\mathrm{d}\xi =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m}\left(\widehat{x}^T(t)P\widehat{A}_k\widehat{x}(t-h_k) + \widehat{x}^T(t)P\int\limits_{-h_k}^{0}\widehat{G}_k(\theta)\widehat{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\left(\widehat{x}^T(t)Q(1+h_i)\widehat{x}(t) - \widehat{x}^T(t-h_i)Q\widehat{x}(t-h_i) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t-h_i}^{t}\widehat{x}^T(\xi)Q\widehat{x}(\xi)\mathrm{d}\xi\right).$$

Следовательно, из леммы 3 получаем

$$\dot{v}(\widehat{x}_t) \leqslant 2\widehat{x}^T(t)P\widehat{A}_0\widehat{x}(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\left(\widehat{x}^T(t)P\widehat{A}_kQ^{-1}\widehat{A}_k^TP\widehat{x}(t) + \widehat{x}^T(t-h_k)Q\widehat{x}(t-h_k) + \right.$$

$$\left. + \widehat{x}^T(t)P\int\limits_{-h_k}^{0}\widehat{G}_k(\theta)Q^{-1}\widehat{G}_k^T(\theta)P\widehat{x}(t)\mathrm{d}\theta + \int\limits_{-h_k}^{0}\widehat{x}^T(t+\theta)Q\widehat{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\left(\widehat{x}^T(t)Q(1+h_i)\widehat{x}(t) - \widehat{x}^T(t-h_i)Q\widehat{x}(t-h_i) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t-h_i}^{t}\widehat{x}^T(\xi)Q\widehat{x}(\xi)\mathrm{d}\xi\right).$$

Поэтому, в силу системы (15) имеет место

$$\begin{aligned}\dot{v}(\widehat{x}_t) \leqslant & -\beta \widehat{x}^T(t) Q \widehat{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{x}^T(t) Q (1 + h_i) \widehat{x}(t) + \\ & + \sum_{k=1}^{m} \Bigg(\widehat{x}^T(t) P \widehat{A}_k Q^{-1} \widehat{A}_k^T P \widehat{x}(t) + \\ & + \widehat{x}^T(t) P \int_{-h_k}^{0} \widehat{G}_k(\theta) Q^{-1} \widehat{G}_k^T(\theta) P \widehat{x}(t) \mathrm{d}\theta \Bigg) = \\ = & \, \widehat{x}^T(t) \Bigg(-Q + PB(\alpha)P \Bigg) \widehat{x}(t) < 0. \end{aligned} \tag{16}$$

По теореме 2 получаем, что система $\widehat{(1)}$ экспоненциально устойчива. Из теоремы 1 следует, что $\mathrm{Re}(s) < 0$, где s – любой корень характеристического полинома g системы $\widehat{(1)}$. Поэтому $\mathrm{Re}(s + \alpha) < \alpha$. Теперь заметим, что $s + \alpha$ – корень характеристического полинома системы (1):

$$\begin{aligned} 0 = g(s) = \det \left(sI - \sum_{k=0}^{m} \left(e^{-sh_k} \widehat{A}_k + \int_{-h_k}^{0} e^{s\theta} \widehat{G}_k(\theta) \mathrm{d}\theta \right) \right) = \\ = \det \left((s+\alpha)I - \sum_{k=0}^{m} \left(e^{-(s+\alpha)h_k} A_k + \int_{-h_k}^{0} e^{(s+\alpha)\theta} G_k(\theta) \mathrm{d}\theta \right) \right). \end{aligned}$$

Осталось показать, что система (15) совместна. Зафиксируем произвольную матрицу $Q > 0$. Из теории второго метода Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений известно [27], что у уравнения системы (15) есть решение $P > 0$ в том, и только в том случае, когда все собственные числа матрицы $A_0 - \alpha I$ лежат в левой открытой полуплоскости. Отсюда очевидно, что существует возрастающая последовательность $\{\alpha_n : \ \alpha_n > \|A_0\|\}_{n=1}^{\infty}$, такая что $\exists \, \{P_n : \ P_n = P_n(\alpha_n) > 0\}_{n=1}^{\infty}$,

$$(A_0 - \alpha_n I)^T P_n + P_n (A_0 - \alpha_n I) = -\beta Q,$$

$$A_0^T P_n + P_n A_0 + \beta Q = 2\alpha_n P_n,$$

$$\|P_n\| \leqslant \frac{2\|A_0\|\|P_n\| + \beta\|Q\|}{2\alpha_n} = \frac{\beta\|Q\|}{2\alpha_n} + \frac{\|A_0\|\|P_n\|}{\alpha_n},$$

$$\|P_n\| \leqslant \frac{\beta\|Q\|}{2(\alpha_n - \|A_0\|)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{17}$$

Отсюда с учетом возрастания $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{\min}(Q - P_n B(\alpha_n) P_n) = \lambda_{\min}(Q) > 0$. Следовательно, $Q - P_n B(\alpha_n) P_n > 0$ при достаточно больших n, и совместность показана. □

Из доказанного вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть система* (1) *имеет собственное число* s, *такое что* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$. *Тогда* $\mathrm{Re}(s) < \alpha$, *где величина* α *такова, что следующая система матричных неравенств относительно* $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *совместна:*

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{2\alpha h_{\min}}(\lambda_{\min}(Q) - s_1(P)) > s_2(P), \quad \alpha > 0, \\ P > 0,\ Q > 0,\ (A_0 - \alpha I)^T P + P(A_0 - \alpha I) = -\beta Q, \end{cases} \tag{18}$$

где $s_1(P) = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{-h_k}^{0} \left\|P G_k(\theta) Q^{-1} G_k^T(\theta) P\right\| \mathrm{d}\theta + \sum\limits_{\substack{k=\overline{1,m}\\ h_k=0}} \left\|P A_k Q^{-1} A_k^T P\right\|,$

$$s_2(P) = \sum_{\substack{k=\overline{1,m}\\ h_k\neq 0}} \left\|P A_k Q^{-1} A_k^T P\right\|, \quad h_{\min} = \min_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ h_k\neq 0}} \{h_k\}.$$

Доказательство. Из (16) и $\alpha > 0$ следует, что

$$\dot v(\widehat{x}_t) \leqslant \left(-\lambda_{\min}(Q) + \mathrm{e}^{-2\alpha h_{\min}} s_2(P) + s_1(P)\right)\|\widehat{x}(t)\|^2 < 0,$$

в силу (18). Остальное доказательство оценки проводится аналогично доказательству леммы 4. Совместность системы (18) устанавливается аналогично доказательству леммы 4, так как выполнено (17), и $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n) = \infty$. □

С учетом доказательства резрешимости системы (18) нетрудно убедиться в справедливости следующего алгоритма.

Замечание 3. *Величина* α *из следствия 1 может быть вычислена следующим образом:*

1. Выбрать $Q > 0,\ \varepsilon > 0,\ \alpha = \varepsilon + \max\{0, \mathrm{Re}(\lambda_{\max}(A_0))\}$.

2. *Решить* $(A_0-\alpha I)^T P + P(A_0-\alpha I) = -\beta Q$ *относительно* P.

3. *Если* $\lambda_{\min}(Q) \leqslant s_1(P)$, *то положить* $\alpha=\alpha+\varepsilon$ *и перейти к шагу 2.*

4. *Если* $s_2(P)=0$, *то закончить алгоритм.*

5. *Вычислить* $\alpha_0 = \frac{1}{2h_{\min}}\ln\Bigl(\frac{s_2(P)}{\lambda_{\min}(Q)-s_1(P)}\Bigr)$. *Если* $\alpha_0<\alpha$, *то закончить алгоритм. Иначе положить* $\alpha=\alpha+\varepsilon$ *и перейти к шагу 2.*

Следующее утверждение дает оценку на величину α из следствия 1.

Следствие 2. *Величину* α, *удовлетворяющую системе из следствия 1, можно найти из системы*

$$\begin{cases} \alpha > \|A_0\| + \dfrac{\beta\lambda_{\max}(Q)}{2}\sqrt{\dfrac{s_3}{\lambda_{\min}(Q)}}, \\ \mathrm{e}^{2\alpha h_{\min}}\left(4(\alpha-\|A_0\|)^2\lambda_{\min}(Q)-\beta^2\lambda_{\max}(Q)^2 s_3\right) > \beta^2\lambda_{\max}(Q)^2 s_4, \end{cases} \tag{19}$$

где $s_3 = \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0}\bigl\|G_k(\theta)Q^{-1}G_k^T(\theta)\bigr\|\mathrm{d}\theta + \sum\limits_{\substack{k=\overline{1,m}\\ h_k=0}}\bigl\|A_kQ^{-1}A_k^T\bigr\|$,

$s_4 = \sum\limits_{\substack{k=\overline{1,m}\\ h_k\neq 0}}\bigl\|A_kQ^{-1}A_k^T\bigr\|$.

Доказательство. Покажем, что α, найденное из (19), удовлетворяет системе (18). Из (17) и (19) следует, что

$$s_1(P) \leqslant \lambda_{\max}(P)^2 s_3 \leqslant \frac{\beta^2\lambda_{\max}(Q)^2 s_3}{4(\alpha-\|A_0\|)^2} < \lambda_{\min}(Q),$$

$$\frac{s_2(P)}{\lambda_{\min}(Q)-s_1(P)} \leqslant \left(\lambda_{\min}(Q) - \frac{\beta^2\lambda_{\max}(Q)^2}{4(\alpha-\|A_0\|)^2}s_3\right)^{-1}\times$$
$$\times\frac{\beta^2\lambda_{\max}(Q)^2}{4(\alpha-\|A_0\|)^2}s_4 < \mathrm{e}^{2\alpha h_{\min}}.$$

Поэтому неравенство системы (18) выполнено. Матричное уравнение Ляпунова системы (18) разрешимо, так как $\alpha > \|A_0\| \geqslant |\lambda_{\max}(A_0)| \geqslant \mathrm{Re}(\lambda_{\max}(A_0))$.

$\square$

1.4 Непрерывность матрицы Ляпунова по параметрам

Результат этого раздела является непосредственным обобщением результата работы [28]. Рассмотрим системы (1) и

$$\dot{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} \left((A_k + \Delta_k) y(t - h_k - \eta_k) + \int\limits_{-h_k-\eta_k}^{0} (G_k + \Gamma_k)(\theta) y(t+\theta) \mathrm{d}\theta \right), \tag{20}$$

где $t \geqslant 0,\ \Delta_k \in \mathbb{R}^{n\times n},\ 0 = h_0 + \eta_0 \leqslant h_k + \eta_k,\ G_k, \Gamma_k \in \mathrm{C}([-h_k - \eta_k, 0], \mathbb{R}^{n\times n})$ $\forall k \in \{0, \ldots, m\},\ \max\limits_{k\in\{0,\ldots,m\}} \{h_k + \eta_k\} = h + \eta$. Пусть K и F – фундаментальные матрицы систем (1) и (20) соответственно. Обозначим изменяющиеся параметры систем через $P = (A_k, h_k, G_k)_{k=0}^m,\ \Delta = (\Delta_k, \eta_k, \Gamma_k)_{k=0}^m$.

Предположение 1. *В рамках этого раздела системы* (1) *и* (20) *экспоненциально устойчивы.*

Лемма 5 ([15]). *Функциональные матрицы*

$$U(\tau) = \int\limits_0^\infty K^T(t) W K(t+\tau) \mathrm{d}t, \quad L(\tau) = \int\limits_0^\infty F^T(t) W F(t+\tau) \mathrm{d}t$$

являются соответствующими матрицами Ляпунова систем (1) *и* (20)*, ассоциированными с данной* $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Введем обозначение

$$M_\Delta = \max_{k\in\{0,\ldots,m\}} \left\{ \|\Delta_k\|, |\eta_k|, \max_{\theta\in[-h_k-\eta_k,0]} \{\|\Gamma_k\|\} \right\}.$$

Тогда из предположения 1 и определения 3 следует справедливость следующей леммы.

Лемма 6. *В рамках этого раздела существуют* $\gamma > 0$ *и* $\sigma > 0$*, не зависящие от* $(\Delta_k, \eta_k, \Gamma_k)_{k=0}^m$*, такие что*

$$\|K(t)\| \leqslant \gamma\, \mathrm{e}^{-\sigma t}, \quad \|F(t)\| \leqslant \gamma\, \mathrm{e}^{-\sigma t},$$

если существует $\delta \in \mathbb{R}$*, такое что* $\delta > 0,\ M_\Delta < \delta$.

Лемма 7. *Фундаментальная матрица системы* (1) *удовлетворяет оценке*

$$\|K(t+\delta)-K(t)\| \leqslant m(P)\delta\, \mathrm{e}^{-\sigma t} \quad \forall\delta \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0,$$

где $m(P) = m_1(P)\gamma, \quad m_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{m} \left(\|A_k\|\, \mathrm{e}^{\sigma h_k} + \int\limits_{-h_k}^{0} \|G_k(\theta)\|\, \mathrm{e}^{-\sigma\theta}\, \mathrm{d}\theta \right).$

Доказательство. Из определения 3 следует

$$K(t+\delta)-K(t) = \int\limits_{t}^{t+\delta} \sum_{k=0}^{m} \left(A_k K(\xi-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta)K(\xi+\theta)\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\xi.$$

Далее, в силу предположения 6 и формулы конечных приращений имеет место

$$\|K(t+\delta)-K(t)\| \leqslant m_1(P)\frac{\gamma\big(1-\mathrm{e}^{-\sigma\delta}\big)}{\sigma}\, \mathrm{e}^{-\sigma t} = m_1(P)\gamma\, \mathrm{e}^{-\sigma\delta_0}\, \delta\, \mathrm{e}^{-\sigma t},$$

для некоторого $\delta_0 \in [0,\delta]$. Следовательно, из $\delta_0 \geqslant 0,\ \sigma > 0$ получаем требуемый результат. □

Теорема 6. *Матрица Ляпунова системы* (1) *непрерывна по ее параметрам. А именно,*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \left(M_\Delta < \delta \implies \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|(U-L)(\tau)\| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Из леммы 5,

$$\begin{aligned}(U-L)(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} & K^T(t)W(K(t+\tau)-F(t+\tau))\mathrm{d}t + \\ & + \int\limits_{0}^{\infty} (K(t)-F(t))^T W F(t+\tau)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим $\Delta K(t) = K(t) - F(t)$. Тогда из определения 3 получаем, что $\Delta K(t)$ является решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Delta K(t)}{\mathrm{d}t} - g(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \left(A_k \Delta K(t-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta)\Delta K(t+\theta)\mathrm{d}\theta \right), \quad t \geqslant 0, \\ \Delta K(t) = 0, \quad t \leqslant 0, \end{cases} \tag{22}$$

где $g(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \left(A_k F(t-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta) F(t+\theta) \mathrm{d}\theta \right) -$

$$- \sum_{k=0}^{m} \left((A_k + \Delta_k) F(t - h_k - \eta_k) + \int\limits_{-h_k-\eta_k}^{0} (G_k + \Gamma_k)(\theta) F(t+\theta) \mathrm{d}\theta \right).$$

Покажем, что $\Delta K(t)$ определяется по формуле

$$\Delta K(t) = \int\limits_{0}^{t} K(t-s) g(s) \mathrm{d}s. \tag{23}$$

Для этого подставим выражение для $\Delta K(t)$ в левую часть уравнения системы (22) и используем определение 3:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta K(t)}{\mathrm{d}t} - g(t) = \int\limits_{0}^{t} \frac{\partial K(t-s)}{\partial t} g(s) \mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_{0}^{t} \sum_{k=0}^{m} \left(A_k K(t-s-h_k) + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta) K(t-s+\theta) \mathrm{d}\theta \right) g(s) \mathrm{d}s.$$

Подставив $\Delta K(t)$ в правую часть уравнения системы (22), получим

$$\sum_{k=0}^{m} \left(A_k \int\limits_{0}^{t-h_k} K(t-h_k-s) g(s) \mathrm{d}s + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta) \int\limits_{0}^{t+\theta} K(t+\theta-s) g(s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\theta \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(A_k \int\limits_{0}^{t} K(t-h_k-s) g(s) \mathrm{d}s + \int\limits_{-h_k}^{0} G_k(\theta) \int\limits_{0}^{t} K(t+\theta-s) g(s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\theta \right),$$

так как $t+\theta-s \in [\theta, 0]$ при $s \in [t+\theta, t]$. Таким образом, видно, что (23) удовлетворяет системе (22). Оценим $\|g\|$:

$$\|g(t)\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \Bigg(\|\Delta_k\| \|F(t-h_k)\| + \|A_k + \Delta_k\| \|F(t-h_k) - F(t-h_k-\eta_k)\| +$$

$$+ \int\limits_{-M_k}^{-m_k} \|G_k(\theta)\| \|F(t+\theta)\| \mathrm{d}\theta + \int\limits_{-h_k-\eta_k}^{0} \|\Gamma_k(\theta)\| \|F(t+\theta)\| \mathrm{d}\theta \Bigg),$$

где $M_k = \max\{h_k + \eta_k, h_k\}$, $m_k = \min\{h_k + \eta_k, h_k\}$. Тогда, из (22), $F \in \in \mathrm{C}((0,\infty),\mathbb{R}^{n\times n})$ и теоремы о среднем получаем, что $\forall k \in \{0,\dots,m\}$ $\exists \theta_k = = \theta_k(t) \in [-M_k, -m_k]$, такой что

$$\int\limits_{-M_k}^{-m_k} \|G_k(\theta)\| \|F(t+\theta)\| \mathrm{d}\theta = |\eta_k| \|G_k(\theta_k)\| \|F(t+\theta_k)\|.$$

Тогда из лемм 6 и 7 получаем

$$\begin{aligned}
\|g(t)\| \leqslant{}& \sum_{k=0}^{m} \left(\delta\gamma\,\mathrm{e}^{-\sigma(t-h_k)} + \delta\|G_k(\theta_k)\|\gamma\,\mathrm{e}^{-\sigma(t+\theta_k)} + \delta \int\limits_{-h_k-\eta_k}^{0} \gamma\,\mathrm{e}^{-\sigma(t+\theta)}\,\mathrm{d}\theta \right) + \\
&+ \sum_{\substack{k=\overline{0,m}\\ M_k\leqslant t}} \|A_k + \Delta_k\| m(P+\Delta)\delta\,\mathrm{e}^{-\sigma t} + \\
&+ \sum_{\substack{k=\overline{0,m}\\ M_k> t}} \|A_k + \Delta_k\| \|F(t-h_k) - F(t-h_k-\eta_k)\| \leqslant \\
\leqslant{}& c_1(\delta)\delta\,\mathrm{e}^{-\sigma t} + \sum_{\substack{k=\overline{0,m}\\ M_k> t}} \|A_k + \Delta_k\| \|F(t-h_k) - F(t-h_k-\eta_k)\|,
\end{aligned}$$

где
$$\begin{aligned}
c_1(\delta) ={}& \sum_{k=0}^{m} \Bigg(\gamma\,\mathrm{e}^{\sigma h_k} + \max_{\theta\in[-h_k-\delta,-h_k+\delta]} \{\|G_k(\theta)\|\}\gamma\,\mathrm{e}^{\sigma(h_k+\delta)} + \\
&+ \frac{\gamma}{\sigma}\Big(\mathrm{e}^{\sigma(h_k+\delta)} - 1\Big) + (\|A_k\| + \delta)\times \\
&\times \sum_{i=0}^{m} \Big((\|A_i\| + \delta)\,\mathrm{e}^{\sigma h_i} + \int\limits_{-h_i}^{0} (\|G_i(\theta)\| + \delta)\,\mathrm{e}^{-\sigma\theta}\,\mathrm{d}\theta \Big)\gamma \Bigg) \geqslant \\
\geqslant{}& \sum_{k=0}^{m} \Bigg(\gamma\,\mathrm{e}^{\sigma h_k} + \|G_k(\theta_k)\|\gamma\,\mathrm{e}^{-\sigma\theta_k} + \frac{\gamma}{\sigma}\Big(\mathrm{e}^{\sigma(h_k+\eta_k)} - 1\Big) + \\
&+ \|A_k + \Delta_k\| m(P+\Delta) \Bigg).
\end{aligned}$$

Поэтому из (22), (23) и леммы 6 следует

$$\|\Delta K(t)\| \leqslant \int\limits_0^t \|K(t-s)\| \|g(s)\| \mathrm{d}s \leqslant c_1(\delta)\delta \int\limits_0^t \|K(t-s)\|\,\mathrm{e}^{-\sigma s}\,\mathrm{d}s +$$

$$+\sum_{\substack{k=\overline{0,m}\\ M_k>t}}\|A_k+\Delta_k\|$$

$$\times\int\limits_0^t\|K(t-s)\|\|F(s-h_k)-F(s-h_k-\eta_k)\|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\leqslant c_1(\delta)\delta\int\limits_0^t\gamma\,\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\,\mathrm{e}^{-\sigma s}\,\mathrm{d}s+$$

$$+\sum_{\substack{k=\overline{0,m}\\ M_k>t}}\|A_k+\Delta_k\|\int\limits_{m_k}^{M_k}\gamma\,\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\,\gamma\,\mathrm{e}^{-\sigma(s-m_k)}\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\leqslant c_1(\delta)\delta\gamma t\,\mathrm{e}^{-\sigma t}+c_2(\delta)\delta\,\mathrm{e}^{-\sigma t},\quad \text{где } c_2(\delta)=\sum_{k=0}^{m}(\|A_k\|+\delta)\gamma^2\,\mathrm{e}^{\sigma h_k}.$$

Таким образом, из (21),

$$\|(U-L)(\tau)\|\leqslant\gamma\|W\|\delta\Bigg(\int\limits_0^\infty\mathrm{e}^{-\sigma t}\Big(c_2(\delta)\,\mathrm{e}^{-\sigma(t+\tau)}+c_1(\delta)\gamma(t+\tau)\,\mathrm{e}^{-\sigma(t+\tau)}\Big)\mathrm{d}t+$$

$$+\int\limits_0^\infty\Big(c_2(\delta)\,\mathrm{e}^{-\sigma t}+c_1(\delta)\gamma t\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\Big)\,\mathrm{e}^{-\sigma(t+\tau)}\,\mathrm{d}t\Bigg)=$$

$$=\gamma\|W\|\delta\,\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\left(\frac{2c_2(\delta)+c_1(\delta)\gamma\tau}{2\sigma}+\frac{2c_1(\delta)\gamma}{(2\sigma)^2}\right).$$

Свойство симметрии матрицы Ляпунова гарантирует достаточность оценки $\|U-L\|$ только при $\tau\geqslant 0$. Поэтому имеет место

$$\|(U-L)(\tau)\|<2\gamma\|W\|\delta\big(\big(2c_2(\delta)+c_1(\delta)\gamma(\mathrm{e}\,\sigma)^{-1}\big)(2\sigma)^{-1}+2c_1(\delta)\gamma(2\sigma)^{-2}\big).$$

Отсюда, так как $\exists\lim\limits_{\delta\to 0}(c_1(\delta))\in\mathbb{R}$, $\exists\lim\limits_{\delta\to 0}(c_2(\delta))\in\mathbb{R}$, получаем $\sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}}\|(U-$ $-L)(\tau)\|<\varepsilon$, при $\varepsilon>0$ и достаточно малом $\delta>0$. $\square$

1.5 Непрерывность нулей аналитической функции

Рассмотрим известные вспомогательные результаты.

Лемма 8. *Аналитическая ненулевая функция имеет конечное число нулей в любом компактном подмножестве* $\mathbb{C}$.

Теорема 7 (Теорема Руше). *Пусть f и g – комплекснозначные аналитические функции на простом замкнутом контуре $C \subset \mathbb{C}$ и внутри него. Тогда f и $f + g$ имеют одно и то же (с учетом кратностей) число нулей внутри C, если*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in C. \tag{24}$$

Следующая Теорема дает условия непрерывности нулей аналитической функции по параметрам. Ее доказательство является обобщением доказательства непрерывности нулей полинома по коэффициентам [29].

Теорема 8. *Предположим, что функция $f(z,p): \mathbb{C} \times P \to \mathbb{C}$ является аналитической по z на множестве $K \subset \mathbb{C}$ и определена набором параметров p, K – объединение некоторого простого замкнутого контура и его внутренности, $\frac{\partial^i}{\partial z^i} f(0,\cdot) \in \mathrm{C}(P,\mathbb{C})\ \forall i \in \mathbb{N}$, P – нормированное пространство. Тогда все нули функции f по z, лежащие внутри K, непрерывны в P.*

Доказательство. Из аналитичности функции f следует, что $\exists!(a_i)_{i=0}^{\infty}: \ f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \ a_i \in \mathbb{C}$. Из леммы 8 видно, что для любого нуля z_k функции f, лежащего в K, можно найти окружность $C_k \subset \mathbb{C}$ радиуса $r_k > 0$ с центром z_k, такую что z_k является единственным нулем функции f внутри и на окружности C_k, $\exists \delta_k \in \mathbb{R}: \ |f| > \delta_k \geqslant \delta > 0\ \forall z \in C_k, \ \delta = \min\{\delta_k\}$. Выберем теперь ε_i, так что

$$0 < |\varepsilon_i| = \begin{cases} \dfrac{\delta}{2}, & i = 0, \\ \dfrac{3\delta}{\pi^2 i^2 (r+s+i)^i}, & i > 0, \end{cases}$$

где $r = \max\limits_k\{r_k\}, \ s = \max\limits_k\{|z_k|\}$, и построим функцию $g(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i z^i$. Следовательно,

$$|g(z)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_i||z^i| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |\varepsilon_i|(r_k + |z_k| + i)^i \leqslant \frac{\delta}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3\delta}{\pi^2 i^2 (r+s+i)^i} \times$$

$$\times (r+s+i)^i = \frac{\delta}{2} + \delta\frac{6}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \delta < |f| \quad \forall z \in C_k. \tag{25}$$

Проверим, что $g(z)$ является целой с выбранными коэффициентами ε_i. В самом деле,

$$\left|\frac{\varepsilon_{i+1}z^{i+1}}{\varepsilon_i z^i}\right| = \frac{|z|i^2(r+s+i)^i}{(i+1)^2(r+s+i+1)^{i+1}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

Поэтому по признаку Даламбера $g(z)$ сходится $\forall z \in \mathbb{C}$. Отсюда, из теоремы 7 и (25) заключаем, что f и $f+g$ имеют одинаковое число нулей (с учетом кратностей) внутри каждой окружности C_k. Следовательно, нули f находятся в непрерывной зависимости от коэффициентов a_i. Осталось показать, что a_i непрерывны в P. Действительно, как известно,

$$a_i = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial z^i}f(0,p) \in \mathrm{C}(P, \mathbb{C}^n) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

так как $\frac{\partial^i}{\partial z^i}f(0,\cdot) \in \mathrm{C}(P, \mathbb{C}^n)$. Осталось заметить, что $\lim\limits_{i\to\infty}(a_i) = 0$, и доказательство завершено. $\square$

Глава 2. Основной результат

Получено следующее утверждение.

Теорема 9. *Система* (1) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существуют функционалы* v, w*:* $\mathrm{PC}([-h,0],\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}$, *такие что функционал* v *дифференцируем вдоль решений системы* (1), *за исключением конечного числа точек отрезка* $[0,h]$ *имеет место равенство*

$$\dot v(x_t) = -w(x_t) \quad \forall t \geqslant 0,$$

и выполняются следующие условия:

1. $v(\lambda\varphi) = |\lambda|^2 v(\varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$

2. $\exists\, \alpha_0 > 0:\ v(\varphi) \geqslant \alpha_0 \|\varphi(0)\|^2 \quad \forall \varphi \in S,$

3. $\exists\, w_0 > 0:\ w(\varphi) \geqslant w_0 \|\varphi(0)\|^2 \quad \forall \varphi \in S.$

Необходимость. Пусть система (1) экспоненциально устойчива, $W > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in S$, $w(\varphi) = \varphi^*(0) W \varphi(0)$, $w_0 = \lambda_{\min}(W)$ и $v = v_0$. Тогда дифференцируемость и форма производной функционала v следует из теоремы 5. Первое условие проверяется непосредственно:

$$v(\lambda\varphi) = \overline{\lambda}\varphi^*(0)U(0)\lambda\varphi(0) + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\varphi^*(0)\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0} U(-h_k-\theta)A_k\lambda\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta + \right.$$

$$+\,\overline{\lambda}\varphi^*(0)\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0}\int\limits_{-h_k}^{\theta} U(\xi-\theta)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi\lambda\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0}\overline{\lambda}\varphi^*(\theta_1)A_k^T \times$$

$$\left. \times \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{-h_i}^{0}\int\limits_{-h_i}^{\theta_2} U(h_k+\theta_1-\theta_2+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi\lambda\varphi(\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1\right) +$$

$$
+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\int\limits_{-h_i}^{0}\overline{\lambda}\varphi^*(\theta_1)A_i^T\int\limits_{-h_k}^{0}U(\theta_1+h_i-\theta_2-h_k)A_k\lambda\varphi(\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1+\right.
$$

$$
+\int\limits_{-h_k}^{0}\overline{\lambda}\varphi^*(\theta_1)\int\limits_{-h_i}^{0}\int\limits_{-h_k}^{\theta_1}G_k^T(\xi_1)\times
$$

$$
\left.\times\int\limits_{-h_i}^{\theta_2}U(\theta_1-\theta_2-\xi_1+\xi_2)G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1\lambda\varphi(\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1\right)=
$$

$$
=|\lambda|^2v(\varphi).
$$

Второе условие выполняется в силу леммы 1. Третье условие имеет место, так как

$$
\varphi^*(0)W\varphi(0)=\mathrm{Re}^T(\varphi(0))W\,\mathrm{Re}(\varphi(0))+\mathrm{Im}^T(\varphi(0))W\,\mathrm{Im}(\varphi(0))\geqslant
$$

$$
\geqslant w_0\big(\|\mathrm{Re}(\varphi(0))\|^2+\|\mathrm{Im}(\varphi(0))\|^2\big)=w_0\|\varphi(0)\|^2,\quad w_0>0,
$$

в силу $W>0$. □

Достаточность. Допустим, система (1) не является экспоненциально устойчивой. Тогда по теореме 1 система имеет собственное число $s=\alpha+j\beta$, $\alpha\geqslant 0$, существует решение $x(t)=\mathrm{e}^{st}C,\ C\in\mathbb{C}^n,\ C\neq 0$. Причем можно считать, что $\|C\|=1$ в силу линейности системы. Рассмотрим функционал v на этом решении, учитывая данное первое условие:

$$
v(x_t)=\left|\mathrm{e}^{st}\right|^2v(\psi)=\mathrm{e}^{2\alpha t}\,v(\psi),\quad \text{где } \psi(\theta)=\mathrm{e}^{s\theta}\,C=x_0(\theta)\quad \forall\theta\in[-h,0].
$$

Заметим, что $x_t=\mathrm{e}^{st}\,\psi$. Поэтому, при $t\geqslant 0$

$$
\|x_t(\theta)\|=\|\mathrm{e}^{s(t+\theta)}\,C\|=\mathrm{e}^{\alpha(t+\theta)}\leqslant\mathrm{e}^{\alpha t}=\|\mathrm{e}^{st}\,C\|=\|x_t(0)\|,\tag{26}
$$

При $t=0$ отсюда следует, что $\psi\in S$. А значит, по условию $v(\psi)\geqslant$ $\geqslant\alpha_0\|\psi(0)\|^2=\alpha_0\|C\|^2=\alpha_0>0$. Поэтому

$$
\dot{v}(x_t)=2\alpha\,\mathrm{e}^{2\alpha t}\,v(\psi)\geqslant 0\quad\forall t\geqslant 0.\tag{27}
$$

Но, с другой стороны, из (26) следует, что $x_t \in S$. Следовательно, за исключением конечного множества точек из $[0, h]$ имеет место

$$\dot{v}(x_t) = -w\,(x_t) \leqslant -w_0\|x(t)\|^2 = -w_0\,\mathrm{e}^{2\alpha t} < 0 \quad \forall t \geqslant 0, \tag{28}$$

что противоречит (27). $\square$

Введем при $\tau \geqslant h$ новое множество специальных функций, приспособленное для приложения в задаче о робастной устойчивости:

$$S(\tau, K) = \Big\{\varphi \in \mathrm{C}^1([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) : \|\varphi(\theta)\| \leqslant \|\varphi(0)\|,$$
$$\|\varphi'(\theta)\| \leqslant K\|\varphi(0)\| \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]\Big\},$$

где K – любая верхняя оценка на модуль неустойчивого собственного числа системы (1). Для нахождения K могут быть использованы оценки, полученные в разделе 1.3.

Теорема 10. *Система* (1) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существуют* $\tau \geqslant h$ *и функционалы* v, w*:* $\mathrm{PC}([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}$, *такие что функционал* v *дифференцируем вдоль решений системы* (1), *за исключением конечного числа точек из* $[0, h]$ *имеет место*

$$\dot{v}(x_t) = -w(x_t) \quad \forall t \geqslant 0,$$

и выполняются следующие условия:

1. $v(\lambda\varphi) = |\lambda|^2 v(\varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

2. $\exists\, \alpha_0 > 0 :\ v(\varphi) \geqslant \alpha_0\|\varphi(0)\|^2 \quad \forall \varphi \in S(\tau, K)$,

3. $\exists\, w_0 > 0 :\ w(\varphi) \geqslant w_0\|\varphi(0)\|^2 \quad \forall \varphi \in S(\tau, K)$.

Доказательство. Необходимость следует из доказательства необходимости теоремы 9 при $\tau = h$ и $S(h, K) \subset S$. Перейдем к достаточности. В обозначениях доказательства достаточности теоремы 9 при $\theta \in [-\tau, 0],\ t \geqslant 0$ имеет место (26), а также

$$\|x_t'(\theta)\| = \|(\mathrm{e}^{s(t+\theta)}\, C)'\| = \|s\,\mathrm{e}^{s(t+\theta)}\, C\| \leqslant |s| \|\,\mathrm{e}^{st}\, C\| \leqslant K\|x_t(0)\|. \qquad (29)$$

С одной стороны, при $t = 0$ отсюда следует, что $\psi \in S(\tau, K)$. Поэтому выполнено (27). Но с другой стороны, из (26) и (29) следует, что $x_t \in S(\tau, K)$. Следовательно, за исключением конечного множества точек из $[0, h]$ имеет место (28), что противоречит (27). $\square$

Рассмотрим при $t_0 \geqslant 0$ и $\tau \geqslant h$ более узкое множество, которое также пригодится в задаче о робастной устойчивости:

$$S(t_0, \tau, K) = \Big\{\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{s(t_0+\theta)}\, C : \\ C \in \mathbb{C}^n,\ s \in \mathbb{C},\ \|C\| = 1,\ |s| \leqslant K \quad \forall\theta \in [-\tau, 0]\Big\}.$$

Теорема 11. *Система* (1) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существуют* $t_0 \geqslant 0,\ \tau \geqslant h$ *и функционалы* $v, w :\ S(\tau, K) \to \mathbb{R}$, *такие что*

$$\dot v(x_t)\big|_{t=t_0} = -w\left(x_{t_0}\right) \quad \forall x_{t_0} \in S(t_0, \tau, K),$$

и выполняются следующие условия:

1. $v(\lambda\varphi) = |\lambda|^2 v(\varphi) \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}$,

2. $v(\varphi) \geqslant 0 \quad \forall\varphi \in S(0, \tau, K)$,

3. $\exists\, w_0 > 0 :\ w(\varphi) \geqslant w_0\|\varphi(0)\|^2 \quad \forall\varphi \in S(t_0, \tau, K)$.

Доказательство. Необходимость следует из доказательства необходимости теоремы 9 при $\tau = h,\ S(t_0, h, K) \subset S$, а также того факта, что (7) имеет место в случае $x_t \in \mathrm{C}([t-h, t], \mathbb{C}^n)$. Перейдем к достаточности. В обозначениях доказательства достаточности теоремы 9 нетрудно видеть, что $\psi \in S(0, \tau, K),\ x_{t_0} \in S(t_0, \tau, K)$. Поэтому по условию имеет место (27), что противоречит третьему условию при $\varphi = x_{t_0}$. $\square$

Глава 3. Задача о робастной устойчивости

Назовем систему (1) номинальной, а систему (20) – возмущенной.

Предположение 2. *Система* (1) *экспоненциально устойчива.*

Задача 1. *Нахождение условий, при которых система* (20) *остается экспоненциально устойчивой.*

Представим систему (20) в виде

$$\dot{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} \left(A_k y(t-h_k) + \int_{-h_k}^{0} G_k(\theta) y(t+\theta) \mathrm{d}\theta \right) + f(y_t),$$

$$\text{где } f(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} \Bigg(A_k(\varphi(-h_k-\eta_k) - \varphi(-h_k)) + \Delta_k \varphi(-h_k-\eta_k) + \\ + \int_{-h_k-\eta_k}^{-h_k} G_k(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-h_k-\eta_k}^{0} \Gamma_k(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta \Bigg) + \Delta_0 \varphi(0).$$

Примем обозначения $l(\varphi) = 2\,\mathrm{Re}(f^*(\varphi)u(\varphi))$,

$$u(\varphi) = U(0)\varphi(0) + \\ + \sum_{k=1}^{m} \int_{-h_k}^{0} \left(U(-h_k-\theta)A_k + \int_{-h_k}^{\theta} U(-\theta+\xi) G_k(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \varphi(\theta) \mathrm{d}\theta.$$

Лемма 9. *Производная функционала* v_0 *вдоль решений системы* (20) *представима в виде*

$$\dot{v}_0(y_t) = -y^*(t) W y(t) + l(y_t) \quad \forall t \geqslant 0, \tag{30}$$

за исключением конечного числа точек $t \in [0, h]$.

Доказательство. Рассмотрим, как в доказательстве теоремы 5, для всех $t \geqslant 0$, за исключением тех, для которых решение y не удовлетворяет (20),

$$\dot{v}_0(y_t) = \dot{R}_0(t) + \dot{R}_1(t) + \dot{R}_2(t) + \dot{R}_3(t) + \dot{R}_4(t) + \dot{R}_5(t),$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_0(t) = 2\,\mathrm{Re}\Bigg(\sum_{k=0}^{m} \Bigg(& \underline{y^*(t)U(0)A_k y(t-h_k)} + \\
& + \underline{y^*(t)U(0) \int_{-h_k}^{0} G_k(\theta) y(t+\theta)\mathrm{d}\theta} \Bigg) + f^*(y_t)U(0)y(t) \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_1(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(& \underbrace{\dot{y}^*(t) \int_{t-h_k}^{t} U(-h_k - s + t) A_k y(s)\mathrm{d}s} + \underline{y^*(t)U(-h_k)A_k y(t)} - \\
& - \underline{y^*(t)U(0)A_k y(t-h_k)} - \underbrace{\underbrace{y^*(t) \int_{t-h_k}^{t} \left[U'(h_k+s-t)\right]^T A_k y(s)\mathrm{d}s}} \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_2(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(& \underline{\underline{\dot{y}^*(t) \int_{t-h_k}^{t} \int_{-h_k}^{s-t} U^T(-\xi - t + s) G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(s)\mathrm{d}s}} + \\
& + \underline{y^*(t) \int_{-h_k}^{0} U(\xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(t)} - \underline{y^*(t)U(0) \int_{t-h_k}^{t} G_k(s-t)y(s)\mathrm{d}s} - \\
& - y^*(t) \int_{t-h_k}^{t} \int_{-h_k}^{s-t} \left[U'(-\xi + s - t)\right]^T G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(s)\mathrm{d}s \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_3(t) = 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(& y^*(t) \int_{t-h_i}^{t} \int_{-h_i}^{s_2-t} A_k^T U(h_k + t - s_2 + \xi) G_i(\xi)\mathrm{d}\xi y(s_2)\mathrm{d}s_2 - \\
& - \underline{\underline{\left[A_k y(t-h_k)\right]^* \int_{t-h_i}^{t} \int_{-h_i}^{s_2-t} U(t - s_2 + \xi) G_i(\xi)\mathrm{d}\xi y(s_2)\mathrm{d}s_2}} + \\
& + \underbrace{\underbrace{\int_{t-h_k}^{t} y^*(s_1) \int_{-h_i}^{0} A_k^T U(h_k + s_1 - t + \xi) G_i(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s_1 y(t)}} - \\
& - \underbrace{\int_{t-h_k}^{t} \int_{t-h_i}^{t} y^*(s_1) A_k^T U(h_k + s_1 - t) G_i(s_2 - t) y(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1} \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$\dot{R}_4(t) = 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Re}\Bigg(\underbrace{\underbrace{y^*(t)A_i^T\int\limits_{t-h_k}^{t}U(t+h_i-s-h_k)A_k y(s)\mathrm{d}s}} -$$

$$\underbrace{-\,y^*(t-h_i)A_i^T\int\limits_{t-h_k}^{t}U(t-h_k-s_2)A_k y(s_2)\mathrm{d}s_2}\Bigg),$$

$$\dot{R}_5(t) = 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Re}\Bigg(y^*(t)\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_k}^{0}G_k^T(\xi_1)\int\limits_{-h_i}^{s-t}U(t-s-\xi_1+\xi_2)\times$$

$$\times\, G_i(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 y(s)\mathrm{d}s - \underline{\underline{\Bigg(\int\limits_{t-h_k}^{t}G_k(s_1-t)y(s_1)ds_1\Bigg)^*}}\times$$

$$\underline{\underline{\times\int\limits_{t-h_i}^{t}\int\limits_{-h_i}^{s_2-t}U(-s_2+t+\xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi y(s_2)\mathrm{d}s_2}}\Bigg).$$

Соберем вместе все слагаемые, подчеркнутые одной линией:

$$S_1(t) = y^*(t)\sum_{k=0}^{m}\Bigg(U(-h_k)A_k + A_k^T U(h_k) +$$

$$+\int\limits_{-h_k}^{0}\big(U(\theta)G_k(\theta)+G_k^T(\theta)U(-\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta\Bigg)y(t) = -y^*(t)Wy(t).$$

Теперь соберем слагаемые, подчеркнутые одной скобкой:

$$S_2(t) = 2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\Bigg(\Bigg(\dot{y}(t)-\sum_{i=1}^{m}\Bigg(A_i y(t-h_i)+\int\limits_{-h_i}^{0}G_i(\theta)y(t+\theta)\mathrm{d}\theta\Bigg)\Bigg)^*\times$$

$$\times\int\limits_{t-h_k}^{t}U(t-s-h_k)A_k y(s)\mathrm{d}s\Bigg) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\Bigg(y^*(t)A_0^T\int\limits_{t-h_k}^{t}U(t-s-h_k)A_k y(s)\mathrm{d}s\Bigg) +$$

$$+\,2\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Re}\Bigg(f^*(y_t)\int\limits_{t-h_k}^{t}U(t-s-h_k)A_k y(s)\mathrm{d}s\Bigg).$$

Далее, слагаемые, подчеркнутые двумя скобками:

$$S_3(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(y^*(t) \int_{t-h_k}^{t} \Bigg(\Big(-U'(\tau_k) + \sum_{i=1}^{m} \Big(U(\tau_k - h_i)A_i + \\ + \int\limits_{-h_i}^{0} U(\tau_k + \xi)G_i(\xi)\mathrm{d}\xi \Big) \Big|_{\tau_k = h_k + s - t} \Bigg)^T A_k y(s)\mathrm{d}s \Bigg) = \\ = -S_2(t) + 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(f^*(y_t) \int\limits_{t-h_k}^{t} U(t - s - h_k)A_k y(s)\mathrm{d}s \Bigg),$$

так как $h_k + s - t \in [0, h_k]$. Слагаемые, подчеркнутые двумя линиями:

$$S_4(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(\Bigg(\dot{y}(t) - \sum_{i=1}^{m} \Bigg(A_i y(t - h_i) + \int\limits_{-h_i}^{0} G_i(\theta) y(t+\theta)\mathrm{d}\theta \Bigg) \Bigg)^* \times \\ \times \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} U(-s + t + \xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(s)\mathrm{d}s \Bigg) = \\ = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(y^*(t) A_0^T \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} U(-s + t + \xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(s)\mathrm{d}s \Bigg) + \\ + 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(f^*(y_t) \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} U(-s + t + \xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(s)\mathrm{d}s \Bigg).$$

Наконец, не подчеркнутые слагаемые:

$$S_5(t) = 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(y^*(t) \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} \Big(-U'(\tau) + \sum_{i=1}^{m} \Big(U(\tau - h_i)A_i + \\ + \int\limits_{-h_i}^{0} U(\tau + \xi_1)G_i(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1 \Big) \Big|_{\tau = -\xi + s - t} \Big)^T G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(s)\mathrm{d}s \Bigg) = \\ = -S_4(t) + 2\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\Bigg(f^*(y_t) \int\limits_{t-h_k}^{t} \int\limits_{-h_k}^{s-t} U(-s + t + \xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi y(s)\mathrm{d}s \Bigg),$$

так как $s - \xi - t \geqslant 0$. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Пусть $\tau = \max\{h, h+\eta\}$, $K(\Delta)$ – верхняя оценка на модуль неустойчивого собственного числа системы (20), $\Delta = (\Delta_i, \Gamma_i, \eta_i)_{i=0}^{m}$,

$$\rho_{1k}(\Delta) = \min\{\|A_k\|, \|A_k + \Delta_k\|\},$$
$$\rho_{2k}(\Delta) = \left|\int\limits_{-h_k-\eta_k}^{-h_k} \|G_k(\theta)\|\mathrm{d}\theta\right| + \int\limits_{-h_k-\eta_k}^{0} \|\Gamma_k(\theta)\|\mathrm{d}\theta,$$
$$u_0 = \|U(0)\| + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{-h_k}^{0}\left\|U(-h_k-\theta)A_k + \int\limits_{-h_k}^{\theta} U(-\theta+\xi)G_k(\xi)\mathrm{d}\xi\right\|\mathrm{d}\theta.$$

3.1 Применение теоремы 10

В этом разделе получена первая оценка, дающая достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (20). Докажем вспомогательный результат.

Лемма 10. *Функционал $l(\varphi)$ удовлетворяет оценке вида*

$$l(\varphi) \leqslant l_0(\Delta)\|\varphi(0)\|^2 \quad \forall \varphi \in S(\tau, K(\Delta)),$$

где $l_0(\Delta) = 2\sum\limits_{k=0}^{m}(\rho_{1k}(\Delta)|\eta_k|K(\Delta) + \|\Delta_k\| + \rho_{2k}(\Delta))u_0.$

Доказательство. Из $\|\varphi\|_{h+\eta} \leqslant \|\varphi\|_{\tau} = \|\varphi(0)\|$, $\varphi \in \mathrm{C}^1([-h,0], \mathbb{C}^n)$ и формулы Ньютона – Лейбница получаем

$$\|f(\varphi)\| \leqslant \sum_{k=0}^{m}\gamma_k + \sum_{k=0}^{m}\rho_{2k}(\Delta)\|\varphi(0)\|,$$
$$\gamma_k = \left\|A_k\int\limits_{-h_k}^{-h_k-\eta_k}\varphi'(\theta)\mathrm{d}\theta + \Delta_k\varphi(-h_k-\eta_k)\right\| \quad \forall \varphi \in S(\tau, K(\Delta)).$$

Величина γ_k может быть оценена двумя способами. Во-первых,

$$\gamma_k \leqslant \|A_k\|\left|\int\limits_{-h_k}^{-h_k-\eta_k}\varphi'(\theta)\mathrm{d}\theta\right| + \|\Delta_k\|\|\varphi(0)\|, \tag{31}$$

так как $\varphi \in S(\tau, K(\Delta))$. Во-вторых,

$$\gamma_k = \left\| (A_k + \Delta_k) \int\limits_{-h_k}^{-h_k-\eta_k} \varphi'(\theta)\mathrm{d}\theta + \Delta_k \varphi(-h_k) \right\|$$

$$\leqslant \|A_k + \Delta_k\| \left| \int\limits_{-h_k}^{-h_k-\eta_k} \varphi'(\theta)\mathrm{d}\theta \right| + \|\Delta_k\| \|\varphi(0)\|. \tag{32}$$

Из обеих оценок получаем, что $\gamma_k \leqslant \ \rho_{1k}(\Delta)|\eta_k| K(\Delta)\|\varphi(0)\| + \|\Delta_k\|\|\varphi(0)\|$. Оценка $\|u(\varphi)\|$ сразу же следует из $\|\varphi\|_{h+\eta} \leqslant \|\varphi(0)\|$. □

Теперь можно показать справедливость следующей теоремы.

Теорема 12. *Система* (20) *остается экспоненциально устойчивой, если*

$$\lambda_{\min}(W) > l_0(\Delta).$$

Доказательство. Покажем, что условие теоремы 10 выполнено для системы (20), если α_0 взять из леммы 1, положить $v = v_0, \ w_0 = \lambda_{\min}(W) - l_0(\Delta)$,

$$w(\varphi) = \varphi^*(0) W \varphi(0) - l(\varphi) \quad \forall \varphi \in S(\tau, K(\Delta)).$$

Действительно, первое условие выполнено благодаря форме функционала v_0, третье условие имеет место в силу $w_0 > 0$ и леммы 10. Также можно заметить, что лемма 1 останется справедливой, если заменить в множестве S величину h величиной τ. Поэтому из

$$S(\tau, K(\Delta)) \subset \left\{ \varphi \in \mathrm{PC}([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) : \ \|\varphi\|_\tau = \|\varphi(0)\| \right\},$$

предположения 2 и теоремы 10 получаем результат. □

3.2 Применение теоремы 11

Используем теперь теорему 11 для получения другой оценки $l(\varphi)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 11. *Функционал* $l(\varphi)$ *удовлетворяет оценке вида*

$$l(\varphi) \leqslant 2\sum_{k=0}^{m}(\rho_{1k}(\Delta)a_k(\Delta) + \|\Delta_k\| + \rho_{2k}(\Delta))u_0 \quad \forall\varphi \in S(0,\tau,K(\Delta)),$$

где $a_k(\Delta) = \sqrt{\max\bigl\{2(1-\cos(\beta_k\eta_k)), \mathrm{e}^{-2K_{\mathrm{Re}}(\Delta)\eta_k} - 2\cos(\beta_k\eta_k)\,\mathrm{e}^{-K_{\mathrm{Re}}(\Delta)\eta_k} + 1\bigr\}}$,

$$\beta_k = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\pi}{|\eta_k|}, K_{\mathrm{Im}}(\Delta)\right\}, & \text{если } \eta_k \neq 0, \\ 0, & \text{если } \eta_k = 0, \end{cases}$$

$K_{\mathrm{Im}}(\Delta), K_{\mathrm{Re}}(\Delta)$ – *верхние оценки на соответственно мнимую и действительную части неустойчивого собственного числа системы* (20).

Доказательство. Положим $s = \alpha + j\beta,\ t \geqslant 0,\ \varphi \in S(t,\tau,K(\Delta))$. Тогда, с учетом $\|\varphi(0)\| = \mathrm{e}^{\alpha t},\ S(t,\tau,K(\Delta)) \subset S(\tau,K(\Delta))$, доказательства леммы 10, (31) и (32), получаем

$$l(\varphi) \leqslant 2\left(\|\Delta_0\| + \sum_{k=1}^{m}(\rho_{1k}(\Delta)g_k(\alpha,\beta) + \|\Delta_k\| + \rho_{2k}(\Delta))\right)u_0\,\mathrm{e}^{2\alpha t}, \tag{33}$$

где $g_k(\alpha,\beta) = \mathrm{e}^{-\alpha h_k}\sqrt{\mathrm{e}^{-2\alpha\eta_k} - 2\,\mathrm{e}^{-\alpha\eta_k}\cos(\beta\eta_k) + 1}$. Заметим, что $\cos(\beta\eta_k)$ убывает по β на $[0,\pi/|\eta_k|]$ в случае $\eta_k \neq 0$. В случае $\eta_k = 0$ имеем $g_k(\alpha,\beta) \equiv 0$. Таким образом, $\max\limits_{\beta\in[0,K_{\mathrm{Im}}(\Delta)]}\{g_k(\alpha,\beta)\} = g_k(\alpha,\beta_k)$. Далее заметим, что $g_k(\alpha, \beta_k) \leqslant \sqrt{p_k\,(u_k(\alpha))}$, где $u_k(\alpha) = \mathrm{e}^{-\alpha\eta_k},\ p_k\,(r) = r^2 - 2\cos(\beta_k\eta_k)r + 1$ – парабола ветвями вверх. Поэтому она достигает максимума в правом или левом концах сегмента изменения аргумента u_k, то есть $g_k(\alpha,\beta_k) \leqslant a_k(\Delta)$. Полагая $t = 0$, получаем требуемый результат. □

Теперь, с учетом $S(0,\tau,K(\Delta)) \subset S(\tau,K(\Delta))$, аналогично доказательству теоремы 12 можно показать следующий результат.

Теорема 13. *Система* (20) *остается экспоненциально устойчивой, если*

$$\lambda_{\min}(W) > 2\sum_{k=0}^{m}(\rho_{1k}(\Delta)a_k(\Delta) + \|\Delta_k\| + \rho_{2k}(\Delta))u_0.$$

3.3 Итоговый результат

Введем обозначение $\rho_{3k}(\Delta) = \min\{|\eta_k|K(\Delta), a_k(\Delta)\}$. Тогда, выбрав наилучшую из двух полученных в теоремах 12 и 13 оценок, получаем следующий результат.

Теорема 14. *Система* (20) *остается экспоненциально устойчивой, если*

$$\lambda_{\min}(W) > 2\sum_{k=0}^{m}(\rho_{1k}(\Delta)\rho_{3k}(\Delta) + \|\Delta_k\| + \rho_{2k}(\Delta))u_0.$$

Заметим, что полученное условие является обощением и уточнением условия, полученного в работе [30]. Оценив $\rho_{2k}(\Delta)$ и u_0, получим менее точное условие, но более простое для проверки.

Следствие 3. *Система* (20) *остается экспоненциально устойчивой, если*

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(W) > 2\sum_{k=0}^{m}\Bigg(&\rho_{1k}(\Delta)\rho_{3k}(\Delta) + |\eta_k| \max_{\substack{\theta\in[\min\{-h_k-\eta_k,-h_k\},\\ \max\{-h_k-\eta_k,-h_k\}]}}\{\|G_k(\theta)\|\} \\ &+ \|\Delta_k\| + (h_k+\eta_k)\max_{\theta\in[-h_k-\eta_k,0]}\{\|\Gamma_k(\theta)\|\}\Bigg) \\ &\times\left(1+\sum_{k=1}^{m}h_k\left(\|A_k\| + \frac{h_k}{2}\max_{\theta\in[-h_k,0]}\{\|G_k(\theta)\|\}\right)\right)\|U(0)\|.\end{aligned}$$

Доказательство. Из [16] и [12] следует, что

$$\begin{aligned}\|u(\varphi)\| &\leqslant \left(1+\sum_{k=1}^{m}\left(h_k\|A_k\| + \int_{-h_k}^{0}\int_{-h_k}^{\theta}\max_{r\in[-h_k,0]}\{\|G_k(r)\|\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\theta\right)\right)\|U(0)\| \\ &= \left(1+\sum_{k=1}^{m}h_k\left(\|A_k\| + \frac{h_k}{2}\max_{\theta\in[-h_k,0]}\{\|G_k(\theta)\|\}\right)\right)\|U(0)\|.\end{aligned}$$

□

3.4 Итерационная схема

Установим сходимость условий из теоремы 14 к точным границам области устойчивости для случая, описываемого следующим утверждением.

Предположение 3. *В рамках этого раздела каждая из функций* G_k, Γ_k ($k \in \{1, \ldots, m\}$) *задается конечным набором параметров.*

Последнее предположение выполнено, например, когда G_k, Γ_k – матрицы полиномов $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$. Доказательства этого раздела основаны на идее из [13]. Имеет место следующая известная теорема.

Теорема 15 (Общая форма теоремы Больцано – Вейерштрасса [31])**.** *Любое бесконечное ограниченное метрическое подпространство действительного евклидового пространства имеет хотя бы одну предельную точку.*

Обозначим через E евклидово конечномерное пространство параметров δ, определяющих систему (20). Пусть экспоненциально устойчивой системе (1) соответствует набор параметров $P^{(0)} = (A_k, o_k, h_k)_{k=0}^{m} \in$ E, где o_k – конечный набор параметров, соответствующий матрице G_k. Обозначим

$$f(\delta, P^{(i)}) = 2\left(\|\Delta_0\| + \sum_{k=1}^{m}(\rho_{1k}(\Delta)\rho_{3kd}(\delta) + \|\Delta_k\| + \rho_{2kd}(\delta))\right)$$

$$\times \left(\|U_i(0)\| + \sum_{k=1}^{m}\left(\int\limits_{-h_k^{(i)}}^{0}\left\| U_i(-h_k-\theta)A_k^{(i)} + \int\limits_{-h_k^{(i)}}^{\theta} U_i(-\theta+\xi)G_k^{(i)}(\xi)\mathrm{d}\xi\right\| \mathrm{d}\theta\right)\right),$$

где $\rho_{2kd}(\delta) = \left|\int\limits_{-h_k-\eta_k}^{-h_k} \|G_k(\theta)\|\mathrm{d}\theta\right| + \int\limits_{-h_k-\eta_k}^{0} \|\Gamma_k(\theta)\|\mathrm{d}\theta,$

$$\rho_{3kd}(\delta) = \min\{|\eta_k|K_d(\delta), a_{kd}(\delta)\},$$

$$a_{kd}(\delta) = \sqrt{\max\{2(1-\cos(\beta_{kd}\eta_k)), \mathrm{e}^{-2K_{\mathrm{Re}\,d}(\delta)\eta_k} - 2\cos(\beta_{kd}\eta_k)\,\mathrm{e}^{-K_{\mathrm{Re}\,d}(\delta)\eta_k} + 1\}},$$

$$\beta_{kd} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\pi}{|\eta_k|}, K_{\mathrm{Im}\,d}(\delta)\right\}, & \text{если } \eta_k \neq 0, \\ 0, & \text{если } \eta_k = 0, \end{cases}$$

$K_{\mathrm{Im}\, d}(\delta), K_{\mathrm{Re}\, d}(\delta)$ – верхние оценки на соответственно мнимую и действительную части неустойчивого собственного числа системы (20), $\delta = (\Delta_k, \epsilon_k, \eta_k)_{k=0}^m \in \mathrm{E}$ является переменной, $P^{(i)} = \left(A_k^{(i)}, o_k^{(i)}, h_k^{(i)}\right)_{k=0}^m \in \mathrm{E}$ – параметром, $i \in \mathbb{N}$, ϵ_k – конечный набор параметров, отвечающий функции Γ_k, U_i – матрица Ляпунова, ассоциированная с $W > 0$ и $P^{(i)}$. Из теоремы 14 следует, что условие $\lambda_{\min}(W) > f(\delta, P^{(0)})$ является достаточным для экспоненциальной устойчивости системы (20). Выберем $\delta^{(i)}$ так, чтобы

$$f(\delta^{(i)}, P^{(i)}) = \lambda_{\min}(W) - \varepsilon_i \quad \forall i \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

где $P^{(i)} = P^{(i-1)} + \delta^{(i-1)}\, \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_{\min}(W) > \varepsilon_i > 0\, \forall i \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{i\to\infty}(\varepsilon_i) = 0$. Заметим, что $f(\delta, P^{(i)})$ может быть сделано любым неотрицательным числом за счет $f(\cdot, P^{(i)}) \in \mathrm{C}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$. Поэтому последовательность $\left(f(\delta^{(i)}, P^{(i)})\right)_{i=0}^{\infty}$ существует. Из определения $f(\delta, P^{(i)})$ нетрудно видеть, что $\delta^{(i)}$ определяется неоднозначно.

Лемма 12. *Множество* $\left\{P^{(i)} :\ i = 0, 1, \ldots\right\} \subset \mathrm{E}$ *бесконечно.*

Доказательство. Предположим, что $\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$ конечна. Это значит, что существует $\left(P^{(i_k)}\right)_{i_k=0}^{\infty} \subset \left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$, такая что при некотором $r \in \mathbb{N}$ имеет место $P^{(i_k)} = P^{(r)}\ \forall i_k$. Предположим дополнительно, что $\left(f(\delta^{(i_k)}, P^{(i_k)})\right)_{i_k=0}^{\infty}$ бесконечна. Это означает, что $\left(\delta^{(i_k)}\right)_{i_k=0}^{\infty}$ и, следовательно, $\left(P^{(r)} + \delta^{(i_k)}\right)_{i_k=0}^{\infty}$ бесконечны. Однако это противоречит конечности $\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$, так как $P^{(r)} + \delta^{(i_k)} = P^{(i_k)} + \delta^{(i_k)} = P^{(i_k+1)} \in \left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}\ \forall i_k$, $\left|\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}\right| \in \mathbb{N}$. То есть, $\left(f(\delta^{(i_k)}, P^{(i_k)})\right)_{i_k=0}^{\infty}$ конечна. Отсюда следует, что существует

$$\left(f\left(\delta^{(i_{kl})}, P^{(i_{kl})}\right)\right)_{i_{kl}=0}^{\infty} \subset \left(f\left(\delta^{(i_k)}, P^{(i_k)}\right)\right)_{i_k=0}^{\infty},$$

такая что при некотором $p \in \mathbb{N}$ имеет место $f\left(\delta^{(i_{kl})}, P^{(i_{kl})}\right) = f\left(\delta^{(p)}, P^{(p)}\right) \forall i_{kl}$. Поэтому из (34) следует, что $\lambda_{\min}(W) - \varepsilon_{i_{kl}} = f(\delta^{(p)}, P^{(p)})$. Переходя к пределу при $i_{kl} \to \infty$, получаем

$$\lambda_{\min}(W) = f(\delta^{(p)}, P^{(p)}). \tag{35}$$

С другой стороны, из определения $f(\delta^{(i)}, P^{(i)})$ получаем, что $f(\delta^{(p)}, P^{(p)}) = \lambda_{\min}(W) - \varepsilon_p < \lambda_{\min}(W)$, что противоречит (35). Таким образом, $\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$ бесконечна. $\square$

Теорема 16. *Существует подпоследовательность параметров* $\left(P^{(i_k)}\right)_{i_k=0}^{\infty} \subset \left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$, *которая стремится к точной границе области экспоненциальной устойчивости в евклидовом пространстве параметров* E.

Доказательство. В случае, когда $\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$ не ограничена, область экспоненциальной устойчивости также не ограничена, и теорема выполняется. Предположим теперь, что $\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$ ограничена. Тогда, в силу теоремы 15 и леммы 12, существуют $\left(P^{(i_k)}\right)_{i_k=0}^{\infty} \subset \left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$ и P, такие что $\lim\limits_{i_k\to\infty}\left(P^{(i_k)}\right) = P$, $\|P\| \in \mathbb{R}$. При этом очевидно, что $P^{(i_k)} = P^{(0)} + \sum\limits_{l=0}^{i_k-1} \delta^{(l)}$. Поэтому $P = P^{(0)} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}$ сходится, а значит $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\delta^{(k)}\right) = 0$. Из построения последовательности $f(\delta^{(i)}, P^{(i)})$, экспоненциальной устойчивости системы (1) и теоремы 14 следует, что системы с параметрами $P^{(i)}$ экспоненциально устойчивы $\forall i \in \mathbb{N}$. Поэтому P лежит или внутри, или на границе области устойчивости. Следовательно, нужно показать, что система, соответствующая набору параметров P, не будет экспоненциально устойчивой. В самом деле, иначе матрица Ляпунова будет непрерывной в точке P пространства параметров по теореме 6. Отсюда, в силу (34) получаем, что $\lambda_{\min}(W) = \lim\limits_{i_k\to\infty}\left(f(\delta^{(i_k)}, P^{(i_k)})\right) = f(0, P) = 0$, что противоречит $W > 0$. $\square$

Используя идею доказательства предыдущей теоремы нетрудно вывести следующее утверждение.

Замечание 4. *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}$ *сходится, то последовательность* $\left(P^{(i)}\right)_{i=0}^{\infty}$ *сходится к точной границе области экспоненциальной устойчивости в евклидовом конечномерном пространстве параметров* E.

Пример. Рассмотрим при $a, g \in \mathbb{R}$ экспоненциально устойчивое уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t) + g\int\limits_{-1}^{0} x(t+\theta)\mathrm{d}\theta \quad \forall t \geqslant 0, \tag{36}$$

и при $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, возмущенное уравнение

$$\dot{y}(t) = (a+\varepsilon)y(t) + (g+\varepsilon)\int\limits_{-1}^{0} y(t+\theta)\mathrm{d}\theta \quad \forall t \geqslant 0.$$

Методом D-разбиений нетрудно получить множество в пространстве параметров $\left\{(a, g) \in \mathbb{R}^2\right\}$, соответствующее наличию у уравнения (36) собственного числа $s = j\beta,\ \beta \in \mathbb{R}$:

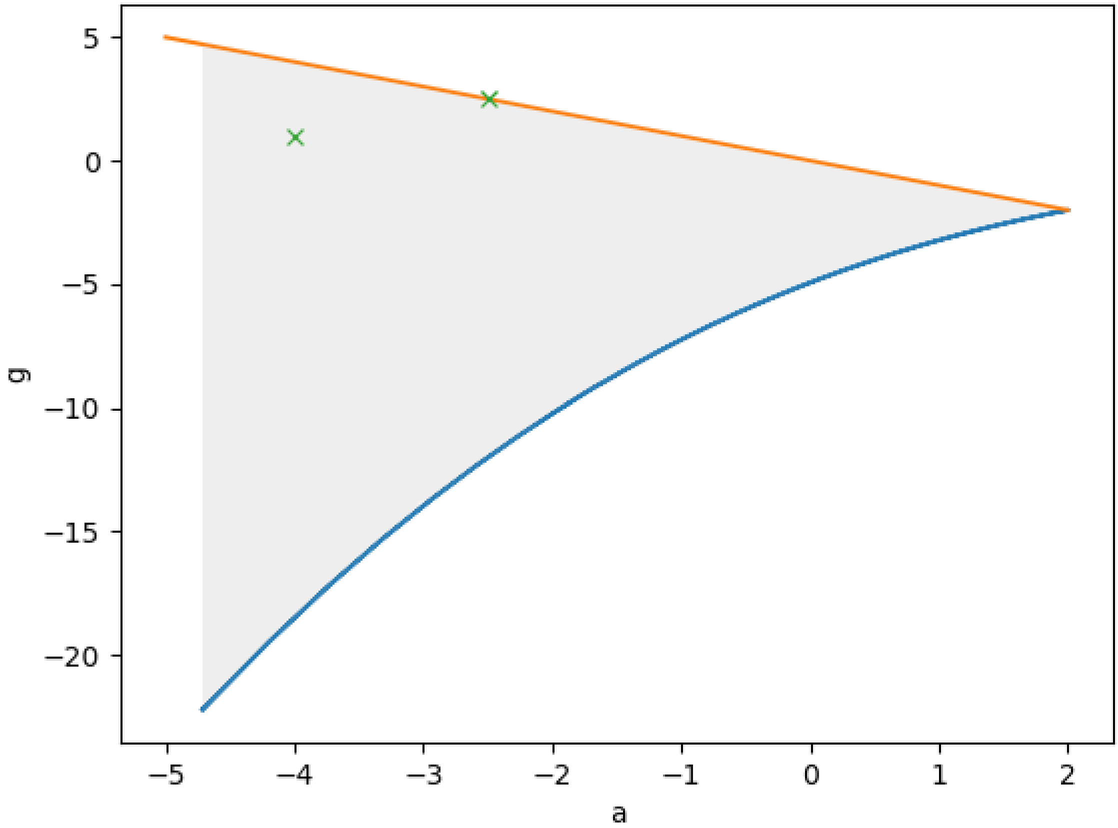
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g = \frac{\beta^2}{\cos(\beta)-1}, \\ a = \frac{\beta\sin(\beta)}{1-\cos(\beta)}, \\ \beta \neq \pm 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases} \\ a + g = 0, \quad \beta = 0. \end{array}\right. \tag{37}$$

Отсюда нетрудно видеть, что множество параметров $\{(a, g) \in \mathbb{R}^2 :\ a < 0,\ a+g < 0,\ a^2+2g > 0\}$ лежит в области экспоненциальной устойчивости. Будем итерационно применять теорему 14, положив $a = -4, g = 1, W = 1$. Имеем

$$f(\delta, P^{(0)}) = 2(1+h)\left(\|U(0)\| + |g|\int\limits_{-1}^{0}\left\|\int\limits_{-1}^{\theta} U(-\theta+\xi)\mathrm{d}\xi\right\|\mathrm{d}\theta\right)\varepsilon,$$
$$\frac{\lambda_{\min}(W)}{2(1+h)\left(\|U(0)\| + |g|\int\limits_{-1}^{0}\left\|\int\limits_{-1}^{\theta} U(-\theta+\xi)\mathrm{d}\xi\right\|\mathrm{d}\theta\right)} \approx 1.5,$$

поэтому $(a+\varepsilon, g+\varepsilon) \approx (-2.5, 2.5)$, и первая итерация сразу выводит на границу области устойчивости. Матрица Ляпунова считалась полуаналитическим методом [32, 15]. На графике ниже серым цветом обозначена область экспоненциальной устойчивости уравнения (36), зеленым отмечены точки

$(-4, 1)$ и $(-4+\varepsilon, 1+\varepsilon)$, оранжевым – прямая $a+g=0$, синим – кривая, заданная параметрически формулами (37).



3.5 Непрерывное условие робастной устойчивости

В этом разделе получены условия робастной устойчивости, более точные по сравнению с условием теоремы 14. Тем не менее, условия этого раздела нужно проверять для целого класса систем, «расположенных» вдоль прямой в пространстве параметров, соединяющей номинальную и возмущенную системы. Рассмотрим вспомогательный результат.

Лемма 13. *Нули характеристического полинома*

$$g(s) = \det\left(sI - \sum_{k=0}^{m}\left(\mathrm{e}^{-sh_k} A_k + \int\limits_{-h_k}^{0} \mathrm{e}^{s\theta} G_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\right)$$

системы (1) *непрерывны по параметрам* $P = (A_k, h_k, G_k)_{k=0}^{m}$.

Доказательство. Из вида функции g следует, что она является целой. Производные $g^{(d)}(0),\ d \in \mathbb{N}$, являются суммами произведений с непрерывными по P множителями вида

$$-\sum_{k=0}^{m}\left((-h_k)^r A_k^{(il)} + \int\limits_{-h_k}^{0} \theta^r G_k^{(il)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right),$$

где $0 \leqslant r \leqslant d,\ A_k = \left(A_k^{(il)}\right)_{i=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}},\ G_k = \left(G_k^{(il)}\right)_{i=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$. Таким образом, условия теоремы 8 выполнены, и нули g непрерывны по P. $\square$

Лемма 14. *Система* (20) *не имеет собственных чисел на мнимой оси, если*

$$\exists w_0 < 0:\ \dot{v}_0(y_t) \leqslant w_0 \quad \forall y_t \in S(t, \tau, K(\Delta)).$$

Доказательство. Допустим, что система (20) имеет собственное число $j\beta$, $\beta \geqslant 0$. Тогда у нее существует решение $y(t) = \mathrm{e}^{j\beta t}C,\ C \in \mathbb{C},\ \|C\| = 1$. Рассмотрим функционал v_0 на этом решении, учитывая его квадратичность:

$$v_0(y_t) = \left|\mathrm{e}^{j\beta t}\right|^2 v_0(\psi) = v_0(\psi), \quad \text{где } \psi(\theta) = \mathrm{e}^{j\beta\theta}C \quad \forall\theta \in [-h-\eta, 0].$$

Отсюда видно, что $0 = \dot{v}_0(y_t) \leqslant w_0 < 0$, что невозможно. $\square$

Теорема 17. *Система* (20) *остается экспоненциально устойчивой, если*

$$\lambda_{\min}(W) > 2\sum_{k=0}^{m}\left(\rho_{1k}(\lambda\Delta)g_k(0,\widehat{\beta}_k) + \lambda\|\Delta_k\| + \rho_{2k}(\lambda\Delta)\right)u_0 \quad \forall\lambda \in (0,1],$$

$$\text{где } \widehat{\beta}_k = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\pi}{\lambda|\eta_k|}, K_{\mathrm{Im}}(\lambda\Delta)\right\}, & \text{если } \eta_k \neq 0,\\ 0, & \text{если } \eta_k = 0.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим набор $\Delta = (\Delta_k, \eta_k, \Gamma_k)_{k=0}^{m}$ из пространства возмущений параметров. Экспоненциально устойчивая система (1) соответствует нулю в этом пространстве. Все ее собственные числа находятся в левой полуплоскости по теореме 1. Отсюда, с учетом леммы 13 следует, что если у всех систем, соответствующих прямой γ из пространства возмущений, соединяющей ноль и Δ, не будет собственных чисел на мнимой оси, то система, соответствующая Δ, останется экспоненциально устойчивой. Поэтому предположим, что $\exists \lambda\Delta \in \gamma,\ \lambda \in (0,1]$, такой что система

$$\dot{y}(t) = \sum_{k=0}^{m} \left((A_k + \lambda\Delta_k) y(t - h_k - \lambda\eta_k) + \int\limits_{-h_k-\lambda\eta_k}^{0} (G_k + \lambda\Gamma_k)(\theta) y(t+\theta) \mathrm{d}\theta \right) \tag{38}$$

имеет собственное число $j\beta,\ \beta \geqslant 0$. Тогда у нее существует решение $y(t) = e^{j\beta t} C,\ C \in \mathbb{C},\ \|C\| = 1$. Из $y_t \in S\Big(t, \max\{h, h+\lambda\eta\}, K(\lambda\Delta)\Big)$ и неравенства (33), выведенного для системы (38) (аналогично тому, как это было сделано для системы (20)), следует, что

$$l(y_t) \leqslant 2\left(\|\lambda\Delta_0\| + \sum_{k=1}^{m} \Big(\rho_{1k}(\lambda\Delta) g_k(0, \widehat{\beta}_k) + \|\lambda\Delta_k\| + \rho_{2k}(\lambda\Delta) \Big) \right) u_0.$$

Последнее, вместе с условием теоремы, (30) и леммой 14, дает противоречие с существованием собственного числа $i\beta$ системы (38). А значит, $\forall \lambda \in (0,1]$ система (38) экспоненциально устойчива, в том числе при $\lambda = 1$. $\square$

Выводы

В работе получен новый критерий экспоненциальной устойчивости (теорема 9) линейных стационарных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа с сосредоточенным и распределенным запаздываниями методом, основанном на рассмотрении комплекснозначных начальных функций системы вида (1). В условиях этого критерия множество S применено как для проверки положительной определенности функционала, так и для проверки отрицательной определенности производной функционала вдоль решений системы. Более того, для проверки устойчивости используется значительно более узкие множества $S(t_0, h, K) \subset S(h, K) \subset S$ (замечания 10 и 11).

С использованием выведенных критериев получены новые и более точные условия робастной устойчивости (теорема 14). Выведены менее точные, но более удобные для проверки условия (следствие 3). В основе этих результатов лежат уточненные оценки неустойчивого собственного числа системы (раздел 1.3), а также уточненная оценка u_0 на интегральные слагаемые с матрицей Ляпунова. Для случая, когда ядро распределенного запаздывания лежит в конечномерном функциональном пространстве, доказаны условия сходимости итерационного метода к точным границам области устойчивости (теорема 16), а также рассмотрен пример. Доказаны непрерывные условия робастной устойчивости (теорема 17), которые, с одной стороны, позволяют уменьшить консерватизм проверяемого условия, но, с другой стороны, требуют проверки на целом классе систем.

В качестве вспомогательных результатов строго обоснованы существование и единственность решения (теорема 4), непрерывность матрицы Ляпунова по параметрам системы в условиях экспоненциальной устойчивости (теорема 6), непрерывность нулей аналитической функции по ее параметрам (теорема 8), формула для функционала с заданной производной (теорема 5); получены оценки неустойчивого собственного числа (лемма 2).

Заключение

Дальнейшими направлениями исследований являются обоснование итерационного метода для более широкого класса систем, применение основного результата совместно с методом дискретизации функционалов Ляпунова – Красовского [3]–[5], улучшение оценки робастной устойчивости с использованием метода линейных матричных неравенств. Кроме того, интерес представляет обобщение полученных результатов на случай систем с комплексными матрицами, систем нейтрального типа, систем с правой частью в виде интеграла Стилтьеса и нелинейных систем общего вида. Начальные результаты для систем нейтрального типа можно найти в [33, 34], для нелинейных систем – в [35].

Список литературы

[1] Desoer C. A., Vidyasagar M. Feedback Systems: Input–Output Properties. New York: Academic Press, 1975. PP: 29–33.

[2] Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems. Cham: Birkhäuser, 2014. 362 p.

[3] Gu K. Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems // International Journal of Control. 1997. Vol. 68. No 4. P. 923–934.

[4] Gu K. Discretization schemes for Lyapunov – Krasovskii functionals in time-delay systems // Kybernetika. 2001. Vol. 37. No 4. P. 479–504.

[5] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. Boston: Birkhäuser, 2003. PP: 182–193.

[6] Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. № 3. С. 564–566.

[7] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 29. P. 439–451.

[8] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142. P. 83–94.

[9] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39. No 1. P. 15–20.

[10] Kharitonov V. L., Niculescu S.-I. On the stability of linear systems with uncertain delay // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48. No 1. P. 127–132.

[11] Medvedeva I. V., Zhabko A. P. A novel approach to robust stability analysis of linear time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No 12. P. 233–238.

[12] Egorov A. V., Mondié S. The delay Lyapunov matrix in robust stability analysis of time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No 12. P. 245–250.

[13] Alexandrova I. V., Zhabko A. P. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays // Automatica. 2018. Vol. 91. P. 173–178.

[14] Juárez L. Alexandrova I. V., Mondié S. Robust stability analysis for linear systems with distributed delays: A time-domain approach // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2020. Vol. 30. No 18. P. 8299–8312.

[15] Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.

[16] Egorov A. V., Cuvas C., Mondié S. Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica. 2017. Vol. 80. P. 218–224.

[17] Gomez M. A., Egorov A. V., Mondié S. Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems // Automatica. 2019. Vol. 108. P. 108475.

[18] Medvedeva I. V., Zhabko A. P. Synthesis of Razumikhin and Lyapunov —

Krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2015. No 51. P. 372–377.

[19] Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 500–512.

[20] Кудряков Д. А. Анализ устойчивости линейных систем с запаздыванием и неопределенными параметрами // Процессы управления и устойчивость. 2021. № 8. С. 74–78.

[21] Bellman R. E., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. New York: Academic Press, 1963. 474 p.

[22] Hale J. K., Lunel S. M. V. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993. 460 p.

[23] Agarwal P., Jleli M., Samet B. Fixed Point Theory in Metric Spaces: Recent Advances and Applications. Singapore: Springer, 2018. PP: 1-–23.

[24] Mori T., Kokame H. Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. 34. No 4. P. 460–462.

[25] Wang S. Further results on stability of $\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t - \tau)$ // Systems & Control Letters. 1992. Vol. 19. No 2. P. 165–168.

[26] Tissir E., Hmamed A. Further results on stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ // Automatica. 1996. Vol. 32. No 12. P. 1723–1726.

[27] Ногин В. Д. Лекции по теории устойчивости движений. СПб: Издательско-полиграфическая ассоциация ВУЗов, 2020. С. 84–99.

[28] Egorov A. V., Kharitonov V. L. Approximation of delay Lyapunov matrices // International Journal of Control. 2018. Vol. 91. No 11. P. 2588–2596.

[29] Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H. Robust Control: The Parametric Approach. New Jersey: Prentice Hall. 1995. PP: 31–33.

[30] Евтина Д. С. О робастной устойчивости линейных систем с запаздыванием // Процессы управления и устойчивость. 2021. № 8. С. 50–54.

[31] Fitzpatrick P. M. Advanced calculus (second revised edition). American Mathematical Society, 2009. 590 p.

[32] Chashnikov M. On the uniqueness problem of Lyapunov matrices: a system with distributed delay // Control Applications, (CCA) & Intelligent Control, (ISIC), IEEE. 2009. P. 1214–1217.

[33] Alexandrova I. V., Zhabko A. P. Stability of neutral type delay systems: A joint Lyapunov — Krasovskii and Razumikhin approach // Automatica. 2019. Vol. 106. No 14. P. 83—90.

[34] Кудряков Д. А. Новый критерий устойчивости для линейных систем нейтрального типа // Процессы управления и устойчивость. 2022. № 9. [В печати].

[35] Alexandrova I. V., Zhabko A. P. At the junction of Lyapunov — Krasovskii and Razumikhin approaches // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No 14. P. 147–152.