Отзыв научного руководителя
на выпускную квалификационную работу
«Расстояния по Громову-Хаусдорфу в нормированных пространствах»
студента 4 курса бакалавриата 01.03.01 Математика
Подивилова Андрея Евгеньевича

Основной результат работы состоит в том, что два конечномерных нормированных пространства, близких по Громову-Хаусдорфу, близки и по Банаху-Мазуру. А именно, если δ — расстояние по Громову-Хаусдорфу между единичными шарами этих пространств, то расстояние по Банаху-Мазуру оценивается величиной $C\delta|\log(\delta)|$, где C — константа, зависящая от размерности. Этот результат дает в некотором смысле оценку устойчивости в теореме Мазура-Улама, утверждающей, что любая сохраняющая расстояния биекция между нормированными пространствами является аффинной. В отличие от случая евклидовых норм, в теореме Мазура-Улама существенна биективность, так как, например, на плоскости с ℓ^1-нормой существуют ломаные, изометричные прямым.

Кроме основной теоремы, в работе доказана дополняющая ее нижняя оценка на расстояние по Громову-Хаусдорфу между единичными шарами нормированных пространств разных размерностей: оно всегда не меньше $1/3$. Этот второй результат интересен тем, что даже в случае евклидовых норм напрашивающийся ответ «расстояние равно 1» неверен (это также показано в работе), и расстояние в данном случае не реализуется непрерывными отображениями. Для евклидовых норм оценка $1/3$ была получена А.Е. Подивиловым ранее в курсовой работе, в дипломной работе она обобщена на произвольные нормы.

Расстояние по Громову-Хаусдорфу — классический инструмент дифференциальной геометрии. В последние годы оно также находит применение в обратных задачах и задачах анализа данных. А именно, если массив данных можно интерпретировать как «облако точек» с известными (с некоторой погрешностью) расстояниями между ними, полученное выборкой из некоторого неизвестного гладкого многообразия, то эти данные определяют дискретное приближение многообразия по Громову-Хаусдорфу, и возникают задачи о нахождении различных характеристик многообразия по этому приближению. Такие вопросы относительно неплохо изучены для евклидовых и римановых пространств, однако в ряде задач более естественны расстояния, порождаемые неевклидовыми нормами. В этом контексте результаты А.Е. Подивилова можно интерпретировать так: зная дискретное приближение многообразия, изометрически вложимого в нормированное пространство, теоретически возможно определить его размерность и с хорошей точностью найти его касательные нормы. Вопрос об эффективных алгоритмах для решения этих задач пока не изучен, это тема для дальнейших исследований.

Полученные А.Е. Подивиловым результаты новы и нетривиальны, и сама возможность получения явных оценок в этих задачах не была очевидна. Из известных результатов наиболее близким аналогом является теорема Громова (1999), утверждающая, что близость по Громову-Хаусдорфу римановых многообразий с ограничениями на кривизну и радиус инъективности влечет их близость по Липшицу. Отделенность от нуля расстояний по Громову-Хаусдорфу между шарами разных размерностей была ранее известна только для евклидовых норм, с более слабой оценкой и более громоздким доказательством.

Работа выполнена А.Е. Подивиловым самостоятельно, моя роль состояла в постановке задач и обсуждении различных подходов. В доказательствах использованы методы метрической геометрии и алгебраической топологии. Доказательство основной теоремы потребовало немалой изобретательности и преодоления ряда технических трудностей.

К недостаткам работы относятся разнообразные огрехи изложения: языковые и стилевые ошибки, недостаточная подробность объяснения некоторых деталей. Также не хватает пояснений к общему плану доказательства и логике применения основной леммы, что затрудняет чтение работы.

Указанные недостатки не имеют принципиального значения. Считаю, что работа заслуживает оценки «отлично».

05.06.2022

Научный руководитель
д.ф.-м.н., член-корр. РАН,
профессор СПбГУ С.В. Иванов