Санкт-Петербургский государственный университет

Подивилов Андрей Евгеньевич

Выпускная квалификационная работа

Расстояния по Громову-Хаусдорфу в нормированных пространствах

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2018 «Математика»

Научный руководитель:
профессор, факультет
математики и компьютерных
наук, СПбГУ,
доктор ф.-м. наук,
Иванов Сергей Владимирович

Рецензент: ведущий научный
сотрудник, ПОМИ РАН,
доктор ф.-м. наук,
Белишев Михаил Игоревич

Санкт-Петербург
2022 год

Содержание

1. Введение. 2
1.1. Обзор основных результатов 2
1.2. Соглашение об обозначениях 3
2. Предварительные сведения 3
3. Расстояние между шарами разных размерностей 5
3.1. Пример-иллюстрация 5
3.2. Оценка расстояния снизу 8
4. Сравнение метрик d_{GH} и ρ_{BM} 10
Список литературы 21

1. Введение.

Основной объект работы — расстояние по Громову-Хаусдорфу между шарами конечномерных нормированных пространств. Определения и связанные утверждения можно найти в книге [1] в главе 7.

Работа во многом мотивирована обратными задачами. Предположим, что мы наблюдаем набор данных X, представляющий собой компактное метрическое пространство, и у нас есть основания предполагать за ним какую-то структуру (например, что X — нормированное). Наблюдая точки $A \subset X$ с небольшой погрешностью, мы строим конечное метрическое пространство A'. В метрике Громова-Хаусдорфа наблюдаемое пространство A' оказывается близко к X. И вопрос в том, можно ли по наблюдаемым данным восстановить тонкие инварианты исходного пространства (например, размерность или норму). Известная теорема Громова (см. [2], теорема 8.19) при определенных ограничениях на геометрию римановых многообразий утверждает, что если два римановых многообразия близки по Г-Х, то между ними существует диффеоморфизм с билипшицевой константой, близкой к единице. В настоящей работе доказан аналогичный результат для нормированных пространств, раздел 4. В качестве первоначальной меры близости нормированных пространств по Г-Х используется расстояние между их единичными шарами, подход заимствован из [3].

В разделе 3 представлена оценка расстояния по Громову-Хаусдорфу d_{GH} между парой нормированных шаров разных размерностей. Кроме упомянутых обратных задач, рассматриваемые в работе вопросы связаны с исследованием интерполяции гладких многообразий. В статье [3] показано, что расстояние $\mathrm{d}_{GH}(B^n, B^m)$, где B^n и B^m — единичные евклидовы шары разных размерностей, отделено от нуля, см. лемму 4.2. В нашей работе лучшая оценка получена за счет более простого и общего метода построения непрерывных приближений почти-изометрий.

1.1. Обзор основных результатов.

Ниже даны комментарии к точным формулировкам основных результатов.

Теорема 1.1. Существует $C > 0$, обладающее следующим свойством. Пусть X_1, X_2 — произвольные нормированные n-мерные пространства. Пусть

$$\delta = \mathrm{d}_{GH}(B^{X_1}, B^{X_2}).$$

Тогда

$$\rho_{BM}(X_1, X_2) \leq Cn^2\delta\big(|\log(\delta)| + 1\big). \tag{1}$$

Здесь d_{GH} обозначает расстояние по Громову-Хаусдорфу, ρ_{BM} обозначает расстояние по Банаху-Мазуру, см. определения 2.3 и 2.9. Множество B^X — это единичный шар с центром в нуле в нормированном пространстве X. Подчеркнем, что C — глобальная константа, не зависящая от данных в условии теоремы. Доказательство приведено в конце раздела 4. Также в разделе 4 доказана сходная оценка для мультипликативной версии расстояния Банаха-Мазура, см. терему 4.6.

В частности, для сравнения двух расстояний верна гельдеровская оценка с любым показателем меньше единицы.

Для произвольных нормированных пространств, в отличие от евклидовых, сохраняющее расстояния отображение не обязательно аффинно. К примеру, $\mathbb{R}$ можно изометрично отобразить на границу любого квадранта плоскости с ℓ_1-нормой. Однако по теореме Мазура-Улама для биекций это так. В некотором смысле теорема выше дает оценку устойчивости к теореме Мазура-Улама — если существует «почти биективное» отображение, слабо искажающее расстояния (см. лемму 2.8 о связи d_{GH} с почти-изометриями), то существует линейный изоморфизм, близкий к изометричному (см. определение ρ_{BM} (2.9)). Доказательство теоремы 4.6 основано на идеях из [4].

Отметим, что несложно увидеть обратное неравенство: для некоторого $C > 0$

$$\rho_{BM} \geq C\,\mathrm{d}_{GH}\,.$$

Теорема 1.2. Пусть X_1, X_2 — конечномерные нормированные пространства разных размерностей. Тогда

$$\mathrm{d}_{GH}(B^{X_1}, B^{X_2}) \geq \frac{1}{3}.$$

Здесь d_{GH} обозначает расстояние по Громову-Хаусдорфу, см. определение 2.3, а B^X — это единичный шар в нормированном пространстве X. Доказательство приведено в конце раздела 3.

Несложно видеть, что это расстояние не превосходит 1. Кроме того, как известно (см. лемму 2.8), расстояние по Г-Х можно оценить снизу половиной инфимума искажений почти-изометрий. При этом из теоремы Борсука-Улама следует, что если ограничиться непрерывными почти-изометриями, инфимум искажений будет равен 2. Отсюда возникает естественное предположение, что расстояние равно 1. Однако это не так — в разделе 3.1 в качестве иллюстрации мы приводим контрпример.

На самом деле мы доказали больше: пусть X_1, X_2 — конечномерные нормированные пространства, $\dim(X_1) = n$, $\dim(X_2) = n - 1$. Тогда для любого метрического компакта V, содержащего изометричную копию B^{X_1}, и U — выпуклого компактного подмножества X_2, справедливо неравенство $\mathrm{d}_{GH}(V, U) \geq 1/3$.

1.2. **Соглашение об обозначениях.** Ниже для функций расстояния по умолчанию используется одно обозначение $\mathrm{d}(\cdot\,,\cdot)$. Для норм по умолчанию используется одно обозначение $\|\cdot\|$. Множество $B_r^X(x)$ — это шар радиуса r с центром $x \in X$ в метрическом пространстве X. Если r или x не указаны явно, по умолчанию будем предполагать $r = 1$, и в случае, когда X — нормированное пространство, $x = 0$. В целях экономии в основной части рассуждений все глобальные константы обозначены C. Выражения с участием C надо понимать в том смысле, что существует набор чисел, на которые можно заменить вхождения C так, чтобы получились корректные выражения без участия C.

2. Предварительные сведения

Определение 2.1. Пусть A, B — подпространства одного метрического пространства. *Расстоянием по Хаусдорфу* между ними называется величина

$$\mathrm{d}_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\},$$

где $U_r(X)$ — r-окрестность множества X.

Замечание 2.2. d_H задает метрику на компактных подмножествах метрического пространства.

Определение 2.3. Пусть X, Y — метрические компакты. *Расстояние по Громову-Хаусдорфу* $\mathrm{d}_{GH}(X,Y)$ определяется следующим условием: для любого $r>0$ неравенство

$$\mathrm{d}_{GH}(X,Y)<r$$

справедливо тогда и только тогда, когда существует метрическое пространство Z и такие его подпространства X', Y', изометричные X и Y, что

$$\mathrm{d}_H(X',Y')<r.$$

Иными словами, d_{GH} — инфимум тех r, для которых существуют указанные Z, X', Y'.

Замечание 2.4. d_{GH} — метрика на классах изометричных компактных пространств.

Непосредственно с определением расстояния по Громову-Хаусдорфу работать неудобно. В работе используются оценки d_{GH} в терминах разрывных отображений, слабо искажающих расстояния — почти-изометрий, определение 2.7.

В дальнейшем ключевую роль будет играть понятие искажения отображения.

Определение 2.5. Пусть X, Y — метрические пространства. *Искажением отображения* $f\colon X\to Y$ называется величина

$$\operatorname{dis} f=\sup\big\{\,|\mathrm{d}(x,x')-\mathrm{d}(f(x),f(x'))|: x,\, x'\in X\big\}.$$

Лемма 2.6. Пусть X, Y — метрические компакты. Тогда

$$\mathrm{d}_{GH}(X,Y)\le\frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} f\mid f \text{ — сюръекция из } X \text{ в } Y\}. \tag{2}$$

Доказательство. Для доказательства введем новое понятие. Множество

$$\mathfrak{R}\subset X\times Y$$

назовем *соответствием* между X и Y, если для всех $x\in X$ существует такой $y\in Y$, что $(x,y)\in\mathfrak{R}$, и для всех $y\in Y$ существует такой $x\in X$, что $(x,y)\in\mathfrak{R}$. *Искажением* соответствия $\mathfrak{R}$ называют величину

$$\operatorname{dis}\mathfrak{R}=\sup\big\{\,|\mathrm{d}(x,x')-\mathrm{d}(y,y')|:(x,y),\,(x',y')\in\mathfrak{R}\big\}.$$

Согласно [1], теорема 7.3.25,

$$\mathrm{d}_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}\mathfrak{R}\mid\mathfrak{R} \text{ — соответствие между } X \text{ и } Y\big\}. \tag{3}$$

Пусть $f\colon X\to Y$ — сюръекция. Соответствие $\mathfrak{R}_f$, определенное согласно правилу

$$(x,y)\in\mathfrak{R}_f\iff f(x)=y,$$

назовем *ассоциированным* с f. Легко видеть, что $\operatorname{dis}\mathfrak{R}_f=\operatorname{dis} f$.

Заменяя правую часть равенства 3 на инфимум по множеству соответствий, ассоциированных с некоторой сюръекцией, получаем искомое неравенство 2.

□

Как показывает следующая лемма, расстояние по Громову-Хаусдорфу тесно связано с понятием почти-изометрии.

Определение 2.7. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *ε-изометрией*, если

- $f(X)$ — ε-сеть в Y,
- $\operatorname{dis} f \le \varepsilon$,
- $\varepsilon > 0$.

Подчеркнем, что непрерывность отображения f в определении почти-изометрии не требуется.

Лемма 2.8 ([1], лемма 7.3.28)**.** Пусть X, Y — метрические компакты, $\varepsilon > 0$. Тогда

- если $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, то существует 2ε-изометрия из X в Y,
- если существует ε-изометрия из X в Y, то $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.

Иными словами, лемма 2.8 предоставляет оценку d_{GH} с точностью до мультипликативной константы 2.

В разделе 4 мы исследуем связь двух расстояний — расстояния по Громову-Хаусдорфу и расстояния Банаха-Мазура. В терминах отображений первое характеризуется абсолютными искажениями расстояний (лемма 2.8), а второе — относительными, то есть является липшицевым расстоянием для нормированных пространств.

Определение 2.9. Пусть X, Y — нормированные пространства одинаковой размерности, $\mathrm{GL}(X,\, Y)$ — множество линейных изоморфизмов $T\colon X \to Y$. Обозначим $\|T\|$ операторную норму T. *Расстояние Банаха-Мазура* ρ_{BM} между X и Y определяется равенством

$$\rho_{BM}(X, Y) = \log\left(\inf\left\{\|T\|\|T^{-1}\|\colon T \in \mathrm{GL}(X,\, Y)\right\}\right).$$

Для удобства также будем рассматривать *мультипликативное расстояние Банаха-Мазура*

$$\mathrm{d}_{BM}(X, Y) = \exp\left(\rho_{BM}(X, Y)\right) = \inf\left\{\|T\|\|T^{-1}\|\colon T \in \mathrm{GL}(X,\, Y)\right\},$$

для которого $\mathrm{d}_{BM}(X, Z) \le \mathrm{d}_{BM}(X, Y)\,\mathrm{d}_{BM}(Y, Z)$ и $\mathrm{d}_{BM}(X, X) = 1$.

Пространство n-мерных нормированных пространств, снабженное метрикой Банаха-Мазура, образует компакт. Более того, диаметр этого компакта в метрике d_{BM} не превосходит n, что следует из теоремы Джона (см. [5]).

Ниже приведено следствие теоремы Джона для шаров нормированных пространств (см., например, [6]), которым мы воспользуемся для доказательства теоремы 4.6.

Предложение 2.10. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — симметричный относительно точки 0 выпуклый компакт с непустой внутренностью. Тогда существует такой эллипсоид E, что

$$E \subset K \subset \sqrt{n}E.$$

3. Расстояние между шарами разных размерностей

3.1. **Пример-иллюстрация.** Пусть X, Y — конечномерные нормированные пространства разных размерностей. С одной стороны, нетрудно понять, что

$$\mathrm{d}_{GH}(B^X, B^Y) \le 1.$$

С другой стороны, согласно лемме 2.8, расстояние по Громову-Хаусдорфу можно оценить снизу половиной инфимума искажений почти-изометрий. При этом если ограничиться непрерывными почти-изометриями, то инфимум будет равен 2, как следует из теоремы Борсука-Улама. Отсюда возникает естественное предположение, что

$$\mathrm{d}_{GH}(B^X, B^Y) = 1,$$

однако это не так.

Предложение 3.1. Пусть $B^n \coloneqq B_1^{\mathbb{R}^n}(0)$. Тогда

$$\mathrm{d}_{GH}(B^1, B^2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

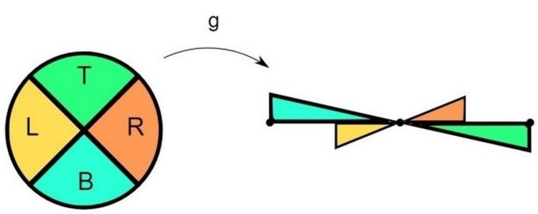
Доказательство. Координаты вектора $x \in \mathbb{R}^2$ будем обозначать x_1 и x_2. Евклидову норму обозначим $|\cdot|$.

Разобьем диск B^2 на четыре дизъюнктных сектора (см. рисунок ниже). Определим

$$T = \left\{x \in B^2 \colon x_2 \geq |x_1|\right\} \qquad B = \left\{x \in B^2 \colon x_2 < -|x_1|\right\}$$

$$L = \left\{x \in B^2 \setminus (T \cup B) \colon x_1 < 0\right\} \qquad R = \left\{x \in B^2 \setminus (T \cup B) \colon x_1 > 0\right\}$$

Согласно лемме 2.6, для доказательства искомой оценки достаточно построить сюръекцию $g \colon B^2 \to B^1$ с искажением $\sqrt{2}$.



Построим ее в два шага. Сначала определим g на единичной окружности: для $x \in \partial B^2$ положим

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in T \cap \partial B^2, \\ 1/3, & \text{если } x \in R \cap \partial B^2, \\ -1/3, & \text{если } x \in L \cap \partial B^2, \\ -1, & \text{если } x \in B \cap \partial B^2. \end{cases}$$

Далее для $x \in B^2 \setminus \partial B^2$ положим

$$g(x) = \begin{cases} |x|\, g\left(x/|x|\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что g сюръективно. Оценим искажение g. Для любого сектора X имеем $\operatorname{dis} g\big|_X \leq \sqrt{2}$, поскольку

$$\operatorname{diam}(X) = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{diam}(g(X)) < \sqrt{2}.$$

Более того, несложно увидеть, что $\operatorname{dis} g\big|_X = \sqrt{2}$. Таким образом, остается оценить искажение расстояния на двух точках из разных секторов. Пусть x, $y \in B^2$. Будем оценивать по отдельности сжатие и растяжение, то есть

$$|x - y| - |g(x) - g(y)| \quad \text{и} \quad |g(x) - g(y)| - |x - y|\,.$$

Итак, есть шесть вариантов расположения двух точек по разным секторам. Однако на парах секторов (T, L), (B, R) и (T, R), (B, L) отображение устроено сходным образом, поэтому достаточно ограничиться четырьмя случаями. Пусть X, Y — два произвольных сектора, отвечающих одному из четырех случаев, $x \in X$, $y \in Y$.

- Оценим растяжение.
  - Если $\{X, Y\} \neq \{T, B\}$, то

    $$\operatorname{diam}(g(X \cup Y)) \leq 4/3 < \sqrt{2},$$

    а значит, растяжение между x и y не больше $\sqrt{2}$.
  - Иначе пусть $X = T$, $Y = B$. Тогда по построению имеем

    $$|g(x) - g(y)| = |x| + |y|\,. \tag{4}$$

    Кроме того, по построению, $x_1 \geq |x_2|$ и $-y_1 > |y_2|$, поэтому

    $$|x - y| = \big|\big(\,|x_1| + |y_1|\,, x_2 - y_2\big)\big| \geq |x_1| + |y_1| > \frac{1}{2}\big(\,|x| + |y|\,\big). \tag{5}$$

    Объединяя 4 и 5, получаем

    $$|g(x) - g(y)| - |x - y| < |x| + |y| - \frac{|x| + |y|}{2} = \frac{|x| + |y|}{2} \leq 1 < \sqrt{2}.$$

- Оценим сжатие.
  - Пусть $\{X, Y\} = \{T, B\}$. По неравенству треугольника

    $$|x - y| - |g(x) - g(y)| = |x - y| - |x| - |y| \leq 0 < \sqrt{2}.$$

  - Пусть $\{X, Y\} \in \big\{\{T, L\}, \{T, R\}\big\}$. Будем считать, что $X = T$. Тогда $|g(y)| = |y|\,/3$. Если $y \in R$, то

    $$\begin{aligned} |x - y| - |g(x) - g(y)| &= |x - y| - \left| |x| - \frac{|y|}{3} \right| \\ &\leq \big(\,|x - y| - |x| - |y|\,\big) + \frac{4}{3}\,|y| \\ &< \sqrt{2}. \end{aligned}$$

    Если $y \in L$, то

    $$\begin{aligned} |x - y| - |g(x) - g(y)| &= |x - y| - \left| |x| + \frac{|y|}{3} \right| \\ &= \big(\,|x - y| - |x| - |y|\,\big) + \frac{2}{3}\,|y| \\ &< \sqrt{2}. \end{aligned}$$

– Наконец, пусть $\{X, Y\} = \{L, R\}$. Тогда $|g(y) - g(x)| = |y - x|/3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |y - x| - |g(y) - g(x)| &\le |x| + |y| - \frac{|x| + |y|}{3} \\ &\le \frac{2}{3}\big(\,|x| + |y|\,\big) \\ &< \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, искажение g равно $\sqrt{2}$, что и требовалось. □

3.2. **Оценка расстояния снизу.**

Лемма 3.2. Пусть X — метрический компакт, Y — выпуклое подмножество нормированного пространства. Тогда для любой ε-изометрии $f\colon X \to Y$ и любого $\mu > 0$ найдется такое непрерывное отображение $\varphi\colon X \to Y$, что

$$\|\varphi - f\| < \varepsilon + \mu.$$

Доказательство. Здесь под $\|\varphi - f\|$ подразумевается

$$\sup\big\{\,\|\varphi(x) - f(x)\| : x \in X\big\}.$$

Построим $\varphi\colon X \to Y$ в два шага. Во-первых, выберем $N = \{x_i\}_{i=1}^n$ — μ-сеть в X, и положим $\varphi(x_i) = f(x_i)$ для любого $x_i \in N$. Затем для $x \in X \setminus N$ определим $\varphi(x)$ в виде выпуклой комбинации значений $\varphi\big|_N$. Зафиксируем непрерывную функцию $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами:

(1) $h \ge 0$,
(2) $h\big|_{[\mu,\infty)} \equiv 0$,
(3) $h(x) \to \infty$ при $x \to 0$.

Сопоставим точке $x_i \in N$ функцию

$$\begin{aligned} h_i\colon X \setminus N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h\big(\,\mathrm{d}(x_i, x)\big). \end{aligned}$$

Отметим, что рядом с точкой x_i такая функция стремится к бесконечности, а вне μ-окрестности x_i равна нулю. Наконец, для любого $x \in X \setminus N$ положим

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=1}^n h_i(x) f(x_i)}{H(x)},$$

где

$$H(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x).$$

Из свойства (3) функции h и выпуклости Y следует, что $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывная функция.

Проверим, что $\|f-\varphi\| < \varepsilon+\mu$. Поскольку на точках сети N функции совпадают, достаточно оценить их разность в произвольной точке $x \in X \setminus N$:

$$\begin{aligned}\|\varphi(x)-f(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \frac{h_i(x)}{H(x)} f(x_i) - f(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \frac{h_i(x)}{H(x)} f(x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{h_i(x)}{H(x)} f(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \frac{h_i(x)}{H(x)} \big(f(x_i)-f(x)\big) \right\|.\end{aligned}$$

В сумме выше коэффициент $h_i(x)/H(x)$ не равен нулю только в том случае, когда $\mathrm{d}(x_i,x) < \mu$. Тогда

$$\|f(x_i)-f(x)\| < \varepsilon+\mu,$$

поскольку f — это ε-изометрия. Таким образом, имеем

$$\|\varphi(x)-f(x)\| < \left\| \sum_i \frac{h_i(x)}{H(x)} (\varepsilon+\mu) \right\| = \varepsilon+\mu,$$

что и требовалось. □

В частности, для нормированных шаров конечной размерности справедливо следствие ниже.

Следствие 3.3. Пусть X, Y — конечномерные нормированные пространства, $\varepsilon > 0$. Тогда для любой ε-изометрии $f\colon B^X \to B^Y$ и любого $\mu > 0$ найдется такое непрерывное отображение $\varphi\colon B^X \to B^Y$, что

$$\|f-\varphi\| < \varepsilon+\mu.$$

Построенные выше приближения почти-изометрий позволяют вывести искомую оценку из теоремы Борсука-Улама.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть

$$\mathrm{d}_{GH}(B^X,B^Y) < \alpha.$$

Достаточно показать, что $\alpha \geq 1/3$.

Будем считать, что $\dim(X) > \dim(Y)$. По лемме 2.8 существует 2α-изометрия $\psi\colon B^X \to B^Y$. По следствию 3.3 для любого $\mu > 0$ существует такое непрерывное $\varphi\colon B^X \to B^Y$, что

$$\|\psi-\varphi\| < 2\alpha+\mu. \tag{6}$$

Пусть S^n обозначает евклидову сферу размерности n. Теорема Борсука-Улама утверждает, что любое непрерывное отображение $\varphi'\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ склеивает пару противоположных точек. Если $n = \dim(X)-1$, то сферу S^n можно непрерывно перевести в ∂B^X с сохранением отношения противоположности, поэтому φ также склеивает пару противоположных точек. Это значит, что $\operatorname{dis}\varphi = 2$.

Оценим α в терминах $\operatorname{dis}\varphi$. Пусть $x,\, x' \in B^X$. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned}\big|\, \|\varphi(x)-\varphi(x')\| - \|\psi(x)-\psi(x')\|\,\big| &\le \|(\varphi(x)-\varphi(x')) - (\psi(x)-\psi(x'))\| \\ &\le \|\varphi(x)-\psi(x)\| + \|\varphi(x')-\psi(x')\| \\ &\le 2\sup\big\{\, \|\varphi(x)-\psi(x)\| \mid x \in B^X \big\} \\ &< 4\alpha + 2\mu.\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь в последнем неравенстве мы воспользовались оценкой 6. По неравенству треугольника из 7 следует оценка

$$\begin{aligned}\big|\, \|\varphi(x)-\varphi(x')\| - \|x-x'\|\,\big| &< \big|\, \|\psi(x)-\psi(x')\| - \|x-x'\|\,\big| + 4\alpha + 2\mu \\ &\le \operatorname{dis}\psi + 4\alpha + 2\mu \\ &\le 6\alpha + 2\mu.\end{aligned}$$

Переходя к пределу по $\mu \to 0$, получаем

$$2 = \operatorname{dis}\varphi \le 6\alpha,$$

то есть $\alpha \ge 1/3$, что и требовалось. □

4. Сравнение метрик d_{GH} и ρ_{BM}

Основная цель этого раздела — оценка

$$\rho_{BM}(X_1, X_2) \le Cn^2\delta\big(\,|\log(\delta)| + 1\big),$$

где $\delta = \mathrm{d}_{GH}(B^{X_1}, B^{X_2})$, теорема 1.1.

Пользуясь построением из леммы 4.2, мы доказываем оценку на «неаффинность» δ-изометрий между нормированными шарами (следствие 4.4). Затем мы строим линейное отображение, близкое к δ-изометрии, и оцениваем инфимум в определении d_{BM} через него (теорема 4.6). Оценка на ρ_{BM} легко следует из оценки d_{BM}.

Лемма 2.8 предоставляет оценку d_{GH} в терминах почти-изометрий. Следующее утверждение позволяет полагать почти-изометрии биективными за счет ограниченного роста их искажений. Свойство биективности будет использовано для построений из леммы 4.2.

Лемма 4.1. Пусть X, Y — метрические компакты без изолированных точек, $f\colon X \to Y$ — δ-изометрия. Тогда для любого $\xi > 0$ существует биективная $(5\delta+\xi)$-изометрия $g\colon X \to Y$.

Доказательство. Пусть $\zeta > 0$. Выберем в X конечную ζ-сеть N. Поскольку в Y нет изолированных точек, по f можно построить $(\delta+\zeta)$-изометрию $h\colon X \to Y$, инъективно действующую на N. Тогда $h(N)$ будет $(2\delta + 3\zeta)$-сетью в Y.

Для точки $x_i \in N$ обозначим V_i' ее клетку в диаграмме Вороного для сети N. Аналогично для точки $h(x_i)$ обозначим W_i' ее клетку в диаграмме для сети $h(N)$. Так как внутренности множеств V_i' дизъюнктны, можно построить такое дизъюнктное покрытие $\{V_i\}_i$ пространства X, что $\operatorname{Int}(V_i') \subset V_i \subset V_i'$ для любого i. Аналогично по $\{W_i'\}$ можно построить $\{W_i\}$. Как известно, метрический компакт без изолированных точек имеет мощность континуум, поэтому множества V_i и W_i континуальны.

Построим $g\colon X \to Y$. Во-первых, для $x_i \in N$ положим $g(x_i) = h(x_i)$. Во-вторых, для каждого i выберем биекцию

$$g_i\colon V_i \setminus \{x_i\} \to W_i \setminus \{h(x_i)\}$$

и положим

$$g\big|_{V_i\setminus\{x_i\}} = g_i.$$

Оценим искажение g на точках $y \in V_i$ и $z \in V_j$. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}(y,z) - \mathrm{d}(x_i,x_j)| &\le \mathrm{d}(y,x_i) + \mathrm{d}(x_j,y),\\ |\mathrm{d}(g(y),g(z)) - \mathrm{d}(g(x_i),g(x_j))| &\le \mathrm{d}(g(y),g(x_i)) + \mathrm{d}(g(x_j),g(y)).\end{aligned} \tag{8}$$

Кроме того, для любого t и любых $a \in V_t$ и $b \in W_t$ имеем

$$\mathrm{d}(a,x_t) \le \zeta \quad \text{и} \quad \mathrm{d}(b,h(x_t)) \le 2\delta + 3\zeta. \tag{9}$$

Неравенства 9 следуют из того, что N — ζ-сеть и $h(N)$ — $(2\delta+3\zeta)$-сеть. Объединяя 8 и 9 для $a \in \{y,z\}$ и $b \in \{g(y),g(z)\}$, получаем

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}(y,z) - \mathrm{d}(g(y),g(z))| &\le |\mathrm{d}(x_i,x_j) - \mathrm{d}(g(x_i),g(x_j)| + 2\zeta + 2(2\delta+3\zeta)\\ &\le (\delta+\zeta) + 2\zeta + 2(2\delta+3\zeta)\\ &= 5\delta + 9\zeta.\end{aligned}$$

Во втором неравенстве мы воспользовались $\operatorname{dis} h \le \delta + \zeta$, поскольку $g(x_i) = h(x_i)$ для любого $x_i \in N$ по построению.

Положим $\zeta = \xi/9$. □

Лемма 4.2. Пусть X, Y — нормированные пространства, $a, b \in X$. Пусть $\|a-b\| < 2/100$, $z = \frac{a+b}{2}$. Зафиксируем $R > 1/2$ и $\delta \in (0, 1/100)$. Пусть $f\colon B_R(z) \to Y$ обладает следующими свойствами:

- f — инъекция,
- $\operatorname{dis} f < \delta$,
- образ f содержит шар $B_{R-\delta}(f(z))$.

Обозначим

$$\varepsilon = \left\| \frac{f(a)+f(b)}{2} - f(z) \right\|.$$

Предположим, что $\varepsilon > \delta$. Тогда существует отображение $g\colon B_{R-4\varepsilon}(z) \to X$, обладающее следующими свойствами:

- g — инъекция,
- $\operatorname{dis} g < 2\delta$,
- образ g содержит шар $B_{R-4\varepsilon-2\delta}(g(z))$,

и при этом

$$2\varepsilon + \delta > \left\| \frac{g(a)+g(b)}{2} - g(z) \right\| > 2\varepsilon - \delta.$$

Доказательство. Обозначим

$$z' = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Пусть ψ — отражение относительно точки z':

$$\begin{aligned}\psi\colon Y &\longrightarrow Y\\ y &\longmapsto 2z' - y.\end{aligned}$$

Построим искомое отображение g. Заметим, что $\psi f\big(B_{R-4\varepsilon}(z)\big)$ содержится в образе f. Действительно, для любой точки $x \in B_{R-4\varepsilon}(z)$ справедливо

$$\begin{aligned}
\|\psi f(x) - f(z)\| &\le \|\psi f(x) - z'\| + \|z' - f(z)\| \\
&= \|f(x) - z'\| + \|z' - f(z)\| \\
&\le \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - z'\| + \|z' - f(z)\| \\
&< \|x - z\| + \delta + 2\,\|f(z) - z'\| \\
&< (R - 4\varepsilon) + \delta + 2\varepsilon \\
&= R - 2\varepsilon + \delta \\
&< R - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из построения ψ, третье неравенство — следствие $\operatorname{dis} f < \delta$, в четвертом неравенстве мы воспользовались тем, что $x \in B_{R-4\varepsilon}(z)$.

Тогда на точках шара $B_{R-4\varepsilon}(z)$ определено отображение $f^{-1} \circ \psi \circ f$, поскольку f — инъекция. Покажем, что $g = f^{-1} \circ \psi \circ f$ подходит.

Во-первых, покажем, что $g(a)$, $g(b)$ определены, иными словами, a, $b \in B_{R-4\varepsilon}(z)$. Для этого используем грубую оценку на ε:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = \left\|\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(z)\right\| &< \left\|\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(a)\right\| + \|f(a) - f(z)\| \\
&< \frac{\|f(b) - f(a)\|}{2} + \|a - z\| + \delta \\
&< \frac{\|a-b\| + \delta}{2} + \frac{\|a-b\|}{2} + \delta \\
&= \|a - b\| + 3\delta/2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь мы воспользовались неравенством треугольника и оценкой $\operatorname{dis} f < \delta$, а также определением z в третьем неравенстве. Теперь из неравенств

$$\begin{cases} R > 1/2, \\ \|a - b\| < 2/100, \\ \delta < 1/100 \end{cases} \tag{11}$$

вытекает, что a, $b \in B_{R-4\varepsilon}(z)$.

Проверим, что g обладает необходимыми свойствами. Инъективность g тривиальна. Искажение g не превосходит $2\operatorname{dis} f$ по построению. Докажем третье свойство. Поскольку образ f содержит шар $B_{R-\delta}(f(z))$ и $\operatorname{dis} f < \delta$, то

$$f\big(B_{R-4\varepsilon}(z)\big) \supset B_{R-4\varepsilon-\delta}\big(f(z)\big) \quad \text{и} \quad \psi f\big(B_{R-4\varepsilon}(z)\big) \supset B_{R-4\varepsilon-\delta}\big(\psi f(z)\big). \tag{12}$$

Если $x \in B_{R-4\varepsilon-2\delta}(g(z))$, то

$$f(x) \in B_{R-4\varepsilon-\delta}\big(fg(z)\big) = B_{R-4\varepsilon-\delta}\big(\psi f(z)\big).$$

Тогда

$$x \in f^{-1}\big(B_{R-4\varepsilon-\delta}\big(\psi f(z)\big)\big) \subset f^{-1}\psi f(B_{R-4\varepsilon}(z)).$$

Здесь включение следует из включений 12. Значит, образ g содержит шар $B_{R-4\varepsilon-2\delta}(g(z))$.

Осталось доказать последние два неравенства. Заметим, что $g(a) = b$ и $g(b) = a$, поэтому

$$\frac{g(a) + g(b)}{2} = z. \tag{13}$$

Проверим оценку снизу:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{g(a) + g(b)}{2} - g(z) \right\| &= \|z - g(z)\| \\
&= \left\| z - f^{-1}\psi f(z) \right\| \\
&> \|f(z) - \psi f(z)\| - \delta \\
&= 2\,\|f(z) - z'\| - \delta \\
&= 2\varepsilon - \delta.
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство — следствие 13, неравенство — следствие $\operatorname{dis} f < \delta$, третье равенство справедливо по построению ψ. Аналогичные выкладки для оценки сверху позволяют получить неравенство

$$\left\| \frac{g(a) + g(b)}{2} - g(z) \right\| < 2\varepsilon + \delta.$$

□

Построения предыдущей леммы позволяют оценить параметр ε через δ.

Следствие 4.3. Существует $C > 0$, обладающее следующим свойством. Пусть X, Y — произвольные нормированные пространства, $f\colon B^X \to B^Y$ — биективная δ-изометрия, причем $0 < \delta < 1/100$. Тогда для любых a, $b \in B^X_{1/100}(0)$ верно

$$\left\| \frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| < C\delta \log(\delta^{-1}).$$

Доказательство. Заметим, что оценку выше достаточно доказать для всех $\delta > \operatorname{dis} f$. Зафиксируем такое δ.

Пусть $z = \frac{a+b}{2}$. Обозначим $f_0 = f$, $\delta_0 = \delta$, $R_0 = 99/100$ и

$$\varepsilon_0 = \varepsilon = \left\| \frac{f_0(a) + f_0(b)}{2} - f_0(z) \right\|.$$

Далее будем считать, что

$$\varepsilon_0 > \delta_0 = \delta \tag{14}$$

— иначе оценка тривиальна, поскольку на интервале $0 < \delta < 1/100$ функция $\log(\delta^{-1})$ отделена от нуля.

Заметим, что отображение f (с такими δ, a, b и $R = 99/100$) теперь удовлетворяет всем условиям, наложенным леммой 4.2.

Будем последовательно применять процесс, описанный в лемме 4.2, к отображению f. Получим последовательности $\{R_i\}_{i=1}^k$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k$, $\{\delta_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$ вместе с последовательностью отображений $\{f_i\}_{i=1}^k$, где

$$f_i\colon B^X_{R_i}(z) \to X \qquad \text{и} \qquad \varepsilon_i = \left\| \frac{f_i(a) + f_i(b)}{2} - f_i(z) \right\|,$$

такие, что элементы $\{f_i\}_{i=0}^k$, $\{R_i\}_{i=0}^k$, $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^k$, $\{\delta_i\}_{i=1}^k$ обладают следующими свойствами:

(1) $\delta_i = 2^i\delta$
(2) f_i — инъекция,
(3) $\mathrm{dis}(f_i) < \delta_i$,
(4) образ f_i содержит $B_{R_i-\delta_i}\big(f_i(z)\big)$,
(5) $2\varepsilon_i - \delta_i < \varepsilon_{i+1} < 2\varepsilon_i + \delta_i$,
(6) $R_{i+1} = R_i - 4\varepsilon_i$,
(7) $f = f_i$, $R = R_i$ и $\delta = \delta_i$ удовлетворяют условию леммы 4.2 тогда и только тогда, когда $i < k$.

Поскольку f_0 вместе с R_0 и δ_0 удовлетворяют условию леммы 4.2, то $k \geq 1$. Отметим, что хотя f_0 действует в пространство Y, все последующие отображения по построению действуют в X.

Наша цель — пользуясь свойством (7) получить неравенства, связывающие ε, k и δ.

Сначала оценим ε_k через δ_{k-1}. Многократно применяя свойства (5) и (1) , получаем оценки

$$\varepsilon_k < 2\varepsilon_{k-1} + \delta_{k-1} < 4\varepsilon_{k-2} + 2\cdot\delta_{k-2} + \delta_{k-1} < \ldots < 2^k\varepsilon_0 + k\delta_{k-1} = 2^k\varepsilon_0 + k2^{k-1}\delta_0 \tag{15}$$

и

$$\varepsilon_k > 2^k\varepsilon_0 - k\delta_{k-1} = 2^k\varepsilon_0 - k2^{k-1}\delta_0. \tag{16}$$

Затем оценим k через δ. Поскольку $2^{k-1}\delta = \delta_{k-1} < 1/100$ по свойству (7), то

$$k + \log(\delta) < \log(2/100)$$

и

$$k < \log(\delta^{-1}) - \log(50). \tag{17}$$

Теперь выведем оценку ε_0 в терминах δ. Кроме условий, которым f_i удовлетворяет по построению, в лемме 4.2 на отображение накладываются три условия: в обозначениях леммы

(1) $R > 1/2$,
(2) $\varepsilon > \delta$,
(3) $\delta < 1/100$.

Поскольку f_k (вместе с R_k и δ_k) не удовлетворяет условию леммы 4.2 по свойству (7), для f_k какие-то из трех условий выше нарушены. Три пункта ниже покрывают все случаи.

a). Предположим, что $2^k\delta = \delta_k \geq 1/100$, то есть нарушено третье условие. Так как $\varepsilon_k < 1$, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &< 100\cdot 2^k\delta, \\ 2^k\varepsilon_0 &< \frac{k}{2}2^k\delta + 100\cdot 2^k\delta, \\ \varepsilon_0 &< k\delta + 100\delta, \\ \varepsilon_0 &< C\delta\log(\delta^{-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь второе неравенство следует из свойства (5), четвертое — из оценки 17 на k.

b). Предположим, что $\varepsilon_k \le \delta_k = 2^k\delta$, то есть нарушено второе условие. Тогда, в частности, выполнены неравенства 18 предыдущего случая, и

$$\varepsilon_0 < C\delta\log(\delta^{-1}).$$

c). Предположим, что $R_k \le 1/2$, однако другие два условия соблюдены. Докажем от противного, что существует такое $i \le k$, что

$$\varepsilon_i < 2 \cdot 2^i\delta. \tag{19}$$

Действительно, в противном случае для любого i имеем

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} > \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i/2 + 2^{i-2}\delta} \ge \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i/2 + \varepsilon_i/8} = \frac{8}{5}.$$

Здесь первое неравенство следует из свойства (5), второе — из отрицания 19. Следовательно,

$$\frac{\varepsilon_k}{\sum_{j=0}^k \varepsilon_j} > \frac{\varepsilon_k}{\sum_{j=0}^k \varepsilon_k\left(\frac{5}{8}\right)^{k-j}} > \frac{1}{\frac{1}{1-5/8}} = \frac{3}{8}. \tag{20}$$

Но по свойству 6 и предположению пункта c) мы имеем

$$R_k = R_0 - 4\sum_{j=0}^k \varepsilon_j \le 1/2,$$

откуда

$$\sum_{j=0}^k \varepsilon_j > 12/100.$$

Тогда из 20 следует, что $\varepsilon_k > 4/100$. С другой стороны, согласно грубой оценке ε из доказательства леммы 4.2, см. неравенство 10, выполнена оценка

$$\varepsilon_k < \|a - b\| + \frac{3 \cdot 2^k\delta}{2}. \tag{21}$$

Пункт c) предполагает, что условие (3) соблюдено, поэтому $2^k\delta < 1/100$. Тогда неравенство 21 влечет $\varepsilon_k < 4/100$. Противоречие.

Теперь зафиксируем такое i. Справедливы неравенства, аналогичные неравенствам 18 первого пункта:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &< 2 \cdot 2^i\delta, \\ 2^i\varepsilon_0 &< \frac{i}{2}2^i\delta + 2 \cdot 2^i\delta, \\ \varepsilon_0 &< i\delta + 2\delta \le k\delta + 2\delta, \\ \varepsilon_0 &< C\delta\log(\delta^{-1}), \end{aligned}$$

что и требовалось.

□

Следствие 4.4. Существует $C > 0$, обладающее следующим свойством. Пусть X, Y — произвольные нормированные пространства, $f\colon B^X \to B^Y$ — биективная δ-изометрия, причем $0 < \delta < 1/100$. Тогда для любых $a, b \in B^X_{1/100}(0)$ и любого $0 < \lambda < 1$ верно

$$\left\| f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) - \big(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\big) \right\| < C\delta \log(\delta^{-1}).$$

Доказательство. Будем выводить искомую оценку из предыдущего утверждения 4.3.

Мы оцениваем

$$\varepsilon(\lambda) := \left\| f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) - \big(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\big) \right\|.$$

Для удобства обозначим

$$\begin{aligned} x_\lambda &= f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big), \\ y_\lambda &= \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \end{aligned}$$

Пусть

$$M = \sup\big\{\varepsilon(\lambda) \mid \lambda \in (0,1)\big\}.$$

Зафиксируем такое λ, что $\varepsilon(\lambda) > M - \delta$. Поскольку для $\lambda = 1/2$ утверждение уже доказано (следствие 4.3), не умаляя общности будем полагать $\lambda < 1/2$. Применим следствие 4.3 к точкам $x_0 = a$ и $x_{2\lambda}$ и их середине x_λ : имеем

$$\left\| \frac{f(x_0) + f(x_{2\lambda})}{2} - f(x_\lambda) \right\| < C\delta \log(\delta^{-1}). \tag{22}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|f(x_\lambda) - y_\lambda\| &< \left\| \frac{f(x_0) + f(x_{2\lambda})}{2} - f(x_\lambda) \right\| + \left\| \frac{f(x_0) + f(x_{2\lambda})}{2} - y_\lambda \right\| \\ &< C\delta \log(\delta^{-1}) + \left\| \frac{f(x_0) + f(x_{2\lambda})}{2} - y_\lambda \right\| \\ &< C\delta \log(\delta^{-1}) + \frac{1}{2} \left\| f(x_{2\lambda}) - y_{2\lambda} \right\| \\ &< C\delta \log(\delta^{-1}) + \frac{M}{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь во втором переходе было использовано неравенство 22, третий получается применением гомотетии с центром $y_0 = f(x_0)$ и коэффициентом 2, четвертый следует из определения M.

Следовательно,

$$\begin{aligned} M - \delta < \|f(x_\lambda) - y_\lambda\| &< C\delta \log(\delta^{-1}) + \frac{M}{2}, \\ \frac{M}{2} &< C\delta \log(\delta^{-1}) + \delta, \\ M &< C\delta \log(\delta^{-1}), \end{aligned}$$

что и требовалось. Здесь второе неравенство следует из 23, четвертое — из $\delta < 1/100$. $\square$

Следующее утверждение будет использовано для оценки операторной нормы линейных отображений из определения d_{BM} через их искажения на точках ограниченного множества (гипероктаэдра H).

Лемма 4.5. Пусть X — n-мерное нормированное пространство. Тогда существует такой гипероктаэдр $H \subset X$ с вершинами единичной нормы и центром в нуле, что

$$B^X_{1/n}(0) \subset H.$$

Доказательство. Мы называем гипероктаэдрами множества, которые можно построить в виде выпуклой оболочки набора точек

$$\{x_i\}_{i=1}^n \cup \{-x_i\}_{i=1}^n,$$

где векторы $\{x_i\}_{i=1}^n$ образуют базис.

Как было отмечено в разделе 2, утверждение 2.10, существует такой эллипсоид E, что

$$\frac{1}{n}B^X \subset E \subset \frac{1}{\sqrt{n}}B^X.$$

В частности, длина полуосей E не превосходит $1/\sqrt{n}$. Поскольку шары симметричны, можно считать, что 0 — центр E. Тогда в качестве искомого H подойдет гипероктаэдр, натянутый на единичные векторы, сонаправленные полуосям E. Действительно, масштабируя оси, отобразим E в единичный евклидов шар. Заметим, что он содержится в правильном евклидовом гипероктаэдре с вершинами евклидовой нормы $\sqrt{n}$. По построению, вершины образа H имеют евклидову норму не меньше $\sqrt{n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{n}B^X \subset E \subset H,$$

что и требовалось. $\square$

Мы докажем оценку на мультипликативное расстояние d_{BM}, а затем выведем из нее оценку на аддитивное расстояние ρ_{BM}.

Теорема 4.6. Существует $C > 0$, обладающее следующим свойством. Пусть X_1, X_2 — произвольные нормированные n-мерные пространства. Пусть

$$\delta = \mathrm{d}_{GH}(B^{X_1}, B^{X_2}).$$

Тогда

$$\mathrm{d}_{BM}(X_1, X_2) \leq 1 + Cn^2\delta\big(\,|\log(\delta)| + 1\big). \tag{24}$$

Доказательство. Достаточно доказать оценку 24 для всех

$$\delta > \mathrm{d}_{GH}(B^{X_1}, B^{X_2}).$$

Зафиксируем такое δ. По лемме 2.8 существует 2δ-изометрия $\tilde{f}\colon B^{X_1} \to B^{X_2}$. По лемме 4.1 существует биективная 11δ-изометрия $f\colon B^{X_1} \to B^{X_2}$.

Разобьем рассуждение на две части — для условно малых и больших δ: доказанные выше леммы применимы лишь при малых δ, что составляет более принципиальный случай. Введем число δ_0, требования на малость которого будут перечислены в ходе доказательства. Сначала построим оценку 24 в предположении

$$\delta < \delta_0. \tag{25}$$

Итак, во-первых, предположим, что $11\delta_0 < 1/100$. Отметим, что в этом случае $|\log(\delta)| = \log(\delta^{-1})$. Рассмотрим произвольный гипероктаэдр H в X_1 с центром в нуле и вершинами нормы 1/100. Так как $\delta < 1/100$ согласно 25, по предыдущему следствию 4.4 для любых точек a, $b \in H$ и любого $\lambda \in (0,1)$ справедливо

$$\left\| f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) - \big(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\big)\right\| < C\delta \log(\delta^{-1}).$$

Обозначим $\{x_i\}_{i=1}^n$ вершины H с неотрицательными координатами. Существует единственное линейное отображение L, переводящее x_i в $f(x_i)$ для каждого i. Деформируя f, можно добиться биективности L за счет небольшого роста искажения f — далее будем полагать $\operatorname{dis} f < 12\delta$. Докажем, что

$$\sup\big\{ \|L(x) - f(x)\| \mid x \in H\big\} < Cn\,\delta \log(\delta^{-1}),$$

то есть L близко к f на точках из H.

Во-первых, поскольку f — биективная 12δ-изометрия, то

$$\|f(0)\| \le 12\delta. \tag{26}$$

Во-вторых, применив гомотетию с центром $f(x_i)$ с коэффициентом 2, заметим, что для любого i верно

$$\left\| f(0) - \frac{f(x_i) + f(-x_i)}{2}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\big(2f(0) - f(x_i)\big) - f(-x_i)\right\|. \tag{27}$$

Поскольку точка 0 — центр пары $\{-x_i, x_i\}$, а точка $f(0)$ — центр пары $\{f(x_i), 2f(0) - f(x_i)\}$, по предыдущему следствию левая часть равенства 27 не превосходит $C\delta\log(\delta^{-1})$. Тогда из 27 по неравенству треугольника следует

$$\|f(-x_i) - (-f(x_i))\| < 2C\delta \log(\delta^{-1}) + \|2f(0)\|,$$

то есть

$$\|f(-x_i) - L(-x_i)\| < C\delta \log(\delta^{-1}).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались равенством $L(-x_i) = -f(x_i)$, оценкой 26 и оценкой 25 на δ.

В-третьих, любая точка $x \in H$ представляется как барицентрическая комбинация n вершин H и нуля. Пользуясь предыдущим следствием n раз, получаем

$$\|L(x) - f(x)\| < Cn\delta \log(\delta^{-1}) \tag{28}$$

для любого $x \in H$, что и требовалось.

Применив гомотетию к утверждению леммы 4.5, можно выбрать гипероктаэдр $H \subset X_1$ так, что

$$B^{X_1}_{(100n)^{-1}}(0) \subset H. \tag{29}$$

Оценим нормы L и L^{-1}. Неравенство 28 предоставляет абсолютную (аддитивную) оценку изменения расстояний под действием L на парах точек из H. Выведем из нее относительную оценку.

Для любого $x \in B^{X_1}_{(100n)^{-1}}(0)$ имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} &< \frac{\|f(x)\| + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|x\|} \\
&< \frac{\|f(x)-f(0)\| + \|f(0)\| + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|x\|} \\
&< \frac{\|x\| + 12\delta + 12\delta + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|x\|} \\
&< \frac{\|x\| + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|x\|}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Здесь первое неравенство следует из 28 и 29, третье из того, что искажение f не превосходит 12δ и 26, последнее — из ограничения 25 на δ. Применяя эту оценку (30) к точкам границы шара $B^{X_1}_{(100n)^{-1}}(0)$, то есть ко всем таким x, что $\|x\| = (100n)^{-1}$, получаем

$$\|L\| < 1 + \frac{Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|x\|} < 1 + Cn^2\delta\log(\delta^{-1}).$$

Теперь оценим $\|L^{-1}\|$. Мы хотим воспользоваться построенной выше (28) оценкой близости L и f на точках из H. Для этого еще раз ограничим δ_0. Имея оценку 28, можно потребовать такой малости δ_0, чтобы для $x \in H$ выполнялось неравенство

$$\|L(x) - f(x)\| + 24\delta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100n}. \tag{31}$$

Из этого неравенства (31) следует

$$\begin{aligned}
\|L(x)\| &\geq \|f(x) - f(0)\| - \|f(0)\| - \|L(x) - f(x)\| \\
&> \|x - 0\| - 12\delta - 12\delta - \|L(x) - f(x)\| \\
&= \|x\| - 24\delta - \|L(x) - f(x)\| \\
&> \|x\| - (200n)^{-1}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь первое неравенство — неравенство треугольника. Второе следует из $\operatorname{dis} f < 12\delta$ и 26. Последнее — следствие 31. Из 32 следует, что при $\|x\| = (100n)^{-1}$ справедливо

$$\|L(x)\| > (200n)^{-1}. \tag{33}$$

Поскольку L сюръективно, из 33 следует

$$B^{X_2}_{(200n)^{-1}}(0) \subset L\big(B^{X_1}_{(100n)^{-1}}(0)\big) \subset L(H).$$

Поэтому для любой точки

$$y \in B^{X_2}_{(200n)^{-1}}(0)$$

имеем

$$L^{-1}(y) \in H. \tag{34}$$

Теперь можно воспользоваться оценкой 28 на близость L и f в точках из H:

$$\begin{aligned} \left\|L^{-1}(y) - f^{-1}(y)\right\| &< \left\|f\big(L^{-1}(y)\big) - y\right\| - 12\delta \\ &= \left\|f\big(L^{-1}(y)\big) - L\big(L^{-1}(y)\big)\right\| - 12\delta \\ &< Cn\delta\log(\delta^{-1}) - 12\delta \\ &< Cn\delta\log(\delta^{-1}). \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь первое неравенство следует из $\operatorname{dis} f < 12\delta$, а третье — это следствие 34 и 28.

Теперь для $y \in B^{X_2}_{(200n)^{-1}}(0)$ по аналогии с 30 получаем

$$\begin{aligned} \frac{\|L^{-1}(y)\|}{\|y\|} &< \frac{\|f^{-1}(y)\| + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|y\|} \\ &< \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(0)\| + \|f^{-1}(0)\| + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|y\|} \\ &< \frac{\|y\| + 12\delta + 12\delta + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|y\|} \\ &< \frac{\|y\| + Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|y\|}. \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь первое неравенство — следствие 35, а третье следует из того, что f^{-1} — биективная 12δ-изометрия и $\|f^{-1}(0)\| \leq 12\delta$ (см. 26).

Применяя эту оценку (36) к точкам границы шара $B^{X_2}_{(200n)^{-1}}(0)$, то есть ко всем таким y, что $\|y\| = (200n)^{-1}$, получаем

$$\left\|L^{-1}\right\| < 1 + \frac{Cn\delta\log(\delta^{-1})}{\|y\|} < 1 + Cn^2\delta\log(\delta^{-1}).$$

Наконец, оценим само расстояние в предположении $\delta < \delta_0$:

$$\mathrm{d}_{BM}(X_1, X_2) \leq \|L\|\|L^{-1}\| < 1 + Cn^2\delta\log(\delta^{-1}),$$

что и требовалось.

Остается разобрать случай $\delta \geq \delta_0$. Из теоремы Джона (см. [5]) следует, что

$$\mathrm{d}_{BM}(X, Y) \leq n$$

для любых n-мерных нормированных пространств X и Y. Тогда искомая оценка следует из ограниченности $1/\delta$. Действительно, для $C > 1/\delta$ справедливо

$$\mathrm{d}_{BM}(X_1, X_2) < 1 + Cn\delta.$$

□

Сформулировав полученный результат в терминах метрики ρ_{BM}, легко получить доказательство теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Напомним, что

$$\rho_{BM} = \log(\mathrm{d}_{BM}).$$

Поскольку $\log(1 + x) \leq x$, искомая оценка 1 прямо следует из оценки 24, полученной в теореме 4.6. □

Список литературы

[1] Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov. *A Course in Metric Geometry*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2001.

[2] M. Gromov, M. Katz, P. Pansu, S. Semmes. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemanian Spaces*. Birkhauser, 1999.

[3] Charles Fefferman, Sergei Ivanov, Yaroslav Kurylev, Matti Lassas, Hariharan Narayanan. Reconstruction and interpolation of manifolds I: The geometric Whitney problem, 2019.

[4] Jussi Väisälä. A Proof of the Mazur-Ulam Theorem. *The American Mathematical Monthly, vol. 110, no. 7*, page 633–635, 2003.

[5] F. John. *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*. Courant Anniversary Volume, Interscience, New York, 1948.

[6] Keith Ball. Ellipsoids of maximal volume in convex bodies. 1992.