Санкт–Петербургский государственный университет

РЯБКОВ Антон Игоревич

Выпускная квалификационная работа

Простые подполиэдры специальных полиэдров с тремя 2-компонентами

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2018 «Математика»

Научный руководитель:
доцент, д.ф.-м.н. Е. А. Фоминых

Рецензент:
профессор, д.ф.-м.н. А. В. Малютин

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

Введение

При изучении трехмерных многообразий важную роль играют инварианты. Одним из инвариантов является сложность по Матвееву. Однако задача вычисления такой сложности многообразий довольно трудна. В работах [1] и [2] вычислена сложность многообразий, задаваемых специальными спайнами с одной и с двумя 2-компонентами соответственно.

Естественным развитием исследования сложности было бы нахождение сложности многообразий, задаваемых специальными спайнами с тремя 2-компонентами, но эта задача на данный момент не решена. Известна сложность только для двух классов многообразий, задаваемых специальными спайнами с тремя 2-компонентами: в работе [3] разобран случай *бедных* специальных спайнов, а в работе [4] – случай специальных спайнов, у которых каждая 2-компонента проходит по каждому ребру особого графа ровно один раз.

В работах [2], [3] и [4] широко использовался частный случай инвариантов Тураева-Виро под названием ε-инвариант, описанный в работе [5]. Он вычисляется как сумма весов простых подполиэдров специальных спайнов. В выше указанных работах количество подполиэдров и, как следствие, число слагаемых при вычислении ε-инванианта, не привышает трех, что и позволило эффективно использовать данный инвариант. Поэтому для изучения сложности многообразий имеет смысл подробнее изучить простые подполиэдры специальных спайнов с тремя 2-компонентами.

В этой работе мы разобьем множество специальных спайнов с тремя 2-компонентами на классы, задаваемые числом простых подполиэдров и содержащимися в них 2-компонентами. Для каждого класса мы опишем необходимые и достаточные условия принадлежности специального спайна данному классу и приведем принадлежащую ему бесконечную серию специальных спайнов.

1. Предварительные сведения

1.1. Специальные полиэдры

Напомним определения простых и специальных полиэдров следуя [6]. Компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки $x \in P$ гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:

1. окружности (в этом случае точка x называется *неособой*);
2. объединению окружности и диаметра (в этом случае точка x называется *тройной точкой*);
3. объединению окружности и трех радиусов (в этом случае точка x называется *истинной вершиной*).

Типичные окрестности точек простого полиэдра показаны на рис. 1. Точки типов (2) и (3) будем называть *особыми*. Множество особых точек простого полиэдра P называется его *особым графом* и обозначается SP. В общем случае множество SP не является графом на множестве истинных вершин полиэдра P, так как особый граф SP может содержать замкнутые тройные линии без истинных вершин. Если же замкнутых тройных линий нет, то особый граф SP является 4-регулярным графом (каждая вершина инцидентна ровно четырем ребрам), возможно, имеющим петли и кратные ребра.

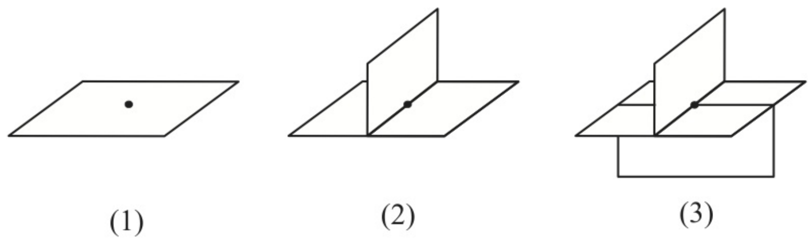


Рис. 1: Разрешенные типы окрестностей в простом полиэдре.

Каждый простой полиэдр имеет естественную *стратификацию*. Страты размерности 2 (2-*компоненты*) — это связные компоненты множества неособых точек. Страты размерности 1 — это связные компоненты множества точек типа (2). Страты размерности 0 — это истинные вершины. Естественно потребовать, чтобы каждый страт являлся клеткой. Простой полиэдр P называется *специальным*, если выполнены следующие условия:

a. Каждый одномерный страт полиэдра P является открытой 1-клеткой,

b. Каждая 2-компонента полиэдра P является открытой 2-клеткой.

Очевидно, что если простой полиэдр P связен и содержит хотя бы одну истинную вершину, то выполнение условия (a) влечет выполнение условия (b). Для удобства множество истинных вершин, ребер и 2-компонент специального полиэдра P будем обозначать через $\mathtt{v}(P)$, $\mathtt{e}(P)$ и $\mathtt{f}(P)$ соответственно.

Пусть α – 2-компонента специального полиэдра P. Тогда имеется *характеристическое отбражение* $f\colon D^2 \to P$, которое гомеоморфно отображает $\operatorname{Int} D^2$ на α и ограничение которого на $S^1 = \partial D^2$ является локальным вложением. Кривую $f|_{\partial D^2}\colon \partial D^2 \to P$ (и ее образ $f|_{\partial D^2}(\partial D^2)$) будем называть *граничной кривой* 2-компоненты α и обозначать как $\partial\alpha$.

1.2. Простые подполиэдры

Подполиэдр Q специального полиэдра P называется *простым*, если он является простым как полиэдр. Множество всех простых подполиэдров специального полиэдра P, включая пустое множество и сам полиэдр P, обозначают как $\mathcal{F}(P)$.

Не трудно видеть, что если какая-то точка 2-компоненты полиэдра P принадлежит подполиэдру Q, то и вся 2-компонента принадлежит подполиэдру Q. Отсюда верна следующая лемма:

Лемма 1. *Любой простой подполиэдр Q специального полиэдра P может быть представлен как замыкание некоторого подмножества 2-компонент полиэдра P.*

Через $Q_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}}$ мы будем обозначать подполиэдр, полученный как замыкание 2-компонент $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ полиэдра P. Далее нам понадобится необходимое и достаточное условие простоты подполиэдров специальных полиэдров:

Лемма 2. *Подполиэдр $Q_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}}$ специального полиэдра P является простым тогда и только тогда, когда для всех $1 \leq i \leq k$ граничные кривые $\partial\alpha_i$ проходят по каждому ребру особого графа SP всего $0, 2$ или 3 раза.*

Пусть Q – простой подполиэдр специального полиэдра P, тогда:

- через $\mathtt{v}(Q, P)$ будем обозначать множество истинных вершин полиэдра P, которые содержатся в подполиэдре Q (не обязательно являясь истинными для подполиэдра)

- через $\mathtt{V}(Q, P)$ будем обозначать множество истинных вершин полиэдра P, которые являются истинными и для подполиэдра Q как для полиэдра

2. Классы специальных полиэдров с тремя 2-компонентами

Теорема 1. *Пусть P – специальный полиэдр с тремя 2-компонентами. Обозначим 2-компоненты полиэдра P через α, β и γ. Тогда, с точностью до переобозначения 2-компонент, имеем одну из следующих возможностей:*

1. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, P\}$;
2. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, P\}$;
3. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$;
4. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, P\}$;
5. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$, *причем* $\partial\alpha \cap \partial\beta = \emptyset$;
6. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$;
7. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, P\}$;
8. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, \mathrm{Q}_{\{\beta,\gamma\}}, P\}$, *причем граничная кривая каждой 2-компоненты проходит по каждому ребру особого графа SP ровно один раз.*

Для доказательтва нам понадобится следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть P – связный специальный полиэдр и I – собственное подмножество множества $\mathtt{f}(P)$. Тогда хотя бы один из полиэдров $Q_I, Q_{\mathtt{f}(P)\setminus I}$ не является простым.*

Доказательство. Заметим, что $Q_I \cup Q_{\mathtt{f}(P)\setminus I} = P$. Так как полиэдр P связен, то у подполиэдров Q_I и $Q_{\mathtt{f}(P)\setminus I}$ найдется общее ребро особого графа SP. Обозначим его через e.

В обоих подполиэдрах есть хотя бы одна 2-компонента, граничная кривая которой проходит по ребру e. Поэтому можно считать, что граничные кривые 2-компонент из подполиэдра Q_I проходят по ребру e дважды, а граничные кривые 2-компонент из подполиэдра $Q_{\mathtt{f}(P)\setminus I}$ – один раз. Тогда по лемме 2 подполиэдр $Q_{\mathtt{f}(P)\setminus I}$ не является простым. □

Следствие 1. *Специальный полиэдр P с тремя 2-компонентами не может иметь больше, чем три собственных простых подполиэдра.*

Доказательство. По лемме 1 все простые подполиэдры P задаются набором своих 2-компонент, то есть каждый простой подполиэдр P соответствует некоторому подмножеству множества $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Так как собственных подмножеств в $\mathbb{Z}_3$ всего $2^3 - 2 = 6$, то собственных подполиэдров у полиэдра P не более 6.

Если простых подполиэдров будет хотя бы 4, то по принципу Дирихле найдется пара таких, наборы 2-компонент которых дополняют друг друга до всего $\mathtt{f}(P)$, что по лемме 3 невозможно. □

На основе леммы 3 доказываются еще две леммы:

Лемма 4. *Пусть P – специальный полиэдр с ровно тремя 2-компонентами. Обозначим 2-компоненты полиэдра P через α, β и γ. Если в полиэдре P существует простой подполиэдр, содержащий всего одну 2-компоненту P, то с точностью до переобозначения 2-компонент имеем одну из следующих возможностей:*

1. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, P\}$;
2. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$;
3. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$, *причем* $\partial\alpha \cap \partial\beta = \emptyset$;
4. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, P\}$;

Доказательство. Пусть простой подполиэдр с всего одной 2-компонентой полиэдра P – это $Q_{\{\alpha\}}$. По следствию 1 в полиэдре P может быть еще не больше двух собственных простых подполиэдров. Разберем каждый из случаев по отдельности:

a. Пусть кроме $Q_{\{\alpha\}}$ собственных простых подполиэдров *нет*, тогда получаем случай (1).

b. Пусть кроме $Q_{\{\alpha\}}$ существует еще *один* собственный простой подполиэдр R_1. Тогда он может содержать либо одну, либо две 2-компоненты P. Разберем каждый из этих случаев:

i. Пусть в подполиэдре R_1 содержится ровно *одна* 2-компонента P (скажем β). Докажем, что тогда подполиэдр $Q_{\{\alpha,\beta\}}$ прост. Для этого заметим, что у подполиэдров $Q_{\{\alpha\}}$ и R_1 общих ребер особого графа SP быть не может, иначе по лемме 2 получим противоречие с простотой одного из подполиэдров. Тогда граничные кривые 2-компонент подполиэдра $Q_{\{\alpha,\beta\}}$ будут проходить по каждому ребру особого графа SP всего $0, 2$ или 3 раза. То есть по лемме 2 подполиэдр $Q_{\{\alpha,\beta\}}$ дествительно будет простым. Получили случай (3).

ii. Если же подполиэдр R_1 содержит *две* 2-компоненты полиэдра P, то это случай (2), иначе получим противоречие с леммой 3.

c. Пусть кроме $Q_{\{\alpha\}}$ в полиэдре P существуют еще *два* собственных простых подполиэдра R_1 и R_2. Тогда либо среди них есть подполиэдр содержащий ровно одну 2-компоненту полиэдра P и это уже рассмотренный нами случай (b.i), либо оба подполиэдра содержат по две 2-компоненты полиэдра P.

   В полиэдре P существует всего три подполиэдра, содержащих ровно две 2-компоненты полиэдра P. Среди подполиэдров R_1, R_2 не может быть подполиэдра $Q_{\{\beta,\gamma\}}$, иначе было бы противоречие с леммой 3. Таким образом, получаем случай (4).

□

Лемма 5. *Пусть P – специальный полиэдр с ровно тремя 2-компонентами. Обозначим 2-компоненты полиэдра P через α, β и γ. Если каждый собственный простой подполиэдр полиэдра P имеет две 2-компоненты P, то с точностью до переобозначения 2-компонент имеем одну из следующих возможностей:*

1. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, P\}$;

2. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$;

3. $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, P\}$;

4. *$\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, \mathrm{Q}_{\{\beta,\gamma\}}, P\}$, причем каждая 2-компонента проходит по каждому ребру особого графа SP ровно один раз.*

Доказательство. Случаи (1-3) и случай (4), но без каких-либо ограничений для особого графа SP, очевидно следуют из условия леммы. Остается доказать, что если $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, \mathrm{Q}_{\{\beta,\gamma\}}, P\}$, то каждая 2-компонента проходит по каждому ребру особого графа SP ровно один раз.

Рассуждая от противного, найдется либо ребро по которому какая-то 2-компонента проходит ровно два раза, либо ребро по которому какая-то 2-компонента проходит ровно три раза. Разберем эти случаи по отдельности:

a. Пусть по некоторому ребру $e \in \mathsf{e}(P)$ граничная кривая $\partial\alpha$ проходит *ровно два раза*, третьей же по ребру e проходит граничная кривая $\partial\beta$. Тогда граничные кривые 2-компонент подполиэдра $Q_{\{\beta,\gamma\}}$ проходят по ребру e только один раз, а значит по лемме 2 подполиэдр $Q_{\{\beta,\gamma\}}$ не может быть простым. Противоречие. Значит, любая 2-компонента проходит по любому ребру особого графа SP всего $0, 1$ или 3 раза.

b. Пусть граничная кривая $\partial\alpha$ проходит по некоторому ребру $e_0 \in \mathsf{e}(P)$ *ровно три раза*. Тогда в силу связности P можем выбрать ребро e_0 таким, чтобы по некоторому ребру e_1, смежному с ребром e_0, проходила граничная кривая другой 2-компоненты. Положим, это граничная кривая $\partial\beta$.

   Обозначим какую-либо из истинных вершин, общих для ребер e_0 и e_1 через v. Тогда локально из вершины v выходят еще два ребра. Обозначим их через e_2, e_3. Так же обозначим 2-компоненту, граничная кривая которой последовательно проходит с ребра e_i на ребро e_j, где $i \neq j$, через $f_{i,j}$. По определению истинной вершины, 2-компонента $f_{i,j}$ определена единственным образом. Тогда мы уже знаем, что $f_{0,i} = \alpha$ для $i = 1, 2, 3$. Далее либо среди $f_{1,2}$, $f_{2,3}$, $f_{3,1}$ есть 2-компонента α, либо нет. Разберем каждый из этих случаев по отдельности:

   i. Пусть $f_{1,2} = \alpha$, тогда 2-компонента α по ребрам e_1 и e_2 проходит как минимум два раза. Но по пункту (a) ровно два раза она проходить не может, а значит $f_{1,3} = \alpha = f_{2,3}$. Но среди $f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,1}$ должна найтись 2-компонента β. Противоречие.

ii. Пусть среди $f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,1}$ нет 2-компоненты α, тогда по принципу Дирихле среди них найдется две равных. Положим $f_{1,2} = f_{2,3} = \beta$. Тогда 2-компонента β по ребру e_2 проходит дважды, что невозможно по пункту (a). Противоречие.

Итого по каждому ребру особого графа SP обязано проходить ровно по одной граничной кривой каждой 2-компоненты полиэдра P. □

Доказательство теоремы 1. В множестве $\mathcal{F}(P)$ либо существует простой подполиэдр с ровно одной 2-компонентой P, либо каждый собственный простой подполиэдр P содержит ровно две 2-компоненты P. Таким образом, все возможные наборы простых подполиэдров с точностью до переобозначения 2-компонент исчерпываются вариантами, перечисленными в леммах 4 и 5. □

Обозначим через $K_i, 1 \leq i \leq 8$ множество всех специальных полиэдров P с тремя 2-компонентами таких, что множество их простых подполиэдров с точностью до переобозначения описывается случаем (i) теоремы 1.

Не сложно заметить, что $K_i \cap K_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Более того, по теореме 1 любой специальный полиэдр с тремя 2-компонентами принедлежит одному из классов K_i.

3. Точные нижние оценки на число истинных вершин специальных полиэдров с тремя 2-компонентами

Классы полиэдров K_1 и K_8 были подробно изучены в работах [3] и [4] соответственно, поэтому далее мы будем говорить только о классах $K_2 - K_7$.

В данном разделе мы выведем необходимые и достаточные условия для принадлежности специальных полиэдров классам $K_2 - K_7$. Далее, пользуясь полученными условиями, для каждого из этих классов мы приведем пример принадлежащего данному классу специального полиэдра. Все это позволит нам доказать точные нижние оценки на число истинных вершин у полиэдров в каждом из классов $K_2 - K_7$.

Если граничная кривая 2-компоненты $x \in \mathtt{f}(P)$ не проходит по ребру $e \in \mathtt{e}(P)$, то будем говорить, что ребро e *свободно* от x. Для доказательства нижних оценок на число истинных вершин в специальных полиэдрах из классов $K_2 - K_7$ нам так же понадобятся следующие две леммы:

Лемма 6. *Пусть Q – простой подполиэдр специального полиэдра P, а истинная вершина $v \in \mathtt{v}(P)$ принадлежит подполиэдру Q. Тогда вершине v может быть инцедентно не более одного ребра особого графа SP, свободного от 2-компонент подполиэдра Q.*

Доказательство. Напомним, что по определению через истинную вершину v проходит шесть граничных кривых 2-компонент полиэдра P. Причем для каждых двух ребер, инцедентных вершине v, существует ровно одна 2-компонента, граничная кривая которой последовательно проходит по этим ребрам. Обозначим через e_0, e_1, e_2, e_3 ребра особого графа SP, инцедентные вершине v, а через $f_{i,j}, i \neq j$ – 2-компоненту, граничная кривая которой последовательно проходит через ребра e_i и e_j.

Рассуждая от противного, предположим, что вершине v инцедентно хотя бы два ребра особого графа SP свободных от 2-компонент подполиэдра Q (скажем e_0 и e_1). Тогда $f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3}, f_{1,2}$ и $f_{1,3}$ не принадлежат подполиэдру Q. Значит, по ребрам e_2, e_3 проходит не более одной граничной кривой 2-компоненты подполиэдра Q. Подполиэдр Q простой, значит по лемме 2 ребра e_2, e_3 должны быть свободны от граничных кривых 2-компонент подполиэдра

Q. Тогда вершина v не принадлежит подполиэдру Q. Противоречие.

$\square$

Лемма 7. *Пусть Q – простой подполиэдр специального полиэдра P. Тогда в полиэдре P существует четное число вершин $v \in \mathtt{v}(P)$ таких, что $v \in \mathtt{v}(Q, P)$ и при этом вершина v инцедентна ребру, свободному от граничных кривых 2-компонент подполиэдра Q.*

Доказательство. Пусть M – множество 2-компонент полиэдра P, которые не принадлежат подполиэдру Q, но их граничная кривая содержит вершины из $\mathtt{v}(Q)$. Выберем ориентацию для каждой из граничных кривых 2-компонент из M. Тогда для каждой из вершин $v \in \mathtt{v}(Q, P)$ посчитаем числа:

1. x_v^{in}, равное числу граничных кривых 2-компонент M пришедших в вершину v с ребра принадлежащего подполиэдру Q

2. x_v^{out}, равное числу граничных кривых 2-компонент M, пришедших в вершину v с ребра не пренадлежащего подполиэдру Q

3. $x_v = x_v^{in} - x_v^{out}$

Заметим, что $\sum_{v \in \mathtt{v}(Q,P)} x_v = 0$, так как каждая из граничных кривых 2-компонент полиэдра P, не принадлежащих подполиэдру Q, выходит и входит в множество $\mathtt{v}(Q, P)$ одинаковое число раз, а петель у таких кривых нет по лемме 7.

Для вершин $v_0 \in \mathtt{v}(Q, P)$, для которых по любому инцедентному ребру проходит 2-компонента подполиэдра Q, число x_{v_0} четное. Для вершин же, которым инцедентно ребро свободное от 2-компонент подполиэдра Q это число равняется ± 1 или ± 3. Значит, если рассмотреть все слагаемые по модулю 4, то получим сумму ровно по вершинам из условия леммы. Все такие слагаемые нечетны, так что количество их четно, что и требовалось доказать. $\square$

3.1. Класс K_2

Напомним, что класс K_2 состоит из специальных полиэдров P с ровно тремя 2-компонентами, причем $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, P\}$, где $\alpha \in \mathtt{f}(P)$.

Будем говорить, что ребро особого графа специального полиэдра P имеет тип $[xyz]$, где $x, y, z \in \mathtt{f}(P)$, если по нему проходят граничные кривые 2-компонент x, y и z.

Лемма 8. *Специальный полиэдр P с ровно тремя 2-компонентами принадлежит K_2 тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *в особом графе SP найдется ребро типа $[\beta\beta\gamma]$*
2. *в особом графе SP найдется ребро типа $[\beta\gamma\gamma]$*
3. *в особом графе SP найдется ребро, по которому граничная кривая $\partial\alpha$ проходит ровно два раза*
4. *граничная кривая $\partial\alpha$ проходит по каждому ребру особого графа SP всего $0, 2$ или 3 раза*

Доказательство. Докажем, что свойства (1-4) выполняются для любого специального полиэдра P с тремя 2-компонентами из K_2:

(1-2) Так как подполиэдр $Q_{\{\alpha,\beta\}}$ простым не является, то в особом графе SP найдется ребро e, по которому граничные кривые $\partial\alpha$ и $\partial\beta$ проходят один раз с учетом кратности. Подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ простой, а значит граничная кривая $\partial\alpha$ по каждому ребру с учетом кратности проходит $0, 2$ или 3 раза по лемме 2.

Итого по ребру e граничная кривая $\partial\beta$ проходит один раз, а граничная кривая $\partial\alpha$ по ребру e не проходит. Значит, это ребро типа $[\beta\gamma\gamma]$. Аналогично доказывается существование ребра типа $[\beta\beta\gamma]$.

(3) Если в особом графе SP нет ребер по которым граничная кривая $\partial\alpha$ проходит два раза, то по лемме 2 получаем, что граничная кривая $\partial\alpha$ проходит 0 или 3 раза по любому ребру. Значит, подполиэдры $Q_{\{\alpha\}}$ и $Q_{\{\beta,\gamma\}}$ дизъюнктны, чего не может быть поскольку полиэдр P связен.

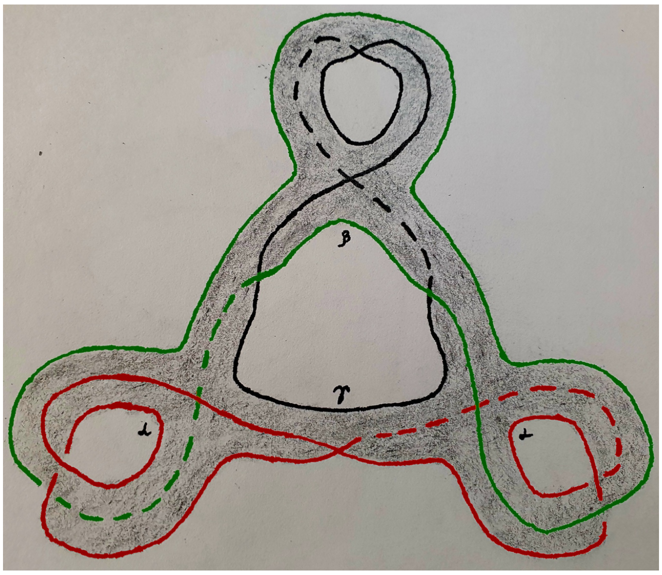
(4) Если найдется ребро $e \in \mathtt{e}(P)$ такое, что граничная кривая $\partial\alpha$ проходит по нему всего один раз, то по лемме 2 подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ не может быть простым.

В обратную сторону: пусть для специального полиэдра P с ровно тремя 2-компонентами выполняются свойства (1-4). Тогда по лемме 2 свойства (1-2) влекут то, что подполиэдры

$$Q_{\{\beta\}}, Q_{\{\gamma\}}, Q_{\{\alpha,\beta\}}, Q_{\{\alpha,\gamma\}}$$

не могут быть простыми, а свойство (3) противоречит простоте $Q_{\{\beta,\gamma\}}$. А так как нет ребер, по которым граничная кривая $\partial\alpha$ проходит ровно один раз, то по этой же лемме подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ прост. $\square$

Пример 1. *Рассмотрим следующий специальный полиэдр:*



Не сложно проверить, что в данном примере выполняются свойства (1-4) леммы 8, а значит приведенный выше полиэдр принадлежит K_2.

Лемма 9. *Если $P \in K_2$, то $|\mathtt{v}(P)| \geq 3$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что полиэдр P имеет не больше, чем две истинные вершины. Подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ простой, значит по лемме 7 существует четное число вершин из множества $\mathtt{v}(Q, P)$ таких, что им инцедентно ребро, свободное от 2-компоненты α. Так как по лемме 8 в особом графе SP должны существовать ребра, свободные от 2-компоненты α, то граничная кривая α проходит по обеим истинным вершинам P.

По лемме 6 каждой вершине может быть инцедентно не более одного ребра, свободного от 2-компоненты α. Таким образом, всего ребер свободных от 2-компоненты α может быть не более $\frac{\mathtt{v}(Q,P)}{2} = 1$. Однако по лемме 8 у нас есть хотя бы два таких ребра: типа $[\beta\beta\gamma]$ и типа $[\beta\gamma\gamma]$. Противоречие. Значит, $|\mathtt{v}(P)| \geq 3$. $\square$

Замечание. *Пример 1 показывает, что оценка, приведенная в лемме 9, точна.*

3.2. Класс K_3

Напомним, что класс K_3 состоит из специальных полиэдров P с ровно тремя 2-компонентами, причем $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$, где $\alpha, \beta \in \mathtt{f}(P)$.

Лемма 10. *Специальный полиэдр P с ровно тремя 2-компонентами принадлежит K_3 тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *в особом графе SP возможны только следующие типы ребер:*

$$[\alpha\alpha\beta], [\alpha\alpha\gamma], [\beta\beta\gamma], [xxx], \textit{ где } x \in \mathtt{f}(P)$$

2. *в особом графе SP обязательно найдутся ребра типа $[\alpha\alpha\beta], [\beta\beta\gamma]$*

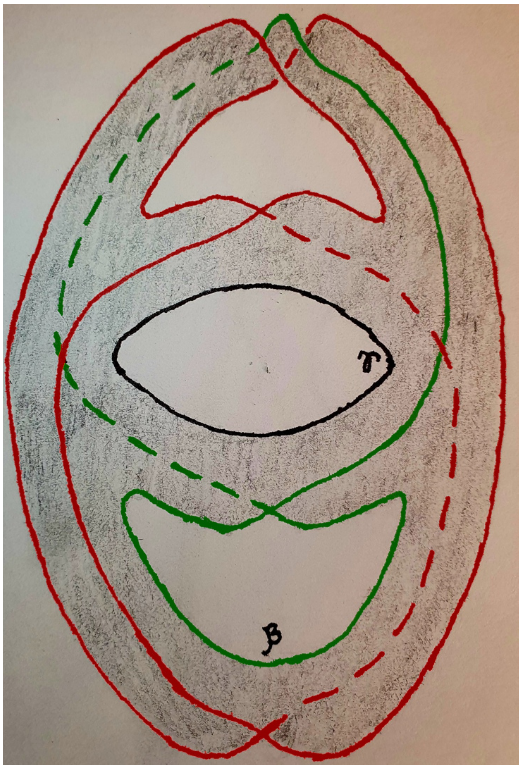
Доказательство. Докажем, что свойства (1-2) выполняются для любого специального полиэдра P с тремя 2-компонентами из K_3:

(1) Так как подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ простой, то по лемме 2, если по какому-то ребру проходит граничная кривая $\partial\alpha$, то она проходит хотя бы дважды. Значит, возможны ребра типа $[\alpha\alpha x]$, где $x \in \mathtt{f}(P)$. Если же граничная кривая $\partial\alpha$ не проходит, но проходит граничная кривая $\partial\beta$, то, так как подполиэдр $Q_{\{\alpha,\beta\}}$ простой, она проходит дважды. Иначе получаем тип $[\gamma\gamma\gamma]$.

(2) Такие ребра обязательно найдутся, потому что иначе подполиэдры $Q_{\{\beta\}}$ и $Q_{\{\alpha,\gamma\}}$ будут по лемме 2 простыми.

В обратную сторону: пусть для специального полиэдра P с ровно тремя 2-компонентами выполняются свойства (1-2). Тогда путем перебора наборов 2-компонент по лемме 2 получим требуемый $\mathcal{F}(P)$. $\square$

Пример 2. *Рассмотрим следующий специальный полиэдр:*



Не сложно проверить, что в данном примере выполняются свойства (1-2) леммы 10, а значит приведенный выше полиэдр принадлежит K_3.

Лемма 11. *Если $P \in K_3$, то $|\mathtt{v}(P)| \geq 2$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что полиэдр P имеет ровно одну истинную вершину. Так как подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ простой, то по лемме 6 из истинной вершине может может быть ицедентно не более одного ребра, свободного от 2-компоненты α. Так как по лемме 10 такое ребро обязательно имеется, то при одной истинной вершине это просто невозможно, ведь исходящее ребро не может вернуться. Противоречие. Значит, $|\mathtt{v}(P)| \geq 2$. $\square$

Замечание. *Пример 2 показывает, что оценка, приведенная в лемме 11, точна.*

3.3. Класс K_4

Напомним, что класс K_4 состоит из специальных полиэдров P с ровно тремя 2-компонентами, причем $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, P\}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathtt{f}(P)$.

Лемма 12. *Специальный полиэдр P с ровно тремя 2-компонентами принадлежит K_4 тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *в особом графе SP возможны только следующие типы ребер:*

$$[\alpha\alpha\beta], [\alpha\alpha\gamma], [xxx], \text{ где } x \in \mathtt{f}(P)$$

2. *в особом графе SP обязательно найдутся ребра типа $[\alpha\alpha\beta], [\alpha\alpha\gamma]$*

Доказательство. Докажем, что свойства (1-2) выполняются для любого специального полиэдра P с тремя 2-компонентами из K_4:

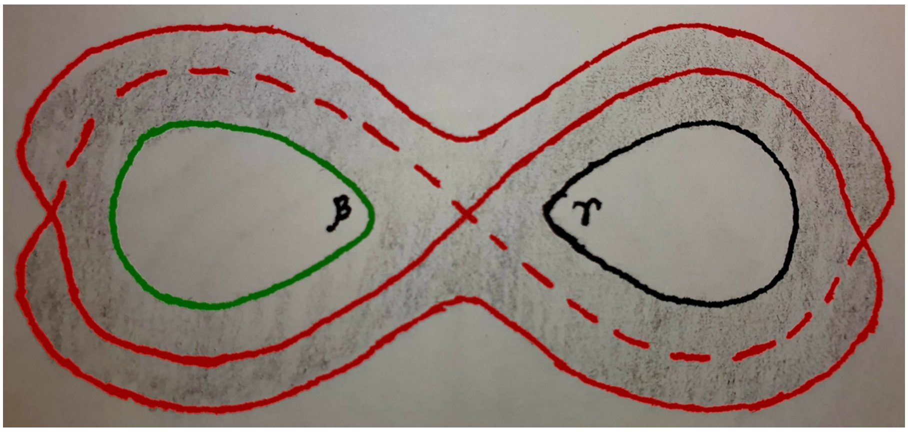
(1) По лемме 2, так как подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ простой, то, если по какому-то ребру проходит граничная кривая $\partial\alpha$, то она проходит хотя бы дважды. Значит, возможны ребра типа $[\alpha\alpha x]$, где $x \in \mathtt{f}(P)$.

Если же граничная кривая $\partial\alpha$ не проходит, то по принципу Дирихле какая-то из граничных кривых $\partial\beta$ или $\partial\gamma$ проходит менее одного раза. Так как подполиэдры $Q_{\{\alpha,\beta\}}$ и $Q_{\{\alpha,\gamma\}}$ просты, то по лемме 2 один раз граничные кривые проходить не могут. Значит, возможны только типы $[\beta\beta\beta]$ и $[\gamma\gamma\gamma]$.

(2) Такие ребра обязательно найдутся потому что иначе подполиэдры $Q_{\{\beta\}}$ и $Q_{\{\gamma\}}$ будут по лемме 2 простыми.

В обратную сторону: пусть для специального полиэдра P с ровно тремя 2-компонентами выполняются свойства (1-2). Тогда путем перебора наборов 2-компонент по лемме 2 получим требуемый $\mathcal{F}(P)$. $\square$

Пример 3. *Рассмотрим следующий специальный полиэдр:*



Не сложно проверить, что в данном примере выполняются свойства (1-2) леммы 12, так что приведенный выше полиэдр принадлежит K_4.

3.4. Класс K_5

Напомним, что класс K_5 состоит из специальных полиэдров P с ровно тремя 2-компонентами, причем $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha\}}, \mathrm{Q}_{\{\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$, где $\alpha, \beta \in \mathtt{f}(P)$, причем $\partial\alpha \cap \partial\beta = \emptyset$.

Лемма 13. *Специальный полиэдр P с ровно тремя 2-компонентами принадлежит K_5 тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *в особом графе SP возможны только следующие типы ребер:*

$$[\alpha\alpha\gamma], [\beta\beta\gamma], [xxx], \textit{ где } x \in \mathtt{f}(P)$$

2. *в особом графе SP обязательно найдутся ребра типа $[\alpha\alpha\gamma], [\beta\beta\gamma]$*

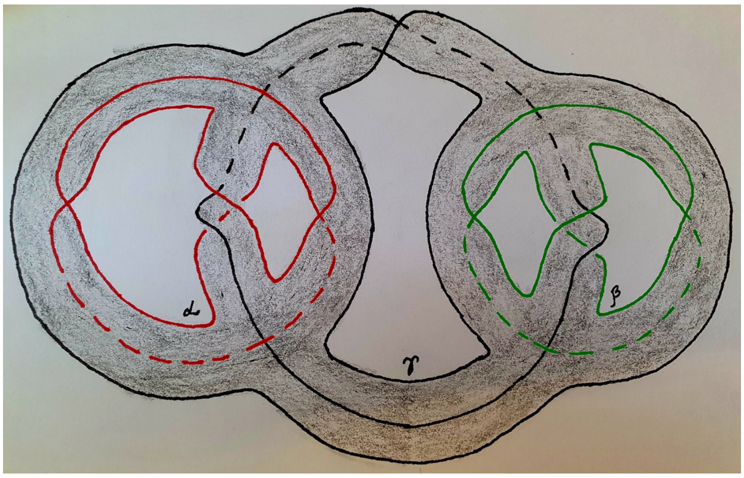
Доказательство. Докажем, что свойства (1-2) выполняются для любого специального полиэдра P с тремя 2-компонентами из K_5:

(1) По лемме 2, так как подполиэдры $Q_{\{\alpha\}}, Q_{\{\beta\}}$ простые, то общих ребер у них быть не может, ведь тогда по принципу Дирихле какая-то из граничных кривых проходит по этому ребру всего один раз, что противоречит лемме 2. Значит, если одна из граничных кривых $\partial\alpha$ или $\partial\beta$ проходит не трижды, то это ребро типа $[\alpha\alpha\gamma]$ или ребро типа $[\beta\beta\gamma]$. Иначе граничная кривая либо проходит трижды, либо не проходит вовсе, что дает типы $[xxx], x \in \mathtt{f}(P)$.

(2) Такие ребра обязательно найдутся, потому что иначе будет противоречие со связностью P.

В обратную сторону: пусть для специального полиэдра P с ровно тремя 2-компонентами выполняются свойства (1-2). Тогда путем перебора наборов 2-компонент по лемме 2 получим требуемый $\mathcal{F}(P)$. □

Пример 4. *Рассмотрим следующий специальный полиэдр:*



Не сложно проверить, что в данном примере выполняются свойства (1-2) леммы 13, а значит приведенный выше полиэдр принадлежит K_5.

Лемма 14. *Если $P \in K_5$, то $|\mathrm{v}(P)| \geq 4$.*

Доказательство. Так как каждое ребро свободно либо от 2-компоненты α, либо от 2-компоненты β (а может и от обеих), то в одной вершине граничные кривые этих 2-компонент встретиться не могут. Таким образом, $\mathrm{v}(Q_{\{\alpha\}}, P) \cap \mathrm{v}(Q_{\{\beta\}}, P) = \emptyset$.

По лемме 7 для подполиэдров $Q_{\{\alpha\}}$ и $Q_{\{\beta\}}$ получаем, что $|\mathrm{v}(Q_{\{\alpha\}}, P)| \geq 2$ и $|\mathrm{v}(Q_{\{\beta\}}, P)| \geq 2$. Значит, так как множества не пересекаются, то $|\mathrm{v}(P)| \geq 4$. □

Замечание. *Пример 4 показывает, что оценка, приведенная в лемме 14, точна.*

3.5. Класс K_6

Напомним, что класс K_6 состоит из специальных полиэдров P с ровно тремя 2-компонентами, причем $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, P\}$, где $\alpha, \beta \in \mathtt{f}(P)$.

Лемма 15. *Специальный полиэдр P с ровно тремя 2-компонентами принадлежит K_6 тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *в особом графе SP обязательно найдутся либо ребра типов $[\alpha\beta\gamma]$, $[\alpha\alpha\gamma]$ и $[\beta\beta\gamma]$, либо ребра типов $[\alpha\alpha\beta]$ и $[\alpha\beta\beta]$*
2. *граничная кривая $\partial\gamma$ проходит по каждому ребру особого графа SP всего $0, 1$ или 3 раза*

Доказательство. Докажем, что свойства (1-2) выполняются для любого специального полиэдра P с тремя 2-компонентами из K_6:

(1) По лемме 2, так как подполиэдр $Q_{\{\alpha\}}$ не является простым, то значит существует ребро, по которому граничная кривая $\partial\alpha$ проходит один раз. Но при этом подполиэдр $Q_{\{\alpha,\beta\}}$ прост, а значит по такому ребру проходит еще и граничная кривая $\partial\beta$. Аналогичное условие для подполиэдра $Q_{\{\beta\}}$ дает две возможности:

  a. либо найдется ребро типа $[\alpha\beta\gamma]$
  b. либо найдутся ребра типов $[\alpha\alpha\beta]$ и $[\alpha\beta\beta]$

  По лемме 2, так как подполиэдры $Q_{\{\alpha,\gamma\}}$ и $Q_{\{\beta,\gamma\}}$ не являются простыми, то значит найдутся ребра, по которым дважды проходят граничные кривые $\partial\beta$ и $\partial\alpha$ соответственно. Значит:

  i. либо найдется ребро типа $[\beta\beta\gamma]$, либо ребро типа $[\alpha\beta\beta]$
  ii. либо найдется ребро типа $[\alpha\alpha\beta]$, либо ребро типа $[\alpha\alpha\gamma]$

  Условия (i), (ii) и альтернатива (a) или (b) и дают два варианта из (1).

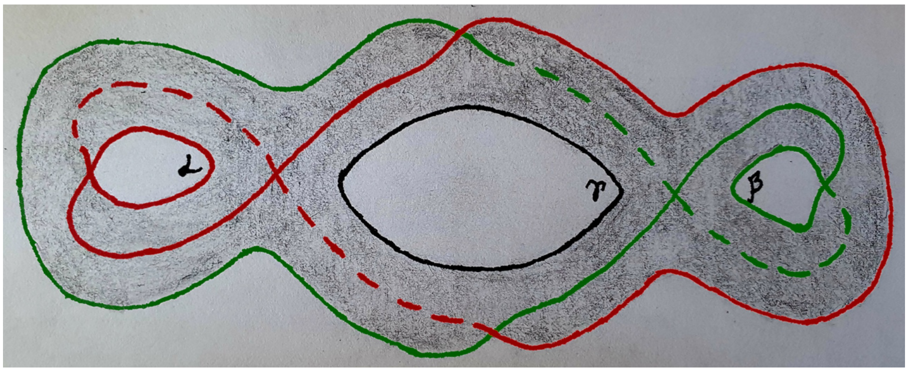
(2) Очевидно, так как иначе граничные кривые $\partial\alpha$ или $\partial\beta$ проходят по ребру один раз, что противоречит лемме 2.

В обратную сторону: пусть для специального полиэдра P с ровно тремя 2-компонентами выполняются свойства (1-2). Тогда свойства (1-3) по лемме 2 влекут непростоту подполиэдров

$$Q_{\{\alpha\}}, Q_{\{\beta\}}, Q_{\{\alpha,\gamma\}}, Q_{\{\beta,\gamma\}}$$

тогда как свойство (4) по этой же лемме говорит о простоте подполиэдра $Q_{\{\alpha,\beta\}}$. $\square$

Пример 5. *Рассмотрим следующий специальный полиэдр:*



Не сложно проверить, что в данном примере выполняются свойства (1-2) леммы 15, а значит приведенный выше полиэдр принадлежит K_6.

Лемма 16. *Если $P \in K_6$, то $|\mathtt{v}(P)| \geq 2$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что полиэдр P имеет одну истинную вершину, тогда у нас может быть только два различных ребра в особом графе SP. По лемме 15 это ребра типов $[\alpha\alpha\beta]$ и $[\alpha\beta\beta]$, но тогда получается, что 2-компонента γ в полиэдре отсутствует. Противоречие. Значит, $|\mathtt{v}(P)| \geq 2$. $\square$

Замечание. *Пример 5 показывает, что оценка, приведенная в лемме 16, точна.*

3.6. Класс K_7

Напомним, что класс K_7 состоит из специальных полиэдров P с ровно тремя 2-компонентами, причем $\mathcal{F}(P) = \{\emptyset, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}, P\}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathtt{f}(P)$.

Лемма 17. *Специальный полиэдр P с ровно тремя 2-компонентами принадлежит K_7 тогда и только тогда, когда выполняются следующие свойства:*

1. *для каждой из 2-компонент полиэдра P существует ребро в особом графе SP по которому граничная кривая этой 2-компоненты проходит ровно один раз*

2. *в особом графе SP существует ребро по которому граничная кривая $\partial\alpha$ проходит ровно два раза*

3. *если в особом графе SP по ребру проходят граничные кривые $\partial\beta$ и $\partial\gamma$, то это ребро типа $[\alpha\beta\gamma]$*

Доказательство. Докажем, что свойства (1-3) выполняются для любого специального полиэдра P с тремя 2-компонентами из K_7:

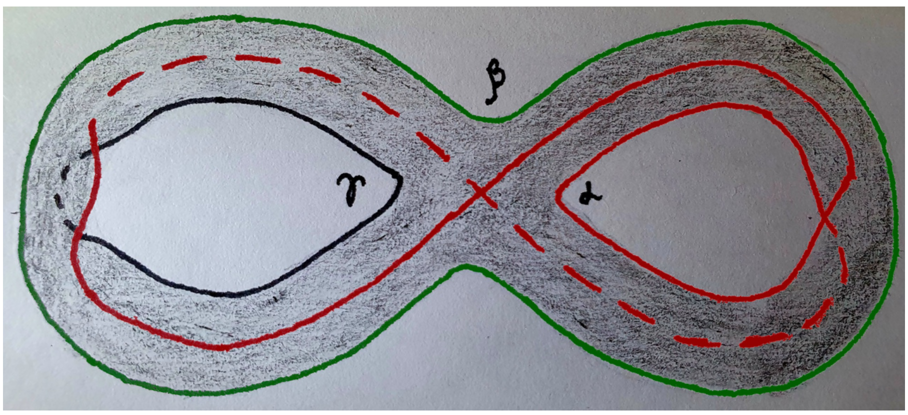
(1) Следует из леммы 2, иначе какой-то из подполиэдров $Q_{\{\alpha\}}, Q_{\{\beta\}}, Q_{\{\gamma\}}$ будет простым.

(2) Следует из предположения связности и свойства (1).

(3) Существование в особом графе SP ребер типа $[\beta\gamma\gamma]$, $[\beta\beta\gamma]$ противоречит простоте подполиэдров $\mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}$.

В обратную сторону: пусть для специального полиэдра P с ровно тремя 2-компонентами выполняются свойства (1-3). Тогда из свойства (1) подполиэдры $Q_{\{\alpha\}}, Q_{\beta}$ и $Q_{\{\gamma\}}$ не могут быть простыми по лемме 2. Подполиэдр $Q_{\{\beta,\gamma\}}$ не прост по свойству (2), а подполиэдры $\mathrm{Q}_{\{\alpha,\beta\}}, \mathrm{Q}_{\{\alpha,\gamma\}}$ по свойству (3) являются простыми. □

Пример 6. *Рассмотрим следующий специальный полиэдр:*

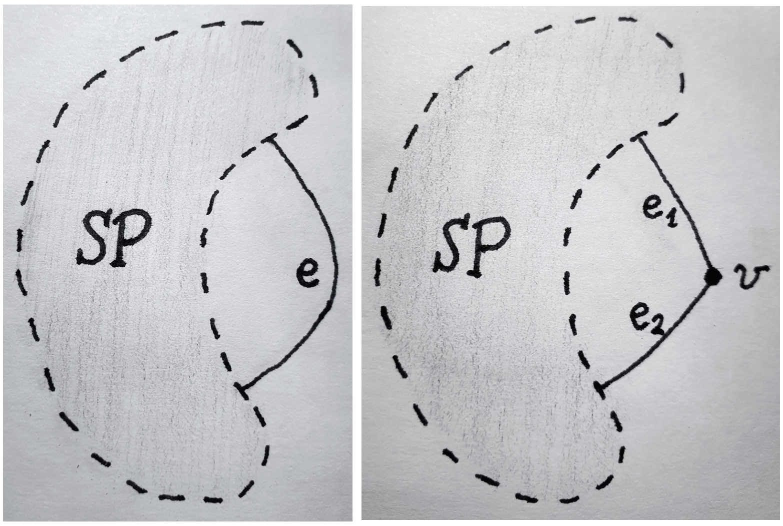


Не сложно проверить, что в данном примере выполняются свойства (1-3) леммы 17, а значит приведенный выше полиэдр принадлежит K_7.

4. Построение бесконечных серий специальных полиэдров с тремя 2-компонентами

Далее для каждого натурального числа $2 \leq i \leq 7$ мы построим бесконечную серию специальных полиэдров, лежащих в классе K_i. Пусть P — специальный полиэдр с тремя 2-компонентами, лежащий в классе K_i. Положим по ребру $e \in \mathsf{e}(P)$ дважды проходит некоторая граничная кривая 2-компоненты полиэдра P. Для произвольного целого неотрицательного числа k построим по паре (P, e) новый специальный полиэдр P' с тремя 2-компонентами, лежащий в классе K_i.

Разобьем ребро e в особом графе SP на два ребра e_1 и e_2 с помощью новой вершины v (как показано на рисунке 2). Тогда в получившемся графе все вершины, кроме вершины v, имеют валентность 4. Вершина v же имеет валентность 2. Назовем получившийся граф A.



(SP) (A)

Рис. 2: Графы SP и A.

Зададим особый граф SP' как букет относительно 2-валентных вершин графа A и незамкнутой цепочки с $k+1$ вершиной, k двойными ребрами и одной петлей как на рисунке 3. При $k = 0$ будем считать, что цепочка состоит из одной вершины и единственной петли ей инцедентной.

Опишем как по особому графу SP' проходят 2-компоненты. Для этого в особом графе SP' заменим подграфы A и незамкнутую цепочку на блоки

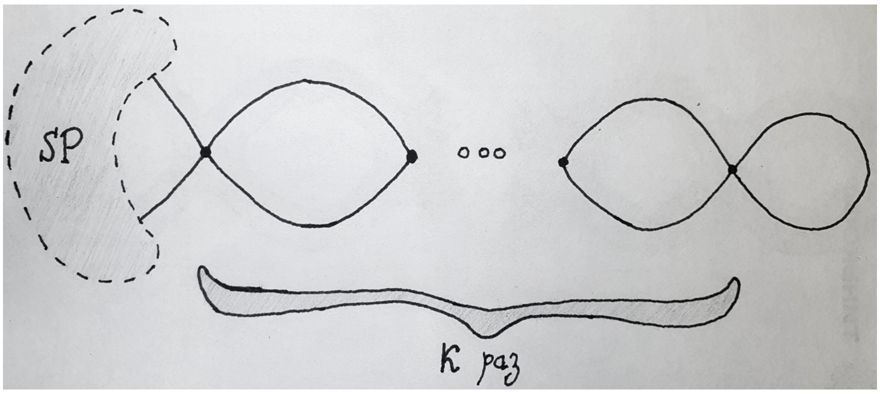


Рис. 3: Особый граф SP'.

диаграммы специального полиэдра как показано на рисунке 4. При этом диаграмма в части, оставшейся от полиэдра P без ребра e, не изменилась. Типы же всех новых ребер совпадают с типом ребра e в полиэдре P (с точностью до замены обозначений 2-компонент полиэдра P' на обозначения их родителей в полиэдре P). Таким образом, мы получили корректно определенный специальный полиэдр P'. Более того, так как новых типов ребер в особом графе SP' в сравнении с особым графом SP не прибавилось и все ребра, кроме e сохранили свои типы, то по лемме 2 класс полиэдра действительно не изменился. Описанное преобразование обозначим за M_k.

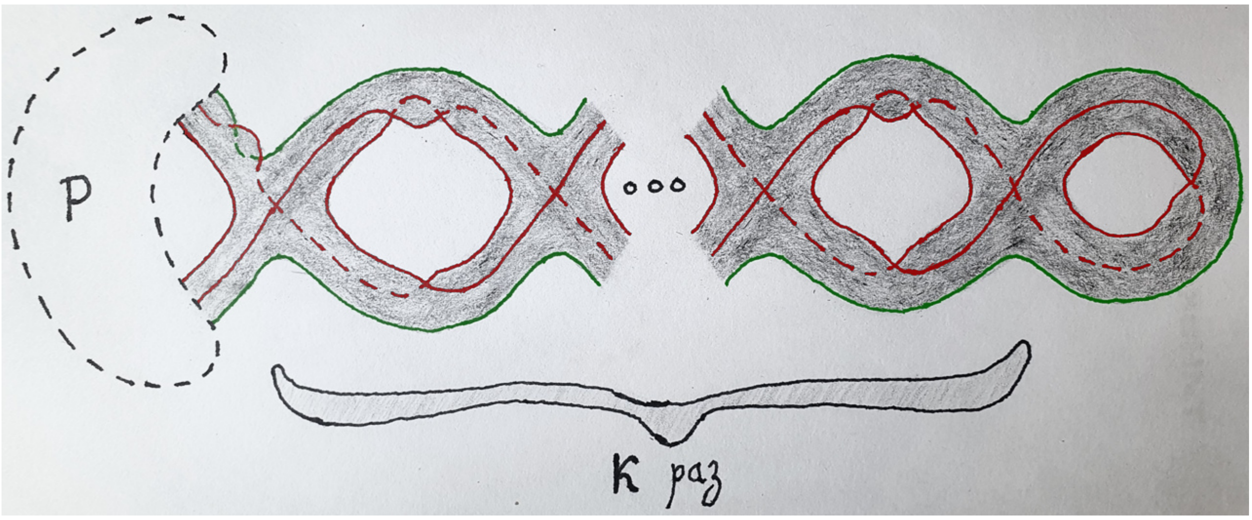


Рис. 4: Структура полиэдра $M_k(P, e)$.

Преобразование M_k невозможно применить только к специальным полиэдрам с тремя 2-компонентами из класса K_8, так как у них по каждому ребру проходят граничные кривые трех различных 2-компонент. К полиэдрам же классов $K_1 - K_7$ преобразование M_k всегда можно применить. В частности, в каждом из примеров 1-6 мы можем применить наше преобразование. Так как примеры имели минимально возможное число истинных вершин в своем классе, варьируя параметр k мы сможем получить специальный полиэдр с любым возможным числом истинных вершин в классе K_i.

Заключение

В этой работе мы разбили множество специальных спайнов с тремя 2-компонентами на классы, задаваемые числом простых подполиэдров и содержащимися в них 2-компонентами. Для каждого класса мы описали необходимые и достаточные условия принадлежности специального спайна данному классу и привели принадлежащую ему бесконечную серию специальных спайнов. Есть надежда, что эти серии помогут для проверки и выдвижения гипотез при поиске новых способов вычисления сложности по Матвееву.

Список литературы

[1] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds*, Pacific J. Math., 210:2 (2003), 283–297.

[2] А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев, Е. А. Фоминых, *Сложность виртуальных трехмерных многообразий*, Математический сборник, 207:11 (2016), 4–24.

[3] Е.А. Фоминых, Е.В.Шумакова, *Бедные идеальные триангуляции с тремя ребрами минимальны*, Сибирский матемематический журнал, 62:5 (2021), 1163–1172.

[4] А. В. Малютин, Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова, 3-*многообразия, задаваемые* 4-*регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами*, Успехи Мат.Наук, 76:6 (2021), 197–198.

[5] С. В. Матвеев, М. А. Овчинников, М. В. Соколов, *Построение и свойства* t-*инварианта*, Записки научных семинаров ПОМИ, том 267, 2000, 207-219.

[6] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Algorithms and Computation in Mathematics, 9. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xii+478 pp.