САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Широких Михаил Александрович

Выпускная квалификационная работа

Усиленная версия теоремы о точке пересечения нормалей для многогранников

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 "Математика"
Основная образовательная программа СВ.5000.2018 "Математика"

Научный руководитель:
Профессор, факультет
математики и компьютерных
наук,
СПбГУ
Панина Гаянэ Юрьевна

Рецензент:
доцент, факультет математики,
научный сотрудник, Лаборатория
алгебраической геометрии
и ее приложений,
НИУ ВШЭ
Смирнов Евгений Юрьевич

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Аннотация

Давно известное предположение гласит, что на границу выпуклого тела с гладкой границей в размерности n можно опустить по крайней мере $2n$ нормалей. В этой работе представлено доказательство существования точки пересечения 6 нормалей в произвольном многоугольнике и 10 нормалей — в многограннике размерности 3.

Введение

Предположение о существовании внутренней точки пересечения $2n$ нормалей к границе выпуклого множества в R^n существует очень давно, и, по-видимому, не имеет авторства (задача А3 в [1]). На данный момент оно доказано в размерностях 2 ([2], 1970), 3 (геометрическое доказательство [4, 5, 6],1982 и топологическое [3], 2012) и 4([3], 2012). Цель работы — понять, насколько можно усилить данное утверждение, если выпуклое тело — многогранник.

Определения

Определение. *Нормалью* к границе выпуклого тела в (граничной) точке V называется нормаль к любой опорной гиперплоскости, проходящей через V, отложенная из V.

Определение. *(Нормальным) индексом $ind_M(P)$ точки P* называется число нормалей, кототорое можно опустить из нее на границу многогранника M.

Заметим, что для трехмерных многогранников нормали к вершинам из точки P в общем положении соотвествуют локальным максимумам функции расстояния от точки P, нормали к граням - минимумам, а нормали к ребрам — седловым точкам.

Введем также определения, релевантные только для многогранников.

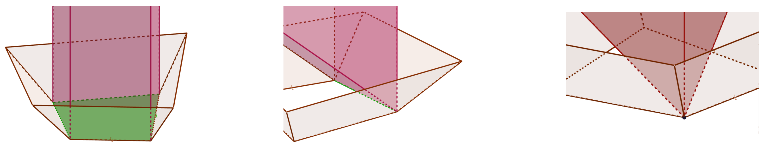
Определение. Нормальным конусом N_P граничной точки P называется геометрическое место строго внутренних точек многогранника M, из которых можно опустить нормаль на P.

Определение. *Нормальным конусом* k-мерной грани G называется геометрическое место точек **строго** внутри многогранника, из которых можно опустить нормаль на G. Будем обозначать его за N_G.

Так, немного позднее будет показано, что в трехмерном случае нормальный конус к (двумерной) грани - $M \cap \{x + \alpha\nu_G | x \in G, \alpha > 0\}$, где ν_G - внутряння нормаль к гиперплоскости, содержащей грань G (рис. 1, а), а нормальный конус к вершине – выпуклая оболочка нормалей к граням, отложенная от данной вершины (рис.1, в).

Определение. *Простой многогранник* — многогранник, в каждой вершине которого пересекаются ровно три грани.

Основное утверждение, которые будет доказано, таково:



а) б) в)

Рис. 1: Нормальные конусы к грани(а), ребру(б) и вершине(в) многогранника в $\mathbb{R}^3$.

Теорема. *В произвольном многограннике размерности 3 есть точка пересечения по меньшей мере* 10 *нормалей.*

Отметим, что аналогичное утверждение совершеннно неверно в гладком случае, где гарантируется только 6 нормалей, пересекающихся в одной точке, причем для, например, эллипсоида, эта оценка — строгая.

Двумерный случай

. Для начала рассмотрим, что происходит в плоскости.

Утверждение. *В любом многоугольнике M есть точка пересечения по меньшей мере 6 нормалей.*

Замечание. *Гарантировать существование точки индекса больше* 6 *не получится, поскольку в треугольнике всего 3 вершины и 3 ребра, значит через каждую точку проходит не более 6 нормалей.*

Идея доказательства проста. В любой многоугольник можно вписать окружность, касающуюся его границы хотя бы в трех точках. В качестве такой окружности подойдет, например, окружность мксимального радиуса, не пересекающая границу трансверсально. Обозначим за O центр этой окружности. Тогда $dist(O, \cdot)|_{\partial M}$ - непрерывная функция на окружности, между ее локальными минимумами (нормалями к ребрам) находится по локальному максимуму (нормали к вершинам). Таким образом, $ind_M(O) \geq 6$.

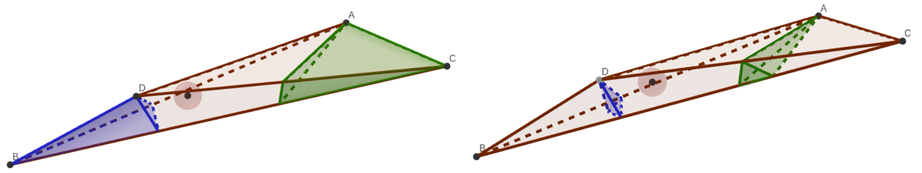
Отметим, что первое утверждение предыдущего абзаца безнадежно неверно в гладком случае. В эллипс, например, нельзя вписать окружность так, чтобы она касалась его границы в трех точках.

Переходим к трехмерному случаю

В тетраэдре нормальный индекс точки заведомо не превосходит 14 (так как всего есть 4 вершины, 4 грани и 6 ребер). Однако уже не верен тот факт, что в произвольном тетраэдре есть точка пересечения 14 нормалей.

Расмотрим тетраэдр, представленный на рис.2. На левом рисунке зеленым и синим обозначены нормальные конусы ребер AC и BD, а на правом — нормальные конусы вершин A и D.

Как видно, нормальные конусы вершин A и D не пересекаются, ровно как и конусы ребер AC и BD. Получается, индекс точки внутри этого



а) б)

Рис. 2: а) Нормальные конусы ребер AC и BD б) Нормальные конусы вершин A и B

тетраэдра не превосходит 12 (можно провести нормаль только к одной вершине из {A, D}), и только одному ребру из {AC, BD}. Более того, ни один из этих конусов не содержит центр вписанной сферы, то есть индекс центра вписанной сферы - всего 10, в то время как в точках из N_A пересекаются по 12 нормалей.

Предварительные построения в трехмерии

Чтобы двинуться дальше, нужно сперва доказать (скорее обозначить) несколько простых утверждений, которыми мы будем пользоваться. Здесь и далее, буквой M будем обозначать многогранник, про который идет речь.

Утверждение. *Для граничной точки* V, $N_V = M \cap \{V + \sum \alpha_i \nu_i | \alpha_i \geq 0\}$, *где* ν_i *- внутренняя нормаль к грани* G_i, *а* $\{G_i\}_{i=1}^n$ *– это все грани, пересекающиеся в* V.

Доказательство. Индукция. **БАЗА:**

$n = 1$. Получили определение нормали.

$n = 2$. Рассмотрим сечение плоскостью Q, проходящую через V и ортогональную $G_1 \cap G_2$.. Опорные плоскости обязаны содержать $G_1 \cap G_2$, значит нормальный конус V содержится в Q. В плоскости утверждение равносильно определению нормали.

$n = 3$. $\boxed{\subset}$ Три грани, образующие угол, лежат на плоскостях общего положения, значит их нормали образуют базис R^3. Разложим нормаль к опорной гиперплоскости O по этому базису. Пусть какая-то из координат ν_O отрицательная, т.е. угол между нормалями к O и G - тупой. Тогда, двугранный угол между соответсвующими плоскостями — острый, то есть ν_O лежит вне M. Тогда $\nu_O \notin N_V$

$\boxed{\supset}$ N_V - выпуклое и содержит $M \cap N_{V_{G_i G_j}}$ (конус вершины V, если мы забудем про оставшуюся грань).

$$M \cap conv(N_{V_{G_1 G_2}} \cup N_{V_{G_1 G_3}} \cup N_{V_{G_2 G_3}}) =$$
$$M \cap conv(\bigcup_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} \{V + \alpha \nu_i + \beta \nu_j | \alpha, \beta > 0\})$$
$$= M \cap \{V + \sum \alpha_i \nu_i | \alpha_i \geq 0\}$$

ПЕРЕХОД: Пусть утвержденеие верно для $n = k - 1$. Поскольку ≥ 4, можно выбрать две непересекающиеся грани G_1 и G_2. Рассмотрим углы, образованные множествами граней $\{G_i\}_{i \neq 1}$ и $\{G_i\}_{i \neq 2}$. Обозначим за N_V^1 и N_V^2 нормальные конусы вершины V для этих наборов пересекающихся в V граней соотвественно. Раз G_1 и G_2 не соседние, множество опорных гиперплоскостей, проходящих через V в старом угле – это в точности объединение множеств опорных гиперплоскостей для новых, то же верно и для соответствующих нормальных конусов. осталось воспользоваться для них предположением индукции.

$$
\begin{gathered}
N_V^1 \cup N_V^2 = \\
M \cap (\{V + \sum \alpha_i \nu_i | \alpha_i \geq 0, i \neq 1\} \cup \{V + \sum \alpha_i \nu_i | \alpha_i \geq 0, i \neq 2\}) = \\
M \cap \{V + \sum \alpha_i \nu_i | \alpha_i \geq 0\}
\end{gathered}
$$

□

Замечание. *При $n = 3$ внутренность этого множества совпадает в окрестности V еще и с ГМТ точек, из которых можно опустить нормали на все три грани. Действительно,*

$$
\begin{gathered}
\textit{[ГМТ точек, из которых можно опустить нормали на все три грани]} = \\
N_{G_1 G_2} \cap N_{G_2 G_3} = \\
\{V + \alpha \nu_{G_1} + \beta \nu_{G_2} | \alpha, \beta > 0, V \in G_1 \cap G_2\} \cap \\
\{V + \alpha \nu_{G_2} + \beta \nu_{G_3} | \alpha, \beta > 0, V \in G_2 \cap G_3\} \cap M = \\
\{V + \alpha \nu_{G_2} + \beta \nu_{G_3} + \gamma \nu_{G_1} | \gamma, \alpha, \beta > 0, V \in G_1 \cap G_2 \cap G_3\} \cap M
\end{gathered}
$$

Следствие. *В произвольном угле V ГМТ точек, из готорых можно опустить хотя бы три нормали к граням, пересекающимся в V, непусто и содержится в N_V*

Доказательство. Непустота следует их того, что в угол можно вписать сферу.

Далее, рассмотрим какую-то точку P с ≥ 3 нормалями к граням. Три грани, к которым есть нормали из P, образуют угол в вершине V. Согласно замечанию, P содержится в нормальном конусе этого угла. Согласно утверждению, нормальный конус нового угла содержится в нормальном конусе старого. □

Утверждение. *Множество точек с хотя-бы k нормалями к граням открыто.*

Доказательство. ГМТ точек, в которых пересекаются хотя-бы k нормалей к граням $= \bigcup N_{G_{i_1}} \cap N_{G_{i_1}} \cap \ldots \cap N_{G_{i_k}}$, где $i_1 ... i_k$ пробегают все наборы из k граней M. Отметим, что при $k \leq 4$ это множество еще и непусто, т.к. в многогранник можно вписать сферу. □

Вариация на тему теоремы Пуанкаре. Восемь нормалей

В двумерном случае мы находили точку пересечения трех нормалей к граням из геометрических соображений, а нормали к вершинам получались автоматически из свойств непрерывных функций на окружности. Давайте воспользуемся аналогичным методом, а именно докажем следующее

Утверждение. *Для произвольного многогранника M и почти всех точек P:*

$$\#\text{ (нормалей из } P \text{ к граням } M) + \#\text{ (нормалей из } P \text{ к вершинам } M) - \#\text{ (нормалей из } P \text{ к ребрам } M) = 2$$

Утверждение. *Для фиксировнных точек $P \in intM$ и $X \in \sigma M$*

$$X + PX^{\perp} \text{ — опорная гиперплоскость } M \iff$$
$$X + \frac{\varepsilon}{|PX|}PX + PX^{\perp} \text{ — опорная гиперплоскость } M + B_{\varepsilon}$$

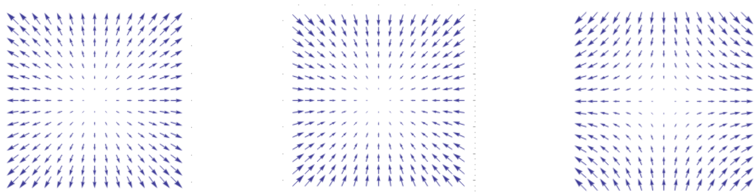
Доказательство. $O := X + PX^{\perp}$ — опорная гиперплоскость $M \iff M$ содержится в замкнутом полупространстве, ограниченном O, и пересекается с ним по границе $\iff$M+B$_{\varepsilon}$ содержится в сдвиге этого полупространства на ε в направлении своей внешней нормали, то есть PX, а $X + \frac{\varepsilon}{|PX|}PX \in M + B_{\varepsilon}$.

□

Таким образом, мы получили, что $ind_M P = ind_{M+B_{\varepsilon}} P$ с теми же направлениями нормалей. Теперь для фиксированной точки P построим векторное поле

$$V_P(x) := [\bigtriangledown dist(P, \cdot)|_{\sigma(M+B_{\varepsilon})}](x)$$

Это непрерывное векторное поле на S^2. Согласно теореме Пуанкарэ, сумма индексов его изолировнных особых точек равна $\chi(S^2) = 2$. У полного по мере множества точек P особые точки - это только локальные минимумы, максимумы и седла, индекс соответствующих точек градиента — 1, 1 и -1 соотвественно. Таким образом, утверждение доказано.



а) б) в)

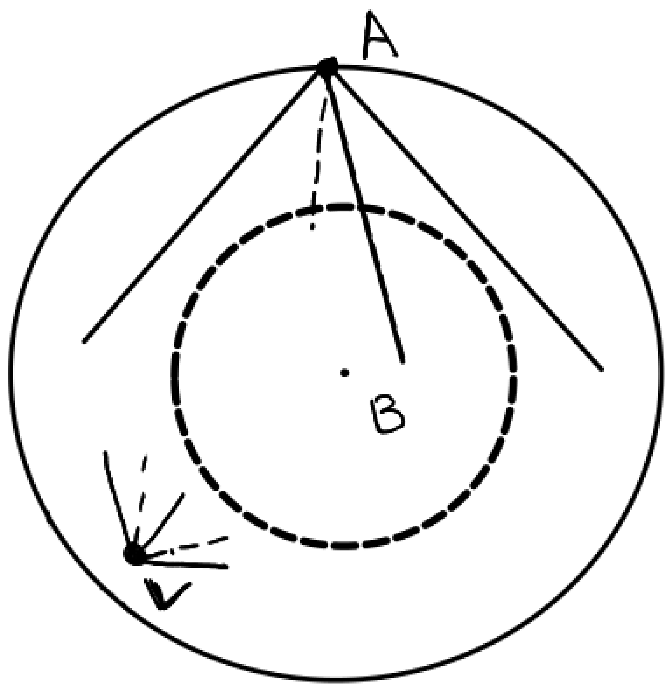
Рис. 3: $V(x)$ в окрестности а) локального минимума б) локального максимума в) седловой точки. Картинка с WolframAlpha, пользовательские соглашения которого обязуют указывать источник.

Теперь покажем, что в любом многограннке есть точка индекса хотя-бы 8. Пусть P - центр любой из вписанных сфер, касающихся P хотя-бы в 4 точках. Тогда $dist(P, \cdot)$ имеет хотя-бы 4 локальных минимума и хотя-бы один максимум(глобальный). То же самое можно сказать о точках в окрестности P в силу открытости можества точек пересечения хотя бы 4 нормалей к граням, а из только что доказанного утверждения следует, что в этой окрестности есть точка с тремя нормалями к ребрам, что в сумме дает как минимум 8 нормалей.

Десять нормалей

Давайте для каждой вершины V определим *диагональ* как прямую, содержащую центры сфер, которые касаются хотя-бы трех граней, пересекающихся в V. В трехвалентном угле такая прямая единственна, в общем случае — нет, однако в силу доказанного ранее, $M\cap$[эта прямая] в любом случае содержится в N_A.

Далее, углом V назовем отношение радиуса вписанной сферы с центром на диагонали V к расстоянию до V. Если диагоналей несколько, назовем углом наибольшее из этих отношений. Такое определение корректно, потому что сферы на одной диагонали можно перевести друг в друга гомотетией с центром в V. Наконец, рассмотрим вершину с наибольшим углом, назовем ее A. Давайте двигать точку B из черезточки A внутрь по направлению диагонали A (реализующей угол), одновременно следя за соответствующей сферой. Рано или поздно сфера коснется границы M в еще одной точке. Обозначим ее центр за B. В точке B пересекаются по меньшей мере 4 нормали к граням. Если мы покажем, что через нее (и через точки в ее окрестности) проходит по крайней мере по две нормали к вершинам, то сможем воспользовться предыдущей теоремой и получить точку индекса 10.



Предположим, что это не так. Тогда A — глобальный максимум для $dist(B,\cdot)|_{\partial M}$. Значит, M лежит строго внутри сферы с центром в B радиуса

AB. Итак, у нас есть большая сфера, внутри которой лежит M, и малая сфера, вписанная в M с тем же центром. Давайте возьмем произвольную вершину V. Ее растояние до B строго меньше $|AB|$, но при этом в угол при V можно вписать сферу радиуса не меньше, чем в угол при A (так как малая сфера с центром в B содержится целиком в M, который в свою очередь содержится в угле при V).

Противоречие с максимальностью угла A .

Заметим, что все вышесказанное можно повторить, пока существуют V, т.ч $dist(V, B) < dist(A, B)$. То есть, либо мы сразу нашли точку очень большого индекса (если все расстояния от вершин до B равны), либо есть вершина V с расстоянием до B строго большим $|AB|$. Но тогда точки из N_A в малой окрестности V тоже имеют по меньшей мере два локальных максимума — V и A, что позваоляет применить теорему из предыдущей секции и завершает доказательство.

Гипотезы

Мы доказали, что в произвольном многограннике есть точка индекса 10. Однако у меня нет примера многраннника, индекс каждой точки которого не превосходит 10, что намекает на нестрогость полученной оценки. При этом индекс любой точки общего положения чётный, поэтому:

Гипотеза. *В произволном многограннике размерности 3 есть точка пересечения по меньшей мере 12 нормалей*

Список литературы

[1] Croft, H.T., Falconer, K.J., Guy, R.K.: Unsolved problems in geometry. Problem Books in Mathematics. Springer, New York (1991) (Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, II)

[2] N. Deo, M. S. Klamkin: Existence of four concurrent normals to a smooth closed curve"

[3] Pardon, J.: Concurrent normals to convex bodies and spaces of Morse functions. Mathematische Annalen(2012), 352, 55–71

[4] Heil, E.: Existenz eines 6-Normalenpunktes in einem konvexen Körper. Arch. Math. (Basel) 32(4), 412–416 (1979). doi:10.1007/BF01238519

[5] Heil, E.: Korrektur zu: “Existenz eines 6-Normalenpunktes in einem konvexen Körper”. Arch. Math. (Basel) 33(5):496 (1979/1980). doi:10.1007/BF01222791.

[6] Heil, E.: Concurrent normals and critical points under weak smoothness assumptions. In: Discrete Geometry and Convexity (New York, 1982). Ann. New York Acad. Sci., vol. 440, pp. 170–178. The Annals of the New York Academy of Sciences, New York (1985