Санкт-Петербургский государственный университет

ТОЛОКНО Изабелла Константиновна

Выпускная квалификационная работа

Покрытие пространства конусами, двойственными камерам Вейля

Уровень образования: бакалавриат
01.03.01 «Математика»
СВ.5000.2018 «Математика»

Научный руководитель:
профессор, Факультет математики
и компьютерных наук,
д-р физ.-мат. наук,
Петров Федор Владимирович

Рецензент:
профессор, Департамент прикладной
математики
НИУ Высшая школа экономики,
д-р физ.-мат. наук,
Попов Владимир Леонидович

Санкт-Петербург
2022

Содержание

1 Введение

Мы хотим покрыть конусами (открытыми или замкнутыми), двойственными к камерам Вейля некоторой системы корней, все пространство, порожденное корнями, — и минимизировать их количество. Эта задача для открытых конусов была поставлена В. Л. Поповым [2], он же доказал, что ответ в ней конечен. В разделе 9 приведены приложения этого понятия, полученные в [2].

Некоторые экспоненциальные оценки были получены в работе В. С. Жгуна и Д. В. Миронова [3]. Ф. В. Петров нашёл ответ в случае системы корней A_n [4]. (Ниже мы повторяем его рассуждение в этом случае, поскольку оно вписывается в общую канву.) Целью настоящей работы является изучение вопроса для всех серий и для исключительных систем корней. В большинстве случаев находится точный ответ.

Пусть R — система корней, порождающая векторное пространство L, снабжённое скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Для вектора $l \in L$ обозначим $l^+ := \{x \in L\colon \langle l, x\rangle \geqslant 0\}$, $l^- := \{x \in L\colon \langle l, x\rangle \leqslant 0\}$.

Для выпуклого конуса $C \subset L$ обозначим замкнутый и открытый двойственные конуса

$$C^\circ = \{l \in L\colon \langle l, x\rangle \leqslant 0\} \text{ для любого } c \in \overline{C}$$
$$C^\dagger = \{l \in L\colon \langle l, x\rangle < 0\} \text{ для любого } c \in \overline{C} \setminus \{0\}.$$

Назовем *замкнутым разделяющим индексом* $\overline{sep}(R)$ для системы корней R минимальное количество камер Вейля $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (здесь и далее камеры Вейля понимаются как замкнутые конуса) системы корней R таких, что для любого вектора $l \in L$ полупространство l^+ содержит хотя бы одну из этих камер — то есть существует натуральное $i \in [1, n]$ такое, что

$$C_i \subset l^+.$$

Заметим, что условие $C \subset l^+$ равносильно тому, что $-l \in C^\circ$.

Поэтому данное выше определение эквивалентно следующему:

Пусть R — система корней, порождающая L. Назовем разделяющим индексом $\overline{sep}(R)$ для системы корней R минимальное количество камер Вейля $C_1, C_2, \ldots, C_n$ для R таких, что замкнутые двойственные конусы C_i° покрывают L.

Аналогично определяются “открытые” разделяющие индексы, далее слово “открытый” для них опускается:

Назовем *разделяющим индексом* $sep(R)$ для системы корней R минимальное количество камер Вейля $C_1, C_2, \ldots,\ C_n$ для R таких, что для любого ненулевого вектора $l \in L$ существует натуральное $i \in [1, n]$, при котором

$$C_i \cap l^- = \{0\}.$$

Это условие равносильно тому что $-l \in$ лежит в конусе $C^\dagger$. Поэтому определение равносильно следующему:

Пусть R — система корней, порождающая L. Назовем разделяющим индексом $sep(R)$ для системы корней R минимальное количество камер Вейля $C_1, C_2, \ldots, C_n$ для R таких, что двойственные открытые конусы $C_i^\dagger$ покрывают $L \setminus \{0\}$.

Результаты по оценкам чисел разделяющих индексов классических систем корней резюмированы в следующей таблице:

	A_n	B_n	D_n	G_2	E_8	F_4
$\overline{sep}(G)$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	3	9	5
$sep(G)$	$n(n+1)$	$2n$	от $2n$ до $2(n+14)$	от 3 до 6	от 9 до 44	от 5 до 8

Далее нам понадобятся несколько комбинаторных лемм.

Лемма 1. Для того, чтобы покрыть $\mathbb{R}^n$ замкнутыми выпуклыми конусами, которые не содержат прямых, необходимо хотя бы $n+1$ конусов.

Доказательство проведем по индукции по n. База при $n=1$ очевидна.

Переход: Пусть можно покрыть n конусами. Рассмотрим первый из этих конусов. Найдем гиперплоскость, с которой он пересекается только по 0, и пересечем все остальные конусы с ней. Новые $n-1$ замкнутых выпуклых конусов (они по-прежнему не содержат прямых) покрывают гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, что противоречит предположению индукции.

Лемма 2. (Лемма Рени [1]) Если x_1, x_2, ..., x_n — любая последовательность чисел, сумма которых равна 0, то у одного из её циклических сдвигов (x_k, x_{k+1},...,x_n,x_1,x_2,...,x_{k-1}) все n частичных сумм начальных отрезков неположительны.

Доказательство. Рассмотрим такое t от 0 до n, при котором сумма $x_1+x_2+\ldots+x_t$ максимальна (если таких t несколько, то возьмем минимальное). Если $x_1+x_2+\ldots+x_t \leqslant 0$, то $x_1+x_2+\ldots+x_i \leqslant 0$ при всех i, и нам подойдет изначальное расположение чисел. Если $x_1+x_2+\ldots+x_t > 0$, то докажем, что

$$
\begin{aligned}
&x_{t+1} \leqslant 0\\
&x_{t+1}+x_{t+2} \leqslant 0\\
&\ldots\\
&x_{t+1}+x_{t+2}+\ldots+x_n \leqslant 0\\
&x_{t+1}+x_{t+2}+\ldots+x_n+x_1 \leqslant 0\\
&\ldots\\
&x_{t+1}+x_{t+2}+\ldots+x_n+x_1+\ldots+x_{t-1} \leqslant 0\\
&x_{t+1}+x_{t+2}+\ldots+x_n+x_1+\ldots+x_t = 0
\end{aligned}
$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i \leqslant n-t$, то $x_{t+1}+x_{t+2}+\ldots+x_{t+i} > 0$ и тогда $(x_1+x_2+\ldots x_{t+i}) > (x_1+x_2+\ldots x_t)$. Это противоречит выбору t.

Если неверно i-ое неравенство, где $i > n-t$, то $x_{t+1}+x_{t+2}+\ldots+x_n+x_1+\ldots+x_{t+i-n} > 0$ и тогда $0 < x_{t+1}+x_{t+2}+\ldots+x_n+x_1+\ldots+x_{t+i-n} < x_1+x_2+\ldots+x_n = 0$. Противоречие.

Лемма 3. Для любой последовательности чисел x_1, x_2, ..., x_n найдется такое t от 0 до n, что

$$
\begin{aligned}
&-x_t \leqslant 0\\
&-x_t - x_{t-1} \leqslant 0\\
&\ldots\\
&-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 \leqslant 0\\
&-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 + x_{t+1} \leqslant 0\\
&\ldots\\
&-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 + x_{t+1} + \ldots + x_n \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Доказательство Возьмем такое t от 0 до n, при котором сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_t$ максимальна (если таких t несколько, то возьмем минимальное). Поскольку при $t = 0$ сумма равна 0, из максимальности получаем $x_1 + x_2 + \ldots + x_t \geqslant 0$. Проверим, что такое t подойдет.

Если неверно i-ое неравенство, где $i < t$, то $-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_{t-i+1} > 0$ и тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_{t-i} = (x_1 + \ldots + x_t) + (-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_{t-i+1}) > x_1 + \ldots + x_t$. Противоречие выбору t.

Если неверно t-ое неравенство, то $-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 > 0$, но мы уже знаем, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_t \geqslant 0$. Противоречие.

Если неверно i-ое неравенство, где $i > t$, то $-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 + x_{t+1} + \ldots + x_i > 0$ и тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_i = 2(x_1 + \ldots + x_t) + (-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 + x_{t+1} + \ldots + x_i) > (x_1 + \ldots + x_t)$. Это опять противоречит выбору t.

Лемма 4. Если x_1, x_2, ..., x_n — любая последовательность чисел, сумма которых равна 0, то либо все частичные суммы неположительные, либо найдется такое t от 1 до n, что

$$
\begin{aligned}
&-x_t < 0\\
&-x_t - x_{t-1} < 0\\
&\ldots\\
&-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 < 0\\
&-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 + x_{t+1} < 0\\
&\ldots\\
&-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 + x_{t+1} + \ldots + x_n < 0
\end{aligned}
$$

Доказательство Возьмем такое t от 1 до n, при котором сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_t$ максимальна (если таких t несколько, то возьмем минимальное). Если есть положительная частичная сумма, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_t > 0$. Проверим, что такое t подойдет.

Если неверно i-ое неравенство, где $i < t$, то $-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_{t-i+1} \geqslant 0$ и тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_{t-i} = (x_1 + \ldots + x_t) + (-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_{t-i+1}) \geqslant (x_1 + \ldots + x_t)$. Противоречие выбору t.

Если неверно t-ое неравенство, то $-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 \geqslant 0$, но мы уже знаем, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_t > 0$. Противоречие.

Если неверно i-ое неравенство, где $i > t$, то $-x_t - x_{t-1} - \ldots - x_1 + x_{t+1} + \ldots + x_i \geqslant 0$ и тогда $x_1+x_2+\ldots+x_i = 2(x_1+\ldots+x_t)+(-x_t-x_{t-1}-\ldots-x_1+x_{t+1}+\ldots+x_i) > (x_1+\ldots+x_t)$. Противоречие выбору t.

Отметим также следующее свойство монотонности разделяющего индекса.

Лемма 5. Если система корней R_1 содержит систему корней R_2, то

$$sep(R_1) \leqslant sep(R_2)$$
$$\overline{sep}(R_1) \leqslant \overline{sep}(R_2)$$

Доказательство. Так как система корней R_2 содержится в системе корней R_1, то каждая камера Вейля для системы R_2 состоит из нескольких камер Вейля для системы R_1. Поэтому если имеется m камер для R_2 таких, что любое полупространство содержит одну из них, то, произвольным образом выделяя в каждой камеру для R_1, получаем аналогичный набор из m камер для R_1.

2 Случай замкнутых конусов, двойственных к A_n

Теорема 1.

$$\overline{sep}(A_n) = n + 1$$

Доказательство. A_n образуется плоскостями $x_i - x_j = 0$, поэтому нам нужно покрыть гиперплоскость $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ (обозначим ее L) и в камерах Вейля, которые образованы такими плоскостями, мы можем упорядочить порядок x_i. Рассмотрим камеру, в которой координаты упорядочены по убыванию. Обозначим эту камеру K, а двойственный к ней замкнутый конус K°:

$$K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in L\colon\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_{n+1}\}$$
$$K^\circ = \left\{(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in L\colon\ \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i \leqslant 0 \text{ для всех точек } (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in K\right\}.$$

Докажем, что

$$K^\circ = \left\{(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in L\colon\ \text{для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant 0\right\}$$

Если $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in K$, $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in L$ и

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant 0 \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\},$$

то очевидно, что $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in K^\circ$, так как

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i = x_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} c_i + (x_n - x_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} c_i + \ldots + (x_1 - x_2) c_1 \leqslant 0.$$

С другой стороны, при $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left(\underbrace{n+1-k, \ldots, n+1-k}_{k},\ -k, \ldots, -k\right) \in K.$$

Значит для $(c_1, \ldots, c_{n+1}) \in K^\circ$ верно

$$0 \geqslant \sum_{i=1}^{k} (n+1-k) c_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} (-k) c_i = \sum_{i=1}^{k} (n+1) c_i + k \sum_{i=1}^{n} c_i = (n+1) \sum_{i=1}^{k} c_i \implies \sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant 0$$

Отсюда следует, что K° можно записать так:

$$K^\circ = \left\{ (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in L \middle| \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant 0 \right\}$$

Аналогично, любую камеру можно представить как

$$\widetilde{K} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}) \in L |\ x_{i_1} \geqslant x_{i_2} \geqslant x_{i_3} \geqslant \ldots \geqslant x_{i_{n+1}}\}$$

а двойственный к ней конус как

$$\widetilde{K}^\circ = \left\{ (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in L \middle| \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{j=1}^{k} c_{i_j} \leqslant 0 \right\}$$

Тогда любой конус $\widetilde{K}^\circ$ можно представить, как $\phi(K^\circ)$, где ϕ перестановка координат, и, наоборот для любой перестановки координат ϕ верно, что $\phi(K^\circ)$ это один из конусов.

Рассмотрим такие $n+1$ перестановки координат на $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{gathered}
\phi_1 : (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\
\phi_2 : (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \to (x_2, x_3 \ldots, x_{n+1}, x_1) \\
\phi_3 : (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \to (x_3, \ldots, x_{n+1}, x_1, x_2) \\
\ldots \\
\phi_{n+1}^{\cdot}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \to (x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{gathered}$$

Теперь рассмотрим произвольную точку B $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \in L$ и докажем, что она находится в одном из конусов $\phi_1^{-1}(K^\circ),\ \phi_2^{-1}(K^\circ),\ \phi_3^{-1}(K^\circ),\ \ldots,\ \phi_{n+1}^{-1}(K^\circ)$.

Применим лемму 2 для чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ и найдем такое t, что

$$
\begin{aligned}
&b_{t+1} \leqslant 0 \\
&b_{t+1} + b_{t+2} \leqslant 0 \\
&\ldots \\
&b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_{n+1} \leqslant 0 \\
&b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_{n+1} + b_1 \leqslant 0 \\
&\ldots \\
&b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_{n+1} + b_1 + \ldots + b_{t-1} \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что

$$\phi_{t+1}(B) = (b_{t+1}, \ldots, b_{n+1}, b_1, b_2, \ldots, b_t) \in K^\circ \implies B \in \phi_{t+1}^{-1}(K^\circ)$$

Только что мы доказали, что любая точка пространства лежит в одном из конусов $\phi_1^{-1}(K^\circ)$, $\phi_2^{-1}(K^\circ)$, $\ldots$, $\phi_{n+1}^{-1}(K^\circ)$ или что $n+1$ конуса хватит, чтобы замостить все пространство. По лемме 1 меньшего количества конусов не хватит.

3 Случай открытых конусов, двойственных к A_n

Теорема 2.

$$sep(A_n) = n(n+1)$$

Доказательство. Аналогично предыдущему пункту получится, что любую камеру можно представить, как

$$\widetilde{K} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}) \in L \colon\ x_{i_1} \geqslant x_{i_2} \geqslant x_{i_3} \geqslant \ldots \geqslant x_{i_{n+1}}\},$$

а двойственный к ней открытый конус как

$$\widetilde{K}^\dagger = \left\{(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in L \colon\ \text{для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{j=1}^{k} c_{i_j} < 0\right\}$$

Зафиксируем такую камеру

$$
\begin{aligned}
K &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in L \colon\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_{n+1}\} \\
K^\dagger &= \left\{(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in L \colon\ \text{для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{j=1}^{k} c_j < 0\right\}.
\end{aligned}
$$

Тогда любой конус $\widetilde{K}^\dagger$ можно представить, как $\phi(K^\dagger)$, где ϕ — перестановка координат; и наоборот, для любой перестановки координат ϕ верно, что $\phi(K^\dagger)$ это один из конусов.

Рассмотрим такие $n(n+1)$ перестановки на $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\phi_{i,j} : (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \to (a_i, a_j, a_{j+1}, a_{j+2} \ldots, a_{j-1})$$

Теперь рассмотрим произвольную ненулевую точку B $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \in L$ и докажем, что она находится в одном из конусов $\phi_{i,j}^{-1}(K^{\dagger})$

Пусть b_k минимальное число из $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$. Тогда применим лемму 2 для чисел $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$(без b_k) и найдем такое t, что

$$\begin{aligned}
&b_{t+1} \leqslant 0\\
&b_{t+1} + b_{t+2} \leqslant 0\\
&\ldots\\
&b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_{n+1} \leqslant 0\\
&b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_{n+1} + b_1 \leqslant 0\\
&\ldots\\
&b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_{n+1} + b_1 + \ldots + b_{t-1} \leqslant 0\\
&b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_{n+1} + b_1 + \ldots + b_t = 0
\end{aligned}$$

Заметим, что если $b_k \geqslant 0$, то все $b_i \geqslant 0$, но так как их сумма равно 0, то все $b_i = 0$?! Значит $b_k < 0$ и

$$\begin{aligned}
&b_k < 0\\
&b_k + b_{t+1} < 0\\
&b_k + b_{t+1} + b_{t+2} < 0\\
&\ldots\\
&b_k + b_{t+1} + b_{t+2} + \ldots + b_t < 0
\end{aligned}$$

Тогда $\phi_{k,t+1}(B) = (b_k, b_{t+1}, \ldots, b_{n+1}, b_1, b_2, \ldots, b_t) \in K^{\dagger}$ и $B \in \phi_{n-t+1}^{-1}(K^{\dagger})$.

Только что мы доказали, что любая точка пространства L лежит в одном из этих конусов, или что $n(n+1)$ конусов хватит, чтобы покрыть все пространство.

Осталось доказать, что меньше не получится. Рассмотрим $n(n+1)$ точку, в которых одна координата 1, одна -1 и остальные 0. Назовем их $A_1, A_2, \ldots, A_{n(n+1)}$. Для каждой точки A_i должен существовать конус $\phi(K^{\dagger})$ такой, что $A_i \in \psi(K^{\dagger})$. Тогда

$$\psi^{-1}(A_i) \in K^{\dagger} \implies \psi^{-1}(A_i) = (-1, 0, \ldots, 0, 1) \implies A_i = \psi(-1, 0, \ldots, 0, 1)$$

Значит для разных точек A_i соответствующие перестановки ψ различны, поэтому конусов должно быть хотя бы $n(n+1)$.

4 Случай замкнутых конусов, двойственных к B_n

Теорема 3.

$$\overline{sep}(B_n) = n + 1$$

Доказательство. Заметим, что система корней B_n содержит систему корней D_n, поэтому по лемме 5

$$\overline{sep}(B_n) \leqslant \overline{sep}(D_n) = n + 1.$$

Второе равенство мы докажем позже в подразделе 6. С другой стороны, по лемме 1

$$\overline{sep}(B_n) \geqslant n + 1$$

5 Случай открытых конусов, двойственных к B_n

Теорема 4.

$$sep(B_n) = 2n$$

Доказательство. B_n образуется плоскостями $x_i - x_j = 0$ и $x_i = 0$, поэтому в камерах, которые образованы такими плоскостями мы можем упорядочить порядок x_i и при этом выбрать знак у каждой переменной. Рассмотрим камеру, в которой $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$. Обозначим эту камеру K, а двойственный к ней открытый конус за $K^\dagger$:

$$K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0\},$$
$$K^\dagger = \left\{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \colon \sum_{i=1}^{n} c_i x_i < 0 \text{ для любой точки } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\right\}.$$

Докажем, что

$$K^\dagger = \left\{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \colon\ \text{для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{i=1}^{k} c_i < 0\right\}.$$

Если $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in K$, $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ и

$$\sum_{i=1}^{k} c_i < 0 \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\},$$

то очевидно, что $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in K^\dagger$, так как

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i = x_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} c_i + (x_n - x_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} c_i + \ldots + (x_1 - x_2) c_1 < 0.$$

С другой стороны, при $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\Bigg(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k},\ 0, \ldots, 0\Bigg) \in K.$$

Значит, для $(c_1, \ldots, c_{n+1}) \in K^\dagger$ верно

$$\sum_{i=1}^{k} c_i < 0.$$

Отсюда следует, что

$$K^\dagger = \left\{ (c_1, c_2, \ldots, c_n) | \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{i=1}^{k} c_i < 0 \right\}.$$

Рассмотрим такие $n+1$ отображения на $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{gathered}
\phi_1 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\phi_2 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_2, -x_1, x_3, \ldots, x_n) \\
\phi_3 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_3, -x_2, \ldots, x_n) \\
\ldots \\
\phi_n : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_1)
\end{gathered}$$

А так же

$$\phi_i'(x) = \theta(\phi_i(x))$$

где

$$\theta : (x_1, x_2, \ldots, x_n) -> (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

Теперь рассмотрим произвольную точку B $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и докажем, что она находится в одном из конусов $\phi_1^{-1}(K^\dagger)$, $\phi_2^{-1}(K^\dagger)$, $\ldots$, $\phi_n^{-1}(K^\dagger)$, $(\phi_1')^{-1}(K^\dagger)$, $(\phi_2')^{-1}(K^\dagger)$, $\ldots$, $(\phi_n')^{-1}(K^\dagger)$.

Применим лемму 4 для чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и либо найдем такое t, что

$$\begin{aligned}
&- b_t < 0 \\
&- b_t - b_{t-1} < 0 \\
&\ldots \\
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_1 < 0 \\
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_1 + b_{t+1} < 0 \\
&\ldots \\
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_1 + b_{t+1} + \ldots + b_n < 0
\end{aligned}$$

и тогда $\phi_t(B) = (-b_t, -b_{t-1}, \ldots, b_n) \in K^\dagger$ и $B \in \phi_t(K^\dagger)$, либо все частичные суммы неположительные.

Предположим, что мы попали во второй случай. Тогда применим лемму 4 для чисел $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$ и либо найдем такое t, что

$$
\begin{aligned}
& b_t < 0 \\
& b_t + b_{t-1} < 0 \\
& \ldots \\
& b_t + b_{t-1} + \ldots + b_1 < 0 \\
& b_t + b_{t-1} + \ldots + b_1 - b_{t+1} < 0 \\
& \ldots \\
& b_t + b_{t-1} + \ldots + b_1 - b_{t+1} + \ldots - b_{n+1} < 0
\end{aligned}
$$

и тогда $(\phi'_t)^{-1}(B) = (b_t, b_{t-1}, \ldots, -b_n) \in K^\dagger$ и $B \in \phi'_t(K^\circ)$, либо все частичные суммы для $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$ неположительные. Если мы опять попали во второй случай, то для любого i имеем $b_1 + \ldots + b_i \leqslant 0$ и $-b_1 - \ldots - b_i \leqslant 0$. Значит, $b_1 + \ldots + b_i = 0$ для всякого i, поэтому все b_i равны 0. Противоречие.

Итого мы доказали, что любая ненулевая точка пространства L лежит в одном из конусов $\phi_1^{-1}(K^\dagger)$, $\phi_2^{-1}(K^\dagger)$, $\ldots$, $\phi_n^{-1}(K^\dagger)$, $(\phi'_1)^{-1}(K^\dagger)$, $(\phi'_2)^{-1}(K^\dagger)$, $\ldots$, $(\phi'_n)^{-1}(K^\dagger)$, то есть $2n$ открытых конусов хватит, чтобы покрыть все пространство, кроме 0. Осталось доказать, что меньше не получится.

Пусть у нас есть $2n-1$ конус, которые покрывают все пространство без 0. Рассмотрим точки, у которых все координаты кроме одной равны 0, а одна координата равна 1 или -1. Назовем их A_1, $A_2, \ldots, A_{2n}$. Рассмотрим одну из таких точек A_j. Если она принадлежит $\psi_{k_j}(K^\dagger)$, то $\psi_{k_j}^{-1}(A_j) \in K^\dagger$. Заметим, что единственная точка, в которую может перейти A_j, чтобы содержаться в $K^\dagger$, это (-1, 0, …, 0) и поэтому $\psi_{k_j}^{-1}(A_j) = (-1, 0, \ldots, 0)$. Так как различных точек A ровно $2n$, а конусов $2n-1$, то существует A_{i_1} и A_{i_2}, которые лежат в одном конусе $\psi(K^\dagger)$. Тогда $A_{i_1} = \psi(-1, 0, \ldots, 0) = A_{i_2}$. Противоречие.

6 Случай замкнутых конусов, двойственных к D_n

Теорема 5.

$$\overline{sep}(D_n) = n + 1$$

Доказательство. D_n образуется плоскостями $x_i - x_j = 0$ и $x_i + x_j = 0$, поэтому в камерах, которые образованы такими плоскостями, мы можем зафиксировать порядок x_i и знак у всех координат, кроме одной. Рассмотрим камеру, в которой $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3| \geqslant \ldots \geqslant |x_n|$ и при этом все переменные, кроме, возможно, x_n, положительны. Тогда $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Обозначим эту камеру K, а двойственный к ней замкнутый конус K°.

$$
\begin{aligned}
K &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ |x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3| \geqslant \ldots \geqslant |x_n|, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_{n-1} \geqslant 0\} \\
K^\circ &= \{(c_1, c_2, \ldots, c_n)\colon \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant 0 \text{ для любой точки } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\}
\end{aligned}
$$

Докажем, что

$$K^\circ = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n)\colon \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant 0 \text{ и } c_1 + \ldots + |c_n| \leqslant 0\}$$

Если $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in K$, $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $c_1 + \ldots + |c_n| \leqslant 0$ и

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant 0 \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\},$$

то $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in K^\circ$, так как

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + |c_n||x_n| =$$

$$= |x_n| \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i + |c_n| \right) + (x_{n-1} - |x_n|) \sum_{i=1}^{n-1} c_i \ldots + (x_{n-2} - x_{n-1}) \sum_{i=1}^{n-2} c_i \ldots + (x_1 - x_2) c_1 \leqslant 0$$

С другой стороны,

$$\{(1, 0, \ldots, 0, 0), (1, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, (1, 1, \ldots, 1), (1, 1, \ldots, -1)\} \in K,$$

поэтому для любого $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in K^\circ$ верно

$$\begin{aligned}
&c_1 \leqslant 0 \\
&c_1 + c_2 \leqslant 0 \\
&\ldots \\
&c_1 + \ldots + c_{n-1} + c_n \leqslant 0 \\
&c_1 + \ldots + c_{n-1} - c_n \leqslant 0
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что K° можно записать так:

$$K^\circ = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) | \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant 0 \text{ и } c_1 + \ldots + |c_n| \leqslant 0\}.$$

Заметим, что одна камера получается из другой перестановкой и/или сменой знака четного числа координат. Значит, аналогично друг из друга получаются и двойственные им конусы.

Рассмотрим такие $n+1$ функций на $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
&\phi_0 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\phi_1 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n)
\end{aligned}$$

Для k от 2 до $n-2$ (далее перед x_1 стоит $\pm$, так как нам нужно, чтобы в каждой симметрии менялся знак у четного числа переменных):

$$\begin{aligned}\phi_k : (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\to (-x_k, -x_{k-1}, \ldots, -x_2, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, \pm x_1)\\ \phi_{n-1} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\to (x_n, -x_n, \ldots, -x_2, \pm x_1)\\ \phi_n : (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\to (-x_n, -x_n, \ldots, -x_2, \pm x_1)\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим произвольную точку $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и докажем, что она находится в одном из конусов $\phi_0^{-1}(K^\circ),\ \phi_1^{-1}(K^\circ),\ \phi_2^{-1}(K^\circ),\ \ldots,\ \phi_n^{-1}(K^\circ)$.

Применим лемму 3 для чисел $b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}$ и найдем такое t, что

$$\begin{aligned}&-b_t \leqslant 0\\ &-b_t - b_{t-1} \leqslant 0\\ &\ldots\\ &-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 \leqslant 0\\ &-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} \leqslant 0\\ &\ldots\\ &-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} \leqslant 0\end{aligned}$$

Из доказательства леммы 3 мы знаем, что это такое t, что сумма $b_2 + b_3 + \ldots + b_t$ максимально при t от 1 до $n-1$, причем берется минимальное t.

1 случай: $2 \leqslant t \leqslant n-2$.

Тогда мы хотим проверить, что $B \in \phi_t^{-1}(T)$. Так как у нас есть неравенства, полученные сверху, то осталось проверить

$$\begin{aligned}-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + b_n \leqslant 0,\\ -b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + b_n + |b_1| \leqslant 0.\end{aligned}$$

Значит, либо B в каком-то конусе, либо $-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + b_n + |b_1| > 0$. Первый вариант нас устраивает, теперь проверим второй. Тогда $-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + |b_n| + |b_1| > 0$. Рассмотрим 2 случая.

Если $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 \geqslant b_{t+1} + \ldots + b_n + |b_n|$, то $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 > 0$. Выберем из ϕ_0 и ϕ_1 то, в котором b_1 становится $-|b_1|$ и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$\begin{aligned}&-|b_1| \leqslant 0\\ &-|b_1| + b_2 \leqslant 0\\ &-|b_1| + b_2 + b_3 \leqslant 0\\ &\ldots\\ &-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} \leqslant 0\\ &-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_n| \leqslant 0\end{aligned}$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i \leqslant n-1$, то $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_i > 0 > -|b_1| + b_t + b_{t-1} + \ldots + b_2$ и тогда $b_2 + b_3 + \ldots b_i > b_2 + \ldots + b_t$. Противоречие выбору t.

Если неверно n-ое неравенство, то $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + |b_n| > 0$, но мы предполагали $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 \geqslant b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n|$. Противоречие.

Если же $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 < b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n|$, то $b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n| > 0$. Выберем из ϕ_{n-1} и ϕ_n то, в котором b_n становится $-|b_n|$ и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$
\begin{aligned}
&-|b_n| \leqslant 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} \leqslant 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} \leqslant 0 \\
&\ldots \\
&-|b_n| - b_{n-1} - \ldots - b_2 \leqslant 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} - b_{n_2} - \ldots - b_2 + |b_1| \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i \leqslant n$, то $-|b_n| - b_{n-1} - \ldots - b_{n-i+1} > 0 > -|b_n| + b_{n-1} - b_{n-2} - \ldots - b_{t+1}$ и тогда $b_2 + b_3 + \ldots b_{i-1} > b_2 + \ldots + b_t$. Противоречие из условия на t.

Если неверно n-ое неравенство, то $-|b_n| - b_{n-1} - b_{n_2} - \ldots - b_2 - |b_1| > 0$, но мы предполагали $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 < b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n|$. Противоречие.

2 случай. $t = n-1$.

Выберем из ϕ_{n-1} и ϕ_n то, в котором b_n становится $-|b_n|$ и попробуем показать, что B принадлежит одному из этих конусов. Для этого нужно проверить

$$
\begin{aligned}
&-|b_n| \leqslant 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} \leqslant 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} \leqslant 0 \\
&\ldots \\
&-|b_n| - b_{n-1} - \ldots - b_2 \leqslant 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} - \ldots - b_2 + |b_1| \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Заметим, что так как $b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} \geqslant b_2 + b_3 + \ldots + b_i$ для любого i от 2 до n, то $b_{i+1} + \ldots + b_{n-1} \geqslant 0$ и поэтому все неравенства с первого по $(n-2)$-ое выполнены. $(n-1)$-ое неравенство выполнено, так как $b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} > 0$ (так как $t \neq 1$). Значит, если $-|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} - \ldots - b_2 + |b_1| \leqslant 0$, то B лежит в этом конусе.

Теперь выберем из ϕ_0 и ϕ_1 то, в котором b_1 становится $-|b_1|$ и попробуем показать, что B принадлежит одному из этих конусов. Для этого нужно проверить

$$
\begin{aligned}
&-|b_1| \leqslant 0\\
&-|b_1| + b_2 \leqslant 0\\
&-|b_1| + b_2 + b_3 \leqslant 0\\
&\ldots\\
&-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} \leqslant 0\\
&-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_n| \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Заметим, что так как $b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} \geqslant b_2 + b_3 + \ldots + b_i$ для любого i от 2 до n, то $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_i \leqslant -|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + \leqslant -|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_n|$. Значит, если $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_n| \leqslant 0$, то B лежит в этом конусе.

Итак, независимо от знака $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + |b_{n+1}|$ точка B лежит в каком-то конусе.

3 случай: $t = 1$

Выберем из ϕ_{n-1} и ϕ_n то, в котором b_n становится $-|b_n|$ и попробуем показать, что B принадлежит одному из этих конусов. Для этого нужно проверить

$$
\begin{aligned}
&-|b_n| \leqslant 0\\
&-|b_n| - b_{n-1} \leqslant 0\\
&-|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} \leqslant 0\\
&\ldots\\
&-|b_n| - b_{n-1} - \ldots - b_2 \leqslant 0\\
&-|b_n| - b_{n-1} - b_{n_2} - \ldots - b_2 + |b_1| \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Заметим, что так как $t = 1$, то для любого i от 2 до $n-1$ имеем $b_2 + \ldots + b_i \leqslant 0$, поэтому $|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} - \ldots - b_i \leqslant |b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} - \ldots - b_2 + |b_1|$ и если $-|b_{n+1}| - b_n - b_{n_1} - \ldots - b_2 - |b_1| \leqslant 0$, то B лежит в этом конусе.

Теперь выберем из ϕ_0 и ϕ_1 то, в котором b_1 становится $-|b_1|$ и попробуем показать, что B принадлежит одному из этих конусов. Для этого нужно проверить неравенства

$$
\begin{aligned}
&-|b_1| \leqslant 0\\
&-|b_1| + b_2 \leqslant 0\\
&-|b_1| + b_2 + b_3 \leqslant 0\\
&\ldots\\
&-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} \leqslant 0\\
&-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_n| \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Так как при t сумма $b_2 + b_3 + \ldots + b_t$ максимальная, то для любого i от 2 до n верно, что $b_2 + b_3 + \ldots + b_i \leqslant 0$, поэтому первые $n-1$ неравенств верны. Значит, если $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + |b_{n+1}| \leqslant 0$, то B лежит в этому конусе.

Итак, независимо от знака $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + |b_{n+1}|$ точка B лежит в каком-то конусе.

Итого мы доказали, что любая точка пространства лежит в одном из конусов $\phi_0(K^\circ)$, $\phi_1(K^\circ)$, $\phi_2(K^\circ)$, $\ldots$, $\phi_n(K^\circ)$, или что $n+1$ конуса хватит, чтобы покрыть все пространство. По лемме 1 меньшего количества конусов не хватит.

7 Случай открытых конусов, двойственных к D_n

Теорема 6.

$$2n \leqslant sep(D_n) \leqslant 2(n+14)$$

Доказательство. Открытый конус $K^\dagger$, двойственный к K, это по аналогии с предыдущем случаем

$$K^\dagger = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n)| \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ верно} \sum_{i=1}^{k} c_i < 0 \text{ и } c_1 + \ldots + |c_n| < 0\}$$

Рассмотрим такие $n + 14$ симметрий на $\mathbb{R}^n$:

$$\phi_0 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\phi_1 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

Для k от 2 до $n-1$ (перед x_1 стоит $\pm$, так как нам нужно, чтобы в каждой симметрии менялся знак у четного числа переменных):

$$\phi_k : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_k, -x_{k-1}, \ldots, -x_2, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, \pm x_1)$$

$$\phi_n : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_2, \pm x_1)$$
$$\phi_{n+1} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_2, \pm x_1)$$

$$\phi_{n+2} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_1)$$
$$\phi_{n+3} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, -x_1)$$

$$\phi_{n+4} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, -x_{n-1}, \ldots, -x_2, \pm x_n)$$
$$\phi_{n+5} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_1, -x_{n-1}, \ldots, -x_2, \pm x_n)$$

$$\phi_{n+6} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, -x_2, -x_{n-1}, \ldots, -x_3, \pm x_n)$$
$$\phi_{n+7} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_1, -x_2, -x_{n-1}, \ldots, -x_3, \pm x_n)$$

$$\phi_{n+8} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, \pm x_n)$$
$$\phi_{n+9} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, \pm x_n)$$

$$\phi_{n+10} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_n, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, \pm x_2)$$
$$\phi_{n+11} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_n, x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, \pm x_2)$$

$$\phi_{n+12} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_n, -x_1, x_3, \ldots, \pm x_2)$$
$$\phi_{n+13} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_n, -x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}, \pm x_2)$$

И добавим к ним

$$\widetilde{\phi}_i(x) = \theta(\phi_i(x))$$

где

$$\theta : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (-x_1, -x_2, \ldots, -x_{n-1}, \pm x_n)$$

Теперь рассмотрим произвольную точку B $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и докажем, что она находится в одном из конусов $\phi_0(K^\dagger),\ \phi_1(K^\dagger),\ \ldots,\ \phi_{n+13}(K^\dagger),\ \widetilde{\phi}_0(K^\dagger),\ \ldots,\ \widetilde{\phi}_{n+13}(K^\dagger)$.

Применим лемму 4 для чисел $b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}$ и либо найдем такое t, что

$$\begin{aligned}
&- b_t > 0 \\
&- b_t - b_{t-1} < 0 \\
&\ldots \\
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 < 0 \\
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} < 0 \\
&\ldots \\
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} < 0
\end{aligned}$$

либо все частичные суммы будут отрицательными, отложим пока второй случай.

Мы хотим проверить, что $B \in \phi_t(K^\dagger)$. Из доказательства леммы 4 мы знаем, что это такое t, что сумма $b_2 + b_3 + \ldots + b_t$ максимально при t от 2 до $n-1$, причем берется минимальное t. Так как у нас есть неравенства полученные выше, то для того, чтобы получить, что $B \in \phi_t(T)$ осталось проверить

$$\begin{aligned}
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + b_n < 0 \\
&- b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + b_n + |b_1| < 0
\end{aligned}$$

Значит либо B в каком-то конусе, либо одно из двух неравенств выше неверно (заметим, что второе всегда сильнее первого). Первый вариант нас устраивает, теперь проверим второй. Тогда

$$-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + |b_n| + |b_1| \geqslant 0 \quad \text{и} \quad |b_n| + |b_1| > 0$$

Рассмотрим 5 случаев и докажем в каждом из них от противного, что B лежит в одном из заданных конусов.

Случай 1. Если $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 > b_{t+1} + \ldots + b_n + |b_n|$.

Тогда $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 > 0$. Выберем из ϕ_0 и ϕ_1 то, в котором b_1 становится $-|b_1|$, и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$
\begin{aligned}
&-|b_1| < 0 \\
&-|b_1| + b_2 < 0 \\
&-|b_1| + b_2 + b_3 < 0 \\
&\ldots \\
&-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} < 0 \\
&-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_n| < 0
\end{aligned}
$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i < n$, то

$$-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_i \geqslant 0 > -|b_1| + b_t + b_{t-1} + \ldots + b_2$$

$$b_2 + b_3 + \ldots b_i > b_2 + \ldots + b_t.$$

Противоречие из условия на t.

Если неверно n-ое неравенство, то $-|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + |b_n| \geqslant 0$, но мы предполагали

$$|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 > b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n|.$$

Противоречие.

Случай 2. Если $|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 < b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n|$.

Тогда $b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n| > 0$. Выберем из ϕ_n и ϕ_{n+1} то, в котором b_n становится $-|b_n|$, и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$
\begin{aligned}
&-|b_n| < 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} < 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} < 0 \\
&\ldots \\
&-|b_n| - b_{n-1} - \ldots - b_2 < 0 \\
&-|b_n| - b_{n-1} - b_{n_2} - \ldots - b_2 + |b_1| < 0
\end{aligned}
$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i < n$, то

$$-|b_n| - b_{n-1} - \ldots - b_i \geqslant 0 > -|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} - \ldots - b_{t+1}$$

$$b_2 + b_3 + \ldots b_{i-1} > b_2 + \ldots + b_t.$$

Противоречие из условия на t.

Если неверно n-ое неравенство, то $-|b_n| - b_{n-1} - b_{n_2} - \ldots - b_2 + |b_1| \geqslant 0$, но мы предполагали

$$|b_n| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 < b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_1|.$$

Противоречие.

Случай 3. Если $|b_n| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 > b_{t+1} + \ldots + b_n + |b_1|$.

Тогда $|b_n| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 > 0$. Выберем из ϕ_{n+2} и ϕ_{n+3} то, в котором b_n становится $-|b_n|$ и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$\begin{aligned}
&-|b_n| < 0\\
&-|b_n| + b_2 < 0\\
&-|b_n| + b_2 + b_3 < 0\\
&\ldots\\
&-|b_n| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} < 0\\
&-|b_n| + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_1| < 0
\end{aligned}$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i < n$, то

$$-|b_n| + b_2 + b_3 + \ldots + b_i \geqslant 0 > -|b_n| + b_t + b_{t-1} + \ldots + b_2$$

$$b_2 + b_3 + \ldots b_i > b_2 + \ldots + b_t.$$

Противоречие из условия на t.

Если неверно n-ое неравенство, то $-|b_n| + b_2 + b_3 + \ldots + |b_1| \geqslant 0$, но мы предполагали

$$|b_n| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 > b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_1|.$$

Противоречие.

Случай 4. Если $|b_n| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 < b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_1|$.

Тогда $b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_1| > 0$. Выберем из ϕ_{n+4} и ϕ_{n+5} то, в котором b_1 становится $-|b_1|$ и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$\begin{aligned}
&-|b_1| < 0\\
&-|b_1| - b_{n-1} < 0\\
&-|b_1| - b_{n-1} - b_{n-2} < 0\\
&\ldots\\
&-|b_1| - b_{n-1} - \ldots - b_2 < 0\\
&-|b_1| - b_{n-1} - b_{n_2} - \ldots - b_2 + |b_n| < 0
\end{aligned}$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i < n$, то

$$-|b_1| - b_{n-1} - \ldots - b_i \geqslant 0 > -|b_1| - b_{n-1} - b_{n-2} - \ldots - b_{t+1}$$

$$b_2 + b_3 + \ldots b_{i-1} > b_2 + \ldots + b_t.$$

Противоречие из условия на t.

Если неверно n-ое неравенство, то $-|b_n| - b_{n-1} - b_{n-2} - \ldots - b_2 + |b_1| \geqslant 0$, но мы предполагали

$$|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 < b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n|.$$

Противоречие.

Случай 5. Значит остался случай, когда

$$|b_1| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 = b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_n|$$

$$|b_n| - b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 = b_{t+1} + \ldots + b_{n-1} + |b_1|.$$

Тогда $|b_n| = |b_1|$ и $b_2 + \ldots + b_{n-1} = 0$. Мы до этого уже получали, что $-b_t - b_{t-1} - \ldots - b_2 + b_{t+1} + \ldots + |b_n| + |b_1| \geqslant 0$ и $|b_n| + |b_1| > 0$. Значит

$$0 < |b_1| = |b_n| \geqslant b_2 + b_3 + \ldots + b_t = -(b_{t+1} + \ldots + b_{n-1}).$$

Рассмотрим какой знак у b_2.

Если $b_2 = 0$, то выберем из ϕ_{n+10}, ϕ_{n+11}, ϕ_{n+12} и ϕ_{n+13} то, в котором b_n и b_1 становятся $-|b_n|$ и $-|b_1|$ и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$\begin{aligned}
&-|b_n| < 0\\
&-|b_n| - |b_1| < 0\\
&-|b_n| - |b_1| + b_3 < 0\\
&-|b_n| - |b_1| + b_3 + b_4 < 0\\
&\ldots\\
&-|b_n| - |b_1| + b_3 + \ldots + b_{n-1} < 0\\
&-|b_n| - |b_1| + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_2| < 0
\end{aligned}$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i < n$, то

$$0 \leqslant -|b_n| - |b_1| + b_3 + \ldots + b_i \leqslant -|b_n| - |b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_t \leqslant -|b_n|.$$

Противоречие.

Если неверно n-ое неравенство, то

$$-|b_n| - |b_1| + b_3 + \ldots + b_{n-1} + |b_2| = -|b_n| - |b_1| + b_3 + \ldots + b_{n-1} \geqslant 0,$$

то неверно и предыдущее. Противоречие.

Если $b_2 < 0$, то выберем из ϕ_{n+6} и ϕ_{n+7} то, в котором b_1 становвtся $-|b_1|$ и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$\begin{aligned}
&-|b_1| < 0\\
&-|b_1| + b_2 < 0\\
&-|b_1| + b_2 - b_{n-1} < 0\\
&-|b_1| + b_2 - b_{n-1} - b_{n-2} < 0\\
&\dots\\
&-|b_1| + b_2 - b_{n-1} - \ldots - b_3 < 0\\
&-|b_1| + b_2 - b_{n-1} - \ldots - b_3 + |b_n| < 0
\end{aligned}$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i < n$, то

$$0 \leqslant -|b_1| - |b_2| - b_{n-1} - \ldots - b_{n-i+2} \leqslant -|b_1| - |b_2| - b_{n-1} - \ldots - b_{t+1} \leqslant -|b_2| < 0.$$

Противоречие.

Если неверно n-ое неравенство, то

$$0 \leqslant -|b_1| - |b_2| - b_{n-1} - \ldots - b_3 + |b_n| = -|b_2| + b_2 < 0.$$

Противоречие.

Если $b_2 > 0$, то выберем из ϕ_{n+8} и ϕ_{n+9} то, в котором b_1 становится $-|b_1|$ и докажем, что B принадлежит соответствующему конусу. Для этого надо проверить, что

$$\begin{aligned}
&-|b_1| - b_2 < 0\\
&-|b_1| - b_2 + b_3 < 0\\
&-|b_1| - b_2 + b_3 + b_4 < 0\\
&\dots\\
&-|b_1| - b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} < 0\\
&-|b_1| - b_2 + b_3 \ldots + b_{n-1} + |b_n| < 0
\end{aligned}$$

Если неверно i-ое неравенство, где $i < n$, то

$$0 \leqslant -|b_1| - |b_2| + b_3 + \ldots + b_i \leqslant -|b_1| + b_2 + b_3 + \ldots + b_t - (|b_2| + b_2) < 0.$$

Противоречие.

Если неверно n-ое неравенство, то

$$0 \leqslant -|b_1| - |b_2| + b_3 \ldots + b_{n-1} + |b_n| = -|b_2| - b_2 < 0.$$

Противоречие.

Значит если в начале мы нашли t по лемме 4, то точка B лежит в одном из конусов $\phi_0(K^\dagger),\ \phi_1(K^\dagger),\ \phi_2(K^\dagger),\ \ldots,\ \phi_{n+13}(K^\dagger)$. Если же мы не нашли такое t, то

$$\text{для любого } i \text{ от 2 до } n-1 \text{ верно } \sum_2^i b_j \leqslant 0.$$

Аналогично, выше доказанное можно сказать про $\theta(B)$: либо $\theta(B)$ лежит в одном из конусов $\phi_0(K^\dagger),\ \phi_1(K^\dagger),\ \phi_2(K^\dagger),\ \ldots,\ \phi_{n+13}(K^\dagger)$, либо

$$\text{для любого } i \text{ от 2 до } n-1 \text{ верно } \sum_2^i -b_j \leqslant 0.$$

Применим к последнему утверждению еще раз θ и так как $\theta^2 = id$, то либо B лежит в одном из конусов $\widetilde{\phi}_0(K^\dagger),\ \widetilde{\phi}_1(K^\dagger),\ \widetilde{\phi}_2(K^\dagger),\ \ldots,\ \widetilde{\phi}_{n+13}(K^\dagger)$, либо

$$\text{для любого } i \text{ от 2 до } n-1 \text{ верно } \sum_2^i -b_j \leqslant 0.$$

Значит, либо B лежит в одном из заданных конусов, либо для любого j от 2 до $n-1$ выполнено $b_j = 0$. Но для второго случая есть функции $\phi_{n+9}, \ldots, \phi_{n+12}$. Выберем из них ту, для которой $\phi(B) = (-|b_n|, -|b_1|, 0, \ldots, 0)$. Если $x_n \neq 0$, то $B \in \phi(T)$. Если $b_n = 0$, то выберем одну из функций ϕ_{n+5} и ϕ_{n+6}, для которой $\phi(B) = (-|x_1|, 0, 0, 0, \ldots, 0)$. Тогда очевидно, что $B \in \phi(K^\dagger)$.

Значит, $2(n+13)$ конусов будет достаточно.

Установим нижнюю оценку. Заметим, что камеры Вейля для B_n содержатся в камерах Вейля для D_n, причём каждая камера Вейля для D_n содержит камеру Вейля для B_n. Следовательно, для любого двойственного конуса к камере Вейля в D_n существует двойственный конус к камере Вейля в B_n, который его содержит. Поэтому $sep(D_n) \geqslant sep(B_n) = 2n$

8 Исключительные системы корней

Утверждение 1.

$$\overline{sep}(G_2) = 3$$

$$sep(G_2) \leqslant sep(A_2) = 6$$

Доказательство. Так как система корней G_2 содержится в системе корней A_2, то по лемме 5.

$$sep(G_2) \leqslant sep(A_2) = 6$$
$$\overline{sep}(G_2) \leqslant \overline{sep}(A_2) = 3.$$

С другой стороны, по лемме 1 имеем $\overline{sep}(G_2) \geqslant 3$.

Утверждение 2.

$$\overline{sep}(E_8) = 9$$
$$sep(E_8) \leqslant sep(D_8) \leqslant 44.$$

Доказательство аналогично утверждению 1.
Утверждение 3.

$$\overline{sep}(F_4) = 5$$
$$sep(F_4) \leqslant sep(B_4) \leqslant 8.$$

Доказательство аналогично утверждению 1.

9 Приложение

Приведём некоторые приложения разделяющего индекса, полученные В. Л. Поповым [2].

Пусть G — связная односвязная полупростая алгебраическая группа. Зафиксируем борелевскую подгруппу B в G. Пусть P_λ — G-стабилизатор некоторой B-инвариантной прямой в E_λ. Для $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in P_+ \backslash \{0\}$, обозначим через $c_{\mu,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d}$ количество вхождений E_μ в $E_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes E_{\lambda_d}$.

Мы назовем точку $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d) \in (P_+ \backslash \{0\})^d$ примитивной, если

$$c^0_{n_1\lambda_1,\ldots,n_d\lambda_d} \leqslant 1 \text{ для любых } (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geqslant 0}.$$

Теорема A. Если G — простая группа, то

$$d \leqslant sep(G) + 1$$

для любой примитивной точки $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d) \in (P_+ \backslash \{0\})^d$.

Теорема B. Пусть $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d) \in (P_+ \backslash \{0\})^d$. Тогда

1. Если $G/P_{\lambda_1} \times \ldots \times G/P_{\lambda_d}$ содержит открытую G-орбиту, то $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ примитивная.

2. Если $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ примитивная и действие G на многообразие $X_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d}$ стабильно, то $G/P_{\lambda_1} \times \ldots \times G/P_{\lambda_d}$ одержит открытую G-орбиту.

Теорема C. Пусть G — простая группа и $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d) \in (P_+ \backslash \{0\})^d$. Если

$$d \geqslant sep(G),$$

то действие G на многообразие $X_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d}$ стабильно (следовательно, обильно), а G-стабилизатор точки общего положения в $X_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d}$ конечен.

Список литературы

[1] G. Raney. Functional composition patterns and power series reversion. Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), pp. 441–451.

[2] V. L. Popov. Tensor product decompositions and open orbits in multiple flag varieties. J. of Algebra 313 (2007), pp. 392–416.

[3] В. С. Жгун, Д. В. Миронов. Разделяющие системы камер Вейля. Матем. заметки, 82:2 (2007), стр. 310–314.

[4] Ф. В. Петров. Решение задачи 12.10 из задачника “Математического просвещения”. Мат. Просв. 13 (2009), стр. 189–190.