Санкт-Петербургский государственный университет

ШАМОВ Степан Владимирович

Выпускная квалификационная работа

Пополнение весовых триангулированных категорий

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2018 «Математика»

Научный руководитель:
доцент, Факультет математики
и компьютерных наук СПбГУ,
д. ф.-м. н., профессор РАН
Бондарко Михаил Владимирович

Рецензент:
научный сотрудник,
Междисциплинарная исследовательская
лаборатория им. П.Л.Чебышева,
к. ф.-м. н.
Дружинин Андрей Эдуардович

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Введение

Работа посвящена конструированию весовых структур на локализациях категорий специального вида. Пусть $u : R \to U$ эпиморфизм ассоциативных колец. Пусть U как R-бимодуль обладает следующими свойствами: естественное отображение $U \otimes_R U \to U$ изоморфизм, $\mathrm{Tor}_i^R(U, U) = 0$ для всех i, а также $\mathrm{pd}_R U \leq 1$. Обозначим $\underline{E}$ локализацию производной категории левых модулей $D(R\text{-mod})$ по её полной подкатегории $u_* D(U\text{-mod})$. В основной Теореме 15 мы строим на $\underline{E}$ весовую структуру $w_{\underline{E}}$ и t-структуру $t_{\underline{E}}$, обладающие определёнными свойствами. Так, функтор $D(R\text{-mod}) \to \underline{E}$ весо-точен; ядро $\underline{Ht_{\underline{E}}}$ эквивалентно категории так называемых u-контрамодулей, ядро $\underline{Hw_{\underline{E}}}$ — полной подкатегории проективных u-контрамодулей.

Важный пример такого эпиморфизма описан в середине §3.1. Пусть S — мультипликативная система регулярных элементов, удовлетворяющая левому условию Оре, обладающая не более чем счётным множеством порождающих. Тогда вложение $u : R \to S^{-1}R$ удовлетворяет нашим требованиям. При помощи этого наблюдения в §3.2 Теорема 17 обобщает результаты Теоремы 15 на более широкий класс категорий. В частности, на стабильную гомотопическую категорию $\underline{SH}$.

В §2.1 мы получаем общие результаты для абелевой категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющей аксиоме $AB4$ и содержащей достачно проективных объектов. На категории $D(\mathcal{A})$ мы строим весовую структуру $w^{\mathcal{P}}$, которая связывает между собой хорошо известные весовую структуру w^{st} на $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ и t-структуру t^{can} на $D(\mathcal{A})$ (см. Предложение 3 и Следствие 7). Впоследствии мы будем применять эти результаты для $\mathcal{A} = R\text{-mod}$.

В §2.2 мы формулируем и доказываем ещё одно вспомогательное утверждение. Оно тесно связанно со статьей [4] и слегка дополняет её.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору М.В. Бондарко, за ценные советы и замечания.

1. Основные определения

Следуя [2], [4] и [5], введём необходимые определения и обозначения.

1.1. **Общие обозначения.**

- Для произвольной категории C и $X, Y \in \mathrm{Obj}\, C$ множество морфизмов из X в Y будем обозначать $C(X, Y)$.
- Для произвольной категории C и $X, Y \in \mathrm{Obj}\, C$ будем говорить, что X является *ретрактом* Y, если морфизм id_X пропускается через Y. В случае, если C абелева или триангулированная категория, это равносильно тому, что X — прямое слагаемое Y.
- Для $D \subset \mathrm{Obj}(\underline{C})$ будем называть *триангулированной подкатегорией, порождённой D,* наименьшую строго полную замкнутую относительно взятия ретрактов триангулированную подкатегорию $\underline{C}$, содержащую D.
- Для аддитивной категории $\underline{B}$ обозначим $\mathcal{K}^*(\underline{B})$ (где $*$ означает $b, +, -$ или $\varnothing$) гомотопическую категорию (соотв. ограниченных, ограниченных снизу, ограниченных сверху или произвольных) коцепных комплексов над $\underline{B}$. Соответственно, $D^*(\underline{B})$ обочначает производную категорию.
- Символом $\underline{C}$ далее будем обозначать триангулированную категорию.

- Для $M, N \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ будем писать $M \perp N$, если $\underline{C}(M, N) = \{0\}$. Для $X, Y \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ будем писать $X \perp Y$, если $M \perp N$ для всех $M \in X, N \in Y$. Для $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ обозначим $\mathcal{P}^{\perp}$ класс $\{N \in \operatorname{Obj} \underline{C} : \forall M \in \mathcal{P} \;\; M \perp N\}$.
- Аддитивная категория $\underline{B}$ называется *приведённой*, если она содержит копроизведения любых семейств своих элементов. Для $\underline{B}$, удовлетворяющей этому условию, будем говорить, что класс $\mathcal{P} \subset \underline{B}$ *приведённый*, если он замкнут относительно взятия копроизведений своих элементов.
- Для любых $A, B, C \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ объект C называется *расширением B при помощи A,* если треугольник $A \to C \to B \to A[1]$ выделенный.
- Пусть $\underline{C}$ — приведённая триангулированная категория, $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj}(\underline{C})$. Будем обозначать $[\mathcal{P}]^{cl}$ наименьший замкнутый относительно расширений приведённый подкласс, содержащий $\mathcal{P}$.
  Полная подкатегория $\underline{C}$, объекты которой равны $[(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}[i])]^{cl}$, называется *локализующей подкатегорией $\underline{C}$, порождённой* $\mathcal{P}$. Будем обозначать эту категорию $\langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\underline{C}}$.
- Класс объектов $\mathcal{P}$ приведённой триангулированной категории $\underline{C}$ называется *связным,* если $\mathcal{P} \perp_{\underline{C}} [\cup_{i>0} \mathcal{P}[i]]^{cl}$.
- Объект M категории $\underline{C}$ называется *компактным*, если функтор

$$H^M = \underline{C}(M, -) : \underline{C} \to \mathcal{A}b$$

  сохраняет копроизведения. Будем говорить, что $\underline{C}$ *компактно порождена* $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$, если $\mathcal{P}$ — множество компактных объектов, и $\underline{C} = \langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\underline{C}}$.
- Для последовательности Y_i объектов категории $\underline{C}$, где $i \geq 0$, и морфизмов $\phi_i : Y_i \to Y_{i+1}$ рассмотрим $D = \coprod Y_i$ и морфизм $a : \oplus id_{Y_i} \bigoplus \oplus(-\phi_i) : D \to D$; обозначим Y конус a. Будем писать $Y = \varinjlim\limits_{\text{holim}} Y_i$ и называть Y *гомотопическим копределом* Y_i.

1.2. Весовые структуры.

- Пара подклассов $\underline{C}_{w \leq 0}, \underline{C}_{w \geq 0} \subset \operatorname{Obj}(\underline{C})$ триангулированной категории $\underline{C}$ определяет *весовую структуру*, если удовлетворяет следующим требованиям:
  (1) $\underline{C}_{w \leq 0}, \underline{C}_{w \geq 0}$ замкнуты относительно взятия ретрактов, т.е. выделения прямых слагаемых;
  (2) $\underline{C}_{w \leq 0} \subset \underline{C}_{w \leq 0}[1]$ и $\underline{C}_{w \geq 0}[1] \subset \underline{C}_{w \geq 0}$;
  (3) $\underline{C}_{w \leq 0} \perp \underline{C}_{w \geq 0}[1]$;
  (4) Для любого $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ существует *весовое разложение:* выделенный треугольник

$$LM \to M \to RM \to LM[1],$$

  где $LM \in \underline{C}_{w \leq 0}$, и $RM \in \underline{C}_{w \geq 0}[1]$.
- Полная подкатегория $\underline{Hw} \subset \underline{C}$, класс объектов которой равен $\underline{C}_{w=0} = \underline{C}_{w \geq 0} \cap \underline{C}_{w \leq 0}$, называется *ядром w.*
- Обозначим $\underline{C}_{[i,j]}$ класс $\underline{C}_{w \geq i} \cap \underline{C}_{w \leq j}$; в частности, он равняется $\{0\}$ при $i > j$. Обозначим $\underline{C}_b \subset \underline{C}$ (соотв. $\underline{C}_-$, $\underline{C}_+$) полную подкатегорию $\underline{C}$, класс объектов которой равен $\cup_{i,j \in \mathbb{Z}} \underline{C}_{[i,j]}$ (соотв. $\cup_{i \in \mathbb{Z}} \underline{C}_{w \leq i}$, $\cup_{i \in \mathbb{Z}} \underline{C}_{w \geq i}$). Будем называть эти объекты *w-ограниченными, w-ограниченными сверху, w-ограниченными снизу* соответственно.

- Будем говорить, что $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ *w-вырожден справа* (соотв. *слева*), если $M \in \bigcap_{l\in\mathbb{Z}} \underline{C}_{w\le l}$ (соотв. $M \in \bigcap_{l\in\mathbb{Z}} \underline{C}_{w\ge l}$). Будем говорить, что *$w$ невырождена справа* (соотв. слева), если единственный невырожденный справа (соотв. слева) объект нулевой.
- Будем говорить, что класс $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ *класс-порождает* весовую структуру w, если $\underline{C}$ приведённая, $\underline{C}_{w\ge 0} = [\bigcup_{i\ge 0} \mathcal{P}[i]]^{cl}$ и $\underline{C}_{w\le 0} = [\bigcup_{i\le 0} \mathcal{P}[i]]^{cl}$.
- Будем говорить, что $\mathcal{P}$ *порождает* w, если $\underline{C}_{w\ge 0} = (\bigcup_{i<0} \mathcal{P}[i])^{\perp}$.
- Пусть категории $\underline{C}$ и $\underline{C'}$ снабжены весовыми структурами w и w' соответственно, $F : \underline{C} \to \underline{C'}$ — точный функтор. Будем говорить, что F *левый* (соотв. *правый*) *весо-точный*, если $F(\underline{C}_{w\le 0}) \subset \underline{C'}_{w\le 0}$ (соотв. $F(\underline{C}_{w\ge 0}) \subset \underline{C'}_{w\ge 0}$). Будем говорить, что F *весо-точный,* если оба условия выполняются.

Замечание 1.

(1) В качестве примера построим так называемую *«глупую»* весовую структуру w^{st} ([2, Rem.1.2.3]). Рассмотрим гомотопическую категорию $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ произвольной аддитивной категории $\mathcal{A}$. Положим $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})_{w^{st}\le 0}$ (соотв. $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})_{w^{st}\ge 0}$) — класс таких комплексов, чьи члены в отрицательных (соотв. положительных) степенях равны нулю, и изоморфных им с точностью до гомотопической эквивалентности. Весовое разложение комплекса получается при помощи его «глупой» фильтрации.

(2) Весовые структуры были открыты независимо D. Pauksztello ([12]) и названы им ко-t-структурами.

1.3. **t-структуры.**

- Пара подклассов $\underline{C}_{t\le 0}, \underline{C}_{t\ge 0} \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ образует t-структуру, если выполняются следующие условия:
  (1) $\underline{C}_{t\le 0}, \underline{C}_{t\ge 0}$ — строгие полные подкатегории, т.е. замкнуты относительно изоморфизмов;
  (2) $\underline{C}_{t\le 0} \subset \underline{C}_{t\le 0}[1]$ и $\underline{C}_{t\ge 0}[1] \subset \underline{C}_{t\ge 0}$;
  (3) $\underline{C}_{t\ge 0}[1] \perp \underline{C}_{t\le 0}$;
  (4) Для любого $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ существует *t-разложение:* выделенный треугольник

$$L_t M \to M \to R_t M \to L_t M[1],$$

  где $L_t M \in \underline{C}_{t\ge 0}, R_t M \in \underline{C}_{t\le 0}[-1]$.
- Полная подкатегория $\underline{Ht} \subset \underline{C}$, класс объектов которой совпадает с $\underline{C}_{t=0} = \underline{C}_{t\le 0} \cap \underline{C}_{t\ge 0}$, называется *ядром* t.
- Пусть категории $\underline{C}$ и $\underline{C'}$ снабжены t-структурами t и t' соответственно, $F : \underline{C} \to \underline{C'}$ точный функтор. F называется *левым (правым) t-точным,* если $F(\underline{C}_{t\le 0}) \subset \underline{C'}_{t'\le 0}$ (соотв., $F(\underline{C}_{t\ge 0}) \subset \underline{C'}_{t'\ge 0}$). F называется *t-точным,* если оба условия выполняются.
- Пусть категория $\underline{C}$ снабжена весовой структурой w и t-структурой t. Будем говорить, что данные структуры *смежны*, если $\underline{C}_{w\ge 0} = \underline{C}_{t\ge 0}$.

Замечание 2. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Напомним определение хорошо известной *канонической t-структуры* на $D^*(\mathcal{A})$. Подкласс $D^*(\mathcal{A})_{t^{can}\le 0}$ (соотв. $D^*(\mathcal{A})_{t^{can}\ge 0}$) состоит из тех комплексов, когомологии которых в отрицательных (соотв. положительных) членах равны нулю. При этом t-разложение возникает из канонической фильтрации.

2. Предварительные результаты

В §2.1 мы строим весовую структуру $w^{\mathcal{P}}$ на производной категории $D(\mathcal{A})$, устанавливаем связь между ней и канонической t-структурой t^{can}. В §2.2 формулируем утверждение, тесно связанное с [4, Prop.4.3.3-Th.4.3.4], которое понадобится в основной теореме.

2.1. **Весовая структура на $D(\mathcal{A})$.** Пусть $\mathcal{A}$ абелева категория, удовлетворяющая аксиоме $AB4$, содержащая достаточно проективных объектов. Обозначим $\mathcal{P}$ полную подкатегорию проективных объектов и рассмотрим локализующую подкатегорию $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, порождённую $\mathcal{P}$. Известно ([6, Prop.2.12]), что композиция функторов

$$\langle\mathcal{P}\rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})} \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}) \tag{2.1.1}$$

образует эквивалентность категорий. Более того, $D^{-}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$, что доказано также в [16, Th.10.4.8].

Следующее утверждение представляет собой переформулировку [5, Cor.2.3.1(1)] для данного случая.

Предложение 3. *На подкатегории $\langle\mathcal{P}\rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$ существует приведённая весовая структура $w^{\mathcal{P}}$, класс-порождённая $\mathcal{P}$. Более того, $w^{\mathcal{P}}$ порождена $\mathcal{P}$ (см. §1.2), $\underline{Hw}^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ и $w^{\mathcal{P}}$ – единственная приведённая весовая структура, ядро которой содержит $\mathcal{P}$. Функтор вложения*

$$\langle\mathcal{P}\rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})} \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

весо-точен относительно структуры w^{st} на $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Достаточно заметить, что класс объектов подкатегории $\mathcal{P}$ связен, т.е. обладает свойством

$$\mathcal{P} \perp_{\mathcal{K}(\mathcal{A})} [\bigcup_{i>0} \mathcal{P}[i]]^{cl}.$$

Поэтому мы можем воспользоваться утверждением [5, Cor.2.3.1(1)]. Получаем, что существует класс-порождённая $\mathcal{P}$ весовая структура $w^{\mathcal{P}}$, ядро которой состоит из ретрактов всевозможных копроизведений элементов $\mathcal{P}$. Однако класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно взятия копроизведений и ретрактов, поэтому $\underline{Hw}^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$. Функтор вложения $\langle\mathcal{P}\rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})} \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ весо-точен, поскольку сохраняет копроизведения и тождественно отображает $\mathcal{P}$ в $\underline{Hw}^{st}$. Остальные свойства следуют напрямую. □

Определение 4. Ассоциированную со структурой, полученной в Предложении 3, весовую структуру на $D(\mathcal{A})$ будем называть *проективной* и также обозначать $w^{\mathcal{P}}$.

Следствие 5. *Весовая структура $w^{\mathcal{P}}$ невырождена слева и справа.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{Obj}\langle\mathcal{P}\rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$ $w^{\mathcal{P}}$-вырожден слева (соотв. справа). Поскольку вложение $\langle\mathcal{P}\rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})} \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ весо-точно, X w^{st}-вырожден слева (соотв. справа). Если $H^n(X) \neq 0$ для некоторого n, то по определению X не может лежать в $\mathcal{K}(\mathcal{A})_{w^{st}\geq n}$ (соотв. $\mathcal{K}(\mathcal{A})_{w^{st}\leq n}$). Таким образом, X ациклический, а значит, равен нулю как объект $D(\mathcal{A})$. □

Вообще говоря, поскольку эквивалентность 2.1.1 сохраняет когомологии, никакой ненулевой ациклический комплекс не содержится в $\langle\mathcal{P}\rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$. Это рассуждение также объясняет пример [5, Rem.2.3.2(1)].

Предложение 6. *Существует весо-точное относительно w^{st} и $w^{\mathcal{P}}$ вложение*
$$\mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \hookrightarrow \langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}.$$
При этом, $\mathcal{K}^-(\mathcal{P}) = (\langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})})_-$.

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \subset (\langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})})_-$. Для комплекса $P^\bullet \in \mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ рассмотрим «глупую» фильтрацию
$$P^\bullet_{\leq k} = \ldots \to 0 \to 0 \to P^{-k} \xrightarrow{\partial^{-k}} P^{-k+1} \xrightarrow{\partial^{-k+1}} P^{-k+2} \to \ldots$$
с естественными вложениями $P^\bullet_{\leq k} \to P^\bullet_{\leq k+1}$. Известно (см. [6, Rem.2.2]), что в наших предположениях в $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ существует квазиизоморфизм
$$\underrightarrow{\mathrm{holim}} P^\bullet_{\leq k} \to \operatorname{colim} P^\bullet_{\leq k} = P^\bullet.$$
Все члены фильтрации представлены ограниченными сверху комплексами проективных объектов, следовательно $\underrightarrow{\mathrm{holim}} P^\bullet_{\leq k}$ тоже представляется в таком виде. Значит, $\underrightarrow{\mathrm{holim}} P^\bullet_{\leq k}$ является проективной резольвентой $P^\bullet$, т.е. равен $P^\bullet$ в $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. С другой стороны, $\underrightarrow{\mathrm{holim}} P^\bullet_{\leq k}$ принадлежит $(\langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\mathcal{K}(A)})_-$ по построению. Обратное включение очевидно.
Кроме того, по построению
$$w^{st} = ((\langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})})_{w^{\mathcal{P}} \leq 0} \cap \operatorname{Obj} \mathcal{K}^-(\mathcal{P}), (\langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\mathcal{K}(A)})_{w^{\mathcal{P}} \geq 0} \cap \operatorname{Obj} \mathcal{K}^-(\mathcal{P})).$$
Поэтому утверждение [5, Prop.1.2.5] влечёт весо-точность вложения $\mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \hookrightarrow \langle \mathcal{P} \rangle^{cl}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$. □

Следствие 7. *Весовая структура $w^{\mathcal{P}}$ и t-структура t^{can} на $D(\mathcal{A})$ смежны.*

Доказательство. Пусть X принадлежит $D(\mathcal{A})_{w^{\mathcal{P}} \geq 0}$. Поскольку вложение $D(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ весо-точно, когомологии X в положительных членах равны нулю. Следовательно, по определению $X \in D(\mathcal{A})_{t^{can} \geq 0}$.
Обратно, если когомологии комплекса X в положительных членах нулевые, мы можем считать его объектом $D^-(\mathcal{A})$. Ассоциированный с ним комплекс в $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ принадлежит $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})_{w^{st} \geq 0}$, поэтому, в силу предыдущего предложения, $X \in D(\mathcal{A})_{w^{\mathcal{P}} \geq 0}$. □

Далее положим $\mathcal{A} = R$-mod — категория левых модулей произвольного кольца R. Хорошо известно следующее утверждение (см. [11, §5.8], [15, Prop.2.2]).

Предложение 8. *Объект $X \in D(R\text{-mod})$ компактен в том и только том случае, если изоморфен ограниченному комплексу конечнопорождённых проективных модулей. Категория $D(R\text{-mod})$ компактно порождена R как комплексом, сосредоточенным в нулевом члене.*

Следствие 9. *Проективная весовая структура $w^{\mathcal{P}}$ — единственная приведённая весовая структура на $D(R\text{-mod})$, ядро которой содержит R.*

Доказательство. Поскольку $R \perp_{D(R\text{-mod})} [\bigcup_{i>0} R[i]]^{cl}$, утверждение [5, Cor.2.3.1(1)] влечёт, что на $D(R\text{-mod})$ существует единственная приведённая весовая структура, ядро которой содержит R. Более того, оно состоит из ретрактов свободных модулей, т.е. равно $\mathcal{P}$. В силу Предложения 3, эта весовая структура совпадает с $w^{\mathcal{P}}$. □

2.2. **Некоммутативные локализации.** Далее мы обратимся к теории некоммутативных локализаций аддитивных категорий в терминах работы [4].

Определение 10. Пусть $\underline{A}$ аддитивная категория, $\underline{C} = \mathcal{K}^b(\underline{A})$, S — некоторое множество морфизмов в $\underline{A}$. $B \subset \mathcal{K}^b(\underline{A})$ — множество конусов элементов S, $\underline{D} \subset \underline{C}$ локализующая категория, порождённая B. Будем обозначать $\underline{A}[S^{-1}]_{add}$ полную подкатегорию $\underline{C}/\underline{D}$, объекты которой совпадают с $\underline{A}$.

Отметим, что функтор $U : \underline{A} \to \underline{A}[S^{-1}]_{add}$ обладает универсальным свойством: аддитивные функторы $F : \underline{A} \to \underline{A}'$, которые переводят морфизмы множества S в обратимые, пропускаются через U, притом единственным образом ([4, Th.0.1]).

Предложение 11.
I. *Пусть категория $\underline{C}$ снабжена весовой структурой w и смежной с ней t-структурой t. Пусть $\underline{C}'$ — полная подкатегория $\underline{C}$, объекты которой компактны; $\underline{H} \subset \underline{C}'$ образует малую аддитивную категорию такую, что $\langle \operatorname{Obj} \underline{H} \rangle^{cl}_{\underline{C}} = \underline{C}$. Для множества $B \subset \operatorname{Obj} \underline{C}'$ обозначим $\underline{D}$ локализующую подкатегорию $\underline{C}$, порождённую B. Тогда существует*[1] *локализация Вердье $\underline{E} = \underline{C}/\underline{D}$; функтор локализации π коммутирует с копроизведениями, сохраняет компактность и допускает правый сопряжённый функтор G, который является полным вложением. Кроме того, $\underline{E}$ порождена $\pi(\underline{H})$ как локализующая подкатегория.*

II. *Предположим, что B состоит из конусов морфизмов множества $S \subset Mor(\underline{Hw})$, $\underline{Hw}$ порождает $\underline{C}'$ как триангулированную подкатегорию (см. §1.1). Тогда*

1. *Подкатегория $\pi(\underline{Hw})$ канонически изоморфна $\underline{Hw}[S^{-1}]_{add}$.*
2. *Категория $\underline{E}$ допускает весовую структуру $w_{\underline{E}}$, а также невырожденную смежную с ней t-структуру $t_{\underline{E}}$. При этом, функтор G t-точный, функтор π — весо-точный.*
3. *Класс объектов $\pi(\underline{Hw})$ образует полную аддитивную подкатегорию $\underline{Hw}_{\underline{E}}$, причём $\underline{Hw}_{\underline{E}}$ эквивалентно замыканию $\pi(\underline{Hw})$ относительно взятия ретрактов и малых копроизведений.*
4. *Ядро $\underline{Ht}_{\underline{E}}$ эквивалентно категории $\operatorname{AddFun}(\underline{Hw}[S^{-1}]^{op}_{add}, \mathcal{A}b)$.*
5. *Ядро $\underline{Ht}_{\underline{E}}$ содержит достаточно проективных объектов. Ядро $\underline{Hw}_{\underline{E}}$ эквивалентно категории проективных объектов категории $\underline{Ht}_{\underline{E}}$.*

Доказательство. Часть I — в точности утверждение [4, Prop.4.3.3.III(1)]. Пункт II(1) доказан в [4, Th.4.2.2(4)]. Пункты II(2–4) переформулировка [4, Th.4.3.4] для случая $\underline{H} = \underline{Hw}$ (с учётом того, что класс объектов $\underline{Hw}$ связен). Оставшийся пункт легко следует из [3, Th.5.3.1(1–2)]. $\square$

3. Основные результаты

В §3.1 мы приводим необходимые сведения о так называемых u-контрамодулях и доказываем главную теорему. В §3.2 мы распространяем этот результат на некоторые другие категории, к примеру, стабильную гомотопическую категорию $\underline{SH}$.

[1] В том смысле, что любой класс морфизмов $\underline{E}(-,-)$ образует множество.

3.1. **Локализация производной категории.** Нам понадобятся следующие обозначения и результаты статьи [1] (см. также [13, §4]).

Определение 12. Пусть $u : R \to U$ — эпиморфизм ассоциативных колец. Левый R-модуль C называется (левым) u-контрамодулем, если

$$\mathrm{Hom}_R(U, C) = 0 = \mathrm{Ext}^1_R(U, C).$$

Теорема 13. [1, Th.6.1(b)–Cor.6.2] *Пусть $u : R \to U$ гомологический эпиморфизм ассоциативных колец, т.е. естественное отображение $U \otimes_R U \to U$ изоморфизм, и $\mathrm{Tor}^R_i(U, U) = 0$ при всех $i > 0$.*

1. *Тогда существует строгий полный функтор $u_* : D(U\text{-mod}) \to D(R\text{-mod})$. Этот функтор обладает правым сопряжённым*

   $$\mathbb{R}u^! : D(R\text{-mod}) \to D(U\text{-mod}).$$

   Более того, функтор $\mathbb{R}u^!$ является функтором локализации Вердье.
2. *Пусть $\mathrm{pd}_R U \le 1$. Тогда ядро функтора $\mathbb{R}u^!$ совпадает с полной подкатегорией $D_{u-ctra}(R\text{-mod}) \subset D(R\text{-mod})$ комплексов левых R-модулей, когомологии которых являются u-контрамодулями. Следовательно, существует эквивалентность*

   $$D(R\text{-mod})/u_* D(U\text{-mod}) \cong D_{u-ctra}(R\text{-mod}).$$

   Полученный таким образом функтор $D(R\text{-mod}) \to D_{u-ctra}(R\text{-mod})$ обратный и левый сопряжённый к вложению $D_{u-ctra}(R\text{-mod}) \to D(R\text{-mod})$.

Следующий пример понадобится нам в §3.2. Пусть R — кольцо, S — мультипликативная система, удовлетворяющая левому условию Оре. Рассмотрим $U = S^{-1}R$ — левую локализацию Оре. Известно (см. [14, §7]), что вложение $R \to S^{-1}R$ обладает универсальным свойством, $S^{-1}R$ плоский R-бимодуль, $S^{-1}R \otimes_R S^{-1}R \cong S^{-1}R$. Из этого легко заключить, что выполнены условия первой части Теоремы 13. Также, нужно отметить следующее утверждение.

Предложение 14. [10, Th.1.1] *Пусть S состоит из регулярных[2] элементов, $S^{-1}R$ как правый R-модуль имеет не более чем счётное множество образующих. Тогда $\mathrm{pd}_R S^{-1}R \le 1$.*

Теперь мы готовы перейти к доказательству основной теоремы. Мы получим условия, при которых функтор локализации индуцирует на категории $D(R\text{-mod})/u_* D(U\text{-mod})$ смежные весовую и t-структуру, а также установим некоторые их свойства.

Теорема 15. *Пусть $u : R \to U$ — эпиморфизм ассоциативных колец, такой что естественное отображение $U \otimes_R U \to U$ изоморфизм U-U-бимодулей и $\mathrm{Tor}^R_i(U, U) = 0$ при всех $i > 0$. Пусть, кроме того, $\mathrm{pd}_R U \le 1$. Тогда*

1. *Весовая структура $w^{\mathcal{P}}$ на $D(R\text{-mod})$ индуцирует на $\underline{E} = D(R\text{-mod})/u_* D(U\text{-mod})$ приведённую весовую структуру $w_{\underline{E}}$ и смежную с ней t-структуру $t_{\underline{E}}$, такую что функтор $\pi : D(R\text{-mod}) \to \underline{E} = D(R\text{-mod})/u_* D(U\text{-mod})$ весо-точен.*
2. *Ядро $\underline{Ht}_{\underline{E}}$ изоморфно категории u-контрамодулей $R\text{-mod}_{u-ctra}$. Ядро $\underline{Hw}_{\underline{E}}$ изоморфно категории проективных u-контрамодулей. Существует эквивалентность категорий $D_{u-ctra}(R\text{-mod}) \cong D(R\text{-mod}_{u-ctra})$, такая что структуры $w_{\underline{E}}$, $t_{\underline{E}}$ ассоциированы со структурами $w^{\mathcal{P}}$ и t^{can} соответственно.*

---

[2] Таких, которые не являются делителями нуля ни справа, ни слева.

Доказательство. **1.** Функтор вложения $u_* : D(U\text{-mod}) \to D(R\text{-mod})$ допускает правый сопряжённый, значит, сохраняет копределы. В силу Предложения 8, категория $D(U\text{-mod})$ компактно порождена U. Следовательно, подкатегория $\langle U\rangle^{cl}_{D(R\text{-mod})}$ совпадает с $u_*D(U\text{-mod})$. Поскольку $\operatorname{pd}_R U \leq 1$, объект U квазиизоморфен некоторому комплексу проективных модулей $P^{-1} \xrightarrow{p} P^0$. Заметим, что $p \in D(R\text{-mod})(\underline{Hw}^{\mathcal{P}}, \underline{Hw}^{\mathcal{P}})$, U равен конусу p в категории $D(R\text{-mod})$. В силу Предложения 8, класс $\underline{H} = \mathcal{P}$ порождает трангулированную подкатегорию компактных объектов $D(R\text{-mod})$. Осталось воспользоваться Предложением 11(II) для $B = \{U\}$.

2. В силу Теоремы 13(2), можем рассмотреть ассоциированную с $w_{\underline{E}}$ весовую структуру на $D_{u-ctra}(R\text{-mod})$. Тогда вложение $D_{u-ctra}(R\text{-mod}) \hookrightarrow D(R\text{-mod})$ как правый сопряжённый к π функтор, будет t-точным. Поскольку смежной к $w^{\mathcal{P}}$ является t-структура t^{can}, $\underline{Ht}_{\underline{E}}$ составляют такие комплексы X, которые лежат в $\underline{Ht}^{can}$. Другими словами, ядро $t_{\underline{E}}$ эквивалентно категории комплексов, когомологии которых являются u-контрамодулями и сосредоточены в нулевом члене. В этом случае существуют квазиизоморфизмы

$$H^0(X) \leftarrow X_{\geq 0} \to X,$$

где $X_{\geq 0} = \ldots \to X^{-2} \to X^{-1} \to \operatorname{Ker}\partial_0 \to 0 \to 0 \to \ldots$ — нулевой член канонической фильтрации. Таким образом, можно естественным образом отождествить X с контрамодулем $H^0(X)$. Поэтому $\underline{Ht}_{\underline{E}} \cong R\text{-mod}_{u-ctra}$.
Известно ([1, Prop.3.2]), что при $\operatorname{pd} U \leq 1$ категория $R\text{-mod}_{u-ctra}$ абелева, функтор вложения $R\text{-mod}_{u-ctra} \to R\text{-mod}$ точен, а потому она удовлетворяет $AB4$. Применив Предложение 11.II(5), получаем, что в категории $\underline{Ht}_{\underline{E}} = R\text{-mod}_{u-ctra}$ достаточно проективных объектов, и что они составляют ядро $\underline{Hw}_{\underline{E}}$. Из этого следует, в силу Предложения 3, что на $D(R\text{-mod}_{u-ctra})$ можно построить весовую структуру $w^{\mathcal{P}}$.
Эквивалентность $D_{u-ctra}(R\text{-mod}) \cong D(R\text{-mod}_{u-ctra})$ построена в [1, Th.7.1(b)]. Легко убедиться, что при этом подкатегория $R\text{-mod}_{u-ctra}$ отображается тождественно. Поэтому ядро ассоциированной с $w_{\underline{E}}$ структуры на $D(R\text{-mod}_{u-ctra})$ составляют проективные u-контрамодули. Поскольку эта структура приведённая, мы можем заключить, что она совпадает с $w^{\mathcal{P}}$. $\square$

Замечание 16.

(1) Мы передоказали предложение [1, Prop.3.7] о том, что в наших предположениях категория $R\text{-mod}_{u-ctra}$ абелева локально представимая с проективным генератором $\pi(R) \in R\text{-mod}_{u-ctra}$ (в частности, что в ней достаточно проективных).

(2) Если взять $U = 0$, категория $R\text{-mod}_{u-contra}$ совпадает с R-mod. Очевидно, что в этом случае Теорема 15 даёт структуры t^{can} и $w^{\mathcal{P}}$ на $D(R\text{-mod})$, и, в самом деле, $\underline{Ht}^{can} = R\text{-mod}$, $\underline{Hw}^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$.

3.2. **Общий случай.** Следующее утверждение позволяет нам перенести предыдущие результаты на широкий класс категорий.

Теорема 17. *Пусть для категории $\underline{C}$ выполнены условия Предложения 11. Ядро $\underline{Hw}$ эквивалентно категории $\mathcal{P}$ проективных R-модулей некоторого ассоциативного кольца R. S — мультипликативная система регулярных элементов, удовлетворяющая левому условию Оре, порождённая не более чем счётным множеством $\{s_i\}$. Обозначим $\mathcal{S}$*

множество морфизмов в ядре $\underline{Hw}$, ассоциированных с морфизмами $R \xrightarrow{\cdot s_i} R$. Пусть множество конусов $\mathcal{S}$ порождают аддитивную подкатегорию $\underline{D}$. Тогда на $\underline{E} = \underline{C}/\underline{D}$ существует t-структура $t_{\underline{E}}$ и смежная с ней весовая структура $w_{\underline{E}}$. При этом, ядро $\underline{Ht}$ эквивалентно категории u-контрамодулей, а ядро $\underline{Hw}$ — категории проективных u-контрамодулей, где $u : R \to S^{-1}R$ естественное вложение.

Доказательство. Предложение 11 влечёт, что структуры $w_{\underline{E}}$ и $t_{\underline{E}}$ существуют, причём их ядра $\underline{Ht}_{\underline{E}}$ и $\underline{Hw}_{\underline{E}}$ зависят только от категории $\underline{Hw}[\mathcal{S}^{-1}]_{add} = \mathcal{P}[\mathcal{S}^{-1}]_{add}$. Поэтому мы можем их вычислить, применив Теорему 15 для категории $D(R\text{-mod})$. Правый R-модуль $S^{-1}R$ имеет не более чем счётное множество образующих, поэтому, в силу Предложения 14, $\mathrm{pd}_R\, S^{-1}R \leq 1$. Остальные условия Теоремы 15 выполняются автоматически, что даёт искомый результат. □

Определение 18. [9, Def.1.1.4] Приведённая категория $\underline{C}$ называется *связной однородной стабильной гомотопической категорией,* если выполнены условия:

- $\underline{\mathrm{C}}$ снабжена замкнутой симметричной моноидальной структурой, совместимой с триангуляцией;
- $\underline{C}$ компактно порождена единичным объектом S;
- Любой когомологический функтор из $\underline{C}$ представим;
- $\pi_n S = \underline{C}(S[n], S) = 0$ при $n < 0$.

Обозначим R кольцо $\mathrm{End}_{\underline{C}}(S) = \pi_0(S)$ связной однородной стабильной гомотопической категории $\underline{C}$. Известно (см. [9, Prop.7.1.2], [2, Rem.4.3.4(2)]), что для таких категорий существует t-структура, ядро которой эквивалентно категории R-mod, а также смежная ей приведённая весовая структура. Ядро этой весовой структуры состоит из ретрактов копроизведений копий S, т.е. эквивалентно категории проективных R-модулей. Следовательно, для таких категорий (и подходящих мультипликативных систем) выполнены условия Теоремы 17.

Замечание 19. В заключение рассмотрим примеры таких категорий ([9, Ex.1.2.3(a,c,f)]) и обсудим связь с уже известными результатами.

1. Производная категория $D(R)$ коммутативного кольца R. Моноидальная структура возникает из тензорного произведения R-модулей, единичный объект равен R. Контрамодули, связанные с локализациями $S^{-1}R$ коммутативного кольца R, подробно рассмотрены в статье [13] (там они называются S-контрамодулями). В частности, доказаны аналоги Теоремы 13 и Предложения 14.
2. $\underline{C} = \underline{SH}$, стабильная гомотопическая категория. В самом деле, известно (см. [2, Th.4.1.1(1,2)–Th.4.2.1(1)]), что она компактно порождена, на ней существует приведённая весовая структура w^{sph} и некоторая смежная с ней t-структура. Ядро $\underline{Hw}^{sph}$ совпадает с категорией свободных абелевых групп, т.е. категорией проективных $\mathbb{Z}$-модулей. В качестве порождающих мультипликативной системы S возьмём любое множество простых чисел (см. также [7, Prop.2.4]). Можно доказать (при помощи [1, §4]), что категория $\mathbb{Z}\text{-mod}_{u-ctra}$ будет порождена объектом
$$\pi(\mathbb{Z}) = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(S^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = \prod_{p \in S} \mathbb{Z}_p,$$
где $\mathbb{Z}_p$ означает кольцо p-адических чисел для простого p.

3. Пусть E — связный E_∞-кольцевой спектр[3]. Производная категория E-модулей также удовлетворяет требуемым условиям. Отметим, что ту же t-структуру на ней можно получить, применяя [8, Th.1.3].

Список литературы

[1] S. Bazzoni, L.E. Positselski, Matlis category equivalences for a ring epimorphism, J. Pure Appl. Algebra 224 (10) (2020).

[2] M.V. Bondarko, On weight complexes, pure functors, and detecting weights. — J. of Algebra 574 (2021) 617–668.

[3] M.V. Bondarko, From weight structures to (orthogonal) t-structures and back, preprint, https://arxiv.org/abs/1907.03686, 2019.

[4] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, Non-commutative localizations of additive categories and weight structures, J. Inst. Math. Jussieu 17 (4) (2018) 785–821.

[5] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On purely generated α-smashing weight structures and weight-exact localizations. — J. of Algebra 535 (2019) 407–455.

[6] M. Bökstedt, A. Neeman, Homotopy limits in triangulated categories, Compos. Math. 86 (1993) 209–234.

[7] A.K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, Topology 18 (4) (1979) 257-281.

[8] M. Hoshino, Y. Kato, J-I Miyachi, On t-structures and torsion theories induced by compact objects, J. Pure Appl. Algebra 167 (1) (2002) 15-35.

[9] M. Hovey, J. Palmieri, N. Strickland, Axiomatic Stable Homotopy Theory, Amer. Math. Soc. (1997), 114 pp.

[10] L.A. Hügel, D. Herbera, J. Trlifaj, Divisible modules and localization, J. of Algebra 294 (2005) 519–551.

[11] H. Krause, Localization theory for triangulated categories, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 375 (2010) 161-235.

[12] D. Pauksztello, Compact corigid objects in triangulated categories and co-t-structures. — Cent. Eur. J. Math. 6 (2008) 25–42.

[13] L.E. Positselski, Triangulated Matlis equivalence, J. Algebra Appl. 17 (4) (2018).

[14] Z. Škoda, Noncommutative localization in noncommutative geometry, London Math. Soc. Lec. Note Ser. 330 (2002) 220-313.

[15] J. Stovicek, Compactly generated triangulated categories and the telescope conjecture, 2009.

[16] Ch.A. Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (38), Cambridge University Press, 1994.

[3]Иначе называемый коммутативной S-алгеброй, или highly structured commutative ring spectrum.