

Санкт-Петербургский государственный университет

Германсков Михаил Витальевич
Выпускная квалификационная работа
Описание некоторых групп, порожденных
инволюциями диаграмм Юнга

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 "Математика"
Основная образовательная программа СВ.5000.2018
"Математика"

Научный руководитель:
главный научный сотрудник,
Междисциплинарная исследовательская
лаборатория им. П.Л. Чебышева
д. ф.-м. н.
Вершик Анатолий Моисеевич.

Рецензент:
научный сотрудник,
Санкт-Петербургский
международный математический
институт имени Леонарда Эйлера,
Алпеев Андрей Викторович.

Санкт-Петербург
2022

Содержание

1	Определения и формулировка основных результатов	3
2	Доказательство основных результатов	5

Описание некоторых групп, порожденных инволюциями диаграмм Юнга

Германсков Михаил.

Введение

Для изучения комбинаторики диаграмм Юнга Анатолий Моисеевич Вершик предложил рассматривать группы, порожденные естественными инволюциями двустрочечных таблиц Юнга. Определения и первые результаты были описаны А.М. Вершиком и Н.В. Цилевич в [1]. Автору удалось полностью изучить случай таблиц формы $(n - 2, 2)$ при $n \geq 4$ и изучить случай формы $(n - 3, 3)$ при $n \geq 6$. Также в работе получены существенные результаты о группе, соответствующей произвольной двустрочечной диаграмме.

1 Определения и формулировка основных результатов

Определение 1. \mathbb{Z}_+ -градуированным графом будем называть бесконечный ориентированный граф (V, E) , в котором вершины V суть объединение множеств, проиндексированных \mathbb{Z}_+ , т.е. $V = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} V_n$ а также любое ребро соединяет вершины соседних этажей, то есть для каждого $e \in E$ существует такое i , что $e \in V_i \times V_{i+1}$.

Определение 2. Градуированный граф называется *ромбовидным*, если любой его непустой 2-интервал содержит либо одну, либо две вершины промежуточного уровня, т.е. является либо отрезком, либо ромбом.

Ромбовидные графы возникают в следующей ситуации. Рассмотрим конечное частично упорядоченное множество P с минимальным элементом \emptyset и частично упорядоченное множество $J(P)$ его порядковых идеалов (подмножеств, содержащих вместе с каждым элементом все меньшие его). Это частично упорядо-

ченное множество идеалов будет дистрибутивной решеткой, а его диаграмма Хассе – ромбовидным графом.

Рассмотрим произвольный \mathbb{Z}_+ -градуированный конечный ромбовидный граф Γ ; обозначим через Γ_n множество его вершин уровня n . Пусть $T(\Gamma)$ – множество максимальных путей графа Γ , т.е. путей, соединяющих минимальную вершину (уровня 0) и максимальную вершину (уровня n). Обозначим через S_Γ группу всех перестановок множества $T(\Gamma)$ (очевидно, она изоморфна симметрической группе S_N , где N есть общее число максимальных путей в графе).

Определение 3. Комбинаторная инволюция $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, – это инволюция $\sigma_i \in S_\Gamma$, которая действует следующим образом. Пусть $t = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in T(\Gamma)$, где $t_k \in \Gamma_k$. Инволюция σ_i оставляет неизменными все вершины пути t кроме t_{i+1} . Рассмотрим 2-интервал $[t_i, t_{i+2}]$ в Γ . Если это отрезок, то $\sigma_i(t) = t$. Если же это ромб с промежуточными вершинами t_{i+1}, t'_{i+1} , то

$$\sigma_i(t) = (t_0, \dots, t_i, t'_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n).$$

В силу наших предположений о графе действие инволюции σ_i корректно определено на всех путях графа.

Определение 4. Определим группу перестановок путей графа Γ как группу $G_\Gamma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$, порожденную $n-1$ комбинаторными инволюциями $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ графа $T(\Gamma)$.

Теорема 1.1 (Вершик, Цилевич). Если Γ – произвольный интервал d -мерного графа Паскаля длины n , то $G_\Gamma = S_n$.

Определение 5. Диаграммой Юнга λ будем называть конечный идеал в решетке $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$.

Диаграммы Юнга образуют градуированный граф (который называют графом Юнга \mathbb{Y}): вершина λ лежит в \mathbb{Y}_n , если

$$\sum_i \lambda_i = n,$$

где λ_i – строка диаграммы с номером i (количество элементов идеала вида $(, i)$). Ребро от диаграммы Юнга λ к диаграмме μ проводится, если $\lambda \subset \mu$ и $|\lambda| + 1 = |\mu|$.

Определение 6. Путь от вершины \emptyset до λ в \mathbb{Y} будем называть *таблицей Юнга*. Широко известно, что такой путь соответствует нумерации клеток таблицы λ размера n числами от 1 до n возрастающими по столбцам и строкам.

Пусть λ — диграмма Юнга, и пусть Γ — участок пути в графе Юнга (то есть подграф на вершинах, участвующих в путях) от пустого множества до λ . Множество максимальных путей $T(\Gamma)$ в этом случае будет являться множеством таблиц Юнга формы λ . Мощность этого множества $T(\Gamma)$ будем обозначать $\dim \lambda$. Также будем писать G_λ , подразумевая G_Γ .

Теорема 1.2 (Вершик, Цилевич). Если $\lambda = (n - k, 1^k)$ — крюковая диаграмма, то группа G_λ изоморфна симметрической группе S_{n-1} .

Перейдём к формулировке основных результатов, полученных автором работы.

Теорема 1.3. Если $\lambda = (n - 2, 2)$ при $n \geq 4$, то группа G_λ изоморфна симметрической группе $S_{\dim \lambda}$.

Теорема 1.3 уже была доказана в работе [1]. Автором предложено другое доказательство этой теоремы.

Теорема 1.4. Если $\lambda = (n - 3, 3)$ при $n \geq 6$, то группа G_λ либо равна $S_{\dim \lambda}$, либо равна $A_{\dim \lambda}$.

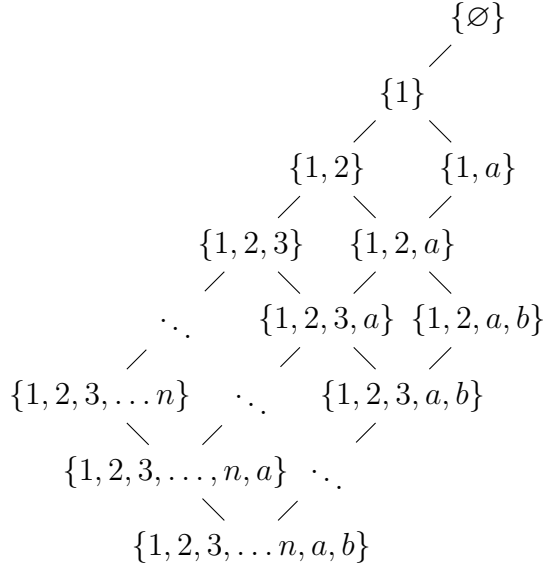
Теорема 1.5. Для $\lambda = (n - k, k)$, где $n \geq 2k$ верно, что $A_{\dim \lambda}$ содержится в G_λ , т.е. G_λ либо симметрическая, либо знакопеременная.

2 Доказательство основных результатов

Теперь мы готовы перейти к доказательству теоремы 1.3.

Лемма 2.1. Пусть есть n -элементное множество X , где $n \geq 2$. Пусть также $X = A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$, и множества A, B непусты. Тогда транспозиции (a, b) , где $a \in A, b \in B$, порождают симметрическую группу S_n .

Замечание. Пусть дана диаграмма $(n, 2)$, в которой в первой строке записаны числа от 1 до n , а во второй строке записаны буквы a, b . Тогда её диаграмма Хассе (интервал в графе Юнга от пустого множества до неё) выглядит так:



Доказательство. Пусть T_1 и T_2 — множества стандартных таблиц Юнга формы λ , в которых элемент 2 находится в первой и второй строке соответственно. Очевидно, что $T = T_1 \cup T_2$ и T_1, T_2 инвариантны относительно σ_i при $i \geq 3$. Для $k = 1, 2$ обозначим $\sigma_i^{(k)}$ сужение σ_i на T_k и положим $G_k = \langle \sigma_i^{(k)} \mid i = 3, \dots, n-1 \rangle$.

Таблицы формы $(n-2, 2)$ параметризуются словами из букв “ l ” и “ r ” такими, что в них $n-2$ буквы “ l ”, 2 буквы “ r ”, и в каждом префиксе слова букв “ l ” не меньше, чем букв “ r ” (“ l ” соответствует выбору очередного элемента в первой строке, “ r ” — во второй). Тогда T_1 отвечает таким словам с префиксом “ ll ”, T_2 — с префиксом “ lr ”. Очевидно, что действие комбинаторных инволюций совпадает со стандартным действием кокстеровских образующих симметрической группы на строках длины $n-2$ и $n-3$ соответственно, а потому G_1 изоморфна S_{n-2} , а G_2 изоморфна S_{n-3} .

Покажем, что эти два действия независимы, в том смысле, что подгруппа $G' := \langle \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \leq G$ изоморфна группе $S_{n-2} \times S_{n-3}$. Пусть $\tau = \sigma_3 \sigma_4 \cdots \sigma_{n-1}$. Из наблюдений в предыдущем абзаце следует, что $\tau_1 := \tau|_{T_1}$ можно отождествить с циклом $(1, 2, \dots, n-2)$ в S_{n-2} , а $\tau_2 := \tau|_{T_2}$ можно отождествить с циклом длины $n-3$ в S_{n-3} . Следовательно, τ^{n-3} действует как цикл $(n-2, n-3, \dots, 1)$ на T_1 и тождественно на T_2 . Далее, σ_3 действует как транспозиция $(1, 2)$ на T_1 и тождественно на T_2 . Но хорошо известно, что перестановки $(n-2, n-3, \dots, 1)$ и $(1, 2)$ порождают группу S_{n-2} . Значит, G' содержит $S_{n-2} \times \{e\}$, откуда, очевидно, следует искомое утверждение.

Далее перейдём к вычислению самой группы G . Рассмотрим $(\sigma_2\sigma_3)^3$. Заметим, что это транспозиция, которая меняет местами слова $t_2 = "lrllrll\dots"$ и $t_1 = "llrrll\dots"$. Первое из них лежит в T_2 , а второе в T_1 . Из того, как устроена группа G' , легко понять, что существует такой элемент $g \in G'$, что для любых $a \in T_1, b \in T_2$

$$g(t_1) = a, g(t_2) = b.$$

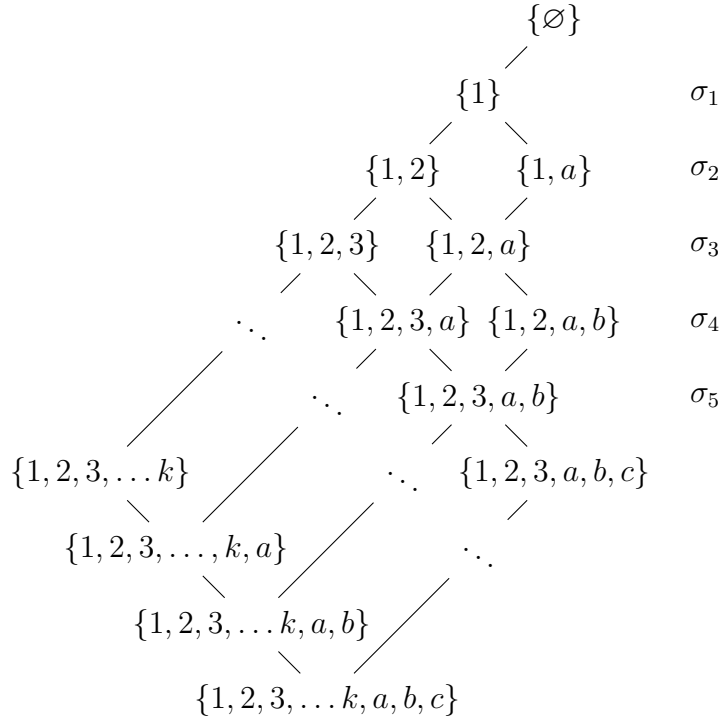
Теперь, рассматривая все элементы вида

$$g(\sigma_2\sigma_3)^3 g^{-1},$$

мы получим любую транспозицию (a, b) , где $a \in T_1, b \in T_2$, а по лемме 2.1 они порождают всю группу, что завершает доказательство. \square

Докажем теорему 1.4.

Замечание. Пусть дана таблица $(k, 3)$, в которой в первой строке записаны числа от 1 до k , а во второй строке записаны буквы a, b, c . Тогда её диаграмма Хассе выглядит так:



При доказательстве теоремы мы будем пользоваться двумя пониманиями путей в градуированном графе диаграммы λ . Первый: слова из $n - 3$ букв "l" и 3 букв "r", где "l", как и до этого,

соответствует выбору элемента в первой строке, а “ r ” соответствует выбору элемента во второй строке, и в каждом префиксе слова букв “ l ” не меньше, чем букв “ r ”. На картинке выше “ l ” можно интерпретировать как спуск по графу налево, а “ r ” — направо.

Доказательство. Возьмём $k = n - 3$ в обозначениях предыдущей картинки.

Пусть T_1 и T_2 — множества путей, проходящих через вершину $\{1, 2, 3\}$ и через вершину $\{1, 2, a\}$ соответственно. Очевидно, что $T = T_1 \cup T_2$ и $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Также T_1, T_2 инвариантны относительно действия $\sigma_i, i \geq 4$. Пусть

$$G' = \langle \sigma_i \mid i = 4, \dots, n - 1 \rangle.$$

Тогда рассмотрим группу H заданную следующим образом:

$$x = (\sigma_4 \sigma_5)^3, \quad H = \langle gxg^{-1} \mid g \in G' \rangle.$$

Легко видеть, что H действует на T_1 тривиально, поскольку $x|_{T_1} = \text{id}_{T_1}$. Пути из T_2 можно разбить на два равных по мощности (биекция реализуется инволюцией σ_2) множества $T_{2,1}$ и $T_{2,2}$ путей, проходящих через вершину $\{1, 2\}$ и вершину $\{1, a\}$ соответственно. Действие G' на $T_{2,1}$, равно как и на $T_{2,2}$ совпадает с действием G_μ на таблицы формы $\mu = (n - 4, 2)$. Из доказательства теоремы 1.3 следует, что $H|_{T_2}$ совпадает с действием $S_{\dim \mu}$ (сопряженные к x элементы порождают всю группу $S_{\dim \mu}$), которое устроено так: если $t_1 \in T_{2,1}, t_2 \in T_{2,2}$, а $g \in S_{\dim \mu}$, то

$$g: (t_1, t_2) \mapsto (gt_1, gt_2).$$

Таким образом, как и в предыдущей теореме, мы можем разложить H в прямое произведение, т.е. $H = e \times S_{\dim \mu}$. А G' можно представить как $S_{n-3} \times S_{\dim \mu}$, где первое слагаемое — естественное действие на T_1 , то есть на интервал в графе Паскаля.

Теперь рассмотрим элемент

$$y = (\sigma_2 \sigma_3)^3.$$

Заметим, что он является набором транспозиций, который меняет местами начала путей, проходящих через вершину $\{1, 2, a, b\}$, то есть меняет префиксы $s_1 = “llrr”$ и $s_2 = “lr lr”$. Элемент y можно записать в разбиении на циклы следующим образом:

$$y = (s_1 a_1, s_2 a_1)(s_1 a_2, s_2 a_2) \cdots (s_1 a_{k-2}, s_2 a_{k-2}),$$

где $k = n-3$ (здесь мы рассматриваем пути как строки; a_i — пути от вершины $\{1, 2, a, b\}$ в конечную вершину, записанные в виде строк). Можно заметить, что $s_1 a_i = y(s_2 a_i)$ для $i = 1, \dots, k-2$.

Наконец, рассмотрим элемент

$$z = (\sigma_3 \sigma_4)^3.$$

Он является перестановкой, меняющей местами префиксы “ $lrllr$ ” и “ $lrlrl$ ”. Тогда его можно записать в разбиении на циклы как $k-2$ транспозиции, меняющие местами $k-2$ пару элементов из T_2 .

Сопрягая z элементами H , мы получим перестановку, которая меняет местами любые $k-2$ пары путей, а тогда несложно будет получить инволюцию, меняющую местами две пары. Таким образом, при помощи G_λ мы умеем действовать на T_2 так: существует $g \in G_\lambda$ такое, что

$$g : (t_1, t_2) \mapsto (ht_1, ft_2), \quad (\dagger)$$

где $t_1 \in T_{2,1}, t_2 \in T_{2,2}, h \in S_{\dim \mu}, fh \in A_{\dim \mu}$ в естественном действии группы $G_{\dim \mu} \times G_{\dim \mu}$ на $T_{2,1}$ и на $T_{2,2}$ соответственно (все пути T_1 при этом остаются на месте).

Аналогично, сопрягая y элементами H и перемножая их, мы можем получить любую перестановку, которая выглядит как $(t_1, y(t_1))(t_2, y(t_2))$ для любых $t_1, t_2 \in T_{2,1}$. Поскольку знакопеременная группа дважды транзитивна, сопряжениями при помощи элементов (\dagger) мы можем получить любую перестановку, которая устроена так:

$$(t_1, t'_1)(t_2, t'_2),$$

где t_1, t_2 — произвольные различные пути из $T_{2,1}$, а t'_1, t'_2 — произвольные различные пути из $T_{2,2}$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.2. Пусть множество M есть дизъюнктное объединение множеств A и B мощности хотя бы 5. Тогда чётные перестановки множества A , чётные перестановки множества B и перестановки вида $(a_1, b_1)(a_2, b_2)$, $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$, где $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ и порождают все чётные перестановки множества M .

Доказательство. Заметим, что нам надо породить перестановки вида $(a_1, a_2)(b_1, b_2)$ и $(a_1, a_2)(a_3, b_1)$, где $a_1, a_2, a_3 \in A, b_1, b_2 \in B$. Тогда посмотрим в первом случае на перестановку $(a_1, a_2)(a_3, a_4)$ и сопряжём её перестановкой $(a_3, b_1)(a_4, b_2)$. Во втором случае посмотрим на перестановку $(a_1, a_2)(a_3, a_4)$ и сопряжём её перестановкой $(a_4, b_1)(a_5, b_2)$, получим искомую. \square

Из этого моментально следует, что H порождает тогда действием на T_2 группу $A_{2 \dim \mu}$. Итак, теперь у нас есть действие G_λ на T , которое можно представить как $S_{n-3} \times A_{2 \dim \mu}$. Теперь докажем, что $A_{\dim \lambda} \leq G_\lambda$. Тогда G_λ будет изоморфна либо $A_{\dim \lambda}$, либо $S_{\dim \lambda}$.

Посмотрим на инволюцию σ_3 . Она меняет между собой какие-то пути из T_1 и $T_{2,1}$. Пусть $T_1 = A \cup A'$, $T_2 = B' \cup B$, причём эти объединения дизъюнкты, а также σ_3 осуществляет биекцию между A' и B' . Тогда пусть $t_1, t_2 \in B$. Докажем, что в G_λ есть перестановки (t_1, t_2, t_3) , где $t_3 \in T$ и t_3 не совпадает с t_1, t_2 . Заметим, что такие перестановки уже есть для $t_3 \in T_2$. Тогда рассмотрим $t_3 \in B'$. Тогда

$$\sigma_3(t_1, t_2, t_3)\sigma_3 = (t_1, t_2, t'_3),$$

где $t'_3 \in A'$. Тогда из транзитивности действия G' на T_1 мы можем сопрячь эту перестановку некоторым элементом и получить (t_1, t_2, a) , где a произвольный элемент T_1 . В итоге мы получили все перестановки из стандартного задания знакопеременной группы образующими и соотношениями. \square

Теорема 2.3. Если n сравнимо с 1 по модулю 4, то $G_\lambda = A_{\dim \lambda}$, иначе $- G_\lambda = S_{\dim \lambda}$.

Доказательство. Давайте докажем, что в случае, когда n сравнимо с 1 по модулю 4, все образующие имеют одинаковую чётность. Для этого докажем, что $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3$ — чётная перестановка для каждого i .

Ясно, что при $i \geq 6$ $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1$ (более подробно об этом будет далее). Поэтому осталось рассмотреть конечное число инволюций. $(\sigma_1 \sigma_2)^3 = \sigma_2$ состоит из $\dim \mu$ транспозиций. $(\sigma_2 \sigma_3)^3$ состоит из $k - 2$ в обозначении предыдущего доказательства транспозиций, $(\sigma_3 \sigma_4)^3$ состоит из $k - 2$ транспозиций. $(\sigma_4 \sigma_5)^3$ состоит из чётного числа транспозиций всегда, это следует из предыдущего доказательства. $(\sigma_5 \sigma_6)^3$ состоит из 4 транспозиций.

Поскольку $\dim \mu = \binom{n-2}{2} - 1$, и $k - 2 = n - 5$, все количества транспозиций чётны, тогда все σ_i имеют одинаковую чётность, а $\sigma_1 = e$ — чётно, поэтому все перестановки чётны.

При других значениях n легко видеть, что либо $k - 2$, либо $\binom{n-2}{2} - 1$ нечётно, что завершает доказательство. \square

Наконец, докажем теорему 1.5. Предположим доказательству несколько лемм.

Пусть нам дана двустрочечная диаграмма $\lambda = (n - k, k)$. Сопоставим таблице T формы λ множество чисел

$$m(T) = \{m_1, m_2, \dots, m_k\},$$

написанных во второй строке T . Определим действие группы

$$S(n, 2k) = \langle s_i = (i, i + 1) \mid i \geq 2k + 1 \rangle \leq S_n$$

на таблицах

$$s_i(\{m_1, m_2, \dots, m_k\}) = \{s_i(m_1), s_i(m_2), \dots, s_i(m_k)\}.$$

Ясно, что это действие совпадает с действием инволюций

$$\langle \sigma_i \mid i \geq 2k + 1 \rangle.$$

Действительно, σ_i меняет в таблице местами числа i и $i + 1$, если они не соседние. А также, так как $i \geq 2k + 1$, числа i и $i + 1$ не могут стоять в одном столбце. Значит, мы не можем поменять их местами, только если они стоят в одной строке (то есть оба числа либо присутствуют в множестве $m(T)$, либо не присутствуют). Но в таком случае действие s_i совпадает с действием σ_i .

Следствие 2.4. В действии на таблицы формы $\lambda = (n - k, l)$ выполнены соотношения $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1$ при $i \geq 2k + 1$.

Лемма 2.5. Пусть $A, B \subset M$ некоторые подмножества конечного множества M и $|A \setminus B| \geq 2$ или $|B \setminus A| \geq 2$. $Alt(A)$ и $Alt(B)$ — группы четных перестановок A и B вложенные в группу всех перестановок множества M . Тогда если $A \cap B \neq \emptyset$, то $\langle Alt(A), Alt(B) \rangle \leq Alt(A \cup B)$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $|A \setminus B| \geq 2$. Возьмём два элемента $x, y \in A$; $x, y \notin B$. Заметим, что $Alt(A)$ порождается три-циклами (x, y, z) , где $z \in A$ и z не совпадает с элементами x, y . Рассмотрим $z_0 \in A \cap B$. Так как $Alt(B)$ транзитивна, сопрягая элементами $Alt(B)$ три-цикл (x, y, z_0) , можно получить все три цикла (x, y, \tilde{z}) , где $\tilde{z} \in B$. Таким образом, у нас есть все три-циклы (x, y, z) , $z \in A \cup B$, а они порождают $Alt(A \cup B)$. \square

Замечание. Легко видеть, что для диаграмм $\lambda = (k, k)$ и $\mu = (k, k - 1)$ верно $G_\lambda \cong G_\mu$, так как число $2k$ всегда стоит в одной и той же клетке λ , поэтому σ_{2k-1} действует в G_λ тривиально, а остальные образующие действуют одинаково.

Доказательство. Докажем это по индукции по размеру диаграммы. Пусть дана диаграмма $\lambda = (n - k, k)$, тогда разобьём множество всех стандартных таблиц формы λ на множества T_1 и T_2 таблиц, в которых число n написано в первой и второй строке соответственно. Тогда рассмотрим подгруппу

$$G' = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-2} \rangle.$$

Ясно, что T_1 и T_2 инвариантны относительно действия этой подгруппы. Также действие G' на T_1 совпадает с действием группы, соответствующей диаграмме $\mu_1 = (n - k - 1, k)$ на таблицы этой формы, аналогично G' на T_2 совпадает с действием группы, соответствующей диаграмме $\mu_2 = (n - k, k - 1)$ на таблицы этой формы.

Разберём два случая: $n = 2k + 1$ и $n \geq 2k + 1$.

Пусть $n \geq 2k + 1$.

Докажем, что элемент $x = (\sigma_{2k-1}\sigma_{2k})^3$ поточечно оставляет на месте T_2 , а на T_1 действует нетривиально. Действительно, по 2.4 получаем, что x поточечно стабилизирует T_2 . На T_1 действует нетривиально, поскольку таблицу со второй строкой $(2, 4, \dots, 2i, \dots, 2k)$ элемент x переводит в таблицу со второй строкой $(2, 4, \dots, 2k - 2, 2k + 1)$.

Таким образом, поточечный стабилизатор T_2 в G' (назовём его H_1) не равен единице и, в сужении на T_1 , является нормальной подгруппой в сужении G' на T_1 . Но поскольку $Alt(T_1)$ простая при $|T_1| \geq 5$ (так можно считать, беря в качестве базы индукции результаты теорем 1.3 и 1.4), этот стабилизатор содержит $Alt(T_1)$. Из этого следует, что и стабилизатор T_1 в G' (назовём его H_2) содержит $Alt(T_2)$.

Рассмотрим теперь подгруппу $F = \sigma_{n-1}H_1\sigma_{n-1}$. Она содержит $Alt(\sigma_{n-1}T_1)$. Нетрудно видеть, что

$$|T_1 \setminus \sigma_{n-1}T_1| = \dim(n - k - 2, k - 1),$$

поскольку тех таблиц, в которых можно поменять местами $n - 1$ и n и в которых число n стоит в первой строке, столько же, сколько таблиц формы $(n - k - 2, k - 1)$. Это число не меньше двух, так как если диаграмма имеет размерность 1, то она либо строка, либо столбец, но $k \geq 4$, то есть вторая строка хотя бы 3, противоречие. Значит, по лемме 2.5

$$\langle H_1, F \rangle \leq Alt(T_1 \cup \sigma_{n-1}T_1).$$

Ещё раз применяя эту лемму к

$$\langle H_2, \langle H_1, F \rangle \rangle,$$

получаем то, что хотели доказать.

Пусть $n = 2k + 1$.

В этом случае $\mu_1 = (k, k)$, $\mu_2 = (k + 1, k - 1)$. На T_1 группа G' действует так же, как на таблицы формы $(k, k-1)$. Теперь можем заметить, что $\dim(k + 1, k - 1) > \dim(k, k - 1)$, поэтому $|T_2| > |T_1|$, значит, поточечный стабилизатор T_1 не равен единице в G' (так как G' порождает своим действием на T_2 хотя бы $Alt(T_2)$, в сужении $G'|_{T_2}$ хотя бы $|T_2|!/2$ элементов, а значит, какие-то два элемента G' действуют на $|T_1|$ одинаково, а на T_2 по-разному, поскольку $(l - 1)! < l!/2$ при всех натуральных $l \geq 3$). После этого дословно повторяем то же доказательство, что и в первом случае.

□

Список литературы

- [1] А. М. Вершик; Н. В. Цилевич, *Группы, порожденные инволюциями ромбовидных графов, и деформации ортогональной формы Юнга*. Записки научных семинаров ПОМИ, Том 481, 2019 г.
- [2] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*. МЦНМО, 2006.
- [3] Р. Стенли *Перечислительная комбинаторика*. Издательство "Мир", 1990.