Отзыв на выпускную квалификационную работу
"О монотонных перестановках в пространстве BMO и классах Макенхаупта"
студента 4 курса бакалавриата 01.03.01 Математика
Санкт-Петербургского государственного университета
Абдрахманова Марата Махмутовича

Пространство функций ограниченной средней осцилляции BMO и тесно связанные с ним классы Макенхаупта A_p — классические объекты гармонического анализа. Вопросы о монотонных перестановках в таких пространствах возникают при решении разнообразных задач, в частности, при оценке интегральных функционалов.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $Q = [0,1]^d$ — куб в пространстве $\mathbb{R}^d$. Для подмножества $J \subset Q$ положительной меры и суммируемой функции $\varphi\colon Q \to \mathbb{R}$ символом $\langle\varphi\rangle_J = \frac{1}{|J|}\int_J \varphi$ обозначим среднее значение φ по J. Пусть $p \geq 1$. Функция φ принадлежит пространству $\mathrm{BMO}(Q)$, если конечна ее p-норма, определяемая формулой

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^p(Q)} = \sup_J \Big(\langle|\varphi - \langle\varphi\rangle_J|^p\rangle_J\Big)^{1/p},$$

где супремум берется по подкубам $J \subset Q$. При всех $p \geq 1$ определенные таким способом нормы являются эквивалентными. Это является простым следствием важного свойства функций из пространства BMO — экспоненциального убывания функции распределения, которое описывается неравенством Джона–Ниренберга: для любого $d \in \mathbb{N}$ существуют такие положительные константы $C_1(d,p)$ и $C_2(d,p)$, что для любой функции $\varphi \in \mathrm{BMO}(Q)$ выполнено неравенство

$$(1)\qquad \frac{1}{|Q|}\Big|\Big\{t \in Q\colon \varphi(t) - \langle\varphi\rangle_Q > \lambda\Big\}\Big| \leq C_1(d,p)\exp\Big(-C_2(d,p)\frac{\lambda}{\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^p(Q)}}\Big), \qquad \lambda > 0.$$

Точные константы $C_1(d,p)$ и $C_2(d,p)$ известны только в одномерном случае ($d = 1$), они были найдены методом функции Беллмана в работах В. И. Васюнина, А. Л. Вольберга и Л. Славина. Поведение констант с ростом размерности d вызывает интерес на протяжении многих лет. Классическое доказательство Джона и Ниренберга позволяет дать экспоненциальную скорость убывания по d константы $C_2(d,p)$; лучшая на данный момент оценка имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{d}}$. При этом до сих пор не известно, обязана ли константа $C_2(d,p)$ стремиться к нулю при стремлении d к бесконечности, или имеется равномерная оценка некоторой константой.

Один из подходов к изучению такого рода вопросов основан на применении монотонной перестановки. Для функции $\varphi\colon Q \to \mathbb{R}$ ее монотонной перестановкой φ^* назовем единственную с точностью до множества меры ноль невозрастающую функцию на отрезке $I = [0,1]$ с тем же распределением. Вопросы о скорости экспоненциального убывания функций распределений для φ и φ^* равносильны, поэтому из оценки нормы монотонной перестановки

$$(2)\qquad \|\varphi^*\|_{\mathrm{BMO}^p(I)} \leq C_3(d,p)\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^p(Q)}$$

легко следует оценка константы в неравенстве Джона–Ниренберга:

$$C_2(d,p) \geq \frac{C_2(1,p)}{C_3(d,p)}.$$

Интересно, что даже для случая $d = 1$ вопрос о константе $C_3(1,p)$ совершенно не тривиален. В работе И. Клемеша 1985 года утверждается, что монотонная перестановка не увеличивает BMO-норму функции на отрезке при всех $p \geq 1$, то есть $C_3(1,p) = 1$. Однако, доказательство приведено только для случая $p = 1$, а представленный в той же работе набросок доказательства для $p > 1$ не позволяет убедиться в справедливости этого утверждения. Для случая $p = 2$ доказательство этого факта было получено в нашей с Д. Столяровым работе с использованием метода функции Беллмана. Насколько мне известно, на данный момент случай других p остается открытым, как и более общий вопрос — о константах $C_3(d,p)$ при $d > 1$.

В своей работе Марат рассматривает модифицированную норму на BMO, отличающуюся от исходной p-нормы тем, что вместо отклонения от среднего в ней вычисляется инфимум отклонений от констант:

$$\sup_J \inf_{c\in\mathbb{R}} \Big(|\langle \varphi - c|^p\rangle_J\Big)^{1/p}.$$

Так определенная норма эквивалентна рассматриваемым до этого нормам на BMO. В первой части своей работы Марат доказывает, что при всех $p \geq 1$ эта норма не увеличивается при монотонной перестановке на отрезке. Приводимое доказательство идейно близко к доказательству из упоминутой выше совместной с Д. Столяровым работы: в доказательстве используются специально построенная локально вогнутая функция F, определенная на многомерной невыпуклой области $S\backslash P$, и так называемая беллмановская индукция, позволяющее доказать аналог неравенства Йенсена. Существенное отличие решаемой Маратом задачи — необходимость рассмотрения функции Беллмана на сложной многомерной области. При этом доказательство Марата выглядит более простым, не оперирует терминологией блуждающих в областях мартингалов.

Во второй части работы Марат приводит результат своей работы над вопросом о монотонной перестановке весов из класса Макенхаупта A_1 с квадрата на отрезок. Как и обсуждаемый выше вопрос про функции из BMO, вопрос об оценке “нормы” оператора монотонной перестановки с куба $Q \subset \mathbb{R}^d$ на отрезок $I = [0, 1]$ для классов Макенхаупта является открытым в размерности $d > 1$ (в размерности $d = 1$ известно, что монотонная перестановка не увеличивает характеристику веса в A_p на отрезке при всех p). Для $d = 2$ в работе Боярского–Сбордона–Вика, среди прочего, построен пример веса из A_1 на квадрате, монотонная перестановка которого имеет большую характеристику, утверждается, что характеристика при монотонной перестановке может увеличиваться почти в 2 раза. Соответствующая верхняя оценка получена в работе Леончика: A_1-характеристика монотонной перестановки не превосходит удвоенной характеристики исходного веса на квадрате. Однако, как выяснилось, в работе Боярского–Сбордона–Вика допущена неточность — построенный ими пример дает увеличение характеристики лишь в $\sqrt{2}$ раз, следовательно, полученная Леончиком верхняя оценка может быть не точной. В своей работе (теорема 2) Марат улучшает известную ранее верхнюю оценку, доказывая, что характеристика веса при перестановке с квадрата на отрезок увеличивается не более, чем в 16/9 раз. Для этого он переформулирует этот вопрос в виде специальной леммы о покрытии (лемма 4), и приводит ее комбинаторное доказательство. Из доказательства видно, что полученная оценка 16/9 может быть улучшена. Есть надежда, что этим методом удастся “дотянуть” верхнюю оценку до $\sqrt{2}$, который получается в примере Боярского–Сбордона–Вика.

Проявив достаточно высокий уровень самостоятельности, Марат в своей работе получил несколько содержательных новых результатов. Несмотря на специфический стиль изложения (частое словестное описание формул вместо уместного их использования), считаю, что работа Марата заслуживает оценки “отлично”.

07.06.2022

П. Б. Затицкий, к.ф.-м.н., доцент СПбГУ, н.с. ПОМИ РАН