Санкт-Петербургский государственный университет

Абдрахманов Марат Махмутович

Выпускная квалификационная работа

О монотонных перестановках в пространстве **BMO** ***и классах Макенхаупта***

Уровень образования: бакалавриат
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2018 «Математика»*

Научный руководитель:
доцент СПбГУ
кандидат ф.-м. наук
Затицкий Павел Борисович

Рецензент:
associate professor,
University of Cincinnati,
College of Arts and Sciences,
Department of Mathematical Sciences;
PhD
Славин Леонид Юрьевич

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

1. Введение

Я исследовал изменение BMO-нормы функций при их монотонной перестановке. Напомним определение пространства BMO и различных норм в нем. Символом $\langle f\rangle_I$ мы обозначаем среднее значение функции f по мере Лебега на множестве I.

Определение 1. Пусть $r \geqslant 1$. Локально суммируемая функция $f\colon Q \to \mathbb{R}$, где $Q \subset \mathbb{R}^n$, принадлежит пространству BMO(Q), если

$$\sup_I \langle |f - \langle f\rangle_I|^r\rangle_I < \infty,$$

где I — все n-мерные кубы, лежащие в Q, со сторонами, параллельными осям. Этот супремум, возведенный в степень $1/r$, называется $\mathrm{BMO}^r(Q)$-нормой функции f и обозначается символом $\|f\|_{\mathrm{BMO}^r(Q)}$.

Далее в случае, если Q — отрезок, будем писать просто BMO^r вместо $\mathrm{BMO}^r(Q)$.

Пространство BMO было введено в работе [2] Джона и Ниренберга, там же было доказано, что оно не зависит от выбора r в определении, и при всех r введенные нормы эквивалентны.

Также есть эквивалентная норма, значение которой равно

$$\sup_I \min_l \langle |f - l|^p\rangle_I^{1/p}.$$

Будем далее называть её “BMO-нормой с вычитанием константы” в отличие от “BMO-нормы с вычитанием среднего”, описанной выше. Для обеих норм будем называть значения, из которых берётся sup, средней осцилляцией по отрезку.

Также в этой работе рассматривается монотонная перестановка на родственных BMO классах Макенхаупта.

Определение 2. Вес $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ лежит в классе $A_p, p \in (1,\infty)$, если

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{q}{p}}dx\right)^{\frac{p}{q}}\right) < \infty,$$

где q — такое, что $1/q + 1/p = 1$, а B — все кубы в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям. Этот супремум называется константой Макенхаупта веса ω.

Для $p = 1$ определение немного меняется, $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \in A_1$, если среднее по любому кубу не превосходит существенного инфимума по этому кубу, домноженного на константу C, инфимум среди таких констант называется константой Макенхаупта.

Для функции f, заданной на множестве конечной меры, ее монотонной перестановкой называется монотонная функция $\overline{f}$, такая что для всех $s \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lambda(x|f(x) > s) = \lambda(x|\overline{f}(x) > s).$$

Вопрос о том, как может изменяться норма функции при монотонной перестановке, изучался многими авторами. В работе [3] Клемеш утверждает, что BMO^p-норма функции на отрезке не увеличивается при монотонной перестановке. Приведенное им доказательство, основанное на лемме Рисса о восходящем солнце, по-видимому, работает только для случая $p = 1$. Для случая $p = 2$ аналогичный результат был доказан с помощью функции Беллмана Затицким и Столяровым в работе [4]. Для прочих p вопрос, видимо, остается открытым.

Константа Макенхаупта веса из A_p на отрезке тоже не увеличивается при монотонной перестановке, доказательство можно найти в той же работе [4].

Для размерности $n > 1$ монотонная перестановка функции с куба $[0, 1]^n$ на отрезок $[0, 1]$ может увеличивать норму функции из BMO и характеристику веса Макенхаупта. Точные оценки в обеих многомерных задачах неизвестны.

Для $n = 2$ в работе [1] авторы строят пример веса из класса Макенхаупта A_1 и утверждают, что его характеристика увеличивается при монотонной перестановке на отрезок почти в 2 раза (сколь угодно близко к 2). В работе [5] автор доказывает, что для $n = 2$ характеристика веса из A_1 увеличивается не более, чем в 2 раза, тем самым норма (нелинейного) оператора монотонной перестановки в этом случае как будто равна 2. Однако, оказывается, что пример, построенный в работе [1], дает увеличение нормы лишь в $\sqrt{2}$ раз. Я покажу, что верхняя оценка 2 на норму оператора перестановки не является точной, по крайней мере если рассматривать непрерывные веса из A_1.

Одним из основных результатов моей работы является теорема 1, в которой я доказываю, что монотонная перестановка не увеличивает норму с вычитанием константы при перестановке функции с отрезка на отрезок. Вторым результатом моей работы является теорема 2, утверждающая, что характеристика непрерывного веса из $A_1([0, 1]^2)$ увеличивается при монотонной перестановке на отрезок не более, чем в $16/9$ раз.

2. Основная теорема про BMO

Теорема 1. *При* $1 \leqslant p < +\infty$ *монотонная перестановка не увеличивает* BMO^p *норму с вычитанием константы на отрезке.*

Доказательство. Везде в доказательстве этой теоремы под BMO-нормой и осцилляцией мы будем иметь в виду BMO-норму и осцилляцию с вычитанием констант. Для начала докажем лемму, которая облегчит нам последующее доказательство.

Лемма 1. *Утверждение теоремы достаточно доказывать только для функций, принимающих конечное число значений.*

Доказательство. Пусть теорема не верна. Рассмотрим функцию, для которой её утверждение не выполняется. Пусть это будет функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, и у неё BMO^p норма на ε меньше, чем у её возрастающей монотонной перестановки. Возрастающую монотонную перестановку обозначим за $\overline{f}$. Обозначим норму f за n (норма монотонной перестановки, соответственно, будет $n + \varepsilon$). Выберем $s, t \in (0, 1)$, такие что $\inf_l \langle |\overline{f} - l|^p \rangle_{[s,t]} \geqslant (n+\varepsilon/2)^p$. Пусть $a = \overline{f}(s)$, $b = \overline{f}(t)$. Пусть $g(x) = \max(a, \min(f(x), b))$, $\overline{g}(x) = \max(a, \min(\overline{f}(x), b))$. Понятно, что $\overline{g}$ это монотонная перестановка g, норма $\overline{g}$ не меньше $n + \varepsilon/2$, норма g не больше n. Выберем такую константу δ, что для любых двух чисел, по модулю не превосходящих $b - a$ и отличающихся не более, чем на δ, разность p-ых степеней их модулей будет меньше, чем $(n + \varepsilon/4)^p - n^p$. Она тогда также окажется меньше $(n + \varepsilon/2)^p - (n + \varepsilon/4)^p$. Выберем k и разобьём отрезок $[a, b]$ на $k - 1$ равных отрезков там, чтобы их длины были меньше δ. Назовём множество концов этих отрезков (включая a и b) E. Построим по $g(x)$ функцию $h(x)$, которая в каждой точке будет равна ближайшей к $g(x)$ точкой из E (если таких две, то меньшей из них). Аналогично по $\overline{g}(x)$ построим $\overline{h}(x)$. Понятно, что $\overline{h}(x)$ это монотонная перестановка $h(x)$, а также что у $\overline{h}(x)$ больше норма (очевидно, для обеих этих функций для любого подотрезка минимум достигается для l из отрезка $[a, b]$, поэтому $|h(x)-l|^p-|g(x)-l|^p < (n+\varepsilon/4)^p - n^p$, поэтому норма $h(x)$ строго меньше, чем $(n+\varepsilon/4)$, и аналогично норма $\overline{h}(x)$ строго больше, чем $(n + \varepsilon/4)$. Лемма доказана. □

Будем доказывать противоречие для полученных функций h и $\overline{h}$, принимающих значения в конечном множестве E. Переобозначим n и ε, чтобы $n-\varepsilon$ было нормой h, а n - осцилляцией $\overline{h}$ на отрезке $[s, t]$. Зададим отображение φ, действующее на функциях из любого отрезка I в E и сопоставляющее им точку из $\mathbb{R}^k_+$, такое что

$$\varphi(f)_i = \frac{1}{\lambda(I)}\lambda(\{x \in I | f(x) = a + (b - a) \cdot (i - 1)/(k - 1)\}).$$

Областью значений данной функции будет симплекс S, представляющий из себя множество точек с неотрицательными координатами и лежащих на гиперплоскости с суммой координат 1. Вершинами этого симплекса являются точки $\varphi(c)$, $c \in E$, соответсвующие константным функциям. Понятно, что это отображение одинаково на функциях, отличающихся перестановкой. Введём операцию конкатенации на функциях, которая будет представлять из себя функцию, заданную на конкатенации отрезков, на которых заданы изначальные функции, и равную первой функции на первом отрезке, и второй функции на втором отрезке. Будем обозначать её как $f \cup g$. Понятно, что $\varphi(f \cup g)$ это выпуклая комбинация $\varphi(f)$ и $\varphi(g)$ с весами, пропорциональными длинам отрезков, на которых заданы эти функции. Символом $f(x)$ обозначим какую-то функцию, соответствующую данной точке $x \in S$, заданную на $[0,1]$. Введём отображение ψ, которое точке $x \in S$ будет сопоставлять осцилляцию функции $f(x)$. Такая осцилляция будет одинакова для всех возможных соответствующих функций. Будем называть запретной зону в S, в которой ψ больше n. Обозначим её символом P.

Никакая из функций, получаемых сужением h на подотрезок, не попадает в запретную зону P под действием φ, и даже находится на расстоянии, большем какой-то константы (расстояние между двумя компактами, где ψ не меньше n и где она же не больше $n - \varepsilon$). Заметим, что функция ψ вогнутая, потому что её можно представить как минимум из континуального множества функций $\langle |f(x) - l|^p \rangle_I^{1/p}$, а каждая из этих функций, очевидно, линейна на S, то есть вогнута. Получается, что запретная зона P тоже выпуклая. Я докажу, что $\varphi(h)$ не лежит не только в запретной зоне P, но и в выпуклой оболочке запретной зоны P и точек $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, соответствующих функциям, принимающим только одно значение — a или b.

Лемма 2. *Назовём плохой зоной B дополнение запретной зоны P до выпуклой оболочки запретной зоны и точки $\varphi(a) = (1, 0, 0...)$ (соответствующей функции, принимающей только значение a), хорошей $G = S \setminus (B \cup P)$ — дополнение плохой B и запретной P до всего симплекса S, являющегося множеством значений отображения φ.*

Тогда существует локально вогнутая (то есть вогнутая на любом отрезке, целиком лежащим в области определения) функция F, заданная на $S \setminus P$, принимающая отрицательные значения везде внутри плохой зоны P и 0 — во всех точках, соответствующим функциям, принимающим только одно значение, то есть в вершинах симплекса S.

Доказательство. Я утверждаю, что в качестве этой функции подходит функция F, равная $u(x) = n^p - \langle |f(x) - a - n|^p \rangle$, если эта величина отрицательна и $v(x) = \langle |f(x) - a - n|^{p-1} \cdot \mathrm{sign}(f(x) - a - n) \rangle \leqslant 0$, и 0 в противном случае. Нужно проверить, что она непрерывна (тогда автоматически на любом отрезке она будет или линейной или конкатенацией константного нуля и отрицательной линейно, то есть вогнутой) и отрицательна на плохой зоне B (то, что она 0 на константах, очевидно).

Точки разрыва у неё могут быть только в тех точках, где $u(x) < 0$ и $v(x) = 0$.

Заметим, что $v(x)$ это производная по l от функции $\langle|f(x)-l|^p\rangle$, вычисленная в точке $a+n$, домноженная на константу. Эта производная, очевидно, возрастает, то есть в точке, где она равна 0, достигается минимум $\langle|f(x)-l|^p\rangle$, то есть осцилляцией по всему отрезку является $\langle|f(x)-a-n|^p\rangle^{1/p}=(n^p-u(x))^{1/p}>n$, тогда все такие точки лежат в запретной зоне B. То есть на области определения G заданная функция непрерывна, что нам и требовалось.

Осталось показать, что F отрицательна в плохой зоне B. Точки в плохой зоне — это точки, которым соответствуют функции, полученные конкатенацией функции с осцилляцией по области определения больше n, и константы a, и сами не лежащие в запретной зоне. Понятно, что для таких точек x выполнено неравенство $u(x)<0$, ведь u и v – линейные функции, $(n^p-u(x))^{1/p}$ не меньше осцилляции по области определения для $f(x)$ (то есть $u<0$ в запретной зоне), а $u(\varphi(a))=0$. Пусть в точке в плохой зоне F равна 0. Тогда в ней $v(x)>0$. Но это означает, что на отрезке, соединяющем $\varphi(a)$ и x, найдётся точка x_1, такая что $v(x_1)=0$, ведь $v(\varphi(a))<0$. Тогда аналогично рассуждению чуть выше $u(x_1)<0$, и в таком случае аналогично рассуждению из предыдущего абзаца x_1 лежит в запретной зоне. Но тогда мы получаем, что на прямой, соединяющей $\varphi(a)$ и x, с обеих сторон от x лежат точки из запретной зоны, она выпуклая, следовательно, x в запретной зоне, противоречие. Лемма доказана. $\square$

Используя эту лемму и построенную функцию F, докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Точка $\varphi(h)$ не лежит в плохой зоне B.*

Доказательство. Для этого я докажу, что F принимает в точке $\varphi(h)$ значение 0. Проведём беллмановскую индукцию. Функция F —- локально вогнута на области G. Пусть функция h определена на отрезке I. Пусть отрезок I разбит точкой на два подотрезка, I_1 и I_2, а h_1 и h_2 — сужения функции h на I_1 и I_2. Если отрезок, соединяющий точки $\varphi(h_1)$ и $\varphi(h_2)$, лежит в области G, то из локальной вогнутости функции F следует неравенство

$$F(\varphi(h))\geqslant\frac{|I_1|}{|I|}F(\varphi(h_1))+\frac{|I_2|}{|I|}F(\varphi(h_2)).$$

Покажем, что h и её сужения всегда можно разбить так, причём отношения длин отрезков будут отделены от нуля и бесконечности. Выберем подотрезок, на котором задана h, получим функцию h_0. Для каждого $t\in[0,1]$ рассмотрим функции h_1^t и h_2^t, полученные из h_0 делением её на два отрезка в отношении t и $1-t$. Расстояния в $\mathbb{R}^k$ обозначим как d. Тогда $d(\varphi(h_0),\varphi(h_1^t))/d(\varphi(h_0),\varphi(h_2^t))=t/(1-t)$. Рассмотрим множество A тех $t\in[0,1]$, для которых отрезок $\varphi(h_0)$ и $\varphi(h_1^t)$ пересекает запретную зону, и B, на котором отрезок между $\varphi(h_0)$ и $\varphi(h_2^t)$ пересекает запретную зону. Понятно, что они оба открытые, так как запретная зона открытая. Также понятно, что они не пересекаются, так как запретная зона выпуклая, а $\varphi(h_0)$ не лежит в ней. Также

$\varphi(h)$ отстоит на ненулевое расстоянии от запретной зоны, поэтому в множестве A $d(\varphi(h_0), \varphi(h_1^t))/d(\varphi(h_0), \varphi(h_2^t))$ ограничено снизу, ведь $d(\varphi(h_0), \varphi(h_1^t))$ не меньше расстояния от $\varphi(h)$ до запретной зоны, а $d(\varphi(h_0), \varphi(h_2^t))$ ограничено сверху диаметром области значений φ. Таким образом, существует общая константа σ, большая нуля и зависящая только от n и ε, такая что $A \subset [\sigma, 1]$. Аналогично существует константа $\sigma' > \sigma$, меньшая единицы, такая что $B \subset [0, \sigma']$. Таким образом можно выбрать инфимум среди чисел, не лежащих в B и лежащих в $[\sigma, 1]$ - он не будет лежать ни в A, ни в B и будет находиться между двумя константами, что нам и требовалось.

Построим следующую последовательность функций $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ и разбиений отрезка $[0, 1]$ H_n. H_1 будет состоять из одного отрезка $[0, 1]$, для получения H_{n+1} возьмём разбиение H_n, сужения функции h на его подотрезки, и будем дальше разбивать их, как описывалось ранее, до тех пор, пока длина всех отрезков разбиения не будет меньше или равна $1/n$. После этого f_n будет задаваться следующим образом. В каждой точке она будет равна $F \circ \varphi$ от сужения функции h на отрезок разбиения H_n, содержащий данную точку. Как описано ранее, из-за локальной вогнутости функции F последовательность функций f_n будет удовлетворять условию $\int_0^1 f_n \geqslant \int_0^1 f_{n+1}$. Также заметим, что все f_n ограничены какой-то одной константой (так как F - непрерывная функция на компакте). Ещё можно заметить, что почти в каждой точке u отрезка $[0, 1]$ значение φ от сужений h на отрезки разбиения H_n, содержащие u, стремятся к φ от константы u, то есть $f_n(u) \to 0$, ведь F непрерывная функция, и в точках, соответствующим константам, равна 0. Теперь мы можем воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости и получить, что $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 0dx = 0$, поэтому $\int_0^1 f_1(x)dx = F(\varphi(h)) \geqslant 0$, что нам и требовалось. Лемма доказана. □

Мы доказали, что $\varphi(h)$ не лежит в выпуклой оболочке запретной зоны P и $\varphi(a)$. Точно так же доказывается, что $\varphi(h)$ не лежит в выпуклой оболочке запретной зоны P и $\varphi(b)$. Заметим, что объединение этих множеств выпуклое, так как противное будет обозначать, что отрезок между $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ не будет пересекать запретную зону, но это невозможно, потому что функция, принимающая только значения a и b на множествах одинаковой меры, имеет максимальную среднюю осцилляцию среди всех, принимающих значения от a до b.

Теперь используем лемму 3, чтобы получить противоречие. Мы знаем, что φ от сужения $\overline{h}$ на $[s, t]$ лежит в запретной зоне P, но тогда $\varphi(\overline{h})$ можно получить как выпуклую линейную комбинацию точки из P, $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$. Но $\overline{h}$ это перестановка h, мы знаем, что φ от таких функций должны быть равны, но мы ранее видели, что $\varphi(h)$ не может лежать в этой оболочке, получили противоречие. Теорема доказана. □

3. Классы Макенхаупта

Я также доказал следующую теорему для класса Макенхаупта A_1.

Теорема 2. *Если вес $f \in A_1([0,1]^2)$ непрерывен, то его монотонная перестановка на отрезок $[0,1]$ имеет A_1-характеристику, превосходящую исходную не более, чем в $16/9$ раз.*

Доказательство. Пусть заданы $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ и её монотонная возрастающая перестановка на отрезок $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Будем доказывать, что $||g||_{A_1} \leqslant 16/9 \cdot ||f||_{A_1}$. Я докажу это для функций, принимающих константные значения на квадратах решётки со стороной 2^{-k}, из этого будет следовать утверждение теоремы, потому что непрерывные функции можно равномерно приближать своими усреднениями по маленьким квадратам, и тогда так же будут равномерно приближаться их монотонные перестановки. При этом также, понятно, будут приближаться и константы Макенхаупта.

Пусть утверждение теоремы не выполнено. Рассмотрим отрезок $[s,t]$, на котором отношение среднего значения и существенного инфимума g превышает $16/9 \cdot ||f||_{A_1}$. Заменим обе функции f и g на $\max(f, g(s))$ и $\max(g, g(s))$, норма f от этого не увеличится, отношение на отрезке $[s,t]$ для g не изменится. Также можно заменить t на 1, от этого, очевидно, отношение среднего и существенного инфимума на нём не уменьшится.

Получается, можно считать, что $t = 1$ и $g(x) = g(s)$ для всех $x < s$. Рассмотрим множество $G = f^{-1}(g(s))$. Оно имеет меру, не меньшую, чем s. Я покажу, что $\forall \varepsilon > 0$ можно в квадрате $[0,1]^2$ расположить меньшие квадратики, так чтобы они покрывали любую точку из $\overline{G} = [0,1]^2 \setminus G$ хотя бы один раз, существенный инфимум в каждом из них был равен $g(s)$ (для этого достаточно, чтобы они пересекались с G по множеству ненулевой меры), и их суммарная площадь не превосходила $(16/9 + \varepsilon) \cdot (1 - s)$. В таком случае сумма интегралов f по всем ним будет не меньше, чем $\int_s^1 g$, а тогда среди них найдётся такой, что среднее значение по нему будет не меньше, чем $\frac{\int_s^1 g}{(1-s)\cdot(16/9+\varepsilon)}$, при этом существенный инфимум по нему будет равен $g(s)$, то есть мы получим противоречие. Получается, мы свели задачу к другой, сформулируем её как лемму.

Лемма 4. *Выбрано некоторое непустое множество $G \subset [0,1]^2$, состоящие из квадратиков из решётки со стороной 2^{-k}. Тогда можно покрыть $\overline{G} = [0,1]^2 \setminus G$ квадратами, пересекающимися с G и имеющими суммарную площадь не большую, чем $16/9 \cdot \lambda(\overline{G})$ (в таком случае $\forall \varepsilon$ мы сможем немного расширить все квадратики, чтобы получить условие про ненулевую меру пересечения с G и условие про площади с ε, описанное выше).*

Доказательство. Будем доказывать по индукции.
База для $k = 0$ очевидна, докажем переход.
Выберем угол квадрата, в который можно вписать наибольший квадрат, не пересекающий множество G. НУО это левый нижний. Рассмотрим этот наибольший квадрат.

- Если этот квадрат имеет сторону меньше, чем $1/2$, то в каждой четверти целого квадрата есть точки из G, то есть мы можем просто применить предположение индукции для каждого из них.

- Если этот квадрат имеет сторону больше, чем $1/2$, но меньше, чем $2/3$, то мы можем поступить следующим образом: разобьём квадрат со стороной 1 на 4 квадрата со стороной $1/2$, для каждого из них, содержащего точки из G применим предположение индукции, а не содержащие точки из G накроем прилегающими к углу квадратами со стороной $2/3$ (все такие квадраты содержат точки из G). Так как $\frac{2/3}{1/2}^2 = 16/9$, поэтому оценка сходится.

- Остаётся случай, когда этот квадрат имеет сторону больше, чем $2/3$. Разобьём исходный квадрат на 16 квадратов со стороной $1/4$, будем называть их по координатам - пара чисел от 0 до 3, (0,0) - левый нижний. Заметим, что $\lambda(G) > 7/16$, иначе можно покрыть всё одним квадратом со стороной 1. Также мы уже поняли, что $\lambda(\overline{G}) \geqslant 4/9$. Для нашего покрытия выберем квадрат со стороной $3/4$, прилегающий к левому нижнему углу — он точно пересекается с G. Среди оставшихся 7 маленьких квадратов максимум в одном может не быть точек из G, так как $7/16 + 4/9 + 2/16 > 1$. Рассмотрим два случая.

  Если в каждом из этих маленьких квадратов есть точки G, применим к каждому из них предположение индукции. В уже выбранном квадрате со стороной $3/4$ площадь $\overline{G}$ не меньше $4/9$, и $9/16 < 4/9 \cdot 16/9$, то есть площадь этого выбранного квадрата меньше, чем $16/9$ умножить на площадь $\overline{G}$ в нём, переход в таком случае доказан.

  Если только в одном из маленьких квадратов нет точек G. Покроем его вместе с каким-нибудь соседним квадратом со стороной $1/2$. Тогда в двух выбранных квадратах покрытия площадь $\overline{G}$ не меньше, чем $4/9 + 1/16 = 73/144$, а сумма площадей этих двух квадратов равна $9/16 + 1/4 = 13/16$, что меньше, чем $73/144 \cdot 16/9$. Для оставшихся квадратов применим предположение индукции.

Лемма доказана. □

С доказательством леммы доказано и утверждение теоремы. □

Как мы видим, все неравенства в доказательстве были строгими, поэтому его можно немного улучшить. Также понятно, что если лемма 4 верна с некоторой константой, меньшей $16/9$, то теорема 2 будет тоже верна с той же константой. Ещё кажется, что если рассматривать меньшие разбиения (а на 2×2), то можно приблизиться к известной оценке снизу на эту величину (равную $\sqrt{2}$), но в таком случае возникают большие переборы случаев, с которыми мне не удалось справиться.

Список литературы

[1] B. Bojarski, C. Sbordone, I. Wik, *The Muckenhoupt class* $A_1(\mathbb{R})$. Studia Mathematica, 101 (1992), no. 2, 155–163.

[2] F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 14 (1961), 415–426.

[3] I. Klemes, *A mean oscillation inequality.* Proceedings of the AMS, 93 (1985), no. 3, 497–500.

[4] D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals.* Advances in Mathematics, 291 (2016), 228–273.

[5] Е. Ю. Леончик, *Об оценке перестановки функции из класса Макенхаупта* A_1. Украинский математический журнал, 62 (2010), № 8, 1145–1148.