Санкт-Петербургский государственный университет

РЕШЕТОВА Софья Дмитриевна

Выпускная квалификационная работа

Вокруг локальной комбинаторной формулы
для S1-расслоений

Уровень образования: бакалавриат
Направление: 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа: СВ.5000.2018 «Математика»

Научный руководитель:
Панина Гаянэ Юрьевна,
профессор, Факультет математики и
компьютерных наук СПбГУ

Рецензент:
Смирнов Евгений Юрьевич, доцент,
Факультет математики, научный сотрудник,
Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»»

Санкт-Петербург
2022

1. Введение

Определение

Локально тривиальное расслоение со слоем ориентированная окружность – это тройка E, B, π: тотальное пространство E, база B и непрерывное отображение $\pi : E \to B$, где прообраз каждой точки из базы B гомеоморфен S^1, на каждом слое задано эффективное действие S^1, и расслоение является локально-тривиальным в обычном смысле слова. То есть для каждой точки $x \in B$ существует такая окрестность $U \ni x$ и гомеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times S^1$, что φ переводит слои в слои и сужение φ на слой – изоморфизм групп.

Определение

Комплексное линейное расслоение – это тройка из тотального пространства E, комплексного многообразия B и непрерывного отображения $\pi : E \to B$, где для каждой точки $x \in B$, на прообразе $\pi^{-1}(x)$ задана структура C^1, кроме того, расслоение является локально-тривиальным в обычном смысле слова.

Известно, что с каждым комплексным линейным расслоением можно связать ассоциированное локально тривиальное расслоение со слоем ориентированная окружность над той же самой базой, и наоборот. Эти две категории изоморфны.

Определение

Сечение расслоения $E \xrightarrow{\pi} B$ – это непрерывное отображение $s : X \to E$ такое, что для любой точки x из базы, $s(x) \in \pi^{-1}(x)$.

Пусть $S \to E \xrightarrow{\pi} B$ расслоение со слоем ориентированная окружность. Мы предполагаем, что B и E триангулированны таким образом, что π отображает симплексы в симплексы линейно.

Класс Эйлера-Черна – это препятствие к существованию непрерывного сечения в расслоении.

Один из способов определить класс Эйлера-Черна:

Утверждение [1] [2]

Пускай есть расслоение $E \xrightarrow{\pi} B$ над триангулированной базой. Предположим, что частичное сечение s определено на $1-$мерном скелете B. Зафиксируем ориентацию в каждом симплексе σ в базе. Тогда $\varepsilon(s, \sigma)$ – степень отображения $s : \partial\sigma \to S$ является коциклом и представляет класс Эйлера-Черна $e(E \xrightarrow{\pi} B)$.

Локальная комбинаторная формула для класса Эйлера-Черна $e(E \xrightarrow{\pi} B)$ – это алгоритм, который ставит в соответствие каждому симплексу в базе рациональное число, зависящее от триангуляции прообраза данного симплекса. Результатом алгоритма является коцепь ε, которая представляет класс Эйлера-Черна данного расслоения. При этом значение коцепи на каждом симплексе σ базы зависит только от триангуляции прообраза.

Существование локальной комбинаторной формулы было открыто независимо Н.Мнёвым, Шарыгиным [6] и Игусой [7].

Представим основную идею построения коцепи вкраце. Эта идея принадлежит М. Казаряну (мультисечения Казаряна [3]), а так же использовалась в [4].

Пускай есть не одно, а несколько частичных сечений $s_1, \cdots, s_n$ определённых на 1-мерном скелете B, каждому из которых соответствует целая коцепь $\varepsilon(s_i, \sigma)$. Тогда среднее $\frac{1}{n}\sum_i \varepsilon(s_i, \sigma)$ – рациональная коцепь, представляющая класс Эйлера-Черна.

Пользуясь комбинаторной структурой триангуляции, мы выбираем множество частичных сечений. Сначала эти сечения задаются на $0-$мерном скелете, а потом продолжаются на $1-$мерный для каждого треугольника в базе так, что вместе получается некоторый набор частичных сечений всего расслоения.

Было предположено, что локальная комбинаторная формула не единственна.

Определение
Две локальные комбинаторные формулы не совпадают, если существует такое триангулированное расслоение и симплекс σ в базе данного расслоения, что коцепи, соответствующие двум формулам, дают разные значения на симплексе σ.

Можно легко получить локальную комбинаторную формулу, которая будет отличаться от существующей (пример 3). Нам же интересно, насколько разнообразен класс всех локальных комбинаторных формул.

В данной работе изучается вопрос – насколько разнообразны локальные комбинаторные формулы, получающиеся с помощью обобщения описанного алгоритма.

Рассматривается рациональная функция f из некоторого множества функций, отвечающая за веса, с которыми усредняется набор частичных сечений $s_1, \cdots, s_n$.

Основной результат (Теорема 1) – локальная комбинаторная формула не зависит от выбора определяющей функции f.

В данной работе рассмотрены только расслоения со слоем окружность, однако существуют локальные комбинаторные формулы и для расслоений со слоем S^n для произвольного n [8].

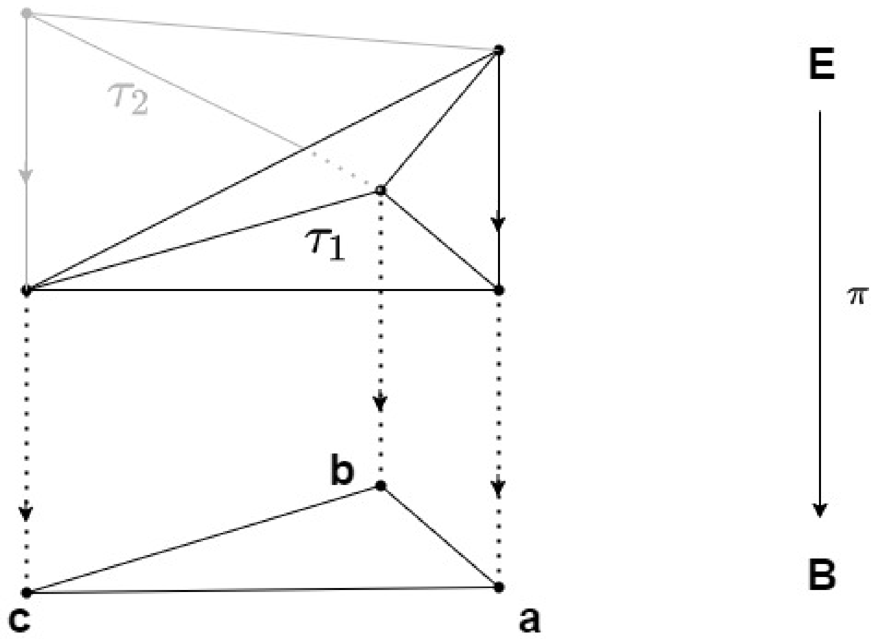
2. Определения

Для двумерного симплекса σ в базе B обозначим его вершины a, b, c таким образом, что это отвечает положительной ориентации данного симплекса.

Рассмотрим все симплексы, лежащие в прообразе симплекса из базы $\pi^{-1}(\sigma)$. В каждом из них две вершины отображаются в одну и ту же вершину σ, а оставшиеся две - в разные. Сопоставим каждому симплексу из прообраза ту вершину σ, в которую отображаются две его вершины.

Определение
Пусть фиксированы расслоение $S \to E \xrightarrow{\pi} B$ и триангуляции базы и тотального пространства такие, что π отображает симплексы в симплексы линейно. Ожерельем над двумерным симплексом $\sigma \in B$ с вершинами a, b, c будем называть ориентированный цикличный набор из бусин a, b, c, который соответствует комбинаторной структуре $\pi^{-1}(\sigma)$ следующим образом: каждому симплексу $\tau \in E$ сопоставляется бусина, совпадающая с названием такой вершины x, что $\pi^{-1}(x) \cap \tau$ – отрезок. Для каждого симплекса в тотальном пространстве есть ровно одна такая вершина из трёх вершин симплекса в базе. Всё ожерелье соответствует цикличной последовательности симплексов в прообразе $\sigma \in X$.

См. рисунок, на рисунке изображены триангуляция прообраза двумерного симплекса $\sigma \in B$ и два последовательных симплекса размерности 3 в этой триангуляции – τ_1 и τ_2. Симплекс τ_1 имеет две вершины, которые отображаются в вершину a сисмплекса σ под действием π, следовательно он отвечает вершине a. Другой же симплекс, τ_2, отвечает вершине c. Тем самым, этим двум симплексам соответствуют две последовательные бусины a и c в ожерелье.



Каждая бусина задаёт частичное сечение в соответствующей вершине треугольника базы с точностью до гомотопии – возьмём точку строго внутри ребра симплекса, которому соответствует данная бусина, отображающегося в вершину треугольника. Поэтому выбор бусин в ожерелье задаёт частичное сечение на 0-мерном скелете.

Будем обозначать число букв a в ожерелье как $\#(a)$.

3. Основной результат

Пусть $S \to E \xrightarrow{\pi} B$ расслоение со слоем ориентированная окружность. Мы предполагаем, что B и E триангулированны таким образом, что π отображает симплексы в симплексы линейно. Размерность базы равна двум.

Рассмотрим треугольник в базе и ожерелье, которое соответствует комбинаторной структуре его прообраза.

Для каждой тройки бусин abc на нём есть 8 способов продолжить сечения из 0-мерного скелета на 1-мерный – для каждой пары вершин можно выбрать продолжение сечения по часовой или против (отметим, что есть счётное количество способов продолжить сечение на 1-мерный скелет, но мы рассматриваем лишь те два, которые не делают полный оборот вокруг окружности).

Заведём функцию f – вероятности продолжения конкретных сечений по часовой или против. f задана на множестве двухцветных ожерелий с двумя разноцветными выделенными бусинами и выделенной дугой между ними

Определение

- f – функция, которая действует на двухцветных ожерельях с двумя (разноцветными) выделенными бусинами и выделенной дугой между ними.
- f является вероятностью в том смысле, что сумма значений f для одного и того же ожерелья с одними и теми же выделенными бусинами, но противоположными дугами, должна быть равна 1.

- f инвариантна относительно действия группы перестановок названий бусин a, b, c.

Рассмотрим подмножество таких функций – все функции f вида $f(n, k_a, k_b)$, где k_a – общее число букв a на дуге, соответствующей продолжению сечения, k_b – общее число букв b на той же дуге, а n – число букв a и b во всём ожерелье.

Каждое сечение продолжим по часовой или против с вероятностями равными значениям функции f на соответствующей дуге ожерелья. Отметим, что для каждой тройки abc продолжения сечений ab, bc и ac мы выбираем независимо.

Для простоты будем обозначать $f_{ab}(k_a, k_b) = f(\#a + \#b, k_a, k_b)$ – значение f для ожерелья из a и b на дуге с числами бусин k_a и k_b.

Обозначим $E_f(S)$ матожидание индекса частичного сечения для ожерелья S, в котором за вероятности продолжений сечений на рёбра отвечает функция f.

И обозначим $E_f(abc)$ матожидание индекса частичного сечения для конкретной тройки бусин abc, за вероятности продолжений сечений на рёбра отвечает функция f.

Пример 1

Рассмотрим функцию $f = \frac{1}{2}$.

Для каждой тройки abc мы равновероятно продолжаем сечения на рёбра ab, bc, ac по часовой и против. Посчитаем индекс в каждом из восьми возможных продолжений и в сумме получим -4 или 4, в зависимости от ориентации тройки abc на ожерелье. Тогда матожидание индекса сечения для тройки abc равно $-\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2}$.

Матожидание индекса сечения по всем тройкам abc и всем возможным продолжениям на рёбра будет равно

$$E_{\frac{1}{2}}(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\#(acb) - \#(abc)}{\#(a)\#(b)\#(c)}$$

Это соответствует локальной комбинаторной формуле Н.Мнёва и Г.Шарыгина [6]

Пример 2

Другой естественный пример: рассмотрим ожерелье как электрическую цепь, где каждое ребро - провод одной и той же длины с одинаковым сопротивлением. Продолжать сечение на одну из двух дуг мы будем с вероятностью, соответствующую пропорции, в которой разделится ток, если пустить его от одной выделенной бусины к другой.

В этом случае f будет пропорциональна длинам противоположных дуг. Действительно, если длины дуг равняются l и r, то по первой дуге потечёт $\frac{\frac{1}{l}}{\frac{1}{l}+\frac{1}{r}} = \frac{r}{r+l}$, а по второй $\frac{l}{r+l}$.

Пример 3

Вернёмся ко всему множеству функций вероятности продолжений сечений. Рассмотрим следующую функцию f: на всех ожерельях и всех выделенных дугах она равняется $\frac{1}{2}$, кроме ожерелья $aaaabbb$ и дуги $aaabb$ на нём, для такой конфигурации значение будет $\frac{1}{3}$ (и $\frac{2}{3}$ для противоположной дуги). В этом случае коцепь, представляющая класс Эйлера-Черна, построенная по функции f будет отличаться от коцепи в примере 1 в том случае, если в триангуляции встретилось хотя бы одно такое выделенное ожерелье.

Теорема 1

Предположим, что f зависит только от чисел бусин a и b на дуге и общего числа бусин в ожерелье: $f(k_a, k_b, n)$

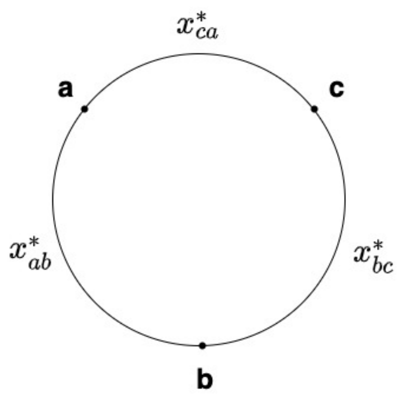
Пусть мы продолжаем сечения по часовой или против с 0-мерного скелета на 1-мерный с вероятностями $f(k_a, k_b, n)$.

Тогда для любого ожерелья S, $E_f(S)$ не зависит от функции f. И, следовательно, все локальные комбинаторные формулы, задаваемые такими конструкциями, совпадают.

Лемма 1

Рассмотрим любую тройку abc на ожерелье.

Обозначим x_{uv}^{w} – количество букв w на той дуге ожерелья между буквами u и v из выбранной тройки, которая не содержит третью букву тройки.



Тогда, если тройка положительно ориентирована, то матожидание индекса равно

$$f_{ab}(x_{ab}^{a}, x_{ab}^{b}) + f_{ac}(x_{ac}^{a}, x_{cb}^{b}) + f_{cb}(x_{cb}^{c}, x_{cb}^{b}) - 2$$

Иначе матожидание индекса равно

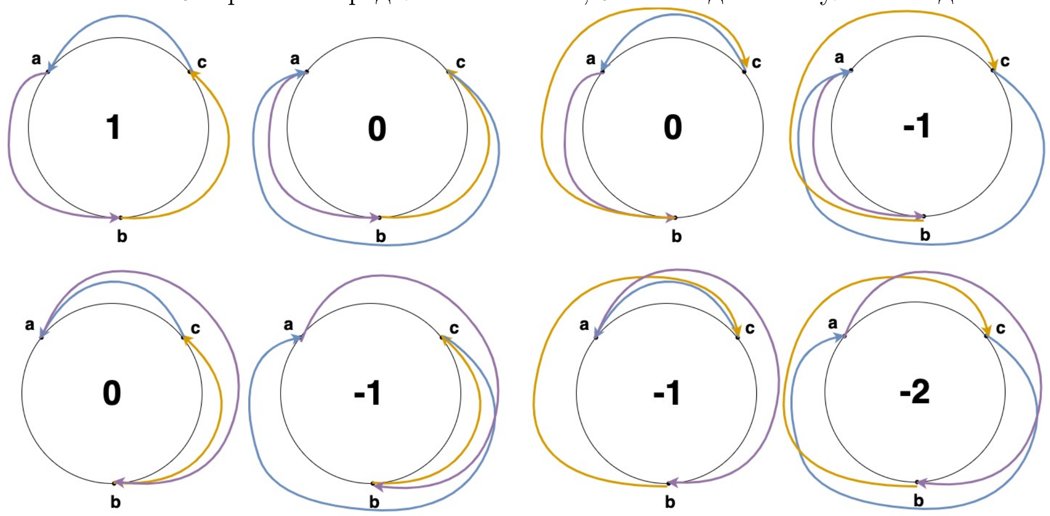
$$2 - f_{ab}(x_{ab}^{a}, x_{ab}^{b}) - f_{ac}(x_{ac}^{a}, x_{cb}^{b}) - f_{cb}(x_{cb}^{c}, x_{cb}^{b})$$

Доказательство

Для тройки abc есть всего 8 вариантов продолжить сечение с вершин симплекса на рёбра. Вес (или вероятность) каждого из них будет произведение трёх функций $f_{ab}(...) \cdot f_{ac}(...) \cdot f_{cb}(...)$, где аргументы - число соответствующих букв на соответствующей дуге ожерелья.

Напишем теперь матожидание индекса для тройки abc (положительно-ориентировнной): Для краткости обозначим $f_{vw} = f_{vw}(x_{vw}^{v}, x_{vw}^{w})$, то есть функцию от дуги между v и w, не содержащей третью букву.

Выпишем все 8 вариантов продолжить сечение, 5 из них дают ненулевой индекс:



$$1 \cdot f_{ba} f_{cb} f_{ac} + (-1) \cdot (1 - f_{ba}) f_{cb} (1 - f_{ac}) + (-1) \cdot f_{ba} (1 - f_{cb})(1 - f_{ac}) +$$
$$+ (-1) \cdot (1 - f_{ba})(1 - f_{cb}) f_{ac} + (-2) \cdot (1 - f_{ba})(1 - f_{cb})(1 - f_{ac}) =$$

$$= f_{ba} + f_{cb} + f_{ac} - 2$$

Аналогично, для отрицательно-ориентрованной тройки abc будет то же значение, умноженное на -1.

Лемма 2

Рассмотрим ожерелье S, в котором идут подряд $n+1$ буква a, затем $m+1$ буква b и $k+1$ буква c. Для любой функции f:

$$E_f(S) = \frac{1}{2}$$

.

Доказательство

Рассмотрим тройку abc. Пускай по часовой стрелке до выбранной a есть ровно x других a, тогда после выбранной a будет $n - x$. Анаогично для $b - y$, для $c - z$.

Вклад этой тройки в общее матожидание индекса будет

$$\frac{-1}{\#a\#b\#c}\Big(f_{ac}(x, k-z) + f_{ab}(n-x, y) + f_{bc}(m-y, z) - 2\Big)$$

Формула для матожидания индекса для всего ожерелья тогда:

$$\frac{-1}{\#a\#b\#c}\sum_{x,y,z} f_{ac}(x, k-z) + f_{ab}(n-x, y) + f_{bc}(m-y, z) - 2$$

Посмотрим на первое слагаемое:

$$\sum_{x,y,z} f_{ac}(x, k-z) = m\sum_{x,z} f_{ac}(x, k-z)$$

В нём x принимаетзначения от 0 до n, а z принимает значения от 0 до k. То есть второй аргумент принимает значения от 0 до k.

Теперь заметим, что в двухцветном ожерелье из a и b, $f_{ac}(x, k-z)$ и $f_{ac}(n-x, k-k+z)$ отвечают за противоположные дуги: действительно, если на одной дуге было x бусин a и $k-z$ бусин b, то числа бусин на противоположной дуге определяются однозначно по их общему количеству.

Тогда в сумме $m\sum_{x,z} f_{ac}(x, k-z)$ все слагаемые разбиваются на пары за возможным исключением $x = n - x,\ k - z = z$. А каждой паре сумма $f_{ac}(x, k-z)$ и $f_{ac}(n-x, z)$ равняется единице по определению функции f. Значит каждая такая пара слагаемых вносит в сумму вклад, не зависящий от функции f.

В случае, когда n и k чётные и $x = \frac{n}{2}$, $z = \frac{k}{2}$ нужно заметить, что две противоположные дуги содержат одинаковые количества букв a и b. А значит функция f обязана иметь одинаковые значения на этих двух дугах, $\frac{1}{2}$.

Получается, что вся сумма никак не зависит от функции f. Из примера 1 мы знаем, что значение матожидания для $f = \frac{1}{2}$ равняется $\frac{1}{2}$.

Вычисление матожидания индекса для произвольного ожерелья

Возьмем произвольное ожерелье S, выделим в нём две соседние буквы ab и рассмотрим новое ожерелье S', в котором мы поменяли эти две буквы местами. Пускай за вероятности продолжений сечений отвечала функция f. Посмотрим, как изменится матожидание индекса у S'.

Для того, чтобы вычислить новое значение матожидания индекса, достаточно посмотреть только на изменения для троек abc, которые содержат одну или обе выделенные буквы ab, так как в любой другой тройке на любой дуге каждого двухцветного ожерелья количества букв не изменились. Дальше будем обозначать две выделенные буквы ab, которые мы поменяли местами, как $\alpha\beta$.

Будем различать три вида таких троек:

- Содержат α, β, c
- Содержат α, b, c

- Содержат a, β, c

В двух последних случаях тройка может быть положительной или отрицательной ориентации и не меняет ориентацию при переходе от S к S'. Все тройки первого вида были отрицательной ориентации в S и стали положительной в S'.

Лемма 3

$$E_f(S') - E_f(S) = -\frac{1}{\#(a)\#(b)}$$

Доказательство

Сначала рассмотрим все тройки первого вида, $\alpha\beta c_S \to \beta\alpha c_{S'}$. Нижним индексом будем обозначать, в каком из двух ожерелий мы рассматриваем нашу тройку.

Нас интересует разность $E_f(\beta\alpha c_{S'}) - E_f(\alpha\beta c_S)$. Чтобы её посчитать, достаточно воспользоваться леммой 1, расписав всё через сумму значений f на дугах.

$$E_f(\beta\alpha c_{S'}) = f_{\alpha\beta_{S'}}(0,\ 0) + f_{\beta c_{S'}}(x^b_{\beta c},\ x^c_{\beta c}) + f_{c\alpha_{S'}}(x^c_{c\alpha},\ x^a_{c\alpha}) - 2$$

$$E_f(\alpha\beta c_S) = 2 - f_{\alpha\beta_S}(0,\ 0) - f_{\beta c_S}(x^b_{\beta c},\ x^c_{\beta c}) - f_{c\alpha_S}(x^c_{c\alpha},\ x^a_{c\alpha})$$

Теперь заметим, что почти все слагаемые сокращаются:

$$f_{\beta c_S}(x^b_{\beta c},\ x^c_{\beta c}) + f_{\beta c_{S'}}(x^b_{\beta c},\ x^c_{\beta c}) = 1$$

$$f_{c\alpha_{S'}}(x^c_{c\alpha},\ x^a_{c\alpha}) + f_{c\alpha_S}(x^c_{c\alpha},\ x^a_{c\alpha}) = 1$$

Действительно, $x^b_{\beta c},\ x^c_{\beta c}$ в S находится на противоположной стороне от $x^b_{\beta c},\ x^c_{\beta c}$ в S', аналогично со второй суммой.

Следовательно, $E_f(\beta\alpha c_{S'}) - E_{ind}(\alpha\beta c_S) = 2f_{ab}(0,\ 0) - 2$

Тогда для всех троек вида 1:

$$\sum_c E_f(\beta\alpha c_{S'}) - E_f(\alpha\beta c_S) = \frac{1}{\#(a)\#(b)\#(c)}\#c \cdot (2f_{ab}(0,\ 0) - 2)$$

Тройки вида 2 и 3:

Зафиксируем какую-то букву c на ожерелье. Будет называть её теперь γ.

Есть два вида троек, на которых нам нужно посчитать изменение матожидания индекса – для всех b, кроме β, тройки $\alpha b\gamma$, которые бывают положительно и отрицательно ориентированы, в зависимости от того, с какой стороны от γ находится b. Аналогично для всех a, кроме α.

Каждая буква a и b, кроме выделенных $\alpha\beta$, входит ровно в одну тройку, на которой мы считаем изменение матожидания индекса.

Будем идти против часовой (от α и β до γ и дальше от γ до α и β) и смотреть на каждую букву a или b. Будем обозначать букву, на которую мы смотрим в данный момент A или B.

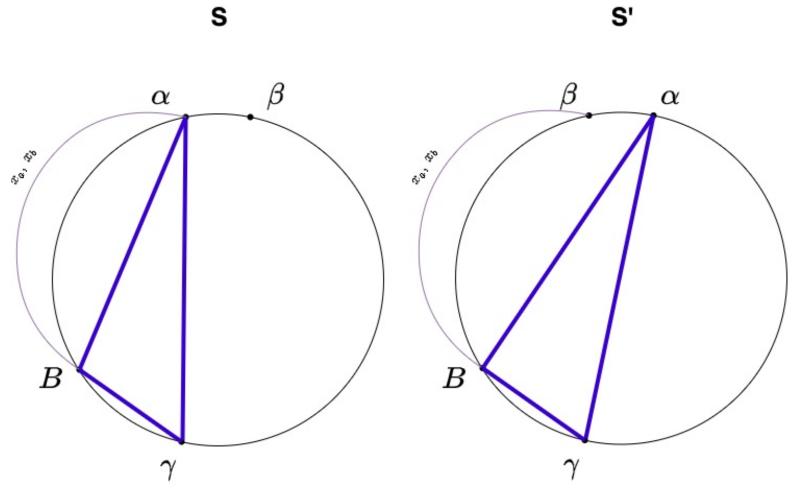
Давайте обозначим x_a и x_b число букв a и b между $\alpha\beta$ и A (или B) против часовой (не включая все выделенные буквы).

Итак, у нас есть 4 вида троек, для которых мы будем считать изменение матожидания индекса (буквы перечисляем против часовой стрелки):

- $\alpha B\gamma$ – положительно ориентирована
- $\beta A\gamma$ – отрицательно ориентирована
- $\alpha\gamma B$ – отрицательно ориентирована

- $\beta\gamma A$ – положительно ориентирована

Разбираем 4 случая:
1: $\alpha B\gamma$



$$E_f(\alpha B\gamma_{S'}) - E_{ind}(\alpha B\gamma_S) = f(x_a,\ x_b+1) - f(x_a,\ x_b)$$

.

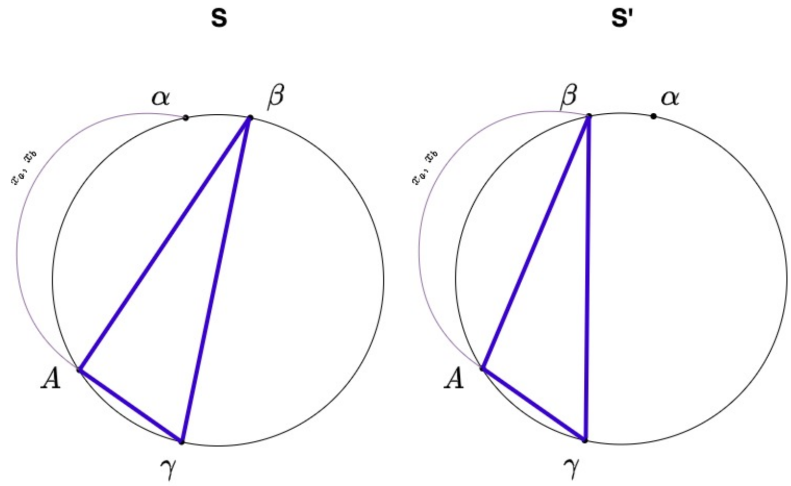
Когда мы меняем местами $\alpha\beta \to \beta\alpha$, в тройке $\alpha B\gamma$ конфигурация двухцветого ожерелья изменяется только для пары αB. Если сначала между α и B было x_a и x_b букв в двухцветном ожерелье, то в S' добавится β. Воспользуемся леммой 1:

$$E_f(\alpha B\gamma_S) = f_{ab}(x_a, x_b) + f_{ac}(...) + f_{bc}(...) - 2$$

$$E_f(\alpha B\gamma_{S'}) = f_{ab}(x_a, x_b+1) + f_{ac}(...) + f_{bc}(...) - 2$$

Так как двухцветные ожерелья для ac и bc не изменились, почти все слагаемые сократятся, и разность матожиданий будет равняться $f(x_a,\ x_b+1) - f(x_a,\ x_b)$.

2: $\beta A\gamma$

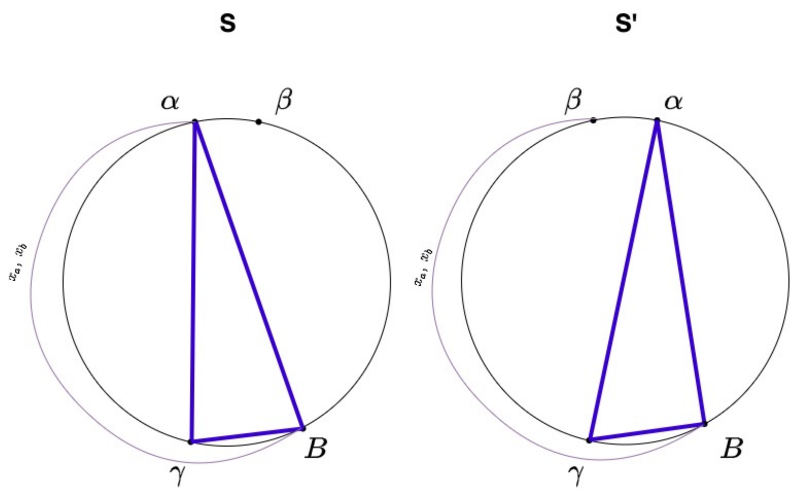


$$E_f(\beta A\gamma_{S'}) - E_{ind}(\beta A\gamma_S) = f(x_a+1,\ x_b) - f(x_a,\ x_b)$$

.

Ориентация тройки отрицательная, поэтому знаки у наших выражений будут другими. При этом в разности $E_f(\beta A\gamma_{S'}) - E_f(\beta A\gamma_S)$ не сократится только f для дуги между A и β, так как только для них конфигурация двухцветногоожерелья будет отличаться в S и S'. В S' будет $-f(x_a,\ x_b)$, в S будет $-f(x_a+1,\ x_b)$ (так как в S' между β и A удаляется α).

3: $\alpha\gamma B$



$$E_f(\alpha\gamma B_{S'}) - E_f(\alpha\gamma B_S) = f(x_a,\ x_b+1) - f(x_a,\ x_b)$$

Напомним, что $x_a,\ x_b$ всё ещё количество a и b против часовой от $\alpha\beta$ до A или B. Теперь это не совпадает с определением x^a_{ab}, так как на этой дуге между a и b стоит буква c. Подставим в формулу из леммы 1 $f_{ab}(x^a_{ab}, x^b_{ab}) = 1 - f(x_a,\ x_b)$, так как мы всё ещё хотим выражать матожидание через x_a и x_b.

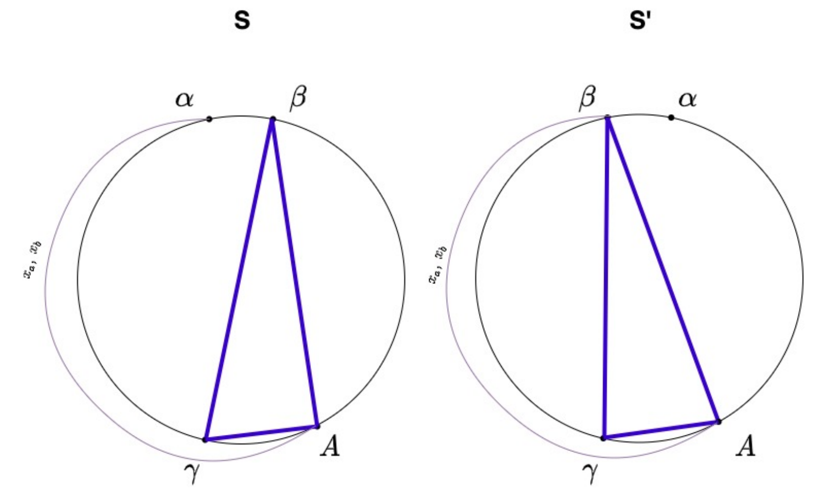
Опять же, нас интересует только слагаемое для αB, у всех остальных двухцветные ожерелья не меняются. Ориентация тройки отрицательная.

$$E_f(\alpha B\gamma_S) = -(1 - f_{ab}(x_a, x_b)) - f_{ac}(...) - f_{bc}(...) + 2$$

$$E_f(\alpha B\gamma_{S'}) = -(1 - f_{ab}(x_a, x_b+1)) - f_{ac}(...) - f_{bc}(...) + 2$$

Разность матожиданий равняется $f(x_a,\ x_b+1) - f(x_a,\ x_b)$.

4: $\beta\gamma A$



$$E_f(\beta\gamma A_{S'}) - E_f(\beta\gamma A_S) = f(x_a+1,\ x_b) - f(x_a,\ x_b)$$

Ориентация тройки положительная, при этом x_a снова не совпадает с определением x^a_{ab}.
Тогда

$$E_f(\alpha B\gamma_S) = (1 - f_{ab}(x_a+1, x_b)) + f_{ac}(...) + f_{bc}(...) - 2$$

$$E_f(\alpha B\gamma_{S'}) = (1 - f_{ab}(x_a, x_b)) + f_{ac}(...) + f_{bc}(...) - 2$$

И разность матожиданий равна $f(x_a+1,\ x_b) - f(x_a,\ x_b)$.

Сумма изменений матожиданий:

Просуммируем изменение матожидания по всем тройкам с фиксированной γ.

При проходе против часовой от $\alpha\beta$ до $\alpha\beta$, нужно просуммировать разности функций f.

Пускай мы просуммировали все разности на дуге с $x_a,\ x_b$ бусинами a и b. Тогда мы получим $f(x_a+1,\ x_b) - f(0,\ 0)$ или $f(x_a,\ x_b+1) - f(0,\ 0)$ в зависимости от того, какая бусина стоит на этой дуге последней. Действительно, при переходе к новой бусине, если сумма разностей была $f(x_a,\ x_b+1)$ и бусина b была последней, добавляется $f(x_a+1,\ x_b+1)$ или $f(x_a,\ x_b+2)$ и вычитается $f(x_a,\ x_b+1)$ так как к бусинам на новой дуге добавилась бусина b. Аналогично для $f(x_a+1,\ x_b)$ и последней бусины a.

В итоге, после прохода по всему ожерелью, сумма разностей матожиданий будет равна $f(\#(a)-1,\ \#(b)-1) - f(0,\ 0)$, то есть разности функций от пустой дуги и дуги, которая соответствует всему ожерелью (за исключением выделенных α и β). Эти дуги являются противоположными, а значит в сумме значения f на них должны давать единицу.

Заметим, что это значение не зависит от γ, поэтому общее изменение индекса умножится на число способов выбора γ, то есть $\#(c)$

$$\sum_{case\ 2,3} E_{fS'} - E_{fS} = \frac{1}{\#(a)\#(b)\#(c)}(f(\#(a)-1,\ \#(b)-1) - f(0,\ 0)) = \frac{1}{\#(a)\#(b)\#(c)}(1 - 2f(0,\ 0))$$

$$\sum_c \sum_{case\ 2,3} E_{fS'} - E_{fS} = \frac{1}{\#(a)\#(b)\#(c)}(f(\#(a)-1,\ \#(b)-1) - f(0,\ 0)) = \frac{\#c}{\#(a)\#(b)\#(c)}(1 - 2f(0,\ 0))$$

Сложим это со случаем 1 и получим:

$$E_f(S') - E_f(S) = -\frac{1}{\#(a)\#(b)}$$

Аналогичными рассуждениями можно заключить, что при замене $\beta\alpha \to \alpha\beta$ все ориентации поменяются, и матожидание индекса умножится на -1.

Доказательство теоремы

Теорема теперь следует из леммы 3. Действительно, для любой функции f значение матожидания индекса на простом ожерелье одинаковое. Затем, последовательно переставляя соседние буквы, мы каждый раз будем получать константное изменение матожидания индекса, при этом получив все возможные ожерелья. Значит, для любой функции f, которая зависит только от количества букв в ожерелье, мы будем получать всегда одну и ту же коцепь.

4. Заключение

Мы показали, что при естественном обобщении алгоритма локальной комбинаторной формулы для класса Эйлера-Черна, коцепь, представляющая этот класс, никак не меняется. С одной стороны, локальная комбинаторная формула не единственна. С другой стороны, все локальные комбинаторные формулы, управляемые довольно широким спектром функций, совпадают.

Список литературы

[1] J.H. Milnor, J.D. Stasheff, Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies 76. Princeton University Press,(1974) Princeton.

[2] A. Fomenko, D. Fuchs, Homotopical topology, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 273, Springer, Cham, 2016.

[3] M.Kazarian, The Chern-Euler number of circle bundle via singularity theory, Math. Scand., 82:2 (1998), 207-236

[4] G. Gangopadhyay, Counting triangles formula for the first Chern class of a circle bundle, arxix:1712.03024v2

[5] N. Mnëv, A note on a local combinatorial formula for the Euler class of a PL spherical fiber bundle, arXiv:2109.06143v2, to be published in J. Math. Sci., New York

[6] Nikolai Mnev, Georgy Sharygin, On local combinatorial formulas for Chern classes of triangulated circle bundle, arXiv:1608.04708

[7] K. Igusa, Combinatorial Miller–Morita–Mumford classes and Witten cycles, Algebr. Geom. Topol., 4:1 (2004), 473–520

[8] Gaiane Panina, An elementary approach to local combinatorial formulae for the Euler class of a PL spherical fiber bundle