

Санкт-Петербургский государственный университет

**Михайлова Екатерина**

**Выпускная квалификационная работа**

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ПИРАГАСА И ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ДЛЯ  
ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ**

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа ВМ.5751.2020 «Математическое моделирование,  
программирование и искусственный интеллект»

Профессиональная траектория «Динамические системы, эволюционные уравнения,  
экстремальные задачи и математическая кибернетика»

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор Т. Н. Мокаев

Рецензент:

гл. технический директор,

ООО "ЮниДата" А. В. Цирюльников

Санкт-Петербург

2022

Saint Petersburg State University  
Applied Mathematics and Computer Science  
Dynamical Systems, Evolution Equations, Extreme Problems  
and Mathematical Cybernetics

**Mikhailova Ekaterina**

**Graduation Project**

DEVELOPMENT OF PYRAGAS AND HARMONIC BALANCE METHODS FOR  
THE RESEARCH OF NONLOCAL BIFURCATIONS

Scientific Supervisor:

PhD, Professor T. N. Mokaev

Reviewer:

Chief technical officer, Unidata

A. V. Tsiryulnikov

Saint Petersburg

2022

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Постановка задачи</b> . . . . .	7
<b>Глава 1. Основные определения</b> . . . . .	9
1.1. Динамические системы и аттракторы . . . . .	9
1.2. Элементы теории Флоке . . . . .	11
<b>Глава 2. Методы Пирагаса</b> . . . . .	12
2.1. Классический метод запаздывающей обратной связи . . . . .	12
2.2. Метод запаздывающей обратной связи с неустойчивой компонентой . . . . .	13
2.3. Метод решения дифференциальных уравнений с запаздыванием в Matlab . . . . .	15
<b>Глава 3. Метод гармонического баланса</b> . . . . .	17
3.1. Описание метода гармонического баланса . . . . .	17
3.2. Метод гармонического баланса и его математическое обоснование . . . . .	19
3.3. Бифуркация удвоения периода . . . . .	22
<b>Глава 4. Метод Крылова-Ньютона</b> . . . . .	24
4.1. Сечение Пуанкаре . . . . .	24
4.2. Методы Ньютона-Рафсона и Ньютона-Крылова . . . . .	25
4.2.1. Метод Ньютона-Рафсона (с якобианом) . . . . .	26
4.2.2. Метод Ньютона-Крылова (без якобиана) . . . . .	27
4.2.3. Пошаговый подход . . . . .	28
4.2.4. Добавление ограничений . . . . .	29
<b>Глава 5. Метод Демидовича для оценки мультипликаторов Флоке</b> . . . . .	30
<b>Глава 6. Основной результат: исследование неустойчивых периодических орбит в сценарии рождения скрытого хаотического аттрактора Чуа</b> . . . . .	34
6.1. Применение модифицированного алгоритма Пирагаса к системе Чуа . . . . .	36
6.2. Применение метода гармбаланса для системы Чуа . . . . .	36
6.2.1. Матричный вид системы Чуа. Передаточная функция . . . . .	36

6.2.2.	Вычисление матрицы замены переменных $S$ . . . . .	37
6.2.3.	Нахождение значений амплитуды . . . . .	39
6.2.4.	Вычисление начальных данных . . . . .	39
6.2.5.	Моделирование траекторий системы Чуа из начальных данных, полученных из гармбаланса . . . . .	40
6.3.	Применение метода Крылова-Ньютона для системы Чуа . . . . .	41
6.4.	Проверка системы Чуа на наличие ONL . . . . .	42
6.5.	Применение метода Пирагаса с неустойчивой компонентой к системе Чуа	44
<b>Заключение</b> . . . . .		46
<b>Список литературы</b> . . . . .		47
<b>Приложение А. Реализация процедуры Крылова-Ньютона в Matlab для аппроксимации неустойчивой периодической траектории в системе Чуа</b>		51
<b>Приложение Б. Реализация процедуры Демидовича вычисления мультимпликаторов Флоке в Matlab для периодических траекторий системы Чуа</b> . . . . .		54
<b>Приложение В. Реализация модифицированного метода Пирагаса с неустойчивой компонентой для стабилизации неустойчивых периодических траекторий системы Чуа</b> . . . . .		57

## Введение

Причиной возникновения хаоса в динамических системах является неустойчивость (чувствительность) по отношению к выбору начальных данных: малое изменение начального условия приводит к большим изменениям состояния системы [1–3]. Часто в прикладных системах хаос может являться нежелательным поведением, которое необходимо подавлять, поэтому возникает задача управления хаосом [4, 5]. На данный момент существуют различные методы для управления хаосом, применяющиеся в физике, химии, биологии, экономике и др., целью которых является достижение стабилизации управляемой системы. Несмотря на эффективность этих методов, на практике у них есть ряд ограничений, которые нельзя обойти в общем случае.

Проблема стабилизации нелинейных систем, как правило, формулируется в виде задачи стабилизации неустойчивых периодических траекторий и неустойчивых состояний равновесия, вложенных в хаотический аттрактор. Развивая идеи Э. Отта, К. Гребоджи и Дж. Йорке [4], литовским инженером и физиком К. Пирагасом был предложен метод стабилизации неустойчивых периодических траекторий нелинейных систем [6, 7]. Метод Пирагаса основывается на конструировании специального управления в форме обратной связи с запаздыванием, которое обнуляется на самой периодической траектории, при этом делая данную траекторию локально орбитально устойчивой.

Предложенное К. Пирагасом управление в форме обратной связи с запаздывающей компонентой показало себя эффективным методом стабилизации неустойчивых периодических траекторий хаотических систем. Однако, в рамках метода Пирагаса возникает ряд трудностей, связанных с определением периода искомого периодического решения и коэффициента усиления управления — часто на практике эти параметры приходится определять приближенным численным подбором. В дальнейшем были разработаны адаптивные методы поиска и стабилизации неустойчивых периодических траекторий в хаотических динамических системах, в которых эти параметры подбираются непосредственно во время исполнения метода [8, 9]. Эти подходы теоретически обоснованы при некоторых условиях [10, 11] и применены для стабилизации ряда модельных хаотических динамических систем.

Другим подходом для поиска периодических траекторий в динамических системах и системах управления является метод гармонического баланса. Также он назы-

вается методом гармонической линеаризации и методом описывающей функции (см., например, [12]). Основы метода гармонического баланса изложенные в работах Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова [13, 14] и Ван дер Поля [15], заключаются в том, что, при некоторых условиях на нелинейность, колебания в системе могут рассматриваться близкими к гармоническим. Тогда такое периодическое колебание можно разложить в ряд по периодическим функциям и приравнивая коэффициенты ряда, можно приближенно найти частоту колебаний, сдвиг и амплитуду полученного приближенного решения. При этом не всегда решение, полученное с помощью метода гармонического баланса, будет действительно существовать в системе, и наоборот, в системе могут существовать решения, которые не могут быть найдены с помощью метода гармонического баланса (см., например, [12]).

Отметим, что метод гармонического баланса так же нашел свое применение в исследовании бифуркации возникновения предельных циклов динамических систем. Так, в работе Р.Генезио, А.Теси [16] исследуется бифуркация удвоения периода и на основе применения принципа гармонического баланса, выводятся частотные условия для всех (субгармонических) бифуркаций одинаковой коразмерности. В работе [17] Р.Генезио, А.Теси применяли метод гармонического баланса для исследования бифуркации удвоения периода в электронной цепи Чуа – первой системе, для которой было продемонстрировано в физическом эксперименте (на осциллографе) существование хаотического аттрактора. Однако, из-за того, что метод гармонического баланса является приближенным методом, задачу визуализации неустойчивого периодического решения данным методом не решить.

В рамках моей бакалаврской выпускной квалификационной работы данную проблему предлагалось решить комбинацией метода гармонического баланса и метода Пирагаса. Однако для системы Чуа применить данную комбинацию методов сразу не получилось – не сработал классический метод Пирагаса. В связи с этим, возникло предположение, что в системе Чуа (также как и, например, в системе Лоренца) выполняются условия известного ограничения данного метода – ограничения на нечетное число отрицательных показателей Флоке по модулю больших единицы (odd number limitation, ONL) [11, 18].

## Постановка задачи

Целью данной магистерской выпускной квалификационной работы является объединение метода Пирагаса стабилизации неустойчивых периодических траекторий с подходом к аппроксимации периодических траекторий методом гармонического баланса и применение разработанного метода для стабилизации неустойчивых периодических траекторий, возникающих в рамках процедуры продолжения по параметру при локализации скрытого хаотического аттрактора в системе Чуа.

Таким образом, в рамках выпускной квалификационной работы передо мной были поставлены следующие задачи:

1. Модифицировать алгоритм Пирагаса поиска неустойчивых периодических траекторий путем:
  - реализации процедуры гармонического баланса для поиска начального приближения периодического решения;
  - реализации метода Пирагаса с неустойчивой компонентой для преодоления возможного ограничения на нечетное число отрицательных показателей Флорке больших единицы (odd number limitation, ONL).
2. Провести предварительные исследования возможных ограничений (например, ONL) метода Пирагаса в приложении к стабилизации неустойчивых периодических траекторий системы Чуа.
3. Реализовать модифицированный метод в Matlab и апробировать его в рамках процедуры продолжения по параметру при локализации скрытого хаотического аттрактора в системе Чуа.
4. Стабилизировать и визуализировать неустойчивую периодическую траекторию в системе Чуа, разделяющую бассейны притяжения двух симметричных скрытых хаотических аттракторов.

## Обозначения и сокращения

- UPO - unstable periodic orbits, неустойчивая периодическая траектория;
- OGY - Ott-Grebogi-Yorke method, метод Отта-Гребоджи-Йорке;
- DDE - delayed differential equation, дифференциальное уравнение с запаздыванием;
- DFC - delayed feedback control, метод запаздывающей обратной связи;
- ADFC - adaptive delayed feedback control, адаптивный метод запаздывающей обратной связи;
- UDFC - unstable delayed feedback control, метод запаздывающей обратной связи с неустойчивой компонентой;
- ONL - odd number limitation, ограничение на нечетное число отрицательных показателей Флоке больших 1.



## Глава 1

## Основные определения

Материал данной главы основан на работе [19].

## 1.1. Динамические системы и аттракторы

Пусть  $(M, \rho)$ -метрическое пространство. Введем множество значений времени  $J \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$ .

**Определение 1.** Пусть  $\{\varphi^t\}_{t \in J}$  - семейство отображений  $\varphi^t : M \rightarrow M$ . Пара  $(\{\varphi^t\}_{t \in J}, (M, \rho))$  - есть *динамическая система* на метрическом пространстве  $(M, \rho)$  если выполнено:

1.  $\varphi^0 = id_M$  - тождественное отображение на  $M$ ;
2.  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$  для любых моментов времени  $s, t \in J$ ;
3. если  $J \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ , то  $\varphi^{(\cdot)}(\cdot) : J \times M \rightarrow M$  - непрерывное отображение; если  $J \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$ , то для любого  $t \in J$   $\varphi^t : M \rightarrow M$  является непрерывным отображением.

Пространство  $(M, \rho)$  называется *фазовым пространством* динамической системы.

В дальнейшем будем рассматривать динамическую систему

$$(\{\varphi^t\}_{t \in J}, (M, \rho)). \quad (1.1)$$

Рассматриваем динамическую систему (1.1) на полном метрическом пространстве  $(M, \rho)$ .

Пусть заданы точка  $p \in M$  и множества  $Z, Z' \subset M$ . Определим расстояния

$$\begin{aligned} \rho(p, Z) &:= \inf_{q \in Z} \rho(p, q); \\ \rho(Z, Z') &:= \inf_{\substack{q \in Z \\ p \in Z'}} \rho(p, q). \end{aligned}$$

**Определение 2.** Для любой точки  $p \in M$   $\omega$  - *предельным множеством относительно динамической системы* (1.1) называется множество

$$\omega(p) := \{q \in M \mid \exists t_n \rightarrow +\infty, t_n \in J, n \rightarrow +\infty : \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{t_n}(p) = q\}.$$

Для произвольных  $Z_1, Z_2 \subset M$  определим  $dist(Z_1, Z_2) := \sup_{p \in Z_1} \inf_{q \in Z_2} \rho(p, q)$  - *полурастояние по Хаусдорфу*.

В общем случае  $dist(Z_1, Z_2) \neq dist(Z_2, Z_1)$ .

**Определение 3.** Множество  $Z \subset M$  называется *притягивающим* ( $B$ -*притягивающим*) для множества  $W \subset M$  относительно ДС (1.1), если

$$\text{dist}(\varphi^t(p), Z) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \forall p \in W;$$

$$(\text{dist}(\varphi^t(B), Z) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \forall B \in W, B\text{-ограничивающее множество}).$$

Если  $W = M$  и  $Z$ -притягивающее ( $B$ -притягивающее) относительно (1.1), то  $Z$  называется *глобально притягивающим* (*глобально  $B$ -притягивающим*) относительно (1.1).

**Определение 4.** Множество  $\hat{A}(W) \subset M$  называется аттрактором для  $W$  относительно (1.1), если оно обладает следующими свойствами:

1. Множество  $\hat{A}(W)$  является ограниченным и замкнутым;
2. Инвариантно, т.е.  $\varphi^t(\hat{A}(W)) = \hat{A}(W)$  ( $\varphi^t(\hat{A}(W)) = \hat{A}(W)$ ) для  $\forall t \in J$ ;
3.  $\hat{A}(W)$  является притягивающим для  $W$  относительно (1.1), причем предполагается, что  $\text{inf } W \neq \emptyset$ .

Наибольшее множество  $W$ , обладающее свойствами 1-3, называется *областью притяжения*  $\hat{A}(W)$

**Определение 5.** Аттракторы можно классифицировать по регулярности: на *регулярные* и *странные*.

Под регулярными (или простыми) аттракторами понимаются аттракторы, которые являются устойчивыми неподвижными точками, устойчивыми периодическими траекториями или  $n$ -мерными торами.

Аттрактор называется *странным*, если он является притягивающим множеством неустойчивых траекторий в фазовом пространстве динамической системы. Траектория странного аттрактора непериодическая: она не замыкается. Сложная динамика на аттракторе во многом определяется тем, что в него вложено бесконечное количество неустойчивых периодических траекторий с различными периодами.

Траектория динамической системы в аттракторе не должна удовлетворять никаким особым ограничениям, кроме как оставаться на аттракторе, двигаясь вперед во времени. Траектория может быть периодической или хаотической.

**Определение 6.** Если множество точек является периодическим или хаотическим, но поток в окрестности находится вдали от множества, то это множество не является аттрактором, а называется *репеллером*.

## 1.2. Элементы теории Флоке

Рассматриваем систему

$$\dot{u} = f(u). \quad (1.2)$$

где  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое векторное поле. Предположим, что существует поток  $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Пусть  $t \rightarrow \phi^t(p)$  — некоторое  $T$  периодическое движение, т.е.  $\phi^{t+T}(p) = \phi^t(p)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  и  $\phi^{t'}(p) \neq p \quad \forall t' \in (0, T)$ .

Пусть

$$\dot{y} = f'(\phi^t(p))y \quad (1.3)$$

—вариационное уравнение вдоль этого движения.

**Теорема 1. (Флоке).** Фундаментальная матрица системы (1.3) имеет вид  $Y(t) = G(t)e^{Rt}$ , где  $G(\cdot)$  —  $T$ -периодическая,  $C^1$ -гладкая регулярная  $n \times n$ -матричная функция, причем  $G(0) = I$ , а  $R$  — постоянная  $n \times n$ -матрица.

**Определение 7.** *Мультипликаторами Флоке* выше заданного периодического движения называются собственные числа  $\rho_1, \dots, \rho_n$  матрицы  $e^{RT}$ .

**Теорема 2. (Андронов—Витт).** Один из мультипликаторов периодического движения всегда равен 1.

Т.е., можно считать, что  $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, 1 = \rho_n$ .

Пусть  $\gamma_0$  — предельный цикл. Он устойчив, если

$$|\rho_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

либо неустойчив, если существует хотя бы один мультипликатор, для которого

$$|\rho_j| > 1, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

## Глава 2

## Методы Пирагаса

Материал данной главы основан на следующих работах: [6–8, 10, 20–23]

### 2.1. Классический метод запаздывающей обратной связи

Рассмотрим динамическую систему порожденную обыкновенным дифференциальным уравнением. Мы представляем, что уравнения неизвестны, но некоторая скалярная переменная может быть измерена как вывод системы. Мы также предполагаем, что система имеет вход для внешней силы. Эти предположения могут быть выполнены с помощью следующей модели,

$$\frac{dy}{dt} = P(y, x) + F(t); \quad \frac{dx}{dt} = Q(x, y). \quad (2.1)$$

Здесь явная форма непрерывного векторного поля  $P, Q$  на практике может быть неизвестна,  $y$  - выходная переменная, а вектор  $x$  описывает остальные переменные динамической системы, которые недоступны или не представляют интереса для наблюдения. Для простоты предполагается, что входной сигнал  $F(t)$  мешает только первому уравнению, соответствующему выходной переменной. Мы предполагаем, что рассматриваемая система без входного сигнала ( $F = 0$ ) имеет странный аттрактор.

Было продемонстрировано использование стандартного метода координации с задержкой, что большое количество различных UPO на хаотическом аттракторе может быть получено из одного скалярного сигнала. Применяя этот метод к нашей системе, мы можем определить из экспериментально измеренного выходного сигнала  $y(t)$  различные периодические сигналы различной формы  $y = y_i(t)$ ,  $y_i(t + \tau_i) = y_i(t)$ , соответствующий различным UPO. Здесь  $\tau_i$  - период  $i$ -го UPO. Затем мы исследуем эти периодические сигналы и выбираем тот, который намереваемся стабилизировать. Для достижения этой цели мы должны разработать специальный внешний генератор, который генерирует сигнал пропорционально  $y_i(t)$ . Разница  $D(t)$  между сигналом  $y_i(t)$  и выходным сигналом  $y(t)$  используется в качестве управляющего сигнала:

$$F(t) = K[y_i(t) - y(t)] = KD(t) \quad (2.2)$$

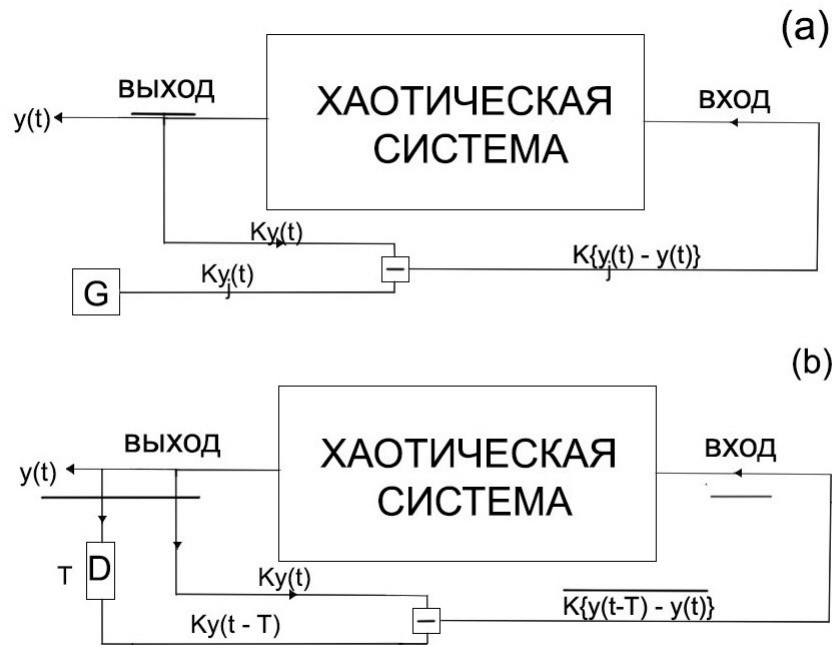


Рис. 2.1. Блок-схема (а) управления внешней силой и (б) управления с обратной связью.  $G$  - специальный внешний периодический генератор,  $D$  - линия задержки

При этом уравнение (2.1) с управляющим сигналом в форме (2.2), представляет собой дифференциальное уравнение с запаздыванием.

Здесь  $K$  - экспериментально регулируемый вес возмущения. Возмущение должно вводиться во вход системы как отрицательная обратная связь ( $K > 0$ ). Экспериментальная реализация такой обратной связи не представляет трудностей для многих физических систем. Важной особенностью возмущения (2.2) является то, что оно не меняет решение уравнения (2.1) и соответствует УРО  $y(t) = y_i(t)$ . Выбирая вес  $K$ , можно добиться стабилизации. Когда эта стабилизация достигнута, выходной сигнал очень близок к  $y(t)$ , и возмущение  $F(t)$  становится чрезвычайно малым. Поэтому здесь, так же как и в методе ОГУ, только небольшая внешняя сила используется для стабилизации УРО. Одним из преимуществ DFC является то, что он неинвазивный в том смысле, что управляющий сигнал исчезает при достижении стабилизации.

## 2.2. Метод запаздывающей обратной связи с неустойчивой компонентой

Было показано, что DFC может стабилизировать только определенный класс периодических траекторий, характеризующийся конечным кручением. Ограничение за-

ключается в том, что любые UPOs с нечетным числом действительных множителей Флоке (FMS), превышающих единицу, никогда не могут быть стабилизированы DFC. Это утверждение было впервые доказано Ушио [18] для дискретных систем, а затем Джаста, Накадзима и Уэда [24, 25] доказали то же ограничение для DFC непрерывного времени, а затем это доказательство было расширено для более широкого класса схем с запаздывающей обратной связью. Следовательно, кажется трудным преодолеть это врожденное ограничение.

Рассмотрим систему в общем виде

$$\dot{u} = f(u). \quad (2.3)$$

Пусть  $u^{\text{upo}}(t, u_0^{\text{upo1}})$  будет его UPO с периодом  $\tau > 0$ ,  $u^{\text{upo}}(t-\tau, u_0^{\text{upo1}}) = u^{\text{upo}}(t, u_0^{\text{upo1}})$ , и начальное условие  $u_0^{\text{upo1}} = u^{\text{upo}}(0, u_0^{\text{upo1}})$ .

Чтобы вычислить UPO и преодолеть ONL, применим UDFC в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f(u(t)) + KB [F_N(t) + w(t)], \\ \dot{w}(t) &= \lambda_c^0 w(t) + (\lambda_c^0 - \lambda_c^\infty) F_N(t), \quad (\star) \\ F_N(t) &= C^* u(t) - (1-R) \sum_{k=1}^N R^{k-1} C^* u(t - kT), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $0 \leq R < 1$  является расширенным параметром DFC,  $N = 1, 2, \dots, \infty$  определяет количество предыдущих состояний, задействованных в функции обратной связи с задержкой  $F_N(t)$ ,  $\lambda_c^0 > 0$ , и  $\lambda_c^\infty < 0$  являются дополнительными нестабильными параметрами степени свободы,  $B, C$  являются векторами и  $K > 0$  это усиление обратной связи. Для начального условия  $u_0^{\text{upo1}}$  и  $T = \tau$  мы имеем

$$F_N(t) \equiv 0, \quad w(t) \equiv 0,$$

и, т.о., решение системы (2.4) совпадает с периодическим решением системы (2.3).

Ключевая идея состоит в том, чтобы искусственно увеличить набор вещественных множителей Флоке, превышающих единицу, до четного числа, введя в контур обратной связи нестабильную степень свободы ( $\star$ ).

Метод запаздывающей обратной связи с неустойчивой компонентой будет использован в главе 6 в модификации для стабилизации неустойчивых периодических траекторий.

### 2.3. Метод решения дифференциальных уравнений с запаздыванием в Matlab

Популярный подход к решению DDEs - это расширение одного из методов, используемых для решения ODE. Большинство решений основаны на явных методах Рунге-Кутты. Метод `dde23` использует этот подход, расширяя метод решения Matlab ODE - `ode23`. Идея аналогична так называемому «методу шагов» для решения DDE.

Численное решение несколько сложнее, и сложности присутствуют для каждого последующих интервалов. Методы Рунге-Кутты, как и все методы дискретных переменных для ОДУ, дают приближения  $y_n$  к  $y(x_n)$  на сетке  $x_n$  в интересующем нас интервале. Они делают это, начиная с заданного начального значения,  $y_0 = y(a)$  при  $x_0 = a$ , и переходя от  $y_n \approx y(x_n)$  на расстояние от  $h_n$  до  $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$  при  $x_{n+1} = x_n + h_n$ . Размер шага  $h_n$  выбирается настолько малым, насколько необходимо, чтобы получить точное приближение. Он выбирается настолько большим, насколько это возможно, чтобы достичь конца интервала за как можно меньшее количество шагов, то есть как можно дешевле. В своем первоначальном виде методы Рунге-Кутты выдают ответы только в точках сетки, но известно, как получить «непрерывные расширения», которые дают приблизительное решение между точками сетки. Хитрость заключается в том, чтобы получить значения между точками сетки, которые являются столь же точными и сделать это дешево. В некоторых случаях непрерывные расширения можно рассматривать как интерполяционные полиномы. Например, первый широко доступный решатель (solver) FORTRAN DDE, DMRODE [26], основан на стандартной формуле Рунге-Кутты и интерполяционных полиномах Эрмита различных порядков. Метод Рунге-Кутты [27, 28], используемый в `ode23`, был получен вместе с непрерывным расширением на основе кубической интерполяции Эрмита. Помимо других хороших качеств этого метода, кубическая интерполяция Эрмита между точками сетки дает такое же точное численное решение как решение в точках сетки. Кроме того, данные, необходимые для интерполяции, доступны как побочный продукт самого шага. Упомянутые методы Рунге-Кутты

- это все явные методы для вычисления  $y_{n+1}$  при заданном  $y_n$  и способности оценить уравнение. Из соображений эффективности решатель пытается использовать самый большой размер шага  $h_n$ , который даст указанную точность, но что, если он больше минимальной задержки. Делая шаг к  $x_n + h_n$ , нам бы понадобились значения решения в точках на этапе шага, но мы пытаемся вычислить решение в конце шага и пока не знаем этих значений. Многие решатели ограничивают размер шага, чтобы избежать этой проблемы. Некоторые решатели, включая dde23, используют любой размер шага, который кажется подходящим, и выполняют итерацию для оценки неявной формулы, возникающей таким образом.



## Глава 3

## Метод гармонического баланса

## 3.1. Описание метода гармонического баланса

Материал данной главы основан на следующих работах:

- Метод гармонического баланса: [16, 29]
- Бифуркация удвоения периода: [13, 14, 30, 31]

Предположим, что исследуемая динамическая система описывается уравнением:

$$f[y(t), Dy(t), \dots, D^n y(t); z_1(t), \dots, z_m(t)] = 0, \quad (3.1)$$

где  $y(t)$  - выходная переменная,  $D$  - дифференциальный оператор и  $f$  является нелинейной вещественной функцией, обладающая всеми свойствами, требуемыми в предположении. Кроме того, переменные  $z_i(t)$  удовлетворяют отношению

$$q'(D)z_i(t) = \sum p_{ik}(D)g_k[y(t), Dy(t), \dots, D^{n-1}(t)], i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

где  $q'$  и  $P_{ik}$  - два полинома степени  $m$  и меньше  $m$ , соответственно, и  $g_k$  является нелинейная вещественная функция, обладающая всеми свойствами, требуемые предположениями. Общее выражение (3.1) обычно может принимать более простые формы, среди которых замечательны следующие, с уменьшающейся сложностью

$$f[] = q(D)y(t) + f_1[y(t), Dy(t), \dots, D^{n-1}y(t); z_1(t), \dots, Z_m(t)] = 0, \quad (3.3)$$

где  $q$  - многочлен степени  $n$ ;

$$f[] = q(D)y(t) + p(D)f_2[y(t), Dy(t), \dots, D^h y(t)] = 0, \quad (3.4)$$

с  $m = 0$  и где является полиномом, чья степень, добавленная к числу  $h$ , не больше чем  $n - 1$ ;

где  $q$  - многочлен степени  $n$ ;

$$f[] = q(D)y(t) + p(D)f_3[y(t)] = 0, \quad (3.5)$$

с  $m = 0$ , как простейший случай (3.4). Система, описанная в (3.3) и (3.2), можно рассматривать как структуру обратной связи, состоящую из линейной динамической части  $L$  и подходящей нелинейной динамической части  $N$ , соединенной двумя скалярными переменными  $y$  и  $f$ . Это справедливо и для систем, описываемых (3.4) или (6.1). Подсистема  $L$  просто определяется  $q(D)$  (и  $p(D)$  для (3.4) и (6.1)), а  $N$  зависит от  $f_1(f_2$  или  $f_3)$ ,  $g_k$ ,  $q'(D)$ ,  $P_{ik}(D)$ , и  $Z_i$  являются его внутренними переменными.

Теперь рассмотрим возможное системное решение

$$y_0(t) = A + B \sin(\omega t), B > 0, \omega > 0 \quad (3.6)$$

и предположим, что выполняются следующие условия:

- уравнения (3.2) допускают стационарное периодическое решения  $Z_{i0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , периода  $2\pi/\omega$  для  $y_0(t)$ . Надо чтобы резонанса не было происходит в отношении такого форсирующего сигнала, что полином  $q'$  не должен иметь корней  $\pm j\omega$ . Сигналы  $Z_{i0}$  следуют из (3.2) через ряд Фурье  $g_k$ ,
- нелинейная функция  $f_1$  из (3.3) допускает разложение в ряд Фурье

$$\begin{aligned} f_1[y_0(t), Dy_0(t), \dots, D^{n-1}y_0(t); z_{10}(t), \dots, z_{m0}(t)] = \\ F_0(A, B, \omega) + \\ \sum_{k=1}^{\infty} [F_{kR}(A, B, \omega) \sin(kt\omega) + F_{kI}(A, B, \omega) \cos(kt\omega)], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $F_{kR}$ ,  $F_{kI}$  - коэффициенты соответствующей гармоники.

Таким образом, исследуемая динамическая система рассматривается в терминах уравнений (3.3) и (3.2), поскольку эта форма является достаточно общей и позволяет лучше понять полученные результаты. Уравнение (3.7) представляет периодический выход установившегося состояния  $N$ , когда его входной сигнал равен  $y_0(t)$ , заданному формулой (3.6). Отбрасывая гармоники выше одного из (3.7), подстановка в уравнении (3.3) приводит к соотношениям:

$$q(0)A + F_0(A, B, \omega) = 0, \quad (3.8)$$

$$q(j\omega)B + F_{1R}(A, B, \omega) + jF_{1I}(A, B, \omega) = 0, \quad (3.9)$$

где  $q$  вычисляется на его частоте прироста в устойчивом состоянии и используется векторная запись. Уравнения (3.8) и (3.9) выражают принцип гармонического баланса, смещения постоянного тока и слагаемого по частоте, соответственно, для динамической системы, описанной в (3.2) и (3.3). Конечно, значения  $A$ ,  $B$  и  $\omega$ , которые можно вывести из (3.8) и (3.9) как функции параметров системы, дают через (3.6) приближенное периодическое решение рассматриваемой системы. Согласно приведенной процедуре ее точность зависит от возможности пренебрежения высшими гармониками уравнения (3.7) в уравнении (3.3), где  $y = y_0(t)$  и  $z_i = z_{i0}(t)$ . вдоль петли подсистемы L и N производят сильное ослабление компонентов на частотах, которые кратны основной.

Метод в общем случае не точный, поэтому были попытки его математического обоснования.

## 3.2. Метод гармонического баланса и его математическое обоснование

### Матричный вид системы. Передаточная функция

Система в форме Лурье:

$$\dot{x} = Px + \varepsilon q\varphi(r^T x), \quad (3.10)$$

где  $\varepsilon = 1$ ,

Передаточная функция линейной части системы:

$$W(s) = r^T (P - sI)^{-1} q$$

**Частоты  $\omega_0$  и значения коэффициента  $k$ . И уравнение для нахождения амплитуды  $a$**

Для того, чтобы найти периодические решения, представим (6.1) в виде

$$\dot{x} = P_0 x + q\varphi(r^T x), \quad (3.11)$$

где

$$\varphi(\sigma) = \varepsilon f(\sigma) - k\sigma,$$

и матрица

$$P_0 = P + kqr^T$$

имеет два чисто мнимых собственных числа  $\pm i\omega_0$  (здесь  $\omega_0 > 0$  — частота периодического решения,  $k$  — коэффициент гармонической линеаризации).

Для нахождения значений  $k, \omega_0$  используем

$$1 + kW(i\omega_0) = 0. \quad (3.12)$$

Отсюда находим

$$ImW(i\omega_0) = 0 \quad (3.13)$$

Из (3.12) следует

$$k = -(ReW(i\omega_0))^{-1}. \quad (3.14)$$

Уравнение для нахождения амплитуды:

$$\Phi(a) = 0, \quad (3.15)$$

где  $\Phi(a)$  — описывающая функция:

$$\Phi(a) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \varphi(a \cos(\omega_0 \tau)) \cos(\omega_0 \tau) d\tau.$$

## Матрица замены переменных $S$

Для применения теоремы о малом параметре и определения начальных данных периодического решения запишем систему (3.11) в виде

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon b\varphi(c^T y),$$

где  $S$  — матрица перехода ( $x = Sy$ ),

$$A = S^{-1}P_0S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \mathbb{O} \\ \omega_0 & 0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & A_3 \end{pmatrix}, \quad b = S^{-1}q = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c^T = r^T S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_3^T \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

$$SA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & -h\lambda_3 \\ \omega_0 s_{22} & -\omega_0 s_{21} & \lambda_3 s_{23} \\ \omega_0 s_{32} & -\omega_0 s_{31} & \lambda_3 s_{33} \end{pmatrix}.$$

## Формула для описывающей функции $\Phi(a)$

**Теорема** Если выполнены условия:

$$\begin{aligned} \Phi(a_0) &= 0, \\ -b_1 \frac{d\Phi(a)}{da} \Big|_{a=a_0} &> 0, \end{aligned}$$

то для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  система (6.1) с нелинейностью  $\varepsilon f(\cdot)$  имеет устойчивое  $T$ -периодическое решение  $x^0(t) = S(y_1(t), y_2(t), y_3(t))^*$

$$y_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + O(\varepsilon), \quad y_2(t) = a_1 \sin(\omega_0 t) + O(\varepsilon), \quad y_3(t) = \exp(A_3 t) y_3(0) + 0_{n-2}(\varepsilon),$$

$t \in [0, T]$  с начальными данными

$$x(0) = S \begin{pmatrix} a_0 + O(\varepsilon) \\ 0 \\ O() \end{pmatrix},$$

где  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(\varepsilon)$ , и поведение траекторий в окрестности этого решения имеет гиперболический характер.

Метод гармонического баланса будет использован в главе 6 в модификации метода Пирагаса для вычисления начального приближения неустойчивой периодической траектории.

### 3.3. Бифуркация удвоения периода

Чтобы описать бифуркацию удвоения периода, рассмотрим однопараметрическое семейство нелинейных систем

$$\dot{x} = f_\mu(x), \quad (3.16)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  - вещественный параметр, а  $f$  нелинейная векторная функция. В литературе по теории бифуркаций  $f$  считается гладкой, в рамках этой работы гладкость не требуется. Предположим, что (3.16) имеет предельный цикл  $\gamma_\mu$  для диапазона значений вещественного числа  $\mu$ . Кроме того, предположим, что для всех значений от одной стороны параметра (меньше или больше) критического значения  $\mu$  все характеристические множители  $\gamma_\mu$ , будут иметь величину меньше единицы. Если ровно один характеристический множитель выходит из единичной окружности в  $\mu = \mu_c$  и делает это в точке  $(-1, 0)$ , и если пересечение происходит с ненулевой скоростью относительно  $\mu$ , то бифуркация удвоения периода от  $\gamma_\mu$  происходит при  $\mu = \mu_c$ . Это означает, что другой предельный цикл, первоначально с удвоенным периодом  $\gamma_{\mu_c}$ , возникает из  $\gamma_\mu$  при  $\mu = \mu_c$ . Как правило, бифуркация является либо *суперкритической*, либо *субкритической*. В суперкритическом случае предельные циклы с удвоением периода устойчивы и имеют место для значений параметров на стороне  $\mu_c$ , для которых предельные циклы  $\gamma_\mu$  неустойчивы. В субкритическом случае предельные циклы с удвоением периода являются неустойчивыми и происходят со стороны  $\mu_c$ , для которой предельные циклы

$\gamma_\mu$  устойчивы. В любом случае говорят, что произошел обмен стабильностью между номинальными предельными циклами  $\gamma_\mu$  и удвоенными предельными циклами.

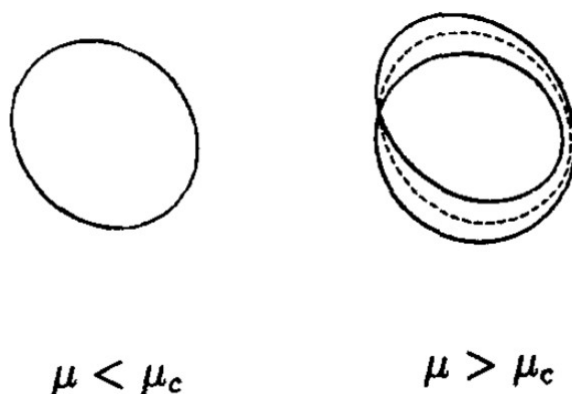


Рис. 3.1. Иллюстрация бифуркации удвоения периода (суперкритический случай).

На рис.3.1 изображена суперкритическая бифуркация удвоения периода. На этом рисунке сплошная кривая представляет устойчивый предельный цикл, а пунктирная кривая представляет неустойчивый предельный цикл. На рисунке также предполагается, что номинальный предельный цикл теряет устойчивость по мере увеличения  $\mu$  через  $\mu_c$ . суперкритичность или субкритичность бифуркации удвоения периода можно легко определить в дискретном времени, используя формулы, которые были получены в [32].

## Глава 4

## Метод Крылова-Ньютона

Материал данной главы основан на следующих работах: [33–36].

Описанный в данной главе метод является приближенным методом, который позволяет оценивать неустойчивые периодические траектории в динамической системе путем анализа неподвижных точек сечения Пуанкаре. В дальнейшем этот метод будет использоваться для исследования ограничения ONL в системе Чуа.

Пусть точка  $x_0$  является  $n$ -мерным вектором, представляющим состояние системы. Для динамической системы с течением времени  $t$  точка  $x_t$  прочерчивает траекторию, одномерную кривую, в  $n$ -мерном фазовом пространстве  $M$ .

Можем описать траекторию для  $x_t$ , используя карту потока, обозначенную  $\Phi_t$ , которая берет точку  $x_0$  и развивает ее за период времени  $t$ :  $\Phi_t : x_0 \rightarrow x_t$

$$x_t = \Phi^t(x_0) \quad (4.1)$$

В более общем плане карта потока просто продвигает точку по своей траектории:

$$x_{t'+t} = \Phi^t(x'_t) \quad (4.2)$$

В каждый момент времени текущее состояние  $x = (X, Y, Z)$  является точкой в фазовом пространстве  $M = R^3$ . С течением времени  $x_t = (X(t), Y(t), Z(t))$  проследивает траекторию, то есть кривую, в  $R^3$ . Для системы Лоренца используются значения параметров  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ , которые приводят к хаотическим траекториям. Карта потока ведет нас по этой траектории, см. рисунок 1.

#### 4.1. Сечение Пуанкаре

Пусть  $x'$  точка, а  $t'$  - вектор нормали, которые вместе определяют гиперповерхность  $P$ . Пересечения  $P$  могут быть определены временем  $t$ , когда  $\langle x_t - x'|t' \rangle = 0$ . (См. рисунок) Мы могли бы ограничиться тем, когда пересечения происходят в определенном направлении, скажем, когда внутреннее решение переходит от отрицательного к положительному. Теперь мы можем позволить  $\Phi$  быть картой, которая переносит одну



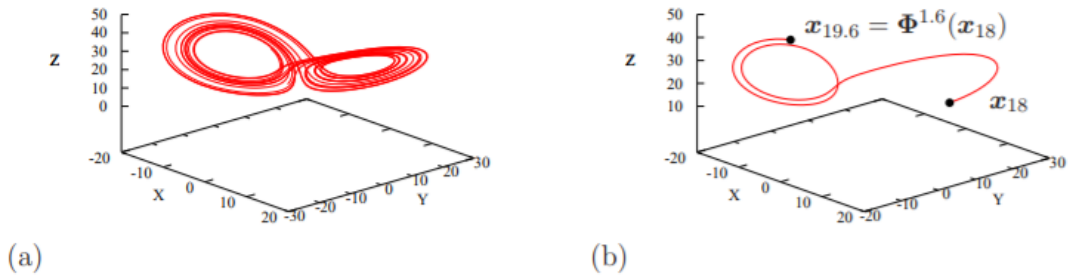


Рис. 4.1. (a) Аттрактор Лоренца. (b) Схема потока  $\Phi$  используется для продвижения состояния  $x$  на 1,6 единицы времени с  $t = 18$  до  $t = 19.6$

точку на  $P$  в следующую точку пересечения на  $P$ . Если периодическая траектория имеет точку  $x_p$  на  $P$ , то она удовлетворяет  $x_p = \Phi(x_p)$ . Преимущество состоит в том, что нам больше не нужно беспокоиться о периоде  $T$  для периодических траекторий. Но, недостатком является то, что мы ничего не знаем о том, что происходит с траекторией  $P$ , и, как правило, не все периодические траектории пересекают поверхность один раз.

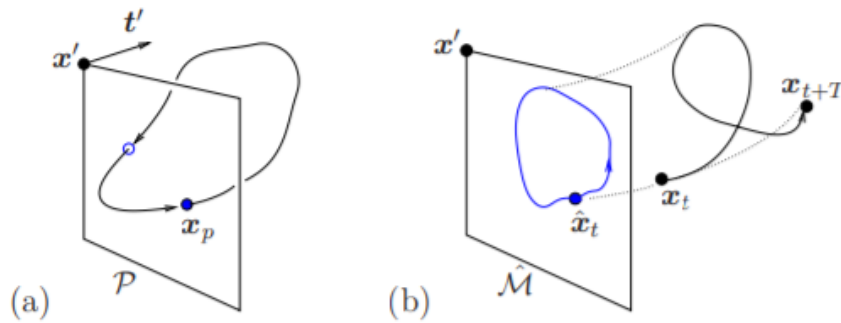


Рис. 4.2. (a) Сечение Пуанкаре  $P$ , определяемое точкой  $x'$  и вектор нормали  $t'$ , пронизан периодической траекторией в периодической точке  $x_p$ . (b) Проекция относительной периодической траектории на срез  $\hat{M}$ , является периодической траекторией,  $\hat{x}_t = \hat{x}_{t+T}$ . Вся траектория проецируется на  $\hat{M}$ . Каждое состояние  $x_t$  проецируется путем применения сдвигов вдоль пунктирных линий на  $\hat{M}$ .

## 4.2. Методы Ньютона-Рафсона и Ньютона-Крылова

Метод Ньютона-Крылова без Якобиана (jacobian free Newton-Krylov, JFNK) является вариантом метода Ньютона-Рафсона. В своей необработанной форме метод Ньютона-Рафсона для  $n$ -мерной системы включает в себя  $n \times n$ -матрицу Якоби, которую может быть сложно оценить. Можно избежать этой оценки, используя метод подпространства Крылова [34].

### 4.2.1. Метод Ньютона-Рафсона (с якобианом)

Чтобы найти корни  $x$  такие, что  $f(x) = 0$  в одном измерении, учитывая первоначальное предположение  $x_0$ , метод Ньютона-Рафсона генерирует улучшения с использованием следующей итерации

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i). \quad (4.3)$$

Перепиывая, мы можем повторно выразить итерацию как

$$x_{i+1} = x_i + \delta x_i \quad \text{где} \quad f'(x_i) \delta x_i = -f(x_i). \quad (4.4)$$

Задача состоит в том, чтобы найти фиксированные точки отображения  $\mathbf{x}_p$  такие, что  $\mathbf{x}_p = \Phi(\mathbf{x}_p)$ , т.е.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_p) = \mathbf{0} \quad \text{где} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Неподвижные точки могут соответствовать состояниям равновесия, периодическим орбитам или их относительным эквивалентам. Дополнения, при необходимости, для нахождения периода  $T$  или пространственного сдвига  $l$  откладываются до раздела 4.2.4.

Расширение метода Ньютона (4.4) на  $n$ -мерную систему имеет вид

$$(a) \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \delta \mathbf{x}_i \quad \text{где} \quad (b) \quad \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_i). \quad (4.6)$$

Чтобы применить обновление (4.6a), линейная система (4.6b) должна быть решена для неизвестного  $\delta \mathbf{x}_i$ . В (4.6b) матричная часть задается формулой

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_i} - I = J - I, \quad (4.7)$$

где  $J$  – матрица **Якоби** для  $\Phi(\mathbf{x})$ , а  $I$  – это единичная матрица. Для случая  $n = 3$ ,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

#### 4.2.2. Метод Ньютона-Крылова (без якобиана)

Матрицу Якоби  $J$  размера  $n \times n$  обычно трудно оценить. У нас может даже не быть достаточной компьютерной памяти, чтобы сохранить ее для многомерной системы. Проблема (4.6b), однако, заключается в форме

$$A \delta \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4.9)$$

где  $A$  - матрица  $n \times n$ , а  $\delta \mathbf{x}$  и  $\mathbf{b}$  являются  $n$ -векторами. Это может быть решено для  $\delta \mathbf{x}$  с помощью **Метод подпространства Крылова (generalized minimal residual method, GMRES(m))**. Алгоритму GMRES не нужно знать саму матрицу  $A$ , только результат умножения заданного вектора на  $A$ .

Метод ищет решение для  $\delta \mathbf{x}$  в  $\text{span}\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_m\}$ , т.е.,  $\delta \mathbf{x} = c_1 \mathbf{K}_1 + c_2 \mathbf{K}_2 + \dots + c_m \mathbf{K}_m$ . Обычно все начинается с  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$ . Следующий вектор генерируется путем вычисления  $\tilde{\mathbf{K}}_{i+1} = A \mathbf{K}_i$ , тогда  $\mathbf{K}_{i+1}$  получается путем ортонормирования  $\tilde{\mathbf{K}}_{i+1}$  против предыдущего  $\mathbf{K}_j$  ( $j \leq i$ ) используя метод Грама-Шмидта. Следующий,  $\text{error} = \|A \delta \mathbf{x} - \mathbf{b}\|$  минимизируется по коэффициентам  $c_j$  ( $j \leq i+1$ ) и процесс повторяется, если error слишком велик. Итерации алгоритма GMRES для задачи (4.6b) включают вычисление матрично-векторных произведений с заданным  $\delta \mathbf{x}$ , которые могут быть аппроксимированы:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x} \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{F}(\mathbf{x}_i + \epsilon \delta \mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i)), \quad (4.10)$$

где  $\epsilon$  - это небольшое скалярное значение; типичным значением является  $\epsilon$ , такое, что  $(\epsilon \|\delta \mathbf{x}\|) / \|\mathbf{x}_i\| = 10^{-6}$ . Важным моментом является то, что нам не нужно знать якобиан — **требуется только процедура для вычисления  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$** .

Обратите внимание, что при условии, что каждый шаг метода Ньютона,  $\delta \mathbf{x}$ , принимает  $\mathbf{x}$  примерно в правильном направлении, ожидается, что метод сходится. Поэтому допуск, указанный в точности решения для  $\delta \mathbf{x}$  на каждом шаге Ньютона (вычисляемый с помощью метода GMRES), обычно не должен быть таким строгим, как допуск, установленный для самого метода Ньютона для решения  $\mathbf{x}$ . Например, мы могли бы искать относительную ошибку для решения Ньютона  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\| = O(10^{-8})$ , но относительная ошибка для решения GMRES  $\|A \delta \mathbf{x} - \mathbf{b}\|/\|\delta \mathbf{x}\| = O(10^{-3})$  вероятно, будет достаточно для расчета шагов  $\delta \mathbf{x}$ .

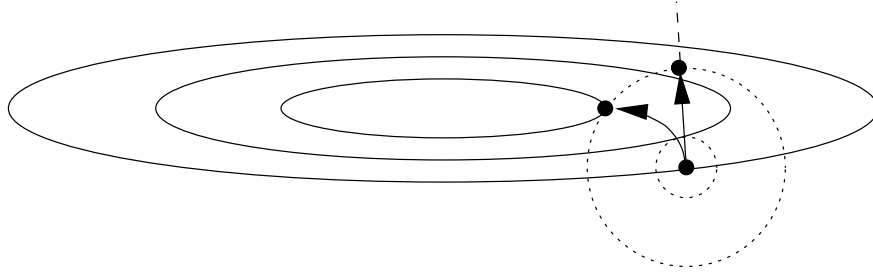


Рис. 4.3. Шаг перехода по сравнению с ”затухающим”/шагом поиска строки того же размера при минимизации  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$ . Радиус окружности соответствует размеру области шага/доверия  $\delta$ .

#### 4.2.3. Пошаговый подход

Для улучшения области сходимости метода Ньютона обычно ограничивают размер выполняемого шага. Один из подходов состоит в том, чтобы просто сделать ”затухающий” шаг в направлении решения 4.6(b), т.е. шаг за  $\alpha \delta \mathbf{x}_i$  где  $\alpha \in (0, 1]$ . В ”подходе hookstep” мы минимизируем при условии, что величина шага Ньютона ограничена,  $\|\delta \mathbf{x}_i\| < \delta$ , где  $\delta$  - размер ”доверительной области”:

$$\min_{\delta \mathbf{x}_i: \|\delta \mathbf{x}_i\| < \delta} \left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \right\|. \quad (4.11)$$

Учитывая минимизацию, ожидается, что hookstep  $\delta \mathbf{x}_i$  даст лучший результат, чем простой затухающий шаг того же размера. Также ожидается, что он будет работать намного лучше в ”долинах”, где он создает изогнутый/крючковатый шаг к точке вдоль долины, вместо того, чтобы прыгать с одной стороны долины на другую; см. рисунок 4.3.

Шаг перехода может быть вычислен с небольшой дополнительной работой по методу GMRES, при условии, что размер подпространства Крылова,  $m$ , выбран достаточно большим для решения с требуемой точностью в течение  $m$  итераций GMRES; подробности см. [35] [в частности **v1** on arxiv.org].

Для данного  $\delta \mathbf{x}_i$  уменьшение ошибки, предсказанное линеаризацией (4.11), можно сравнить с фактическим уменьшением в  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_i + \delta \mathbf{x}_i)\|$ . В зависимости от точности прогноза размер доверительной области  $\delta$  может быть скорректирован автоматически; см. [36].

#### 4.2.4. Добавление ограничений

##### Временные ограничения

При поиске периодической орбиты период  $T$  является дополнительным неизвестным. Один из способов избавиться от необходимости находить  $T$  - это работать на сечении Пуанкаре, как описано в разделе 4.1. Затем мы можем попытаться решить функцию  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$  как бы то ни было, нужно найти точку  $\mathbf{x}_p$  на сечении Пуанкаре, которая соответствует периодической орбите.

Возможно, мы не захотим ограничиваться сечениями Пуанкаре. Тогда надо решить

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, T) = \Phi^T(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

для  $(\mathbf{x}, T)$ . Мы дополняем всю систему. Положим

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{x}_i, T_i) \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{b}} = (-\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}_i), 0). \quad (4.13)$$

Теперь мы хотим решить систему вида

$$A \delta \tilde{\mathbf{x}}_i = \tilde{\mathbf{b}}, \quad (4.14)$$

для  $\delta \tilde{\mathbf{x}}_i = (\delta \mathbf{x}_i, \delta T_i)$ , но нужно дополнительное ограничение, потому что у нас есть дополнительное неизвестное. Мы выбираем, чтобы обновление  $\delta \mathbf{x}_i$  не имело компонента, который указывает вдоль траектории, т.е.  $\langle \dot{\mathbf{x}}_i | \delta \mathbf{x}_i \rangle = 0$ .

Следуя идеалу методов без матриц, нам не нужно знать саму матрицу  $A$ , нам нужно только указать результат умножения на  $A$ :

$$A \delta \tilde{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_i} \delta \tilde{\mathbf{x}}, \langle \dot{\mathbf{x}}_i | \delta \mathbf{x} \rangle \right). \quad (4.15)$$

Мы используем приближение (4.10) чтобы оценить первую часть результата. Дополненная система (4.14) может быть решена для  $\delta \tilde{\mathbf{x}}_i$  с использованием алгоритма GMRES путем применения умножений (4.15). Затем выполняется обновление как для состояния, так и для периода  $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{x}}_i + \delta \tilde{\mathbf{x}}_i$ .

Метод Крылова-Ньютона будет использован в Главе 6 в модификации метода Пирагаса для аппроксимации неустойчивой периодической траектории.

## Глава 5

## Метод Демидовича для оценки мультипликаторов Флоке

В данной главе изложен приближенный метод вычисления мультипликаторов Флоке (см. Раздел 1), предложенный в книге Б.П. Демидовича [37].

Пусть  $A(t)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая матрица. Основной промежуток  $[0, \omega]$  с помощью точек

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \omega$$

разобьем на  $m$  равных частей, и пусть

$$h = \Delta t_k \equiv t_{k+1} - t_k = \frac{\omega}{m}.$$

В дифференциальном уравнении

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad X(0) = E \tag{5.1}$$

заменяем матрицу  $A(t)$  кусочно-постоянной матрицей:

$$A_h(t) = A_k \text{ при } t_k \leq t < t_{k+1} (k = 0, 1, \dots, m-1), \tag{5.2}$$

где

$$\min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} A(t) \leq \hat{A}_k \leq \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} A(t),$$

например,

$$\hat{A}_k = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t) dt.$$

Обозначим через  $X_h = X_h(t)$  непрерывную матрицу, удовлетворяющую в точках непрерывности коэффициента  $A_h(t)$  дифференциальному уравнению

$$\frac{dX_h}{dt} = A_h(t)X_h, \tag{5.3}$$

где  $0 \leq t \leq \omega$  и  $X_h(0) = E$ . Обобщенное решение  $X_h$  легко построить. На основании формул (5.2) имеем

$$\frac{dX_h}{dt} = A_k X_h, \text{ при } t_k < t < t_{k+1} \quad \text{и} \quad \frac{dX_h}{dt} = A_{k+1} X_h, \text{ при } t_{k+1} < t < t_{k+2},$$

где  $A_k (k = 0, 1, \dots, m-1)$  – постоянные матрицы. Отсюда

$$X_h = e^{(t-t_k)\hat{A}_k C_k} \text{ при } t_k < t < t_{k+1} \quad \text{и} \quad X_h = e^{(t-t_{k+1})\hat{A}_{k+1} C_{k+1}} \text{ при } t_{k+1} < t < t_{k+2}.$$

Используя непрерывность решения  $X_h$ , в точке  $t = t_{k+1}$ , будем иметь

$$C_{k+1} = e^{h\hat{A}_k} C_k (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (5.4)$$

Кроме того, при  $k = 0$  и  $t = t_0 = 0$  получаем

$$X_h(0) = E = C_0.$$

Из формулы (5.4) последовательно выводим

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = e^{h\hat{A}_0} C_0 = e^{h\hat{A}_0}, \\ C_2 = e^{h\hat{A}_1} C_1 = e^{h\hat{A}_1} \cdot e^{h\hat{A}_0}, \\ \dots \\ C_{m-1} = e^{h\hat{A}_{m-2}} \cdot e^{h\hat{A}_{m-3}} \dots e^{h\hat{A}_0}, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

причем, так как матрицы  $A_0, A_1, \dots, A_{m-2}$  в общем случае неперестановочны, то в формуле (5.5) нельзя применить правило перемножения экспоненциалов. Следовательно,

$$X_h(t) = e^{(t-t_k)\hat{A}_k} \cdot e^{h\hat{A}_{k-1}} \dots e^{h\hat{A}_0} \quad (t_k < t < t_{k+1}). \quad (5.6)$$

Таким образом, для последнего промежутка  $(t_{m-1}, t_m)$  будем иметь

$$X_h(t) = e^{(t-t_{m-1})\hat{A}_{m-1}} \cdot e^{h\hat{A}_{m-2}} \dots e^{h\hat{A}_0} \quad (t_{m-1} < t < t_m = \omega).$$

Отсюда, полагая, что  $t \rightarrow t_m - 0 = \omega - 0$ , получим

$$X_h(\omega) = e^{h\hat{A}_{m-1}} \cdot e^{h\hat{A}_{m-2}} \dots e^{h\hat{A}_0}. \quad (5.7)$$

Используя первую норму матрицы, оценим  $\|X_h(\omega) - X(\omega)\|$ . Из дифференциальных уравнений (5.1) и (5.3) имеем

$$X(t) = E + \int_0^t A(t_1)X(t_1)dt_1 \quad \text{и} \quad X_h(t) = E + \int_0^t A_h(t_1)X_h(t_1)dt_1.$$

Отсюда

$$X_h(t) - X(t) = \int_0^t [A_h(t_1) - A(t_1)]X_h(t_1)dt_1 + \int_0^t A(t_1)[X_h(t_1) - X(t_1)]dt_1.$$

Переходя к норме при  $0 \leq t \leq \omega$ , получим

$$\|X_h(t) - X(t)\| \geq \int_0^t \|A_h(t_1) - A(t_1)\| \cdot \|X_h(t_1)\| dt_1 + \int_0^t \|A(t_1)\| \cdot \|X_h(t_1) - X(t_1)\| dt_1 \quad (5.8)$$

Пусть

$$\|A(t)\| \leq M \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \omega,$$

тогда

$$\|A_k\| \leq M \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Из формулы (5.6) при  $1 \in [0, \omega]$  находим

$$\|X_h(t)\| \leq e^{h\|\hat{A}_k\|}.$$

Так как матрица  $A(t) \in (0, \omega]$ , то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\|A(t') - A(t'')\| < \varepsilon,$$

если  $t', t'' \in (0, \varepsilon]$  и  $|t' - t''| < \delta$ . Отсюда при  $h < \delta$  и  $t \in (0, \omega]$ , будем иметь

$$\|A_h(t) - A(t)\| < \varepsilon.$$



Следовательно, из формулы (5.8) получаем

$$\|X_h(t) - X(t)\| \leq \varepsilon \omega e^{\omega M} + \int_0^t M \|X_h(t_1) - X(t_1)\| dt_1.$$

Применяя лемму Гронвулла – Беллмана, получим

$$\|X_h(t) - X(t)\| \leq \varepsilon \omega e^{\omega M + Mt} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \omega$$

и, следовательно,

$$\|X_h(\omega) - X(\omega)\| \leq \varepsilon \omega e^{2\omega M} \quad (5.9)$$

если  $0 < h < \delta(\varepsilon)$ .

Так как число  $\varepsilon > 0$  может быть взято произвольно малым, то из неравенства (5.9) будем иметь

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|X_h(\omega) - X(\omega)\| = 0,$$

т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} X_h(\omega) = X(\omega) \quad (5.10)$$

Рассмотрим характеристические уравнения

$$\det[X(\omega) - \rho E] = 0 \quad \text{и} \quad \det[X_h(0) - \hat{\rho} E] = 0, \quad (5.11)$$

и пусть  $\rho_j, \hat{\rho}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) – соответственно, корни этих уравнений. Так как корни  $\hat{\rho}_j$  являются непрерывными функциями параметра  $h$ , то в силу соотношения 5.10 имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\rho}_j(h) = \rho_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5.12)$$

Таким образом, выбрав  $h$  достаточно малым, из уравнения 5.11 можно определить мультипликаторы  $\rho_j$  с любой степенью точности.

Метод Демидовича, а также его реализация в Matlab (см. Приложение Б), будут использованы в Главе 6 в модификации метода Пирагаса для аппроксимации неустойчивой периодической траектории применительно к системе Чуа.

## Глава 6

## Основной результат: исследование неустойчивых периодических орбит в сценарии рождения скрытого хаотического аттрактора Чуа

Модифицированный алгоритм Пирагаса {

- Решаем дифференциальное уравнение с запаздыванием {
    - Вычисляем начальное приближение с помощью метода гармбаланса {
      - считаем параметры приближенной периодической траектории метода гармонического баланса (частота колебаний ( $w$ ), амплитуда ( $A$ ), сдвиг ( $B$ ));
      - Генерация полного решения (всех координат траектории);
  - задаем правую часть системы вместе с уравнениями на коэффициент запаздывания ( $\tau$ ) и коэффициент передачи (гейн,  $G$ );
  - используем в качестве начального данного траекторию полученную методом гармонического баланса (если период приближенной периодической траектории больше чем период искомой UPO - задаем начальные данные на полупериоде;
- }
- реализация метода продолжения по параметру {
    - Для  $i$  от 1 до numIter {
      - Изменяем параметр системы;
      - Решаем дифференциальное уравнение с запаздыванием используя в качестве начальных данных UPO полученное на предыдущей итерации;
- }
- }

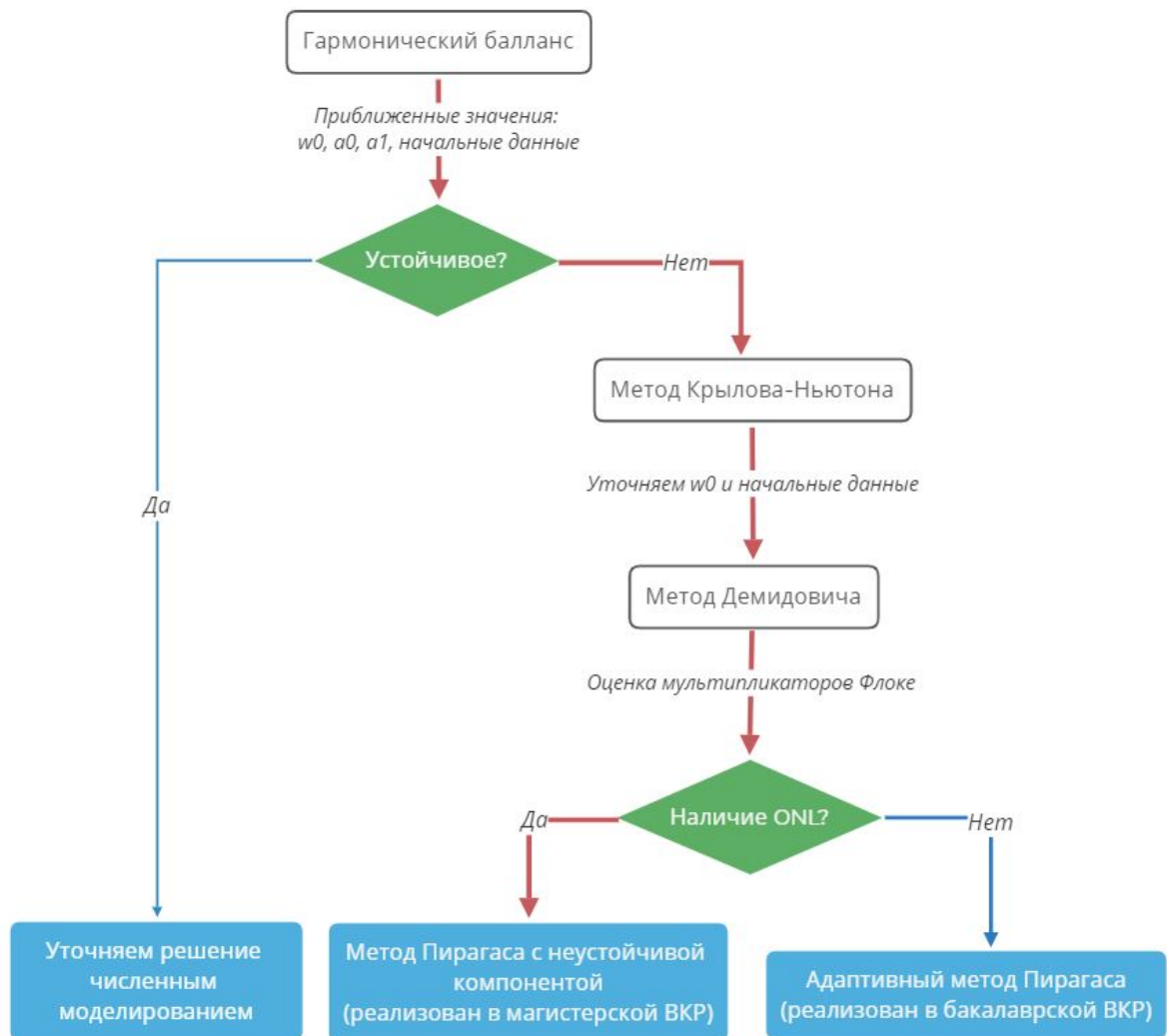


Рис. 6.1. Схема модифицированного алгоритм Пирагаса поиска неустойчивых периодических траекторий.

## 6.1. Применение модифицированного алгоритма Пирагаса к системе Чуа

В 1983 году Леоном Чуа была предложена простейшая RLC цепь с одним нелинейным элементом - диодом Чуа. Которая в физическом эксперименте на осциллографе продемонстрировала существование хаотического поведения в физической системе.

Система описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -(\beta y + \gamma z), \\ f(x) &= m_1 x + \text{sat}(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|).\end{aligned}$$

В 2009 году Г.А. Леонов и Н.В. Кузнецов [38] показали что существует такой аттрактор который может сосуществовать с локально устойчивым состоянием равновесия. Он может быть найден при процедуре продолжения по параметру.

Следуя предлагаемому в рамках данной работы алгоритму, вначале найдем приближенное периодическое решение с помощью метода гармонического баланса.

## 6.2. Применение метода гармбаланса для системы Чуа

### 6.2.1. Матричный вид системы Чуа. Передаточная функция

Запишем систему Чуа (6.1) в форме Лурье:

$$\dot{x} = Px + \varepsilon q \varphi(r^T x), \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon = 1$ ,

$$P = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\sigma) = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Передаточная функция линейной части системы:

$$W(s) = r^T(P - sI)^{-1}q = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) - s & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - s & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma - s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-\alpha(s^2 + (\gamma + 1)s + \beta + \gamma)}{\beta((- \alpha(m_1 + 1) - s) - (\gamma + s)(\alpha m_1 s + \alpha m_1 + \alpha s + s^2 + s))}.$$

Уравнение для нахождения амплитуды:

$$\Phi(a) = 0, \quad (6.2)$$

где  $\Phi(a)$  — описывающая функция:

$$\Phi(a) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \varphi(a \cos(\omega_0 \tau)) \cos(\omega_0 \tau) d\tau.$$

Посчитаем  $\Phi(a)$  для  $f(\sigma)$ :

$$\Phi(a) = \frac{2\varepsilon(m_0 - m_1) \left( \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} - a \arccos \frac{1}{a} + \frac{\pi a}{2} \right) - \pi a k}{\omega_0}.$$

### 6.2.2. Вычисление матрицы замены переменных $S$

Для применения теоремы о малом параметре и определения начальных данных периодического решения запишем систему (3.11) в виде:

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon b \varphi(c^T y),$$

где  $S$  — матрица перехода ( $x = Sy$ ),

$$A = S^{-1}P_0S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \mathbb{O} \\ \omega_0 & 0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & A_3 \end{pmatrix}, \quad b = S^{-1}q = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c^T = r^T S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_3^T \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
S &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}. \\
SA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & -h\lambda_3 \\ \omega_0 s_{22} & -\omega_0 s_{21} & \lambda_3 s_{23} \\ \omega_0 s_{32} & -\omega_0 s_{31} & \lambda_3 s_{33} \end{pmatrix}. \\
P_0 S &= \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_1+k) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_1+k) + \alpha s_{21} & \alpha s_{22} & \alpha h(1+m_1+k) + \alpha s_{23} \\ 1 - s_{21} + s_{31} & -s_{22} + s_{32} & -h - s_{23} + s_{33} \\ -\beta s_{21} - \gamma s_{31} & -\beta s_{22} - \gamma s_{32} & -\beta s_{23} - \gamma s_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Из равенства  $SA = P_0 S$  следует

$$s_{11} = 1,$$

$$s_{12} = 0,$$

$$s_{13} = -h,$$

$$s_{21} = m_1 + 1 + k,$$

$$s_{22} = -\omega_0/\alpha,$$

$$s_{23} = -h(\alpha(m_1 + 1 + k) - d)/\alpha,$$

$$s_{31} = (\alpha(m_1 + k) - \omega_0^2)/\alpha,$$

$$s_{32} = -(\alpha(\beta + \gamma)(m_1 + k) + \alpha\beta - \gamma\omega_0^2)/(\alpha\omega_0),$$

$$s_{33} = h(\alpha(m_1 + k)(d - 1) + d(1 + \alpha - d))/\alpha,$$

где

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\alpha + \omega_0^2 - \beta + 1 + \gamma + \gamma^2}{1 + \gamma}, \\
h &= \frac{\alpha(\beta + \gamma - (1 + \gamma)d + d^2)}{\omega_0^2 + d^2}.
\end{aligned}$$

В случае системы (6.1) имеем

$$\frac{d\Phi(a)}{da} = \frac{2\varepsilon(m_0 - m_1) \left( \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right) - \pi k}{\omega_0}.$$

### 6.2.3. Нахождение значений амплитуды

В нашей задаче рассматриваются следующие параметры системы (6.1):

$$\begin{aligned} \alpha &= 8.4562, \\ \beta &= 12.0732, \\ \gamma &= 0.0052, \\ m_0 &= -0.1768, \\ m_1 &= -1.1468. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Из (3.13) и (3.14) находим

$$\begin{aligned} \omega_0^+ &\approx 3.2453, & \omega_0^- &\approx 2.0392, \\ k^+ &\approx 0.9597, & k^- &\approx 0.2099. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Для  $\varepsilon = 1$  имеем

$$a_0^+ \approx 1.0449, \quad a_0^- \approx 5.8561. \tag{6.5}$$

### 6.2.4. Вычисление начальных данных

Следуя теореме, для нахождения периодических решений будем использовать начальные данные

$$x(0) = S \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 s_{11} \\ a_0 s_{21} \\ a_0 s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0(m_1 + 1 + k) \\ a_0(\alpha(m_1 + k) - \omega_0^2)/\alpha \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

$$x_0^+ = \begin{pmatrix} 1.0449 \\ 0.8494 \\ -1.4969 \end{pmatrix}, \quad x_0^- = \begin{pmatrix} 5.8561 \\ 0.3693 \\ -8.3665 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

### 6.2.5. Моделирование траекторий системы Чуа из начальных данных, полученных из гармбаланса

Для  $a_0^-$  условия теоремы выполнены. Для соответствующих значений частоты и коэффициента гармонической линейризации будем моделировать соответствующее решение для системы (6.1) с  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.5$  и  $\varepsilon = 1$ . Как видно из результатов моделирования, представленных на рис. 1–3, устойчивый предельный цикл сохраняется в исходной системе.

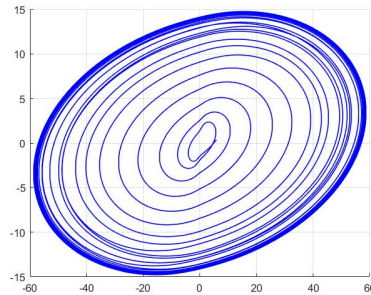


Рис. 6.2. Устойчивый предельный цикл в системе (6.1) с параметрами (6.3) и  $\varepsilon = 0.1$ .

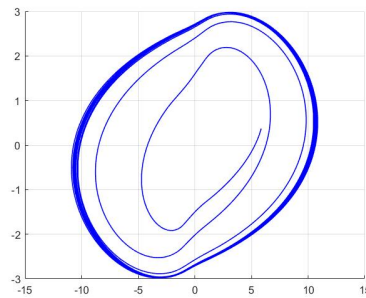


Рис. 6.3. Устойчивый предельный цикл в системе (6.1) с параметрами (6.3) и  $\varepsilon = 0.5$ .

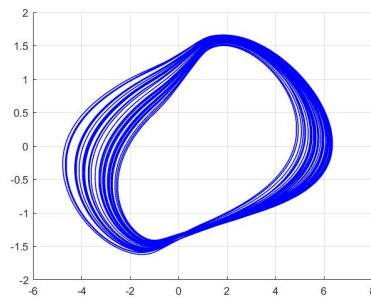


Рис. 6.4. Предельный цикл в системе (6.1) с параметрами (6.3) и  $\varepsilon = 1$ .

Для  $a_0^+$  условия теоремы не выполнены.

При малом значении параметра  $\varepsilon$  траектория из соответствующих начальных данных



(6.6) притянется к устойчивому состоянию равновесия  $x = 0$  (см. рис. 4).

При  $\varepsilon = 1$  состояние равновесия теряет устойчивость и траектория из найденных начальных данных (6.6) притягивается к хаотическому аттрактору (см. рис. 5).

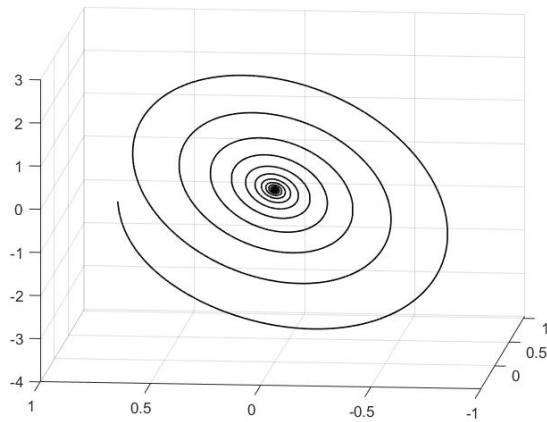


Рис. 6.5. Траектория системы (6.1) при малом  $\varepsilon$  и параметрами (6.3) из начальных данных (6.6) притягивается к нулевому устойчивому состоянию равновесия.

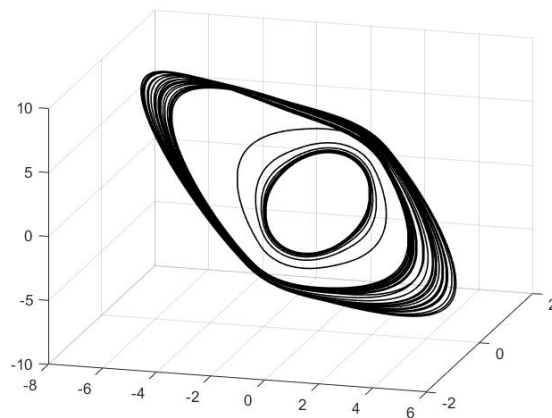


Рис. 6.6. Траектория системы (6.1) с  $\varepsilon = 1$  и параметрами (6.3) притягивается из начальных данных (6.6) к хаотическому аттрактору.

### 6.3. Применение метода Крылова-Ньютона для системы Чуа

После получения начального приближения периодической траектории в системе Чуа (6.1), параметры (6.4), (6.7) для неустойчивых периодических траекторий (УРО) могут быть уточнены с помощью метода Крылова-Ньютона (см. Раздел 4.2).

Программа (см. Приложение Б) отобразит результат временного шага начального предположения для траектории (зеленый), вызовет подпрограмму Ньютона-Хука, и построит сходящееся решение (синий).

Сравнивая относительную ошибку для начального предположения на начальной итерации с окончательной относительной ошибкой, получаем что ошибка уменьшилась с  $\text{relative}_{err} = 0.1811$  до  $\text{relative}_{err} = 1.1799 \cdot 10^{-11}$ . Так же, начальные и конечные точки периодической траектории совпали:

$$\text{start}_x = (5.8584; 0.3253; -8.4467), \quad \text{end}_x = (5.8584; 0.3253; -8.4467),$$

что можно увидеть на рисунке.

Для случая  $\varepsilon = 0.1$  видим устойчивую периодическую траекторию

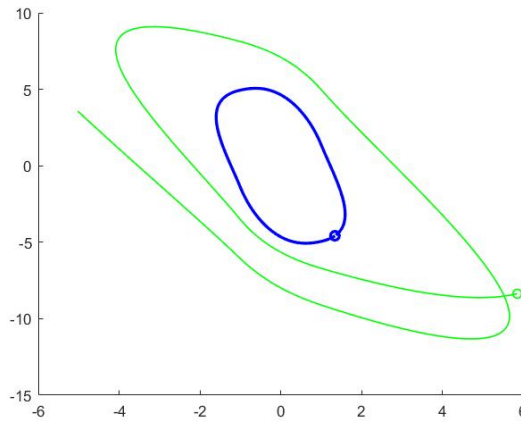


Рис. 6.7. Результат поиска УРО для системы Чуа. Случай  $\varepsilon = 0.1$

При  $\varepsilon = 1$ , исходная система имеет 2 скрытых хаотических аттрактора, и периодическая траектория уже неустойчива:

#### 6.4. Проверка системы Чуа на наличие ONL

Ограничение нечетного числа является одной из наиболее обсуждаемых проблем DFC. Это ограничение было сформулировано сначала Ушио [18] для дискретных систем, а затем обобщено системами непрерывного времени Джаста, Накадзимы и Уэды [24, 25]. Это ограничение гласит, что метод Пирагаса терпит неудачу для любой периодической траектории с нечетным числом вещественных множителей Флоке, превышающих единицу. Это ограничение можно интерпретировать с топологической точки

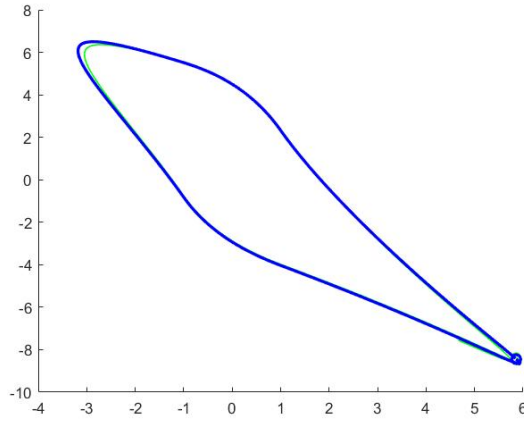


Рис. 6.8. Результат поиска UPO для системы Чуа. Случай  $\varepsilon = 1$ .

зрения следующим образом. Нечетное число фактически указывает, что необходимым условием для работы метода DFC является наличие мнимой части показателя Флоке, геометрически это означает, что метод работает только для траекторий, имеющих конечное кручение. Когда контур обратной связи замкнут и коэффициент усиления управления  $K$  увеличивается, эта пара сложных FE перемещается в левую полуплоскость, и система с замкнутым контуром становится стабильной. В случае нулевого кручения мы имеем только один неустойчивый показатель Флоке на вещественных осях.

Используя метод Крылова-Ньютона (см. Раздел 4.2) и метод Демидовича для оценки мультипликаторов Флоке (см. Главу 5), для неустойчивой периодической траектории систем (6.1) с параметрами (6.3) были получены следующие значения:

$$\rho_1 = -1.783071, \quad \rho_2 = -0.033927, \quad \rho_3 \approx 1. \quad (6.8)$$

Из соотношений (6.8) видно, что для UPO системы Чуа (6.1) с параметрами (6.3) **выполняются ограничения ONL**: показатель  $\rho_1$  по модулю больше 1. Таким образом, в следующей главе для стабилизации данного UPO будет применяться метод Пирагаса с неустойчивой компонентой (см. Раздел 2.2). При этом отметим, что выбор начальных данных и величины запаздывания будет осуществляться, опираясь на соответствующие результаты работы метода гармонического баланса (см. Раздел 3.2 и Раздел 6.2) и метода Крылова-Ньютона (см. Раздел 4.2 и Раздел 6.3), соответственно.

## 6.5. Применение метода Пирагаса с неустойчивой компонентой к системе Чуа

Для системы Чуа (6.1) с параметрами (6.3), используя замкнутую систему с управлением по Пирагасу (2.4) и параметрами  $B^* = (1, 0, 0)$ ,  $C^* = (1, 0, 0)$ ,  $R = 0.7$ ,  $N = 100$ ,  $K = 3.5$ ,  $\lambda_c^0 = 0.1$ ,  $\lambda_c^\infty = -2$ , т.е. системы вида

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha(y(t) - x(t) - f(x(t))) + [F_N(t) + w(t)], \\ \dot{y}(t) &= x(t) - y(t) + z(t), \\ \dot{z}(t) &= -(\beta y(t) + \gamma z(t)), \\ \dot{w}(t) &= \lambda_c^0 w(t) + (\lambda_c^0 - \lambda_c^\infty) F_N(t), \\ F_N(t) &= x(t) - (1-R) \sum_{k=1}^N R^{k-1} x(t - kT), \\ f(x) &= m_1 x + \text{sat}(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)\end{aligned}$$

в данной работе нам **впервые** удалось стабилизировать УРО  $u^{\text{upo}}(t, u_0)$  с периодом  $\tau = 2.70760962347268$  (см. Рис. 6.9) используя в качестве начальных данных приближенное решение, полученное из метода гармонического баланса (см. 6.2):

$$u_0(t) = S \begin{pmatrix} a_0 \cos(\omega t) \\ a_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_0(t) \equiv 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

При дальнейшем анализе результатов данного эксперимента выяснилось, что в исходной системе Чуа (6.1) стабилизированная УРО располагается между двумя симметричными скрытыми аттракторами  $\mathcal{A}_\pm$  и в некотором смысле задает между ними границу, сепарируя бассейны их притяжения (см. Рис. 6.10).

Результаты этого эксперимента можно было бы повторить с использованием различных других численных подходов (см., например, [39–41]), однако предложенная нами в работе процедура Пирагаса в целом более удобна для численной визуализации УРО и может найти широкое применение в самых разнообразных задачах управления хаосом (см., например, [42–44]).

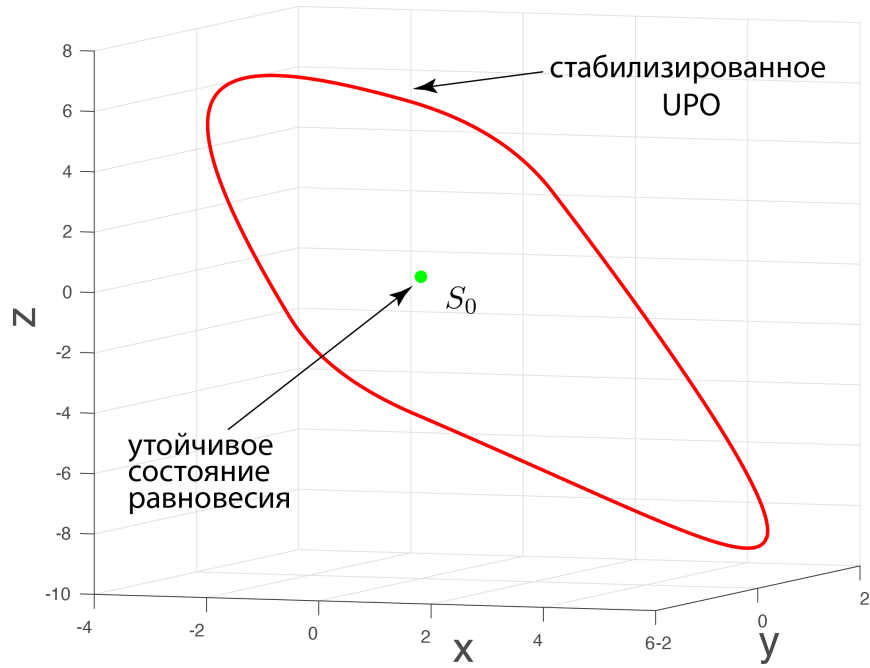


Рис. 6.9. Стабилизированное UPO (красный) в системе Чуа (6.5) с параметрами (6.3).

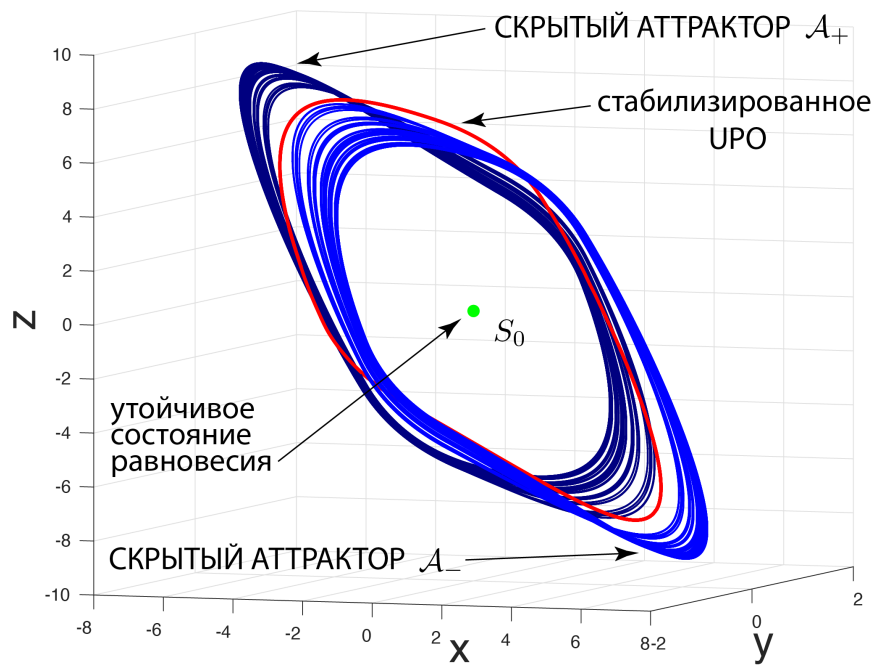


Рис. 6.10. Расположение стабилизированного UPO (красный) в системе Чуа (6.1) с параметрами (6.3) относительно скрытых хаотических аттракторов  $A_{\pm}$  (синий/темно-синий).

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в **реализации модифицированного метода Пирагаса поиска неустойчивых периодических траекторий** для преодоления ограничения на нечетное число отрицательных показателей Флоке больших 1 (odd number limitation, ONL) и применении данного метода для стабилизации неустойчивых периодических траекторий, возникающих в рамках бифуркационного сценария рождения скрытого аттрактора в системе Чуа. Представленный метод синтезирован с использованием следующих аналитических и численных подходов:

1. процедуры гармонического баланса для поиска начального приближения периодического решения;
2. метода Крылова-Ньютона для аппроксимации неустойчивой периодических траекторий (см. Приложение А);
3. процедуры вычисления мультипликаторов Флоке (см. Приложение Б);
4. процедуры продолжения по параметру для поиска УРО вложенный в новый хаотический аттрактор (см. Приложение В);
5. модифицированного метода Пирагаса с неустойчивой компонентой (UDFC).

Разработана и представлена программа, написанная в Matlab, демонстрирующая применение данного метода для системы Чуа.

Результаты работы докладывались на Всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2022, по итогам доклада готовится публикация.

В дальнейшем планируется более детально изучить весь бифуркационный сценарий возникновения скрытых аттракторов в системе Чуа (6.1) с параметрами (6.3), и в частности его начальную фазу, в рамках которой происходит бифуркация удвоения периода при переходе от двух симметричных устойчивых периодических траекторий ( $\varepsilon \approx 0.1$ ) к двум симметричным неустойчивым аттракторам ( $\varepsilon \approx 0.8$ ).

## Список литературы

1. D. Ruelle and S. Isola. *Chaotic evolution and strange attractors*, volume 1. Cambridge University Press, 1989.
2. S.H. Strogatz. Nonlinear dynamics and chaos perseus publishing. *IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, Massachusetts, 2000. Vancouver BC*, pages 298–301, 2000.
3. E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
4. E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke. Erratum:“controlling chaos”[phys. rev. lett. 64, 1196 (1990)]. *Physical Review Letters*, 64(23):2837, 1990.
5. G. Chen and X. Yu. *Chaos control: theory and applications*, volume 292. Springer Science & Business Media, 2003.
6. K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170(6):421–428, 1992.
7. K. Pyragas. Analytical properties and optimization of time-delayed feedback control. *Physical Review E*, 66(2):026207, 2002.
8. W. Lin, H. Ma, J. Feng, and G. Chen. Locating unstable periodic orbits: When adaptation integrates into delayed feedback control. *Physical Review E*, 82(4):046214, 2010.
9. G. Chen and X. Yu. On time-delayed feedback control of chaotic systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 46(6):767–772, 1999.
10. N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, and M.M. Shumafov. A short survey on Pyragas time-delay feedback stabilization and odd number limitation. *IFAC-PapersOnLine*, 48(11):706–709, 2015.
11. A. Amann and E. W. Hooton. An odd-number limitation of extended time-delayed feedback control in autonomous systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1999):20120463, 2013.
12. G. A. Leonov and N. V. Kuznetsov. Hidden attractors in dynamical systems. from hidden oscillations in hilbert–kolmogorov, aizerman, and kalman problems to hidden chaotic attractor in chua circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(01):1330002, 2013.

13. Крылов Н.М. и Боголюбов Н.Н. Символические методы Нелинейной Механики в их приложениях к исследованию резонанса в электронном генераторе. *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, (1):7–34, 1934.
14. N. Kryloff, N. and Bogoliouboff. Les mesures invariantes et transitives dans la mécanique non linéaire. *Математический сборник*, 1(5):707–711, 1936.
15. B. Van der Pol. Lxxxviii. on “relaxation-oscillations”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11):978–992, 1926.
16. R. Genesio and A. Tesi. Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems. *Automatica*, 28(3):531–548, 1992.
17. R. Genesio and A. Tesi. A harmonic balance approach for chaos prediction: Chua’s circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2(01):61–79, 1992.
18. T. Ushio. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 43(9):815–816, 1996.
19. Ф. Райтманн. Динамические системы, аттракторы и оценки их размерности. 2013.
20. Z. Galias and W. Tucker. Short periodic orbits for the lorenz system. In *2008 International Conference on Signals and Electronic Systems*, pages 285–288. IEEE, 2008.
21. G.A. Leonov. Pyragas stabilizability via delayed feedback with periodic control gain. *Systems & Control Letters*, 69:34–37, 2014.
22. L.F. Shampine, S. Thompson, and J. Kierzenka. Solving delay differential equations with dde23. URL <http://www.runet.edu/~thompson/webddes/tutorial.pdf>, 2000.
23. K. Pyragas. Control of chaos via an unstable delayed feedback controller. *Physical Review Letters*, 86(11):2265, 2001.
24. H. Nakajima. On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Physics Letters A*, 232(3-4):207–210, 1997.
25. H. Nakajima and Y. Ueda. Limitation of generalized delayed feedback control. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 111(1-4):143–150, 1998.
26. K. W. Neves. Automatic integration of functional differential equations: an approach. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 1(4):357–368, 1975.
27. C.T. Baker, C.A. Paul, and D.R. Willé. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. *Advances in Computational Mathematics*, 3(1):171–196, 1995.



28. K. Cooke, P. Van den Driessche, and X. Zou. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. *Journal of Mathematical biology*, 39(4):332–352, 1999.
29. Г. А. Леонов and К. А. Звягинцева. Стабилизация по Пирагасу дискретных систем запаздывающей обратной связью с периодическим импульсным коэффициентом усиления. *Вестник Санкт-Петербургского университета. математика. механика. астрономия*, 2(3):342–353, 2015.
30. M. Basso, R. Genesio, and A. Tesi. A frequency method for predicting limit cycle bifurcations. *Nonlinear Dynamics*, 13(4):339–360, 1997.
31. A. Tesi, E.H. Abed, R. Genesio, and H.O. Wang. Harmonic balance analysis of period-doubling bifurcations with implications for control of nonlinear dynamics. *Automatica*, 32(9):1255–1271, 1996.
32. J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2013.
33. A.P. Willis. Equilibria, periodic orbits and computing them. *arXiv preprint arXiv:1908.06730*, 2019.
34. D.A. Knoll and D.E. Keyes. Jacobian-free newton–krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193(2):357–397, 2004.
35. D. Viswanath. Recurrent motions within plane couette turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 580:339–358, 2007.
36. J.E. Dennis Jr and R.B. Schnabel. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. SIAM, 1996.
37. Б. П. Демидович. *Лекции по математической теории устойчивости*. Наука, 1967.
38. G.A. Leonov and N.V. Kuznetsov. Localization of hidden oscillations in dynamical systems (plenary lecture). In *4th International Scientific Conference on Physics and Control*, 2009.
39. D. Viswanath. The Lindstedt–Poincaré technique as an algorithm for computing periodic orbits. *SIAM review*, 43(3):478–495, 2001.
40. V.M. Budanov. Undefined frequencies method. *Fundam. Prikl. Mat.*, 22:59–71, 2018. (in Russian).
41. A.N. Pchelintsev, A.A. Polunovskiy, and I.Yu. Yukhanova. The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system. *Tambov*

*University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 24:187–203, 2019. (in Russian).

42. T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, and J.A. Yorke. Using small perturbations to control chaos. *Nature*, 363:411–417, 1993.
43. S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, H. Mancini, and D. Maza. The control of chaos: theory and applications. *Physics reports*, 329(3):103–197, 2000.
44. A.L. Fradkov and R.J. Evans. Control of chaos: Methods and applications in engineering. *Annual Reviews in Control*, 29(1):33–56, 2005.

## Приложение А

## Реализация процедуры Крылова-Ньютона в Matlab для аппроксимации неустойчивой периодической траектории в системе Чуа

Листинг А.1. ChuaSys.m - Система Чуа  $\dot{x} = f(x)$

```

1 function dz = ChuaSys(~, z, alpha, beta, gamma, m_0, m_1)
2
3 eps = 1;
4 k=0.2099;
5
6 dz = zeros(3,1);
7
8 dz(1) = -alpha*(m_1+1 + k)*z(1) + alpha*z(2) - alpha*( 1/2 *
   (m_0-m_1)*(abs(z(1) + 1) - abs(z(1) - 1))) -
   eps*alpha*(-k*z(1));
9 dz(2) = z(1) - z(2) + z(3);
10 dz(3) = -beta*z(2) - gamma*z(3);
11
12 end

```

Листинг А.2. MAIN.m - Установите начальное значение  $x_0$  и вызовите NewtonHook.m.

```

1 global new_x % Current best x
2 global epsJ % epsilon used in Jacobian approximation
3 global ndts % Number of timesteps taken in period T
4 global fixT % Fix T for equilibrium, rather than PO solution
5 global p % Parameters of dynamical system
6
7 n = 4 ; % Dimension of system, including unknown params
8 mgmres = 4 ; % max GMRES iterations

```

```

9   nits      = 100 ; % max Newton iterations
10  rel_err   = 1d-8 ; % Relative error |F|/|x|
11
12  del       = -1d0 ; % These rarely need changing for any problem
13  mndl      = 1d-20 ;
14  mxdl      = 1d+20 ;
15  gtol      = 1d-3 ;
16  epsJ      = 1d-6 ;
17
18  %-----parameters for CHUA system-----%
19  alpha     = 8.4562;
20  beta     = 12.0732;
21  gamma    = 0.0052;
22  omega_0   = 2.0392;
23  T = (2*pi)/omega_0; %3.0812
24  x_0       = 5.8561;
25  y_0       = 0.3693;
26  z_0       = -8.3665;
27
28  p = [alpha; beta; gamma]
29
30  new_x = [T; x_0; y_0; z_0];
31  ndts  = 300 ;
32  fixT  = 0 ;
33
34  start_x = new_x
35  end_x   = steporbit(ndts, start_x)
36  x = zeros(4, ndts) ;
37  x(:,1) = start_x ;
38  for i = 1:ndts-1 ;
39     x(:,i+1) = steporbit(1, x(:,i)) ;
40  end

```

```

41 hold on
42 plot(x(2,:),x(4,:), 'g', 'LineWidth',1) % X,Z
43 plot(x(2,1),x(4,1), 'go', 'LineWidth',1)
44
45 d = sqrt(dotprd(-1,new_x,new_x)) ;
46 tol = rel_err * d ;
47 del = del * d ;
48 mndl = mndl * d ;
49 mxdl = mxdl * d ;
50
51 info = 1 ;
52 info = NewtonHook(@getrhs, @multJ, @multJp, @saveorbit,
@dotprd, ...
53                               mgmres, n, gtol, tol, del, mndl, mxdl, nits,
info) ;
54
55 start_x = new_x
56 end_x = steporbit(ndts,start_x)
57 x = zeros(4,ndts) ;
58 x(:,1) = start_x ;
59 for i = 1:ndts-1 ;
60     x(:,i+1) = steporbit(1,x(:,i)) ;
61 end
62 plot(x(2,:),x(4,:), 'b', 'LineWidth',2) % X,Z
63 plot(x(2,1),x(4,1), 'bo', 'LineWidth',2)

```

Исходный код всех дополнительных функций метода Крылова-Ньютона можно посмотреть в [33].

## Приложение Б

Реализация процедуры Демидовича вычисления  
мультипликаторов Флоке в Matlab для периодических  
траекторий системы Чуа

Листинг Б.1. `computeMultipliers.m` - процедура вычисления мультипликаторов Флоке

```
1 close all; clear;  
2  
3 outDir = './';  
4 alpha = 8.4562;  
5 beta = 12.0732;  
6 gamma = 0.0052;  
7 m_0 = -0.1768;  
8 m_1 = -1.1468;  
9 omega_0 = 2.0392;  
10 T = 2.7076;  
11 x_0 = 5.8561;  
12 y_0 = 0.3693;  
13 z_0 = -8.3665;  
14  
15 p = [alpha; beta; gamma];  
16  
17 period = T;  
18  
19 stepNum = 2000;  
20 step = period/stepNum;  
21 periodSpan = 0 : step : period;  
22  
23 options = odeset('MaxStep', 0.001, 'RelTol', 1e-8, 'AbsTol',  
    1e-8);
```

```

24 sys = @(t, z) ChuaSys(t, z, alpha, beta, gamma, m_0, m_1);
25 solODE = ode45(sys, [0, period], [x_0, y_0, z_0], options);
26 upoTraj = deval(solODE, periodSpan);
27
28 jacAver = zeros(3,3);
29 integralStepNum = 100;
30
31 XhT = eye(3);
32 for indexJacAver = 1 : stepNum
33
34     integralSpan = periodSpan(indexJacAver) :
35     step/integralStepNum : periodSpan(indexJacAver+1);
36
37     jacAverCurrArr = zeros(integralStepNum+1,3,3);
38     for indexIntegral = 1 : integralStepNum+1
39         currT = integralSpan(indexIntegral);
40         jacAverCurrArr(indexIntegral, :, :) = chuaJac(deval(solODE,
41         currT), alpha, beta, gamma, m_0, m_1);
42     end
43
44     jacAver = 1/step * simps(integralSpan, jacAverCurrArr);
45     XhT = expm(step*reshape(jacAver, 3,3)) * XhT;
46 end
47
48 multipliers = eig(XhT);
49 fprintf('Multipliers = [%0.6f, %0.6f, %0.6f]\n', multipliers);
50 save([outDir, 'multipliers_LR.mat'], 'multipliers');
51
52 charExp = 1 / period * log(abs(multipliers));
53 charExp = sort(charExp, 'descend');
54 fprintf('charExp = [%0.6f, %0.6f, %0.6f]\n', charExp);
55 save([outDir, 'charExp_LR.mat'], 'charExp');

```

```

54
55 Entropy_UPO = 1/log(2)*sum(charExp(charExp>0));
56 fprintf('Entropy_for_UPO_=%%.6f\n', Entropy_UPO);
57 save([outDir, 'Entropy_LR.mat'], 'Entropy_UPO');
58
59 LD_UPO = 2 + (real(charExp(1)) + real(charExp(2))) /
    abs(real(charExp(3)));
60 fprintf('LD_for_UPO_=%%.6f\n', LD_UPO);
61 save([outDir, 'LD_LR.mat'], 'LD_UPO');
62 save([outDir, 'LD_LR.mat'], 'LD_UPO');

```

Листинг Б.2. **chuaJac.m** - матрица Якоби для системы Чуа

```

1 function jacMat = chuaJac(y, alpha, beta, gamma, m_0, m_1)
2
3 dsat = @(x) 1 * (abs(x) <= 1 ) + 0 * (abs(x) > 1 );
4
5 jacMat = [-alpha * (1 + m_1 + (m_0 - m_1) * dsat(y(1))), alpha, 0;
6           1, -1, 1;
7           0, -beta, - gamma];
8 end

```

Исходный код метода Симпсона приближенного вычисления определенного интеграла см. по ссылке.



## Приложение В

Реализация модифицированного метода Пирагаса с  
 неустойчивой компонентой для стабилизации  
 неустойчивых периодических траекторий системы Чуа

Листинг В.1. `chuaSystD.m` - система Чуа с управлением по Пирагасу

```

1 function dudt = chuaSystD(~, u, Z, alpha, beta, gamma, m_0, m_1,
   R, nLag, K, lambda0_c, lambdaInf_c, eps)
2
3   F = u(1) - Z(1,1);
4
5   for iLag = 1 : nLag
6     F = F + R^iLag * (Z(1, iLag) - Z(1, iLag+1));
7   end
8
9   sat = m_1 * u(1) + 1/2*(m_0-m_1)*(abs(u(1)+1)-abs(u(1)-1));
10
11  dudt = zeros(4,1);
12
13  dudt(1) = alpha * (u(2) - u(1)) - alpha * sat - K * (F +
u(4));
14  dudt(2) = u(1) - u(2) + u(3);
15  dudt(3) = -(beta * u(2) + gamma * u(3));
16  dudt(4) = lambda0_c * u(4) + (lambda0_c - lambdaInf_c) * F;
17
18 end

```

Листинг В.2. `chuaНВМhistory.m` - (),

```

1 function hist = chuaНВМ_history(t, S, a, w) % history function
   for t <= 0

```

```

2  hist = [ S * [ a * cos(w*t); a * sin(w*t); 0] ; 0];
3  end

```

Листинг В.3. `runChuaDDE.m` - основная процедура, реализующая стабилизацию УРО в системе Чуа

```

1  close all; clear;
2
3  outDir = './OUT/DATA/';
4
5  alpha = 8.4562;
6  beta = 12.0732;
7  gamma = 0.0052;
8  m_0 = -0.1768;
9  m_1 = -1.1468;
10
11 R = 0.7;
12 nLag = 100;
13 eps = 0.9;
14 K = 3.5;
15 lambda0_c = 0.1;
16 lambdaInf_c = -2;
17
18 tau = 2.70760962347268;
19
20 w_0 = 2*pi/tau;
21 a_0 = 5.8561;
22 k = (-alpha*(m_1 + m_1 * gamma +
      gamma)+w_0^2-gamma-beta)/(1+gamma)/alpha;
23 d = (alpha+w_0^2-beta+1+gamma+gamma^2)/(1+gamma);
24
25 s11 = 1; s12 = 0; s13 = -h;
26 s21 = m_1+1+k;

```

```

27 s22 = -w_0/alpha;
28 s23 = -h*(alpha*m_1+alpha+k*alpha-d)/alpha;
29 s31 = (alpha*m_1+k*alpha-w_0^2)/alpha;
30 s32 =
    -(beta*m_1+beta+beta*k+gamma*(alpha*m_1+k*alpha-w_0^2)/alpha)/w_0;
31 s33 =
    h*(-alpha*m_1-k*alpha+d-d^2+d*alpha*m_1+d*alpha+d*k*alpha)/alpha;
32
33 S = [s11 s12 s13; s21 s22 s23; s31 s32 s33];
34
35 dde = @(t, u, Z) chuaSystD(t, u, Z, alpha, beta, gamma, m_0, m_1,
    R, nLag, K, lambda0_c, lambdaInf_c, eps);
36
37 lags = tau * (1 : (nLag+1));
38 hist.sol = @(t) chuaHBM_history(t, S, a_0, w_0);
39 hist.syst_params = [alpha; beta; gamma; m_0; m_1];
40 hist.tEnd = 0;
41 hist.R = R;
42 hist.nLags = nLag;
43 hist.K = K;
44 hist.lambda0_c = lambda0_c;
45 hist.lambdaInf_c = lambdaInf_c;
46 hist.tau = tau;
47
48 tEnd = 150;
49
50 acc = 1e-6; RelTol = acc; AbsTol = acc;
51 ddeOpt = ddeset('RelTol', RelTol, 'AbsTol', AbsTol);
52
53 hist.ddeOpt = ddeOpt;
54

```

```
55 sol = dde23(dde, lags, hist.sol, [hist.tEnd, hist.tEnd+tEnd],  
    ddeOpt);  
56  
57 hist.sol = sol;  
58 hist.tEnd = hist.tEnd+tEnd;  
59  
60 fileName = 'hist-LR';  
61 save([outdir fileName '.mat'], 'hist');  
62  
63 %%  
64 figure(1); hold on;  
65 plot3(sol.y(1,:), sol.y(2,:), sol.y(3,:), 'Color', [1, 0, 0]);  
66 plot3(sol.y(1,1), sol.y(2,1), sol.y(3,1), '.', 'Color', [0, 0, 0]);  
67 grid on; axis on;  
68 xlabel('x');  
69 ylabel('y');  
70 zlabel('z');  
71 view(3);  
72 hold off;  
73  
74 figure(2);  
75 plot(sol.x, sol.y(2,:));  
76 grid on; axis on;  
77 xlabel('t');  
78 ylabel('y(t)');  
79  
80 figure(3);  
81 plot(sol.x, sol.y(4,:));  
82 grid on; axis on;  
83 xlabel('t');  
84 ylabel('w(t)');
```