Санкт-Петербургский государственный университет

ВЕЦАК Максим Игоревич

Выпускная квалификационная работа

Методы управления портфелем ценных бумаг (по данным российского рынка акций)

Уровень образования:
Направление *38.04.01 «Экономика»*
Основная образовательная программа *ВМ.5629.2020 «Математические методы в экономике»*

Научный руководитель:
доктор экономических наук, профессор, Кафедра экономической кибернетики, Воронцовский Алексей Владимирович

Рецензент: кандидат экономических наук, старший преподаватель, Департамент финансов Санкт-Петербургского филиала федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования НИУ ВШЭ, Романюк Кирилл Андреевич

Санкт-Петербург
2022

СОДЕРАЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
ГЛАВА 1. РОЛЬ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ АКТИВОВ В АНАЛИЗЕ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ 5
1.1. Анализ портфельной теории в инвестиционном анализе финансовых активов 5
1.2. Рассмотрение модели рынка капитала в условиях равновесия 8
1.3. Модель оценки активов капитала с портфелем с нулевым коэффициентом бета и условия возможности её применения 20
Выводы 27
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ТЕСТИРОВАНИЯ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ КАПИТАЛЬНЫХ АКТИВОВ И CAPM С ПОРТФЕЛЕМ С НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ БЕТА 28
2.1. Способы тестирования модели CAPM и её модификаций 28
2.2. Использование обобщенного метода моментов для тестирования классической модели CAPM и модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета 38
2.3. Подход Ледуа-Вольфа оценки ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг и показатели результативности управления портфелем ценных бумаг 50
Выводы 58
ГЛАВА 3. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА МОДЕЛЕЙ ОЦЕНКИ АКТИВОВ КАПИТАЛА И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ НА РОССИЙСКОМ РЫНКЕ АКЦИЙ 59
3.1. Проверка условий применения классической CAPM модели на российском рынке акций 59
3.2. Тестирование модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке акций 65
3.3. Применение методов управления портфелем на российском рынке акций 69
Выводы 74
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 76
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 79
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 83
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 86
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 89
ПРИЛОЖЕНИЕ 4 90
ПРИЛОЖЕНИЕ 5 92

ВВЕДЕНИЕ

Развившиеся в 50-60-х годах прошлого века портфельная теория Г. Марковица и модель ценообразования финансовых активов (англ. *capital asset pricing model – CAPM)* являются основой применяемых в настоящее время методов управления портфелем. Элементы портфельной теории и модели ценообразования финансовых активов широко применяются в различных направлениях финансов, таких как оценка бизнеса, корпоративные финансы, инвестирование в реальные активы и непосредственно оценка финансовых активов.

В дальнейшем появились модификации модели CAPM, отвечающие на нарушение предпосылок исходной модели в реальной жизни, а также статистические методы позволяющие улучшить результаты применения портфельной теории на практике. Российский рынок является достаточно молодым, ввиду чего необходимо тестирование отражения условий существующих моделей на рынке. Для этого планируется осуществить проверку возможности использования модели CAPM и моделей на её основе на российском фондовом рынке исходя из подтверждения статистических гипотез, используя данные за последние несколько лет. Также в данной работе планируется рассмотреть альтернативные способы оценки ковариационной матрицы, используемой при решении задачи оптимизации портфеля. Планируется осуществить проверку результатов применения методов оптимизации портфеля, как с традиционными способами оценки ковариационной матрицы, так и иных способов оценки ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг на данных российского рынка акций. Также планируется проверка результатов методов оптимизации портфеля на основе модификаций модели CAPM.

Цель работы – анализ моделей ценообразования активов капитала, проведение тестирования их и оценка результатов применения методов управления портфелем на российском фондовом рынке.

Цель работы обусловила постановку и последовательное решение задач:

– Провести анализ роли портфельной теории в инвестиционном анализе финансовых активов

– Рассмотреть модель оценки активов капитала в условиях равновесия

– Проанализировать модификации модели оценки капитальных активов и возможности их применения

– Рассмотреть способы тестирования модели CAPM и её модификаций

– Проанализировать использование альтернативных тестов, в том числе учитывающих наличие гетероскедастичности и автокорреляции доходностей ценных бумаг, для тестирования классической модели CAPM

– Провести анализ подхода Ледуа-Вольфа оценки ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг

– Оценить условия применения классической модели CAPM, используя метод Фама-Макбета, а также альтернативные способов тестирования

– Проверить отражение модификации модели CAPM на рынке: модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета

– Протестировать результаты применения методов управления портфелем: различных способов оптимизации портфеля на основе традиционных оценок ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг и альтернативных способов её оценки, а также оценить результаты применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета.

Объектом исследования является рынок капитала в условиях равновесия.

Предметом исследования является модель ценообразования финансовых активов и её модификации, способы проверки отражения условий данных моделей на рынке, а также оценка результатов применения портфельной теории на российском рынке акций.

Цель и задачи работы обусловили её структуру. Работа состоит из 3 глав.

В главе 1 рассматриваются теоритические основы портфельной теории и модели оценки капитальных активов и ее модификации.

В главе 2 анализируются способы эмпирической проверки условий применения моделей оценки капитала, в том числе и альтернативные способы, а также рассматривается подход Ледуа-Вольфа к оценке ковариационной матрицы.

Глава 3 посвящена эмпирической проверке отражения условий классической модели CAPM и CAPM с портфелем с нулевой бетой на российском рынке. Также рассматриваются результаты применения различных методов управления портфелем ценных бумаг, а также модели CAPM с портфелем с нулевой бетой.

ГЛАВА 1. РОЛЬ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ АКТИВОВ В АНАЛИЗЕ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

1.1. Анализ портфельной теории в инвестиционном анализе финансовых активов

Основоположником портфельной теории является Гарри Марковиц[1], который построил модель выбора оптимального портфеля рисковых ценных бумаг. Предпосылки, положенные в основу модели Марковица следующие:

1. Рассматривается однопериодная модель, при которой инвестор руководствуется планами на один период
2. Активы бесконечно делимы и абсолютно ликвидны
3. Инвесторы одинаково оценивают будущую ожидаемую доходность рисковых активов, их дисперсии и ковариации
4. Инвестировать возможно только в рисковые активы
5. Доходности ценных бумаг нормально распределены
6. Риск ценных бумаг оценивается как стандартное отклонение их доходности
7. Нет налогов и трансакционных издержек связанных с покупкой и продажей активов

Доходность обыкновенной k-ой акции определяется следующим образом:

$$R_k = \frac{S(1) - S(0) + D}{S(0)} * 100, \tag{1.1}$$

где $S(1)$ и $S(0)$ – цена акции в конце и в начале периода соответственно, D – дивиденды за данный период.

На рынке имеется определённое количество рисковых активов, которые обозначим за N, доходность которых описывается случайной величиной, соответствующей нормальному распределению. Тогда математическое ожидание доходности k-го рискового актива, где $k = (1,2, \dots, N)$ эквивалентно среднему и выглядит следующим образом:

$$E(R_k) = \bar{R}_k = \sum_{j=1}^{M} P_{kj} R_{kj}, \tag{1.2}$$

где R_{kj} и P_{kj} – j-я доходность и вероятность j-й доходности k-го актива, а M количество рассматриваемых периодов. Дисперсия ценной бумаги:

[1] Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7. No. 1. pp. 77–91. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2975974 (Дата обращения: 01.05.2022).

$$\sigma_k^2 = \sum_{j=1}^{M} P_{kj}\left(R_{kj} - \bar{R}_k\right)^2. \qquad (1.3)$$

Ожидаемая доходность портфеля ценных бумаг представляет собой средневзвешенную доходность ценных бумаг представленных в нем:

$$E(R_P) = \bar{R}_p = \sum_{k=1}^{N} w_k \bar{R}_k, \qquad (1.4)$$

где w_k – вложение в k-ый актив в портфеле, N – количество рисковых ценных бумаг, $\bar{R}_k$ – ожидаемая доходность k-ой ценной бумаги.

Г. Марковиц предложил брать за меру риска портфеля его стандартное отклонение. Дисперсия портфеля из N ценных бумаг, для которых корреляция (ρ) больше нуля, равна:

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_k w_j\, \sigma_{jk} = w[\sigma]w^T, \qquad (1.5)$$

где w=$(w_1, w_2, \dots, w_N)$ – вектор структуры вложений k-ых активов в портфеле, $[\sigma]$ – матрица ковариации доходности ценных бумаг портфеля.

У инвестора существует возможность выбрать портфель с параметрами $E(R_P)$ и σ_P^2 из множества допустимых комбинаций, однако, исходя из предпосылки рациональности и максимизации полезности, инвестору может быть интересен только некоторый набор портфелей. Исходя из теоремы об эффективном множестве: «Инвестор выберет свой оптимальный портфель из множества портфелей, каждый из которых: обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска и обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности»[2]. Портфели соответствующие данной теореме составляют эффективное множество, которые также называют эффективной границей.

Графически эффективная граница и множество допустимых портфелей представлены на рис. 1.1. Портфели не находящиеся на ней не являются оптимальными и не интересны инвестору.

Нахождение границы эффективных портфелей в условиях отсутствия возможности совершать короткие продажи ценных бумаг и вложений инвесторов только в рисковые активы, то есть стандартное отклонение, которых больше нуля, можно представить в виде задачи квадратичного программирования.

---

[2] Изложено по Шарп У. Инвестиции [Текст]: / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. - пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001. – С. 195.

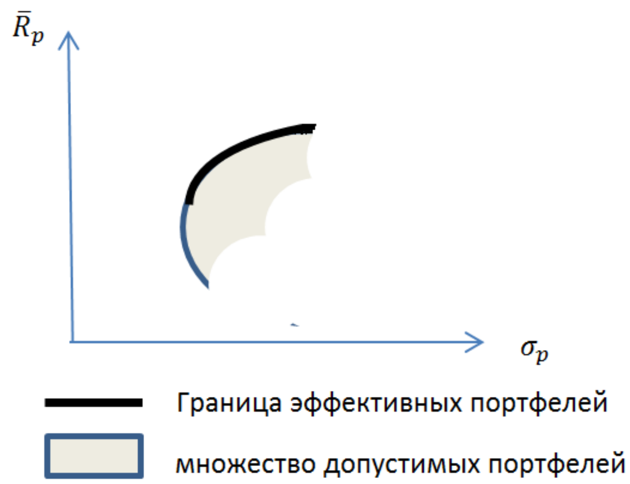

Рис. 1.1. **Граница эффективных портфелей**

Задачу нахождения портфеля, с заданной доходностью обеспечивающего минимальную дисперсию можно представить следующим образом:

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} w_k w_j \, \sigma_{jk} \to \min,$$
$$\sum_{k=1}^{N} w_k \bar{R}_k = \bar{R}_P, \qquad (1.6)$$
$$\sum_{k=1}^{N} w_k = 1,$$
$$w_k \geq 0.$$

В практике получило использование портфеля на основе решение задачи по поиску портфеля с наименьшей дисперсией, из портфелей, лежащих на эффективной границе – *Global Minimum Variance (GMV)*. Задача нахождения данного портфеля, в условии отсутствия возможности коротких продаж, сводится к решению следующей задачи оптимизации, которую в матричной форме можно представить следующей форме:

$$\sigma_P^2 = w[\sigma]w^T \to \min$$
$$we = 1, \qquad (1.7)$$
$$w_k \geq 0,$$

где e – вектор $e = (1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$ размерности $(N \times 1)$. Использование портфелей GMV в реальной практике получило широкое распространение, так как оценка ожидаемых доходностей является затруднительной в реальности, в свою очередь ковариации ценных бумаг более устойчивы во времени.

Таким образом, портфельная теория Марковица показывает, что диверсификация возможна за счет добавления в портфель ценных бумаг с различной ковариацией, а инвестору могут быть интересны только портфели, одновременно обеспечивающие минимальный риск, при заданной ожидаемой доходности портфеля, и обеспечивающие максимальную ожидаемую доходность, при заданном уровне риска.

1.2. Рассмотрение модели рынка капитала в условиях равновесия

В данном параграфе будет рассмотрена равновесная модель рынка капитала CAPM. Данную модель часто называют моделью Шарпа-Литнера в честь авторов научных статей, которые стали основой современного представления модели[3]. Свой вклад в развитие теоритических основ модели также внесли Ж. Мосин, Дж. Трейнор и Дж. Тобин[4].

Предпосылки для модели CAPM следующие:

1. Нет налогов и трансакционных издержек связанных с покупкой и продажей активов
2. Активы бесконечно делимы и абсолютно ликвидны
3. Влияние индивидуального инвестора на цены активов достаточно малы, чтобы была возможность их игнорировать
4. Инвесторы не склонны к риску
5. Инвесторы максимизируют функцию рискового предпочтения, осуществляя выбор портфеля на основе ожидаемой доходности и риска
6. Функции рискового предпочтения являются квадратичными по риску, различия между функциями различных инвесторов в коэффициентах несклонности к риску
7. Инвесторы одинаково оценивают будущую ожидаемую доходность рисковых активов, их дисперсии и ковариации
8. Любая информация на рынке капитала доступна и немедленно поступает на рынок
9. Количество рисковых активов на рынке определенно
10. Рассматривается однопериодная модель, при которой у участников рынка период планирования одинаков

---

[3] Sharpe W.F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // The Journal of Finance. 1964. Vol. 19. No. 3. pp. 425–442. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2977928 (Дата обращения: 01.05.2022).
Sharpe W.F. A Simplified Model for Portfolio Analysis // Management Science. 1963. Vol. 9. No. 2. pp. 277–293. [Электронный ресурс]. URL: https://www.jstor.org/stable/2627407 (Дата обращения: 01.05.2022).
Lintner J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // The Review of Economics and Statistics. 1965. Vol. 47. No. 1. pp. 13–37. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/1924119 (Дата обращения: 01.05.2022).
[4] Mossin J. Equilibrium in a Capital Asset Market // Econometrica. 1996. Vol. 34. No. 4. pp. 768–783. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/1910098 (Дата обращения: 01.05.2022).
Tobin J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk // The Review of Economic Studies. 1958. Vol. 25. No. 2. pp. 65–86. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2296205 (Дата обращения: 01.05.2022).
French C.W. Jack Treynor's «Toward a Theory of Market Value of Risky Assets» // SSRN Electronic Journal. 2002. [Электронный ресурс]. URL: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.628187 (Дата обращения: 01.05.2022).

11. У всех инвесторов есть возможность, как получить кредит по безрисковой ставке, так и вкладывать капитал под неё, а также не существует ограничений на «короткую продажу» активов, то есть рынок капитала является совершенным.

В первом параграфе рассматривалась задача инвестора при отсутствии возможности кредитования и инвестирования по безрисковой ставке.

Обозначим случайную величину, которой объясняется доходность рисковых активов за Q_k. Так как для каждой случайной величины Q_k, известна ожидаемая доходность $\bar{R}_k$, дисперсия σ_k^2 и ковариации доходности σ_{kj}, ожидаемый капитал инвестора в конце периода при наличии возможности безрискового инвестирования и кредитования можно представить следующим образом[5]:

$$\begin{aligned} E\big(S(w_k)\big) &= I\sum_{k=1}^{N} w_k(1+Q_k) + \left(N_0 - I\sum_{k=1}^{N} w_k\right)\big(1+R_f\big) \\ &= N_0\big(1+R_f\big) + I\sum_{k=1}^{N} w_k(\bar{R}_k - R_f), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $S(w_k)$ – капитал инвестора в конце периода, N_0 – объем авансированного капитала отдельного инвестора, I – величина вложений инвестора в рисковые активы, R_f – безрисковая ставка.

В векторной форме ожидаемый капитал инвестора в конце периода, возможно записать в виде:

$$E\big(S(w_k)\big) = N_0\big(1+R_f\big) + Iw\big(\bar{R}_k - R_f\big), \quad (1.9)$$

где w=$(w_1, w_2, \dots, w_N)$ – вектор структуры вложений k-ых активов в портфеле, $R_k = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_N)$ вектор ожидаемых доходностей k-ых активов в портфеле, $(\bar{R}_k - R_f) = (\bar{R}_1 - R_f, \bar{R}_2 - R_f, \dots, \bar{R}_N - R_f)$ вектор премии за риск k-ых активов в портфеле.

Тогда риск портфеля инвестора, выраженный дисперсией, будет представлен рисковыми ценными бумагами, так как дисперсия безрискового актива равна нулю:

$$\Big(\sigma\big(S(w_k)\big)\Big)^2 = I\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_j w_k \sigma_{jk} = Iw[\sigma]w^T, \quad (1.10)$$

где $[\sigma]$ – матрица ковариации доходности ценных бумаг портфеля.

Функции рискового предпочтения инвестора с учетом квадратичности функции полезности и полученных значений ожидаемого капитала и дисперсии в данном случае выглядит следующим образом:

[5] Изложено по Воронцовский А.В. Современные теории рынка капитала: Учебник / А.В. Воронцовский; СПбГУ, экон. факультет. – Москва: Экономика, 2010. –С. 97-111.

$$F\big(S(w_k)\big) = E\big(S(w_k)\big) - \frac{a}{2}\sigma^2\big(S(w_k)\big) \\ = N_0\big(1 + R_f\big) + Iw\big(\bar{R}_k - R_f\big) - \frac{a}{2}Iw[\sigma](Iw)^T, \qquad (1.11)$$

где a – коэффициент несклонности к риску, при этом $a > 0$. При прочих равных условиях, чем выше a, тем выше непринятие инвестором риска.

В данном случае обозначим произведение вложения в рискованные активы на вектор весов вложений в рисковые активы Iw в виде вектора B:

$$F\big(S(w_k)\big) = N_0\big(1 + R_f\big) + B\big(\bar{R}_k - R_f\big) - \frac{a}{2}B[\sigma]B^T. \qquad (1.12)$$

Задача инвестора состоит в максимизации функции (1.12), в случае возможности инвестирования и кредитования по безрисковой ставке, возможно воспользоваться необходимым условием экстремума функции:

$$\frac{\partial F\big(S(w_k)\big)}{\partial B} = \big(\bar{R}_k - R_f\big) - a\sum_{j=1}^{N}\sigma_{kj}\,B_j = \big(\bar{R}_k - R_f\big) - aB[\sigma] = 0;\ k = 1,2,\dots,N. \qquad (1.13)$$

Оптимальный объём для вложений в рисковые активы выглядит следующим образом:

$$B^* = \frac{[\sigma]^{-1}\big(\bar{R}_k - R_f\big)}{a}. \qquad (1.14)$$

Коэффициент a индивидуален для каждого инвестора, а все остальные переменные являются характеристиками соответствующего рынка капитала.

Рассмотрим соотношение оптимальных объёмов вложений f-го и l-го инвесторов:

$$B_f^* = \frac{[\sigma]^{-1}\big(\bar{R}_k - R_f\big)}{a_f} = \frac{a_l[\sigma]^{-1}\big(\bar{R}_k - R_f\big)}{a_f a_l} = \frac{a_l B_l^*}{a_f}. \qquad (1.15)$$

Данное соотношение верно и для каждого отдельного рискового актива:

$$B_{fk}^* = \frac{a_l B_{lk}^*}{a_f}, l = 1,\dots,L. \qquad (1.16)$$

Если на рынке присутствует L инвесторов, то с учетом того, что соотношение (1.16) выполняется для любых активов, получим:

$$\frac{B_{fk_1}^*}{B_{fk_2}^*} = \frac{B_{lk_1}^*}{B_{lk_2}^*}, f \neq l, f, l, l = 1,2,\dots,L. \qquad (1.17)$$

Таким образом, оптимальный портфель рисковых активов любого инвестора не зависит от коэффициента его несклонности к риску и вложенного капитала. Вектор $w_l = (w_{l1}, w_{l2}, \dots, w_{lN})$ представляет структуру портфеля l-го инвестора, в таком случае w_{lk} доля вложений l-го инвестора в рисковые активы вида k в общей стоимости портфеля. Можно показать, что так как $Iw = B$, то и для портфеля инвестора l верно соотношение:

$$w_{lk} = \frac{B_{lk}}{\sum_{j=1}^{N} B_{lj}}, l = 1,2,\dots,L;\ k = 1,2,\dots,N;\ \sum_{k=1}^{N} w_{lk} = 1. \quad (1.18)$$

В таком случае оптимальный объём вложений l-го инвестора можно представить следующим образом:

$$w_{lk}^{*} = \frac{B_{lk}^{*}}{\sum_{j=1}^{N} B_{lk}^{*}} = \frac{\frac{a_l B_{fk}^{*}}{a_f}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{a_l B_{fj}^{*}}{a_f}} = w_{fk}^{*}. \quad (1.19)$$

Равенство (1.19) показывает, что рисковая часть портфеля каждого инвестора одинакова. Изначальный объём капитала каждого инвестора различен. В ситуации

$$N_{l0} < \sum_{k=1}^{N} B_{lk}^{*}, \quad (1.20)$$

капитала инвестора не хватает на приобретение желаемого объёма ценных бумаг, в соответствии с предпосылками модели он может занять по безрисковой ставке необходимую сумму, при этом структура рискового портфеля не изменится, однако ожидаемая доходность и стандартное отклонение портфеля будет прежним. В случае, когда объем авансированного капитала превышает объём вложений в рискованные активы, инвестор вкладывает оставшуюся часть в безрисковые бумаги.

Данный результат называют теоремой разделения Тобина, которую возможно сформулировать следующим образом: «В случае присутствия на рынке одного безрискового актива соотношение рисковых активов в портфеле является одинаковым для всех избегающих риска инвесторов, уровень избегания риска выражается только в соотношении части портфеля представленного безрисковым и рисковым активом»[6].

В условиях выполнения теоремы Тобина, возможно представить оптимальный спрос на акции j-ой фирмы как сумму всех вложений инвесторов в акции данной фирмы, при условии, что у всех инвесторов оптимальный портфель:

$$B_j^{*} = \sum_{l=1}^{L} B_{lj}^{*}. \quad (1.21)$$

Учитывая формулу (1.16) можно представить выражение для одного из инвесторов l_0 следующим образом:

$$B_j^{*} = \sum_{l=1}^{L} B_{lj}^{*} = \sum_{l=1}^{L} \frac{a_{l_0}}{a_l} B_{l_0 j}^{*} = a_{l_0} \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{a_l} B_{l_0 j}^{*}. \quad (1.22)$$

[6] Buiter W.H. James Tobin: an appreciation of his contribution to economics // The Economic Journal. 2003. Vol. 113. No. 491. P. F585-F631. [Электронный ресурс]. URL: http://eprints.lse.ac.uk/847/ (Дата обращения: 01.05.2022).

Тогда объём инвестиций в любую акцию, возможно рассчитать, зная объем одного из них, учитывая коэффициент несклонности к риску всех остальных собственников. Тогда, в условиях выполнения теоремы Тобина и обозначенных выше предпосылок, для определения объёма инвестиций в каждую акцию достаточно провести анализ вложений одного из собственников.

Сумма всех оптимальных вложений в акции каждого вида всех инвесторов называют рыночным портфелем:

$$B_M^* = \sum_{j=1}^{N} B_j^*. \quad (1.23)$$

При этом коэффициент несклонности к риску для всего рынка в зависимости от коэффициента несклонности к риску всех остальных инвесторов можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{a_M} = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{a_l}, \quad (1.24)$$

где a_M – коэффициент несклонности к риску всех инвесторов на рынке или рыночный коэффициент несклонности к риску.

Оптимальный объём вложений всех собственников можно выразить, решив оптимизационную задачу, сходную с той, которая решалась для отдельного инвестора. Ожидаемую доходность «рынка» $\bar{R}_M$ можно представить в виде:

$$E\big(S(B_M)\big) = N_{0M}\big(1 + R_f\big) + B_M\big(\bar{R}_M - R_f\big), \quad (1.25)$$

где N_{0M} – объем авансированного капитала всеми инвесторами на рынке.

Риск «рынка» зависит только от дисперсии всех рисковых активов в портфеле, так как объёмы вложений осуществляются во все рисковые активы, то дисперсия портфеля инвестора во все рыночные активы представляет собой:

$$\Big(\sigma\big(S(B_M)\big)\Big)^2 = I_M^2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} w_j^* w_k^* \sigma_{jk} = B_M^2 \sigma_M^2, \quad (1.26)$$

где I_M^2 – величина вложений всего «рынка» в рисковые активы, w_j^* и w_k^* структура вложений в рыночный портфель, $j \neq k$, σ_M^2 – рыночная дисперсия.

Функцию рискового предпочтения для всех инвесторов на рынке можно представить в виде:

$$F\big(S(w_k)\big) = N_{0M}\big(1 + R_f\big) + B_M\big(\bar{R}_M - R_f\big) - \frac{a_M}{2} B_M^2 \sigma_M^2. \quad (1.27)$$

Оптимальный объём вложений также возможно вычислить, приравняв первую производную к нулю:

$$\frac{dF\big(S(w_k)\big)}{dB_M} = \bar{R}_M - R_f - a_M\, B_M \sigma_M^2 = 0. \quad (1.28)$$

Оптимальный объем вложений в данном случае:

$$B_M^* = \frac{\bar{R}_M - R_f}{a_M \sigma_M^2} = \sum_{j=1}^{N} B_j^*. \quad (1.29)$$

Данное равенство позволяет сказать, что оптимальный объем вложений каждого инвестора при выполнении определенных предпосылок, зависит от параметров рынка, безрисковой ставки и коэффициента несклонности к риску всех инвесторов на рынке. Структура вложений для каждого инвестора в рисковые активы одинакова.

Таким образом, каждый инвестор имеет в своем портфеле все виды акций, которые есть на рынке, так как структура его портфеля совпадает с рыночным. Доходность портфеля *l*-го инвестора, при условии его вложения в безрисковый актив доходность его портфеля можно представить следующим образом:

$$R_p^l = R_f z_l + (1 - z_l)\bar{R}_M, \quad (1.30)$$

где z_l – доля вложений в безрисковый актив, $(1 - z_l)$ доля вложений в рисковый актив.

Дисперсия портфеля представлена только риском рыночного актива, для *l*-го инвестора дисперсия портфеля равна:

$$\sigma_p^l = (1 - z_l)\sigma_M. \quad (1.31)$$

Доля вложений в безрисковые активы выглядит следующим образом:

$$z_l = \frac{\sigma_M - \sigma_p^l}{\sigma_M}. \quad (1.32)$$

Подставляя в данное выражение в уравнение доходности портфеля *l*-го инвестора, получим выражение:

$$\bar{R}_p^l = R_f \frac{\sigma_M - \sigma_p^l}{\sigma_M} + \frac{\sigma_p^l}{\sigma_M}\bar{R}_M = R_f + \frac{\sigma_p^l\big(\bar{R}_M - R_f\big)}{\sigma_M}. \quad (1.33)$$

Данное соотношение верно для любого портфеля, поэтому можно записать в универсальной форме:

$$\bar{R}_p = R_f + \sigma_p \frac{\big(\bar{R}_M - R_f\big)}{\sigma_M}. \quad (1.34)$$

Линию соответствующую данному уравнению называют линией рынка капитала (*Capital Market Line*), а коэффициент наклона кривой $\big(\bar{R}_M - R_f\big)/\sigma_M$ называют рыночной ценой риска, которую обозначим за p. Портфели, лежащие ниже данной линии, являются неэффективными, а портфели выше данной линии не являются возможными. Рыночная цена риска соответствует приросту ожидаемой доходности рыночного портфеля относительно безрисковой ставки процента на единицу риска портфеля.

Стандартное отклонение рыночного портфеля можно представить следующим образом:

$$\sigma_M = \left[\sum_{k=1}^{N} (w_k)^2 \, \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} w_k w_j \, \sigma_{kj} \right]^{1/2}, \tag{1.35}$$

где w_k – вложения в k-ую рисковую ценную бумагу.

Рыночную доходность можно также представить следующим образом:

$$\bar{R}_M = \sum_{k=1}^{N} w_k^* \, R_k. \tag{1.36}$$

Представленный на рис. 1.2. портфель T является эффективным рыночным портфелем, то есть единственным портфелем, который является оптимальным для всех инвесторов, так как нет рыночного портфеля, который бы лежал выше и левее на линии рынка капитала.

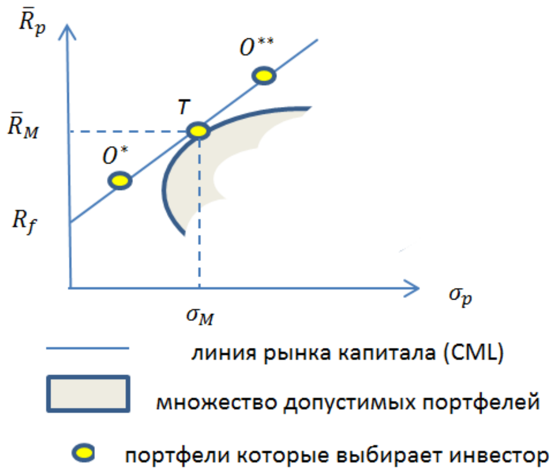

Рис. 1.2. **Эффективные портфели при возможности кредитования и инвестирования по безрисковой ставке**

Портфель O^* является портфелем инвестора берущего кредит по единой безрисковой ставке для покупки рисковых акций, O^{**} – это портфель инвестора вкладывающего часть своего капитала по той же безрисковой ставке. Как можно видеть, риск портфеля изменяется линейно, при этом риск рыночного портфеля остается неизменным при прочих равных параметрах. Уравнение линии рынка капитала характеризует соотношение между ожидаемой доходностью и риском портфеля инвестора, если портфель инвестора в условиях рыночного равновесия, в случае если портфель инвестора является портфелем T, то и доходность данного портфеля соответствует рыночной. Ожидаемая доходность портфеля для каждого инвестора превышает безрисковую ставку, в случае, когда $\bar{R}_M > 0$. Чем выше безрисковая ставка, тем большую доходность может получить инвестор. Эффективные портфели всех инвесторов располагаются на линии рынка капитала, в которые входит и рыночный портфель T.

Задачу поиска портфеля по выборке ценных бумаг, состоящего только из рисковых активов с минимальной дисперсией при условии существования безрискового актива, который также часто называют портфелем с максимальным коэффициентом Шарпа, можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{wR^T - \bar{R}_f}{\sqrt{w[\sigma]w^T}} \rightarrow \max,\\ we = 1,\\ w_k \geq 0,\end{gathered} \tag{1.37}$$

где R=$(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_N)$ – вектор размерности $(1 \times N)$ доходности k-ых активов в портфеле, $\bar{R}_f$ – средняя безрисковая ставка за рассматриваемый период. При этом wR^T является $\bar{R}_p$ средней доходностью портфеля ценных бумаг за рассматриваемый период. Средние доходности по акциям возможно рассчитать следующим образом:

$$\bar{R}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{k,t}. \tag{1.38}$$

Случайную величину, которая определяет доходность рыночного портфеля, можно выразить в виде[7]:

$$Q_M = \frac{\sum_{j=1}^{N} w_j Q_j}{\sum_{j=1}^{N} w_j}, \tag{1.39}$$

где w_j – оптимальный объём вложений в j-ую ценную бумагу, Q_j – случайная величина, объясняющая доходность j-ой ценной бумаги.

Ковариация доходности k-ой бумаги и рынка тогда выглядит таким образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{kM} &= E\big(Q_k - E(Q_M)\big)\big(Q_M - E(Q_k)\big) = E\big(Q_k - E(Q_k)\big)\left(\frac{\sum_{j=1}^{N} w_j Q_j - E(\sum_{j=1}^{N} w_j Q_j)}{\sum_{j=1}^{N} w_j}\right)\\ &= E\big(Q_k - E(Q_k)\big)\left(\frac{\sum_{j=1}^{N}\Big(w_j\left(Q_j - E(Q_j)\right)\Big)}{\sum_{j=1}^{N} w_j}\right)\\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} w_j}\sum_{j=1}^{N} E\big(Q_k - E(Q_k)\big)\left(Q_j - E(Q_j)\right) w_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} w_j}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{kj}\, w_j,\end{aligned} \tag{1.40}$$

где Q_k – случайная величина, объясняющая доходность k-ой ценной бумаги.

---

[7] Изложено по Воронцовский А.В. Современные теории рынка капитала: Учебник / А.В. Воронцовский; СПбГУ, экон. факультет. – Москва: Экономика, 2010. – С. 113-118.

Для перехода к анализу вложений всех инвесторов умножим полученное значение на всю величину вложений в j-ые в рисковые активы:

$$\sigma_{kM} = \frac{I_j}{I_j \sum_{j=1}^{N} w_j} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{kj}\, w_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} B_j} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{kj}\, B_j, \tag{1.41}$$

где B_j – оптимальный спрос на акции j-ой фирмы, I_j – величина вложений в j-ые в рисковые активы.

Так как оптимальный объём вложений в ценные бумаги j-го вида можно выразить с помощью оптимального объёма вложений l_0-го инвестора, исходя из формулы (1.22), а также при учете, что $\sum_{j=1}^{N} B_j$ соответствует объёмам вложений всех инвесторов на рынке, исходя из (1.23), при учете, что коэффициент несклонности к риску всего рынка соответствует выражению (1.24), можно преобразовать выражение:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} B_j} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{kj}\, B_j = \frac{1}{B_M}\left(a_{l_0} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{kj} \frac{B_{lj}}{a_f}\right) = \frac{1}{B_M}\left(\frac{a_{l_0}}{a_M a_{l_0 j}} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{kj} \frac{(\bar{R}_k - R_f)}{[\sigma]}\right) \\ = \frac{1}{B_M}\left(\frac{a_{l_0}(\bar{R}_k - R_f)}{a_M a_{l_0 j}}\right) = \frac{1}{B_M}\left(\frac{(\bar{R}_k - R_f)}{a_M}\right), \end{gathered} \tag{1.42}$$

где $[\sigma]$ – матрица ковариации доходности ценных бумаг портфеля.

Так как полученное выражение равно σ_{kM}, которое можно представить как произведение стандартных отклонений на корреляцию доходности k-ой ценной бумаги и рынка ρ_{kM}:

$$\frac{(\bar{R}_k - R_f)}{a_M} = B_M \sigma_k \sigma_M \rho_{kM}. \tag{1.43}$$

Представим объем вложений в соответствии с формулой (1.29):

$$B_M \sigma_k \sigma_M \rho_{kM} = \frac{\bar{R}_M - R_f}{a_M \sigma_M^2} \sigma_k \sigma_M \rho_{kM}. \tag{1.44}$$

Соответственно можно представить левую часть формулы (1.43) и правую часть (1.44) в виде:

$$\frac{(\bar{R}_k - R_f)}{a_M} = \frac{\bar{R}_M - R_f}{a_M \sigma_M^2} \sigma_k \sigma_M \rho_{kM}. \tag{1.45}$$

Умножив уравнение (1.45) на a_M, и учитывая, что $\sigma_{kM} = \sigma_k \sigma_M \rho_{kM}$, выразим доходность k-ой ценной бумаги:

$$\bar{R}_k = R_F + \left(\frac{\bar{R}_M - R_f}{\sigma_M}\right)\left(\frac{\sigma_{kM}}{\sigma_M}\right). \tag{1.46}$$

Коэффициент $(\bar{R}_M - R_f)/\sigma_M$ является рыночной ценой риска, который обозначили как p, то есть p является рыночной премией за риск на единицу риска рыночного портфеля. Поскольку все инвесторы владеют всеми ценными бумагами, то σ_{kM}/σ_M является риском ценной бумаги. То есть σ_{kM}/σ_M представляет собой изменение риска рыночного портфеля при изменении веса данной ценной бумаги в портфеле. Соответственно бумага с более высоким σ_{kM} будет вносить больший риск в рыночный портфель. В случае, когда σ_{kM} является отрицательным, данные бумаги вносят отрицательную величину риска в портфель.

Коэффициент σ_{kM}/σ_M^2 из уравнения (1.46) умножить на σ_M/σ_M, тогда получим коэффициент бета k-ой акции:

$$\beta_k = \frac{\sigma_k \rho_{kM}}{\sigma_M} = \frac{\sigma_M \sigma_k \rho_{kM}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_{kM}}{\sigma_M^2}. \qquad (1.47)$$

Таким образом, коэффициент бета k-го рискового актива является отношением рыночного риска к риску рыночного портфеля.

Подставляя коэффициент бета из формулы (1.47) в уравнение (1.46), получим уравнение:

$$\bar{R}_k = R_f + \beta_k(\bar{R}_M - R_f). \qquad (1.48)$$

Уравнение (1.48) называется линией рынка ценных бумаг (*Security Market Line*). Так наклон данной линии равен наклону линии рынка капитала, она должна проходить через точку рыночного портфеля T, в которой $\beta_k = 1$, а $\bar{R}_k = \bar{R}_M$. Если $\beta_k = 0$, то $\bar{R}_k = R_f$ и линия рынка ценных бумаг пересекает вертикальную ось в точке R_f. Таким образом можно также определить коэффициент бета как коэффициент при премии за риск по рыночному портфелю. Бета отражает связь между риском вложения в акции, и их ожидаемой доходностью. Акция с ожидаемой доходностью выше ожидаемой рыночной доходности имеет коэффициент $\beta_k > 1$, для акции у которой ожидаемая доходность меньше рыночной $\beta_k < 1$. Также исходя из линии ценных бумаг, для акции, у которой ожидаемая доходность совпадает с рыночной $\beta_k = 1$.

Так как коэффициент p в уравнении (1.45) является рыночной ценой риска, поэтому из уравнения следует, что ожидаемая доходность рисковых активов линейно зависит от риска вложений в них, при этом, при увеличении на единицу риска прирост доходности равен произведению рыночной цены риска на корреляцию между доходностью актива и рыночной доходностью. Если данный коэффициент корреляции не равен единице, то не весь риск возможно диверсифицировать. Риск k-ой ценной бумаги можно представить следующим образом:

$$\sigma_k = \rho_{kM}\sigma_k + (1 - \rho_{kM})\sigma_k. \qquad (1.49)$$

Слагаемое $\rho_{kM}\sigma_k$ характеризует рыночный риск по акции, который является не диверсифицируемым, второе слагаемое представляет специфический риск.

Собственный или специфический риск связан с риском характерным только для данной компании, и с помощью диверсификации с ним можно бороться.

Премия за риск $(\bar{R}_M - R_f)$ для каждой акции пропорциональна недиверсифицируему риску, при этом коэффициентом пропорциональности является рыночная цена риска. Таким образом, в условиях равновесия на рынке капитала получение премии за диверсифицируемый риск невозможно.

Разделение на специфический риск и рыночный часто выводится исходя из однофакторного уравнения регрессии. Оценивается регрессионное уравнение вида:

$$r_k = \alpha_k + \beta_{kI} r_I + \varepsilon_k, \tag{1.50}$$

где α_k – коэффициент смещения, r_k – доходность ценной бумаги за рассматриваемый период, r_I – доходность индекса за рассматриваемый период, β_{kI} – оценённый коэффициент наклона регрессионной линии, ε_k – ошибки регрессионной модели, с $E(\varepsilon_k) = 0$.

При предпосылке, что все доходности ценных бумаг имеют связь только с рыночным индексом: $E(\varepsilon_k \varepsilon_k) = 0$, и отсутствии связи рыночного индекса со специфической доходностью ценной бумаги $Cov(\varepsilon_k, r_I) = E(\varepsilon_k(r_I - \bar{r}_I)) = 0$, где $\bar{r}_I$ – ожидаемое значение рыночного индекса, то ожидаемое значение доходности бумаги можно представить следующим образом:

$$E(r_k) = E(\alpha_k + \beta_{kI} r_I + \varepsilon_k) = E(\alpha_k) + E(\beta_{kI} r_I) + E(\varepsilon_k), \tag{1.51}$$

где α_k и β_{kI} константы, а $E(\varepsilon_k) = 0$. Поэтому формула (1.51) сводится к виду:

$$E(r_k) = \alpha_k + \beta_{kI} r_I, \tag{1.52}$$

В таком случае дисперсия k-ой бумаги будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma_k^2 = E\big((\alpha_k + \beta_{kI} r_I + \varepsilon_k) - (\alpha_k + \beta_{kI} r_I)\big)^2 = E(\beta_{kI}(r_I - \bar{r}_I) + \varepsilon_k)^2. \tag{1.53}$$

Раскроем скобки формулы (1.53):

$$\sigma_k^2 = \beta_{kI}^2 E(r_I - \bar{r}_I)^2 + 2\beta_{kI} E\varepsilon_k(r_I - \bar{r}_I) + E(\varepsilon_k)^2. \tag{1.54}$$

В соответствии с предположением $E(\varepsilon_k(r_I - \bar{r}_I)) = 0$ получим:

$$\sigma_k^2 = \beta_{kI}^2 E(r_I - \bar{r}_I)^2 + E(\varepsilon_k)^2. \tag{1.55}$$

Так как в правой части представлены ковариации, уравнение можно представить так:

$$\sigma_k^2 = \beta_{kI}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon_k}^2, \tag{1.56}$$

где σ_I^2 – дисперсия доходности рыночного индекса. Соответственно рыночный риск представлен первым слагаемым $\beta_{kI}^2 \sigma_I^2$, а вторым слагаемым $\sigma_{\varepsilon_k}^2$ представлен собственный риск ценной бумаги.

Нерыночный риск k-ой ценной бумаги, выраженный стандартным отклонением, можно получить из формулы (1.56):

$$\sigma_{\varepsilon_k} = (\sigma_k^2 - \beta_{kI}^2\sigma_I^2)^{1/2}. \quad (1.57)$$

Рыночный риск k-ой ценной бумаги, выраженный стандартным отклонением, можно представить следующим образом:

$$\sigma_{k_I} = \beta_{kI}\sigma_M, \quad (1.58)$$

где σ_{k_I} – рыночный риск ценной бумаги, выраженный стандартным отклонением.

Коэффициент бета портфеля представляет собой средневзвешенное коэффициентов бета всех входящих в него ценных бумаг:

$$\beta_p = \sum_{k=1}^{N} w_k\beta_k. \quad (1.59)$$

Исходя из равенства (1.47) можно вычислить, что бета «рыночного» портфеля равна единице. Все инвесторы на рынке должны одинаково оценивать рыночный портфель, если данное условие не соблюдается, то инвесторы на рынке будут иметь портфели разной структуры.

При изменении безрисковой ставки параллельно сдвигается линия рынка ценных бумаг относительно начала координат, в связи, с чем изменяются ожидаемая доходность рисковых, а также безрисковых активов. В теории рыночный портфель должен включать все рисковые активы на рынке, практически, в качестве рыночных портфелей обычно используются портфели, которые представлены биржевыми индексами.

Можно представить риск всего портфеля, выражаемый дисперсией, для этого представим рыночный риск портфеля:

$$\sigma_{p_I} = \beta_{pI}^2\sigma_I^2 = \left[\sum_{k=1}^{N} w_k\beta_{kI}\sigma_I\right]^2. \quad (1.60)$$

При условии, что индекс используется вместо рыночного портфеля, то риск всего портфеля, в контексте равновесной модели CAPM, будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma_p^2 = \beta_{pM}^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2. \quad (1.61)$$

Данное уравнение и определение коэффициента бета, позволяет сказать, что увеличение количества ценных бумаг в портфеле снижает только собственный риск портфеля, а рыночный риск лишь усредняется с помощью диверсификации.

Для акций с коэффициентом бета равным единице ожидаемая доходность изменяется одновременно с ожидаемой доходностью рыночного портфеля, и их рыночный риск равен доходности рыночного портфеля, а для акций с коэффициентом бета выше единицы, рыночный риск выше риска рыночного портфеля, и ожидаемая доходность изменяется быстрее, чем в среднем по рынку. Инвестируя в данные акции, инвестор подвергается большему риску, чем в среднем по рынку. В случае если у акции коэффициент бета ниже 1, инвестиции в данные акции менее рисованы, чем в среднем по рынку.

Исходя из формулы (1.59), инвестор может формировать портфель с учетом собственных прогнозов будущей доходности рыночного портфеля и коэффициентов бета ценных бумаг. При прогнозе инвестора о повышении рыночной доходности инвестор должен приобретать акции с бетой выше единицы. В данном случае инвестор получит большую ожидаемую доходность для своего портфеля, чем доходность рыночного портфеля. В случае прогноза инвестора об уменьшении доходности рискованных вложений, он должен приобретать ценные бумаги с коэффициентом бета меньше нуля, чтобы меньшая доходность рыночного портфеля, меньше влияла на ожидаемую доходность его портфеля.

Таким образом, исходя из теоремы разделения Тобина, каждому инвестору соответствует одна структура рискового портфеля, в условии различных оценок инвесторов относительно будущей доходности они могут предпочитать инвестирование в акции с различными коэффициентами бета, исходя из своих прогнозов относительно будущей доходности рыночного портфеля. В условиях равновесия линия рынка капитала отображает зависимость между ожидаемыми доходностями и стандартным отклонением эффективных портфелей и поэтому портфель каждого инвестора может располагаться только на ней. Для каждой ценной бумаги связь между риском вложения в данные ценные бумаги и ожидаемой доходностью представлена линией рынка ценных бумаг, при этом мера риска ценной бумаги, вносимая в рыночный портфель, измеряется коэффициентом бета.

Подводя итоги важно сказать, что модель рынка оценки финансовых активов не потеряла свою актуальность в настоящее время, она используется как непосредственно в управлении портфелем ценных бумаг, так и в других областях финансов.

1.3. Модель оценки активов капитала с портфелем с нулевым коэффициентом бета и условия возможности её применения

В данном параграфе рассмотрены модификации классической версии модели CAPM, а также способы тестирования их работоспособности.

Предпосылкой модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета является:

– Безрисковый актив отсутствует, и отсутствует возможность занимать и давать в долг по безрисковой ставке

– Существует возможность занимать длинную и короткую позицию по любым рисковым активам любого размера.

Базовое уравнение модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета выглядит следующим образом[8]:

$$E(R_k) = \beta_k E(R_M) + (1-\beta_k)E(R_z) = E(R_z) + \beta_k(E(R_M) - E(R_z)), \quad (1.62)$$

где $E(R_M)$ – ожидаемая доходность рыночного портфеля, $E(R_z)$ – ожидаемая доходность портфеля с нулевым коэффициентом бета, чья ковариация с доходностью рыночного портфеля равна нулю, β_k – коэффициент бета k-ой бумаги.

Если $E(R_z)$ в какой либо период положительна, портфель или актив с низкой β_k, рассчитанной по классической модели CAPM, будет иметь ожидаемую доходность выше, предсказанной уравнением классической модели CAPM, соответственно для портфеля или актива с высокой β_k ожидаемая доходность будет выше.

Для l-го инвестора задача оптимизации портфеля выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \sigma_l^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_{lk}w_{lj}\,\sigma_{jk} \to \min, \\ \sum_{k=1}^{N} w_{lk}\bar{R}_k = \bar{R}_l, \\ \sum_{k=1}^{N} w_{lk} = 1, \end{gathered} \quad (1.63)$$

где σ_l^2 – дисперсия портфеля l-го инвестора, $\bar{R}_l$ – ожидаемая доходность портфеля инвестора, $\bar{R}_k$ – ожидаемая доходность k-ой ценной бумаги, w_{lk} и w_{lj} – вес в k-ом и j-ом активе портфеля l-го инвестора соответственно.

Пусть λ_{l1} и λ_{l2} множители Лагранжа, тогда функцию Лагранжа можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_{lk}w_{lj}\,\sigma_{jk} - \lambda_{l1}\left(\sum_{k=1}^{N} w_{lk}\bar{R}_k - \bar{R}_l\right) - \lambda_{l2}\left(\sum_{k=1}^{N} w_{lk} - 1\right). \quad (1.64)$$

Возьмем производную по w_k для выражения (1.64) и получим:

$$\sum_{j=1}^{N} w_{lj}\,\sigma_{jk} - \lambda_{l1}\bar{R}_k - \lambda_{l2} = 0, \quad (1.65)$$

для $k = 1, 2, \dots N$ значения w_{lk} можно выразить следующим образом:

$$w_{lk} = \lambda_{l1}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}\bar{R}_k + \lambda_{l2}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}, \quad (1.66)$$

[8] Изложено по Black F. Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing // The Journal of Business. 1972. Vol. 45. No. 3. pp. 444–455. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/2351499 (Дата обращения: 01.05.2022).

где D_{kj} – элемент обратной ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг $[\sigma]$. Множители λ_{l1} и λ_{l2} индивидуальны для каждого инвестора, его портфель можно представить следующим образом, если нормализовать веса в нем:

$$w_{lk} = \frac{\lambda_{l1}(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}\bar{R}_k)\sum_{j=1}^{N} D_{kj}\bar{R}_k}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}\bar{R}_k} + \frac{\lambda_{l2}(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj})\sum_{j=1}^{N} D_{kj}}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}}. \tag{1.67}$$

Перепишем данное выражение следующим образом:

$$w_{lk} = k_{lp}w_{pk} + k_{lq}w_{qk}, \tag{1.68}$$

где w_{pk} – веса вложений инвестора в портфель p:

$$w_{pk} = \frac{\lambda_{l1}(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}\bar{R}_k)}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}\bar{R}_k}, \tag{1.69}$$

а w_{qk} – веса вложений инвестора в портфель q:

$$w_{qk} = \frac{\lambda_{l2}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}}, \tag{1.70}$$

k_{lp} и k_{lq} индивидуальные для каждого l-го инвестора коэффициенты вложений в портфели p и e:

$$k_{lp} = \lambda_{l1}(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{kj}\bar{R}_k), \tag{1.71}$$

$$k_{lq} = \lambda_{l2}\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} D_{kj}\right). \tag{1.72}$$

При этом соблюдаются следующие условия:

$$\begin{gathered} k_{lp} + k_{lq} = 1, \\ \sum_{k=1}^{N} w_{pk} = 1, \\ \sum_{k=1}^{N} w_{qk} = 1, k = 1,2,\dots,N. \end{gathered} \tag{1.73}$$

По сути, вложения инвестора в k-ую ценную бумагу составляют инвестиции в два портфеля p и q, а k_{lp} и k_{lq} индивидуальные коэффициенты весов в них. Портфели p и q могут быть различными, представим данные портфели как составные элементы портфелей u и v:

$$w_{uk} = k_{up}w_{pk} + k_{uq}w_{qk}, \tag{1.74}$$

$$w_{vk} = k_{vp}w_{pk} + k_{vq}w_{qk}. \tag{1.75}$$

Тогда веса портфелей p и q в k-ой ценной бумаге можно вывести следующим образом:

$$w_{pk} = k_{pu}w_{uk} + k_{pv}w_{vk}, \quad (1.76)$$

$$w_{qk} = k_{qu}w_{uk} + k_{qv}w_{vk}. \quad (1.77)$$

Тогда переписать выражение выше возможно следующим образом:

$$w_{lk} = k_{ku}w_{uk} + k_{kv}w_{vk}, \quad (1.78)$$

где $k_{ku} + k_{kv} = 1$, а k_{ku} и k_{kv} – коэффициенты при весе k-ой ценной бумаги в u-ом и v-ом портфеле. Таким образом, портфели u и v могут быть любыми и при этом пара портфелей, p и q будет сформирована. Портфели p и q должны иметь различные коэффициенты β, чтобы было возможно сформировать эффективный портфель как взвешенную комбинацию этих двух портфелей. Если $\beta_u = 1$, $\beta_v = 0$, то умножив выражение (1.78), на w_{Ml}, долю капитала инвестора в капитализации всего рынка, получим:

$$w_{lk}w_{Ml} = w_{Ml}k_{lp}w_{pk} + w_{Ml}k_{lq}w_{qk}, \quad (1.79)$$

и просуммировав для всех инвесторов, получим значение доли k-го актива в рыночном портфеле:

$$w_{Mk} = \left(\sum_{l=1}^{L} w_{Ml}k_{lp}\right)w_{pk} + \left(\sum_{l=1}^{L} w_{Ml}k_{lq}\right)w_{qk}, l = 1, \dots, L \quad (1.80)$$

Если бета портфеля u равна единице, то это рыночный портфель, а β_u является β_M, а так как бета портфеля β_v равна 0, то этот портфель является рыночно нейтральным, то есть портфелем с нулевым коэффициентом бета. Тогда доходность портфеля l-го инвестора, чей портфель является взвешенной комбинацией u и v, можно выразить следующим образом:

$$\bar{R}_l = \beta_l\bar{R}_M + (1 - \beta_l)\bar{R}_z, \quad (1.81)$$

где $\bar{R}_z$ – средняя доходность портфеля с нулевым коэффициентом бета.

Ожидаемое значение доходности портфеля можно представить следующим образом:

$$E(R_l) = E(R_z) + \beta_l[E(R_M) - E(R_z)]. \quad (1.82)$$

Таким образом, доходность эффективного портфеля l-го инвестора зависит от β_l. Возможно показать, что это верно как для портфеля, так и для отдельной ценной бумаги. Вычитая из уравнения (1.65) его же, изменяя индексы получаем:

$$cov(\bar{R}_k, \bar{R}_l) - cov(\bar{R}_j, \bar{R}_l) = \lambda_{l1}[E(R_k) - E(R_j)]. \quad (1.83)$$

Так как рыночный портфель является эффективным портфелем, мы заменим портфель l портфелем M, а портфель j рыночно нейтральным портфелем z. Так как $cov(\bar{R}_z, \bar{R}_M) = 0$, выражение принимает следующий вид:

$$cov(\bar{R}_k, \bar{R}_M) = \lambda_{M1}[E(R_k) - E(R_z)]. \quad (1.84)$$

Учитывая, что коэффициент бета является отношением ковариации ценной бумаги и рыночного портфеля к дисперсии рыночного портфеля, получим:

$$\left[\frac{\sigma_M^2}{\lambda_{M1}}\right]\beta_k = E(R_k) - E(R_z), \tag{1.85}$$

используя вместо k-ой ценной бумаги рыночный портфель M получим:

$$\left[\frac{\sigma_M^2}{\lambda_{M1}}\right] = E(R_M) - E(R_z). \tag{1.86}$$

Поэтому выражение (1.86) можно записать как:

$$E(R_k) = E(R_z) + \beta_k[E(R_M) - E(R_z)]. \tag{1.87}$$

Ожидаемая доходность каждого актива, в случае отсутствия безрискового актива и безрискового заимствования, представляет собой линейную функцию от β.

При $\beta = 0$ каждый портфель будет иметь доходность портфеля z, так как комбинация портфеля z и M эффективна, портфель z является портфелем с наименьшей дисперсией.

Пусть существуют два эффективных портфеля p и q, доли данных портфелей в портфеле z обозначим, как w_{zp} и w_{zq}. Тогда исходя из уравнения (1.83), для выражения разницы между ковариацией k-ой ценной бумаги и рыночным портфелем для портфеля p, заменим j на M и портфель l на p, и обозначим:

$$cov(\bar{R}_k, \bar{R}_p) - cov(\bar{R}_M, \bar{R}_p) = \lambda_{p1}[E(R_k) - E(R_M)], \tag{1.88}$$

выражая разницу между ковариацией k-ой ценной бумаги и рыночным портфелем для q-го портфеля:

$$cov(\bar{R}_k, \bar{R}_q) - cov(\bar{R}_M, \bar{R}_q) = \lambda_{q1}[E(R_k) - E(R_M)]. \tag{1.89}$$

Умножая уравнения (1.88) и (1.89) на веса в портфелях актива с нулевым коэффициентом бета w_{zp} и w_{zq}, складывая уравнения получаем:

$$\begin{gathered} w_{zq}cov(\bar{R}_k, \bar{R}_q) - w_{zq}cov(\bar{R}_M, \bar{R}_q) + w_{zp}cov(\bar{R}_k, \bar{R}_p) - w_{zp}cov(\bar{R}_M, \bar{R}_p) = \\ = (w_{zp}\lambda_{p1} + w_{zq}\lambda_{q1})[E(R_k) - E(R_M)]. \end{gathered} \tag{1.90}$$

Учитывая, что при умножении на вес актива с нулевым коэффициентом бета на доходность самого портфеля получаем доходность актива с нулевым коэффициентом бета:

$$w_{zp}cov(\bar{R}_M, \bar{R}_p) = w_{zq}cov(\bar{R}_M, \bar{R}_q) = cov(\bar{R}_M, \bar{R}_z) = 0, \tag{1.91}$$

$$w_{zq}cov(\bar{R}_k, \bar{R}_q) + w_{zp}cov(\bar{R}_k, \bar{R}_p) = cov(\bar{R}_k, \bar{R}_z), \tag{1.92}$$

Получаем:

$$cov(\bar{R}_k, \bar{R}_z) = (w_{zp}\lambda_{p1} + w_{zq}\lambda_{q1})[E(R_k) - E(R_M)]. \tag{1.93}$$

Учитывая базовое выражение модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета (1.83), получаем:

$$cov(\bar{R}_k, \bar{R}_z) = (1 - \beta_k)(w_{zp}\lambda_{p1} + w_{zq}\lambda_{q1})[E(R_z) - E(R_M)]. \tag{1.94}$$

Таким образом, ковариация доходности любого k-го актива с портфелем z пропорциональна $(1-\beta_k)$. Ожидаемая доходность портфеля l, когда нет безрискового актива и нет безрискового кредитования, для каждого эффективного портфеля является взвешенной комбинацией рыночного портфеля и портфеля с минимальной дисперсией z, который является портфелем с нулевым коэффициентом β. Таким образом, ожидаемая доходность k-го актива или портфеля может быть представлена следующим образом:

$$E(R_k) = E(R_z)(1-\beta_k) + \beta_k E(R_M). \tag{1.95}$$

То есть ожидаемая доходность любого актива или портфеля зависит только от β_k и является линейной функцией от β_k.

Рассмотрим ситуацию, когда возможность вложения в безрисковый актив присутствует, но нет возможности занять средства по данной ставке. Пусть есть два эффективных портфеля u и v, где β_u равна единице и β_v равна 0. В данном случае количество активов равно $N+1$. При этом выражение (1.65), являющееся результатом решения задачи оптимизации методом множителей Лагранжа, будет выглядеть так же.

Пусть веса эффективного портфеля l-го инвестора в рыночном портфеле M, портфеле с активами с нулевым коэффициентом бета z и безрисковом активе w_{lM}, w_{lz} и w_{lf} соответственно. Так как доходности данных портфелей независимы, можно представить доходность эффективного l-го портфеля следующим образом:

$$E(R_l) = w_{lM}E(R_M) + w_{lz}E(R_z) + w_{lf}R_f, \tag{1.96}$$

$$\sigma^2(\bar{R}_l) = {w_{lM}}^2\sigma^2(\bar{R}_M) + w_{lz}^2\sigma^2(\bar{R}_z). \tag{1.97}$$

Для весов должны выполняться следующие ограничения:

$$\begin{gathered} w_{lM} + w_{lz} + w_{lf} = 1, \\ w_{lf} \geq 0. \end{gathered} \tag{1.98}$$

При этом ожидаемая доходность $E(R_z)$ должна удовлетворять условию:

$$R_f < E(R_z) < E(R_M). \tag{1.99}$$

Так как если $E(R_z)$ меньше безрисковой ставки R_f, то это означает что можно увеличить w_{lf}, уменьшив w_{lz} и при этом уменьшится дисперсия портфеля, но это означает, что портфель l-го инвестора не эффективный. Если $E(R_z)$ больше или равен $E(R_M)$, то также уменьшив w_{lf} и увеличив w_{lz} можно уменьшить дисперсию портфеля, что означает, что портфель l не является эффективным. Если w_{lf} больше нуля, можно представить ожидаемую премию за риск следующим образом:

$$E\left(R_l - R_f\right) = w_{lM}E\left(R_M - R_f\right) + w_{lz}E\left(R_z - R_f\right). \tag{1.100}$$

Дисперсия данного портфеля будет представлена следующим образом:

$$\sigma^2(\bar{R}_l - R_f) = w_{lM}{}^2\sigma^2(R_M - R_f) + w_{lz}\sigma^2(R_z - R_f). \quad (1.101)$$

Наименее рисковые портфели содержат безрисковый актив, портфели M и z, а более рисковые только портфели M и z. Ожидаемая доходность ценной бумаги также линейно зависит от β. В теории всегда существует эффективный портфель, отражающий линейную зависимость между средней доходностью бумаг и коэффициентами бета ценных бумаг.

При тестировании, рыночный индекс предполагается по факту эффективным портфелем. Р. Ролл, показал, что используемый рыночный индекс в регрессии моделей CAPM может не являться действительным рыночным портфелем, что является причиной того, что линейная зависимость между доходностью ценной бумаги и рыночным риском не может быть проверена без выбора теоритического рыночного портфеля. Тестирование моделей CAPM можно рассматривать как тестирование эффективности используемого рыночного портфеля.

В случае эффективности выбранного портфеля, истинный рыночный портфель может таким не являться, тогда результаты проверенных гипотез не могут говорить о действительной возможности применения моделей CAPM, как классической версии, так и модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета. В случае неэффективности выбранного прокси, результаты протестированных гипотез также не скажут о возможности использования моделей CAPM.

Параметр бета зависит от выбранного портфеля, при портфеле M, являющимся прокси рыночного портфеля, бета будет рассчитана исходя из уравнения:

$$E[R_k] = E[R_z] + (E[R_M] - E[R_z])\beta_k^*. \quad (1.102)$$

При этом, при использовании истинного рыночного портфеля M^*, истинная бета рассчитывается исходя из уравнения:

$$E[R_k] = R_f + (E[R_M] - R_f)\beta_k. \quad (1.103)$$

То есть портфель M лежит на одной касательной с портфелем с нулевой корреляцией с рыночным индексом $E[R_z]$.

Подводя итоги, можно сказать, что модель CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета позволяет включить и иные инструменты кроме акций, поскольку нет безрискового актива, возможно использовать инструменты денежного рынка с различными ставками доходности. Также модель CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета, в отличие от модели CAPM, позволяет инвесторам формировать различные по структуре портфели, при этом они все могут быть эффективными. Доходность любого актива или портфеля зависит от двух факторов – ожидаемой доходности портфеля с нулевым коэффициентом бета и рыночного портфеля.

Таким образом, модель CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета является ответом на нарушение предпосылок о возможности безрискового кредитования и заимствования по безрисковой ставке в реальности.

Выводы

Г. Марковиц предложил рассматривать в качестве меры риска акций, а также портфеля состоящего из рисковых активов их ожидаемые значения доходности и стандартные отклонения, определяемые с учетом ковариации. Портфель, который может быть интересен инвестору, принадлежит эффективному множеству или лежит на эффективной границе. В условиях отсутствия возможности безрискового инвестирования и кредитования, эффективная граница состоит из портфелей, одновременно обеспечивающих минимальный риск при заданной ожидаемой доходности, и максимальную ожидаемую доходность, при заданном уровне риска.

В условиях равновесия, линия рынка капитала отображает зависимость между ожидаемыми доходностями и стандартными отклонениями эффективных портфелей, и является эффективной границей. Связь между риском вложения в ценные бумаги и ожидаемой доходностью представлена для каждой ценной бумаги линией рынка ценных бумаг, при этом коэффициент бета отражает отношение рыночного риска актива к риску рыночного портфеля.

Риск ценных бумаг разделяется на рыночный, который невозможно диверсифицировать, а возможно лишь усреднить, и собственный риск, который возможно снизить с помощью диверсификации.

Модель CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета позволяет использовать её в условиях отсутствия возможности безрискового кредитования и заимствования по безрисковой ставке. Доходность любого актива или портфеля зависит от двух факторов – ожидаемой доходности портфеля с нулевым коэффициентом бетой и рыночного портфеля, при этом инвесторы могут формировать различные по структуре портфели, которые могут быть эффективными.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ТЕСТИРОВАНИЯ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ КАПИТАЛЬНЫХ АКТИВОВ И CAPM С ПОРТФЕЛЕМ С НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ БЕТА

2.1. Способы тестирования модели CAPM и её модификаций

В данном параграфе рассмотрены способы тестирования классической модели CAPM, а также её модификации: модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета.

Первый вариант тестирования классической модели CAPM был предложен в работе М. Йенсена, Ф. Блэка, М. Шоулза[9] однако Ю. Фама и Дж. Макбэт[10] предложили второй усовершенствованный способ. В работе М. Йенсена, Ф. Блэка, М. Шоулза проверялись гипотезы о влиянии безрисковой ставки и доходности рынка на доходность акций. Метод Ю. Фама и Дж. Макбэта позволяет также проверить остальные гипотезы.

Используемый рыночный индекс в модели CAPM не может являться действительным рыночным портфелем, потому что не содержит все виды акций, что является причиной того, что линейная зависимость между доходностью ценной бумаги и рыночным риском не может быть проверена без выбора теоритического рыночного портфеля. То есть тестирование моделей CAPM можно рассматривать как проверку того насколько используемый индекс близок к эффективной границе.

Метод Фама-Макбета предполагает разделение тестируемой выборки на две равные части. На первом шаге наиболее ранний период используется для оценок коэффициентов бета акций ценных бумаг, а также стандартных отклонений ошибок оценённых регрессий. Далее ценные бумаги объединяются в портфели ценных бумаг с одинаковым количеством акций и одинаковым весом каждой ценной бумаги в портфеле, рассчитывается доходность данных портфелей, а также коэффициенты бета и средние значения стандартных отклонений ошибок регрессий оценённых ценных бумаг которые включены в данный портфель. На втором шаге, предполагая, что данные параметры для ценных бумаг известны, оценивается регрессия с использованием данных по доходностям сформированных портфелей на более позднем временном промежутке и проверяются гипотезы об отражении условий модели CAPM на рынке.

Вначале на месячных данных для каждой ценной бумаги в портфеле на более раннем периоде с помощью метода наименьших квадратов (МНК) оценивается уравнение регрессии:

$$R_{k,t-1} = \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k R_{M,t-1} + \hat{\varepsilon}_{k,t-1}, k = 1, \dots, N, \tag{2.1}$$

---

[9] Jensen M.C., Black F., Scholes M.S. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. Michael C. Jensen, STUDIES IN THE THEORY OF CAPITAL MARKETS, Praeger Publishers Inc., 1972. [Электронный ресурс]. URL: https://ssrn.com/abstract=908569 (Дата обращения: 01.05.2022).

[10] Fama E.F., MacBeth. J.D. Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. No. 3. pp. 607–636. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/1831028 (Дата обращения: 01.05.2022).

где $R_{k,t-1}$ – однопериодная фактическая доходность k-ой ценной бумаги для первоначальной выборки, $R_{M,t-1}$ – однопериодная фактическая доходность рыночного индекса для первоначальной выборки, $\hat{\varepsilon}_{k,t-1}$ – ошибка оценённой модели регрессии.

Метод Фама-Макбета предполагает объедение в портфели с одинаковым количеством ценных бумаг и с одинаковой структурой для каждой ценной бумаги. Ценные бумаги с оценёнными ранее параметрами, разделяются на портфели с одинаковым количеством ценных бумаг в каждом и с одинаковым весом каждой ценной бумаги, далее оценивается бета для каждого портфеля. Ю. Фама и Дж. Макбэт разделяли выборку ценных бумаг на 20 портфелей с различными ценными бумагами с одинаковой структурой. В данной же работе рассматривались портфели из 5 различных ценных бумаг с одинаковой структурой. Для оценки коэффициента бета портфелей ценных бумаг используется формула:

$$\beta_p = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} \beta_k \,, p = 1, \dots , m, \tag{2.2}$$

где β_p – коэффициент бета сформированного портфеля ценных бумаг, m – количество портфелей, на которые были разделены наборы ценных бумаг, в данной работе в зависимости от рассматриваемого периода использовалось от 6 до 8 портфелей. Предпосылкой модели CAPM является предположение об эффективности портфеля R_M, предполагается, что $cov(R_M, \hat{\varepsilon}_{k,t-1}) = 0$, тогда $s_k(\hat{\varepsilon}_{k,t-1})$ – стандартное отклонение ошибки ценной бумаги, является оценкой $\sigma(\hat{\varepsilon}_{k,t-1})$ в данном выражении, то есть оценкой несистематического риска не связанного с $\hat{\beta}_k$, которое рассчитывается по следующей формуле:

$$s_k(\hat{\varepsilon}_{k,t-1}) = \sqrt{\frac{(\hat{\varepsilon}_{k,t-1} - \bar{\varepsilon}_{k,t-1})^2}{T_{t-1} - 1}}, \tag{2.3}$$

где T_{t-1} – количество месяцев в периоде, рассматриваемом на первоначальном этапе, $\bar{\varepsilon}_{k,t-1}$ – среднее значение ошибок оценённой модели регрессии.

Для портфелей с одинаковым количеством ценных бумаг оценивается среднее значение стандартных отклонений ошибок $\bar{s}_{p,t-1}$ как среднее $s_k(\hat{\varepsilon}_{k,t-1})$, входящих в него ценных бумаг, оцениваемое следующим образом:

$$\bar{s}_{p,t-1} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} s_k(\hat{\varepsilon}_{k,t-1}), \tag{2.4}$$

Также рассчитывалась доходности данных портфелей:

$$R_{p,t} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} R_{k,t}, \tag{2.5}$$

$R_{p,t}$ – однопериодная доходность сформированного портфеля для выборки на втором этапе, $R_{k,t}$ – однопериодная фактическая доходность k-ой ценной бумаги для выборки на втором этапе.

Далее с помощью метода наименьших квадратов оценивается регрессия на данных следующего периода:

$$R_{p,t} = \gamma_0 + \gamma_1\hat{\beta}_{p,t-1} + \gamma_2\hat{\beta}_{p,t-1}^2 + \gamma_3\bar{s}_{p,t-1} + \hat{\eta}_{p,t}, p = 1, \dots, m, \tag{2.6}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – оценённые коэффициенты, $\hat{\eta}_{p,t}$ – ошибка оценённой модели регрессии.

Оценки коэффициентов γ_j уравнения регрессии основываются на предположении, что коэффициенты $\hat{\beta}_k$ являются истинными рыночными бетами активов, однако различия в оценках оценённых и рыночных коэффициентов неизбежно приводят к ошибкам в оценках коэффициентов γ_j. Метод, использованный Ю. Фама и Дж. МакБэтом с целью минимизации последствий данной проблемы, состоит в группировке оцениваемых ценных бумаг. Чтобы можно было говорить об эффективности рыночного портфеля, необходимо проверить следующие статистические гипотезы:

1. Для проверки гипотезы о влиянии на доходность ценной бумаги безрисковой ставки проверяется гипотеза о равенстве константы γ_0 безрисковой ставке:

$$H_0: E(\gamma_0) = E(R_{ft}). \tag{2.7}$$

2. Для проверки, того что ожидаемая премия за риск влияет на доходность ценной бумаги и является положительной, тестируется гипотеза о равенстве коэффициента γ_1 премии за риск, при этом сам коэффициент должен быть положительным:

$$H_0: E(\gamma_1) = E(R_{Mt}) - E(R_{ft}) > 0, \tag{2.8}$$

Если коэффициент γ_1 отрицательный, то доходность рисковых активов слишком низкая, положительная доходность говорит об избыточном вознаграждении за рыночный риск, что должно присутствовать в длительной перспективе

3. Связь между ожидаемыми доходностями ценных бумаг и рыночным риском должна быть линейной. Для проверки данного условия метод Фама-Макбета предлагает тестировать отсутствие квадратичной зависимости между доходностью ценной бумаги и рыночного индекса, то есть, что необходимо проверить, что коэффициент перед $\hat{\beta}_{p,t-1}$ равен нулю:

$$H_0: E(\gamma_2) = 0. \tag{2.9}$$

4. Нет дополнительного вознаграждения за несистематический риск, для чего тестируется гипотеза о равенстве нулю коэффициента перед $\bar{s}_{p,t-1}$:

$$H_0: E(\gamma_3) = 0. \tag{2.10}$$

Л. Крушвитц и С. Хусманн[11] предлагают использовать дисперсию ошибки, а не стандартное отклонение ошибки для проверки данной гипотезы.

Для тестирования гипотез, используется t-статистика, рассчитываемая по следующей формуле:

$$t(\bar{\gamma}_j) = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_j}{\sqrt{\frac{\left(\gamma_j - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_j\right)^2}{T-1}}/\sqrt{N}} = \frac{\bar{\gamma}_j}{\sigma(\gamma_j)/\sqrt{N}}, \tag{2.11}$$

где $\bar{\gamma}_j$ – среднее значение j-го оцененного помесячно коэффициента γ_j, N – количество месяцев в рассматриваемом периоде, $\sigma(\gamma_j)$ – стандартное отклонение j-го коэффициента γ. t-статистика имеет распределение Стьюдента с $(N-1)$ степеней свободы. По результатам проверки гипотез можно говорить об эффективности используемого рыночного индекса и соответственно отражения условий применения модели на рынке.

Метод Фама-Макбэта имеет ряд недостатков, так необходимо иметь достаточно длинные временные ряды с целью оценки уравнений регрессии. Оценки коэффициентов γ_{jt} уравнения регрессии основываются на предположении, что коэффициенты β_k являются действительными рыночными бетами активов, однако различия в оценках оценённых и рыночных коэффициентов неизбежно приводят к ошибкам в оценках коэффициентов γ_{jt}. Метод Фама-Макбэта с целью минимизации последствий данной проблемы, состоит в группировке оцениваемых ценных бумаг в портфели. Если предположить наличие одной независимой переменной, то регрессионное уравнение для отдельной ценной бумаги будет выглядеть следующим образом[12]:

$$R_{k,t} = \gamma_0 + \gamma_1\beta_{k,t} + \tilde{\varepsilon}_{k,t}, k = 1, \dots, N. \tag{2.12}$$

И для уравнения регрессии 2.12 выполняется условие отсутствия гетероскедостичности для всех N ценных бумаг:

$$E\left[\tilde{\varepsilon}_k\tilde{\varepsilon}_k^{\mathrm{T}}\right] = \sigma_\varepsilon^2 I_N. \tag{2.13}$$

В предположении, что рыночный индекс, эквивалентно взвешенный для N ценных бумаг, является средней доходностью всех ценных бумаг:

---

[11] Kruschwitz L., Husmann. S. Finanzierung und Investition. v. 7th. München: De Gruyter Oldenbourg, 2012. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1524/9783486716078 (Дата обращения: 01.05.2022).

[12] Изложено по Huang C., Litzenberger R.H. Foundations for financial economics / C. Huang. - Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1993. – 365 p.

$$R_{M,t} = \frac{\sum_{k=1}^{N} R_{k,t}}{N}. \quad (2.14)$$

Коэффициент бета рыночного портфеля также равен единице:

$$1 = \frac{\sum_{k=1}^{N} \beta_k}{N}. \quad (2.15)$$

Оценка коэффициента бета представляет собой сумму истинной оценки коэффициента β_k и ошибки в оценивании:

$$\hat{\beta}_k = \beta_k + \tilde{v}_k, \quad (2.16)$$

где $\tilde{v}_k$ – ошибка в оценке коэффициента бета. Если оценка коэффициента бета является несмещенной, то значение ошибки равно нулю:

$$E[\tilde{v}_k] = 0, k = 1, \dots, N. \quad (2.17)$$

Тогда оценка коэффициента γ_1 с помощью метода наименьших квадратов выглядит следующим образом:

$$\hat{\gamma}_{1(OLS)} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(R_{k,t} - R_{M,t}\right)\left(\hat{\beta}_k - 1\right)}{\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{\beta}_k - 1\right)^2} =$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{N} \frac{\left(R_{k,t} - R_{M,t}\right)(\beta_k - 1)}{N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\left(R_{k,t} - R_{M,t}\right)\tilde{v}_k}{N}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{(\beta_k - 1)^2}{N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\tilde{v}_k^2}{N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{2(\beta_k - 1)\tilde{v}_k}{N}}. \quad (2.18)$$

Предположим, что для величины $\tilde{v}_k$ верны следующие условия:

$$E\left[\tilde{v}_j \tilde{v}_k\right] \begin{cases} = 0 & \text{для } j \neq k, \\ \leq \bar{\sigma}_{vt}^2 < \infty & \text{для } j = k, \end{cases}$$
$$Cov\left(\tilde{v}_k, \tilde{\varepsilon}_j\right) = 0 \; \forall j, k, Var(\tilde{v}_k^2) \leq \sigma_v^4, k = 1, 2, \dots N. \quad (2.19)$$

Таким образом, ошибки при оценке беты ценной бумаги не коррелируют друг с другом, и не коррелируют с ошибками при оценке регрессий. Верхние границы дисперсий для оценок ошибки действительной беты и её квадрата – $Var(\tilde{v}_k)$ и $Var(\tilde{v}_k^2)$, значения стандартных отклонений ошибки по всем ценным бумагам: $\bar{\sigma}_v^2$ и $\bar{\sigma}_v^4$.

Предположим, что при стремлении количества ценных бумаг к бесконечности, и условия равномерной ограниченности коэффициентов бета, то есть ограниченности значений всех коэффициентов бета одной константой, выполняется следующий предел:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{j=1}^{N} \beta_k^2}{N^2} = 0. \quad (2.20)$$

То есть сумма квадратов истинных коэффициентов бета ценных бумаг, возрастает медленнее, чем квадрат количества ценных бумаг.

Рассмотрим к чему стремится коэффициент $\hat{\gamma}_{1(OLS)}$, при стремлении количества ценных бумаг к бесконечности. Для этого рассмотрим пределы по вероятности для членов коэффициента, представленного в формуле (2.18):

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(R_{k,t}-R_{M,t}\right)\tilde{v}_k}{N}=0,$$
$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}2(\beta_k-1)\tilde{v}_k}{N}=\frac{\sum_{k=1}^{N}2\beta_k\tilde{v}_k}{N}-\frac{\sum_{k=1}^{N}2\tilde{v}_k}{N}=0, \tag{2.21}$$
$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{N}\tilde{v}_k^2}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{N}Var(\tilde{v}_k)}{N}.$$

Так как бета рыночного индекса равна 1 и рыночный индекс представляет эквивалентное среднее всех бет, дисперсию бет всех ценных бумаг представим следующим образом:

$$\overline{Var}(\beta_M)\equiv\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{N}(\beta_k-1)^2}{N},$$
$$\overline{Var}(\beta_M)\neq 0. \tag{2.22}$$

Учитывая выражения (2.21) и (2.22), предел по вероятности при N стремящемуся к бесконечности, оценка коэффициента $\hat{\gamma}_{1t(OLS)}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\hat{\gamma}_{1(OLS)}=\frac{\gamma_1}{1+\frac{\overline{Var}(\tilde{v}_M)}{\overline{Var}(\beta_M)}}, \tag{2.23}$$

где средняя дисперсия ошибки коэффициента:

$$\overline{Var}(\tilde{v}_M)\equiv\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{N}Var(\tilde{v}_k)}{N}. \tag{2.24}$$

По данной причине $\hat{\gamma}_{1(OLS)}$ является смещенной оценкой γ_1, оценка $\hat{\gamma}_{1(OLS)}$ будет состоятельнее при низком значении $\overline{Var}(\nu_t)$ или высоком значении $\overline{Var}(\beta_t)$. Пусть τ количество ценных бумаг сгруппированных в портфель. Тогда дисперсия ошибки в оценивании истинной беты сгруппированного портфеля:

$$Var\left(\tilde{v}_g\right)=\sum_{k=1}^{\tau}\frac{Var(\tilde{v}_k)}{\tau^2}. \tag{2.25}$$

при этом верно следующее ограничение для дисперсии оцененной ошибки:

$$Var\left(\tilde{v}_g\right)\leq\frac{\bar{\sigma}_v^2}{\tau}. \tag{2.26}$$

При стремлении количества сформированных портфелей к бесконечности, ограничение будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{N\to\infty}Var\left(\tilde{v}_g\right)\leq\lim_{N\to\infty}\frac{\bar{\sigma}_v^2}{\tau}=0. \tag{2.27}$$

Таким образом, при заданных ограничениях оценки групповых коэффициентов бета будут стремиться к истинным. В случае если ошибки коррелированы, группировка только уменьшит дисперсию ошибки групповой беты.

Иной способ борьбы со смещением оценок коэффициентов бета ценных бумаг заключается в использовании иных методов. В работе М. Гиббонса[13] было предложено использовать метод максимального правдоподобия (ММП) для оценок коэффициентов γ_j. Эмпирические результаты, показывающие, что оценки с наименьшим смещением получаются при использовании метода максимального правдоподобия, представлены в работе Дж. Шэнкена, Г. Зоу[14].

Таким образом, рассмотренный тест позволяют говорить о наличии отражения условий модели CAPM при предположении, что выбранный в качестве рыночного портфеля портфель является истинным.

Изначальный способ тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета был предложен в работе М. Йенсена, Ф. Блэка, М. Шоулза[15]. М. Гиббонс[16] представил обобщённую версию представленного в статье М. Йенсена, Ф. Блэка, М. Шоулза алгоритма тестирования, однако его применение сложно по причине возможного использования большого количества итераций. Также М. Гиббонс предложил использовать тест отношений правдоподобия для тестирования гипотезы М. Гиббонс вместо *t*-статистики.

Собственный алгоритм тестирования, представленный М. Гиббонсом, предполагает использование алгоритма оценивания Гаусса-Ньютона. Тестирование данным методом также рассмотрено в статье Дж. Шэнкена[17]. Метод тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на основе метода максимального правдоподобия впервые был

[13] Gibbons M.R. Multivariate tests of financial models: A new approach // Journal of Financial Economics. 1982. Vol. 10. No. 1. pp. 3–27. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90028-9 (Дата обращения: 01.05.2022).

[14] Shanken J., Zhou G. Estimating and testing beta pricing models: Alternative methods and their performance in simulations // Journal of Financial Economics. 2007. Vol. 84. No. 1. pp. 40–86. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2006.02.003 (Дата обращения: 01.05.2022).

[15] Jensen M.C., Black F., Scholes M.S. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. Michael C. Jensen, STUDIES IN THE THEORY OF CAPITAL MARKETS, Praeger Publishers Inc., 1972. [Электронный ресурс]. URL: https://ssrn.com/abstract=908569 (Дата обращения: 01.05.2022).

[16] Gibbons M.R. Multivariate tests of financial models: A new approach // Journal of Financial Economics. 1982. Vol. 10. No. 1. pp. 3–27. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90028-9 (Дата обращения: 01.05.2022).

[17] Shanken J. Multivariate tests of the zero-beta CAPM // Journal of Financial Economics. 1985. Vol. 14. No. 3. pp. 327–348. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(85)90002-9 (Дата обращения: 01.05.2022).

представлен в работе С. Кэндэла[18]. Позднее он был усовершенствован в работе Дж. Шэнкена[19]. Данный метод был рассмотрен далее.

Необходимо оценить следующее уравнение регрессии для каждой ценной бумаги:

$$R_{kt} = \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k R_{Mt} + \varepsilon_{kt}, k = 1, \ldots, N, \tag{2.28}$$

где k – количество рассматриваемых активов, R_{Mt} – доходность рыночного индекса в t период времени.

Оцененные уравнения регрессии для тестирования и предположения можно представить в векторной форме следующим образом[20]:

$$\begin{gathered} R_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(R_{Mt}) + \hat{\varepsilon}_t, \\ E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t {\varepsilon_t}^{\mathrm{T}}) = \Xi, \sigma(R_{Mt}, \varepsilon_t) = 0, \end{gathered} \tag{2.29}$$

где R_t – вектор $R_t = (R_{1t}, \ldots, R_{Nt})^{\mathrm{T}}$ доходности рассматриваемых k-ых активов в t период времени размерности $(N \times 1)$, $\hat{\beta}$ – вектор $\hat{\beta} = \left(\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_N\right)^{\mathrm{T}}$ коэффициентов бета рассматриваемых активов размерности $(N \times 1)$, $\hat{\alpha}$ и $\hat{\varepsilon}_t$ вектора свободных членов и ошибок регрессий размерности $(N \times 1)$ соответственно, Ξ – ковариационная матрица остатков.

Предполагается, что доходности активов имеют нормальное распределение и независимо одинаково распределены, в таком случае, возможно использовать метод максимального правдоподобия. Чтобы отражались условия модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета необходимо, чтобы α_k для каждой ценной бумаги была равна $(1 - \beta_k)R_z$, где R_z – доходность портфеля с нулевым коэффициентов бета.

При условии известной R_z, векторы с оценками коэффициентов, получаемые методом максимального правдоподобия выглядят следующим образом:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - R)(R_{Mt} - \bar{R}_M)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{Mt} - \bar{R}_M)^2}, \tag{2.30}$$

$$\hat{\alpha}(R_z) = R - R_z e - \beta(\bar{R}_M - R_z), \tag{2.31}$$

где $\bar{R}_M$ – средняя доходность рыночного индекса, рассчитываемая следующим образом:

$$\bar{R}_M = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{Mt}, \tag{2.32}$$

---

[18] Kandel S. The likelihood ratio test statistic of mean-variance efficiency without a riskless asset // Journal of Financial Economics. 1984. Vol. 13. No 4. pp. 575–592. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(84)90017-5 (Дата обращения: 01.05.2022).

[19] Shanken J. Testing Portfolio Efficiency When the Zero–Beta Rate Is Unknown // Journal of Finance. 1986. Vol. 41. No. 1. pp. 269–276. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2328359 (Дата обращения: 01.05.2022).

[20] Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. The Econometrics of Financial Markets. / J. Y Campbell. – Princeton University Press, 1997. – pp. 181-218. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/j.ctt7skm5 (Дата обращения: 01.05.2022).

где T – количество месяцев во всей рассматриваемой выборке, при этом R – вектор $(N \times 1)$ средних доходностей k-ых активов:

$$R = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t, \tag{2.33}$$

$\hat{\alpha}(R_z)$ связанно со свободным членом регрессии $\hat{\alpha}$ следующим образом:

$$\hat{\alpha}(R_z) = \hat{\alpha} - R_z\left(e - \hat{\beta}\right). \tag{2.34}$$

где e – вектор $e = (1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$ размерности $(N \times 1)$. Поэтому гипотезу об эффективности используемого рыночного индекса и соответственно отражения условия применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета, возможно представить в данном виде:

$$H_0\colon \alpha(R_z) = 0. \tag{2.35}$$

Для расчета ковариационной матрицы остатков возможно использовать следующую формулу:

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[R_t - R - \hat{\beta}(R_{Mt} - \bar{R}_M)\right]\left[R_t - R - \hat{\beta}(R_{Mt} - \bar{R}_M)\right]^{\mathrm{T}}. \tag{2.36}$$

В случае, когда $\hat{\alpha}(R_z) = 0$ оценки максимального правдоподобия вектора коэффициентов бета и ковариационной матрицы будут выглядеть следующим образом:

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - R_z e)(R_{Mt} - R_z)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{Mt} - R_z)^2}, \tag{2.37}$$

$$\hat{\Xi}^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[R_t - R_z\left(e - \hat{\beta}^*\right) - \hat{\beta}^* R_{Mt}\right]\left[R_t - R_z\left(e - \hat{\beta}^*\right) - \hat{\beta}^* R_{Mt}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{2.38}$$

Логарифмическую функцию правдоподобия можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(R_z) &= -\frac{T}{2}\left[\ln\left|\hat{\Xi}^*\right| - \ln\left|\hat{\Xi}\right|\right] = -\frac{T}{2}\ln\left(\frac{\hat{\sigma}_M^2}{(\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2}\hat{\alpha}^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\hat{\alpha} + 1\right) = \\ &= -\frac{T}{2}\ln\left(\frac{\hat{\sigma}_M^2}{(\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2}\left(R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right)^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left(R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right) + 1\right), \end{aligned} \tag{2.39}$$

где дисперсия рыночного портфеля рассчитывается по формуле:

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{Mt} - \bar{R}_M)^2. \tag{2.40}$$

Оценку максимального правдоподобия R_z, возможно получить при нахождении точки экстремума функции логарифмического правдоподобия по R_z. Можно также сказать, что необходимо минимизировать следующую функцию по R_z:

$$G(R_z) = \left(\frac{\hat{\sigma}_M^2}{(\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2}\right)\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]^{\mathrm{T}} \times \times \hat{\Xi}^{-1}\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]. \tag{2.41}$$

Частная производная по R_z функции $G(R_z)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial G(R_z)}{\partial R_z} = \frac{\hat{\sigma}_M^2}{((\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2)^2}\left(\left(\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]\right)' * * ((\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2) - \left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right] * * ((\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2)'\right), \tag{2.42}$$

где $'$ обозначает частную производную по R_z, при этом:

$$\left(\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]^{\mathrm{T}}\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]\right)' = = \left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]\hat{\Xi}^{-1}\left[-e + \hat{\beta}\right]^{\mathrm{T}} + \left[-e + \hat{\beta}\right]\hat{\Xi}^{-1}\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]^{\mathrm{T}}. \tag{2.43}$$

Таким образом, частная производная будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial G(R_z)}{\partial R_z} = \frac{\hat{\sigma}_M^2\left[-1 + \hat{\beta}\right]^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]}{((\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2)} + + \frac{\hat{\sigma}_M^2\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left[-e + \hat{\beta}\right]}{((\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2)} - - \frac{\hat{\sigma}_M^2\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right]^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left[R - R_z e - \hat{\beta}(\bar{R}_M - R_z)\right] \times 2(-\bar{R}_M + R_z))}{((\bar{R}_M - R_z)^2 + \hat{\sigma}_M^2)^2}, \tag{2.44}$$

при $\frac{\partial G(R_z)}{\partial R_z} = 0$ получаем максимум функции правдоподобия (2.39).

Дж. Шэнкен предложил приводить условие первого порядка к квадратному уравнению, Дж. Кэмпбэлл, А. Ло, А. Маккинлей[21] предложили модифицированную версию, выглядящую следующим образом:

$$A(R_z)^2 + BR_z + C = 0, \tag{2.45}$$

где параметры рассчитываются по данным формулам:

$$A \equiv \frac{1}{\hat{\sigma}_M^2}\left(e - \hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left(R - \hat{\beta}\bar{R}_M\right) - \frac{\bar{R}_M}{\hat{\sigma}_M^2}\left(e - \hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left(e - \hat{\beta}\right), \tag{2.46}$$

$$B \equiv \left(1 - \frac{\bar{R}_M^2}{\hat{\sigma}_M^2}\right)\left(e - \hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left(e - \hat{\beta}\right) - \frac{1}{\hat{\sigma}_M^2}\left(R - \hat{\beta}\bar{R}_M\right)^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left(R - \hat{\beta}\bar{R}_M\right), \tag{2.47}$$

$$C \equiv -\left(1 - \frac{\bar{R}_M^2}{\hat{\sigma}_M^2}\right)\left(e - \hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left(R - \hat{\beta}\bar{R}_M\right) + \frac{\bar{R}_M}{\hat{\sigma}_M^2}\left(R - \hat{\beta}\bar{R}_M\right)^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}\left(R - \hat{\beta}\bar{R}_M\right). \tag{2.48}$$

[21] Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. The Econometrics of Financial Markets. / J. Y Campbell. – Princeton University Press, 1997. – pp. 196-218. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/j.ctt7skm5 (Дата обращения: 01.05.2022).

Если A меньше 0, значение R_z, являющееся наименьшим корнем уравнения (2.45), соответствует глобальному минимуму $G(R_z)$, если A больше 0, то наибольший корень уравнения (2.45) соответствует глобальному минимуму $G(R_z)$[22].

Задачу поиска структуры портфеля с нулевым коэффициентом бета и минимальной дисперсией можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} \sigma_p^2 = w[\sigma]w^{\mathrm{T}} \to \min, \\ we = 1, \\ w\beta = 0, \\ wR = R_z, \end{gathered} \tag{2.49}$$

где $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ – вектор размерности $(1 \times N)$ структуры вложений в -ые активы в портфеле, σ_p^2 – дисперсия портфеля за рассматриваемый период, e – вектор $e = (1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$ размерности $(N \times 1)$, R – вектор $(N \times 1)$ средних доходностей k-ых активов.

Для тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета М. Гиббонс, С. Росс, Дж. Шэнкен[23] предложили следующую статистику:

$$J(R_z) = \frac{(T-N-1)(\hat{\alpha}(R_z))^{\mathrm{T}}\hat{\Xi}^{-1}(\hat{\alpha}(R_z))}{N}\left[1 + \frac{(\bar{R}_M - R_z)^2}{\hat{\sigma}_M^2}\right]^{-1} \sim F_{N,T-N-1}, \tag{2.50}$$

$J(R_z)$ имеет F распределение, при $J(R_z) > F(N, T-N-1)$ гипотеза $H_0\colon \alpha(R_z) = 0$ отвергается, что означает не применимость модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на данном рынке. При $J(R_z) < F(N, T-N-1)$, гипотеза об отражении условий применения модели не отвергается.

Принятие гипотезы, определяемой соотношением (2.35) об отражении условий использования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета не означает, что будет отвергнута гипотеза об отражении условий применения классической CAPM на рынке. Рассматриваемые модели основываются на определенных предпосылках, и их использование означает, предположение об их реальном выполнении.

2.2. Использование обобщенного метода моментов для тестирования классической модели CAPM и модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета

Для наиболее популярных тестов об эффективности используемого рыночного портфеля, например для метода тестирования, предложенного Ю. Фама и Дж. МакБэтом, или метода, предложенного Дж. Кэмбэлом, А. Ло, А. Маккинлейем, существует предположение о

[22] Shanken J. Testing Portfolio Efficiency When the Zero–Beta Rate Is Unknown // Journal of Finance. 1986. Vol. 41. No. 1. pp. 269–276. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2328359 (Дата обращения: 01.05.2022).

[23] Gibbons M.R., Ross S.A., Shanken J.A Test of the Efficiency of a Given Portfolio // Econometrica. 1989. Vol. 57. No. 5. pp. 1121-1152. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/1913625 (Дата обращения: 01.05.2022).

нормальном распределении доходностей и их независимости, что подразумевает отсутствие гетероскедастичности и автокорреляции. В связи с тем, что реальные данные не всегда соответствуют условиям необходимым для корректных результатов данных тестов, становятся актуальными альтернативные тесты, работающие в условиях нарушения обозначенных предпосылок.

Метод обобщённых моментов был впервые предложен в статье Л. П. Хансена[24]. Данный метод позволяет побороться с гетероскедастичностью данных, отсутствием независимости и одинаковом распределении ошибок и наличии автокорреляции в них.

Пусть модель регрессии выглядит следующим образом:

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t, \tag{2.51}$$

где ε_k – ошибка регрессии, а зависимая и независимая переменная соответственно $Y_t = Y_1, \dots, Y_T$, $X_t = X_1, \dots, X_T$, где T – количество временных периодов в эконометрической модели.

Метод основан на оценке уравнений таким образом, что ожидание функции от переменной регрессий h и вектора параметров a должно быть равно нулю[25]:

$$E_0 h(Y, X, a_0) = 0, \tag{2.52}$$

где E_0 – значение истинного математического ожидания. При этом функция h размерности N и параметр a_0 размерности T.

Для данных по выборке основная идея обобщенного момента заключается в необходимости поиска такого значения параметра a, чтобы значение среднего выборки:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} h(Y_t, X_t; a), \tag{2.53}$$

было близко к нулю, где T – количество периодов во всей рассматриваемой выборке.

Пусть $\mathcal{A}$ компактное множество. Если S_T симметричная позитивно определённая матрица размерности $(N \times N)$, где N – количество объектов наблюдений, тогда $\tilde{a}_T(\mathrm{S}_T)$ является решением следующей задачи:

$$\min_a \left[\sum_{T=1}^{T} h(Y_t, X_t; a)\right]^{\mathrm{T}} \mathrm{S}_T \left[\sum_{t=1}^{T} h(Y_t, X_t; a)\right]. \tag{2.54}$$

Метод обобщенных моментов предполагает соблюдение следующих предположений:

1. Переменные (Y_t, X_t) независимы и одинаково распределены

[24] Hansen L.P. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators // Econometrica. 1982. Vol. 50. No. 4. pp. 1029-1054. [Электронный ресурс]. https://doi.org/10.2307/1912775 (Дата обращения: 01.05.2022).
[25] Gourieroux C., Monfort A. Statistics and Econometric Models / C. Gourieroux. – Cambridge University Press, 1995. – 504 p. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511751967 (Дата обращения: 01.05.2022).

2. $E_0 h(Y, X, a)$, равная нулю, существует, когда a эквивалентно действительному значению a_0 параметра

3. Матрица S_T сходится почти наверняка к неслучайной матрице S_0

4. Параметр a_0 идентифицируется как a из ограничения (2.53):

$$E_0 h(Y, X, a_0)^{\mathrm{T}} \mathrm{S}_0 E_0 h(Y, X, a_0) = 0 \Rightarrow a = a_0, \tag{2.55}$$

5. Параметр a_0 принадлежит конечному множеству $\mathcal{A}$

6. $(1/T)\sum_{t=1}^{T} h(Y_t, X_t; a)$ сходится почти наверняка и непрерывно по a при стремлении T к бесконечности к $E_0 h(Y, X, a)$

7. Функция $h(y, x; a)$ непрерывна по a

При соблюдении условий 1-7 оценка методом обобщённым методом моментов GMM, ассоциированная с S_T, асимптотически существует и сходится к a_0

8. Функция $h(y, x; a)$ непрерывно дифференцируема по a

9. Параметр a_0 принадлежит компактному множеству $\mathcal{A}$

При выполнении условий $\tilde{a}_T(\mathrm{S}_T)$ принадлежит асимптотически к окрестности истинного параметра a_0, таким образом, это удовлетворяет следующему условию первого порядка:

$$\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial h^{\mathrm{T}}(Y_t, X_t; \tilde{a}_T)}{\partial a}\right] \mathrm{S}_T \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} h(Y_t, X_t; \tilde{a}_T)\right] = 0. \tag{2.56}$$

10. $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial h^{\mathrm{T}}(Y_t, X_t; \tilde{a}_T)}{\partial a}$ сходится почти наверняка и равномерно по a к $E_0 \partial h^{\mathrm{T}}(Y, X, a_0)/\partial a$

11. Норма асимптотической матрицы $E_0\|h(Y, X, a_0)\|^2 < \infty$

12. Матрица $\left[E_0 \frac{\partial h^{\mathrm{T}}(Y, X; a_0)}{\partial a}\right] \mathrm{S}_0 \left[E_0\left(\frac{\partial h(Y, X; a_0}{\partial a^{\mathrm{T}}}\right)\right]$ невырожденная.

В таком случае асимптотическая оценка $\breve{a}_T(\mathrm{S}_T)$ асимптотически распределено нормально в условиях:

$$\sqrt{n}(\breve{a}_n(\mathrm{S}_T) - a_0) \xrightarrow{d} N\big(0, \Sigma(\mathrm{S}_T)\big), \tag{2.57}$$

при этом:

$$\Sigma(\mathrm{S}_0) = \left(\left[E_0 \frac{\partial h^{\mathrm{T}}(Y, X; a_0)}{\partial a}\right] \mathrm{S}_0 \left[E_0\left(\frac{\partial h(Y, X; a_0}{\partial a^{\mathrm{T}}}\right)\right]\right)^{-1} \left[E_0 \frac{\partial h^{\mathrm{T}}(Y, X; a_0)}{\partial a}\right] \mathrm{S}_0 V_0[h(Y, X, a_0)] \mathrm{S}_0 \left[E_0\left(\frac{\partial h(Y, X; a_0}{\partial a^{\mathrm{T}}}\right)\right] \left(\left[E_0 \frac{\partial h^{\mathrm{T}}(Y, X; a_0)}{\partial a}\right] \mathrm{S}_0 \left[E_0\left(\frac{\partial h(Y, X; a_0}{\partial a^{\mathrm{T}}}\right)\right]\right)^{-1}. \tag{2.58}$$

Наилучшая оценка в соответствии с методом обобщенных моментов, получается когда предельная матрица выглядит следующим образом:

$$\mathrm{S}_0^* = [V_0 h(Y, X, a_0)]^{-1}. \tag{2.59}$$

Асимптотическая ковариационная матрица $\mathrm{W}_0 = \Sigma(S_0^*)$ выглядит следующим образом:

$$\mathrm{W}_0 = \left(\left[E_0 \frac{\partial h^{\mathrm{T}}(Y, X; a_0)}{\partial a} \right] [V_0 h(Y, X, a_0)]^{-1} \left[E_0 \left(\frac{\partial h(Y, X; a_0)}{\partial a^{\mathrm{T}}} \right) \right] \right)^{-1}. \tag{2.60}$$

Нижняя граница $\Sigma(\mathrm{S}_0^*)$ является решением задачи:

$$\min_a \left[\mathrm{A}_T \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} h(Y, X; a) \right]^{\mathrm{T}} \left[\mathrm{A}_T \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} h(Y, X; a) \right], \tag{2.61}$$

где A_T это матрица размерности $(T \times N)$ сходящаяся к неслучайной матрице A_0.

Пусть θ – вектор параметров эконометрической модели. $U_t(\theta)$ – вектор размера N распределения модели, Z_{t-1} – вектор размерности L, равный количеству используемых инструментов. Пусть тогда:

$$\begin{gathered} E[f_t(\theta)] = 0, \\ f_t(\theta) \equiv U_t(\theta) \otimes Z_{t-1}, \end{gathered} \tag{2.62}$$

где $\otimes$ – произведение Кронекера. Тогда h_T среднее $f_t(\theta)$, обозначим как $g_T(\theta)$:

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f_t(\theta)\,, NL \times 1. \tag{2.63}$$

Тогда задачу (2.55) можно дополнить и представить следующим образом:

$$\min g_T(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{W}_T g_T(\theta), \tag{2.64}$$

где W_T – положительно определенная матрица размерности $(NL \times NL)$. Тестовую статистику, предложенную Л. Хансеном можно представить следующим образом:

$$T g_T(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{W}_T g_T(\theta), \tag{2.65}$$

статистика имеет асимптотическое распределение χ_2 с $(NL - u)$ степенями свободы, u – количество параметров модели, без учета константы.

Пусть набор регрессий выгладит следующим образом:

$$\begin{gathered} y_{1t} = \beta_{11} x_{1t} + \cdots \beta_{1L} x_{Lt} + \varepsilon_{1t}, \\ \vdots \\ y_{Nt} = \beta_{N1} x_{1t} + \cdots \beta_{NL} x_{Lt} + \varepsilon_{Nt}. \end{gathered} \tag{2.66}$$

Если в данные независимы и одинаково распределены (*independent and identically distributed-i.i.d.*), то выполняется следующее условие:

$$\forall t\ \varepsilon_{kt} \sim N(0, \sigma(\varepsilon)^2), \tag{2.67}$$

где $\sigma(\varepsilon)^2$ – дисперсия распределения ошибки, то есть ошибки соответствуют нормальному распределению. Если данные независимы и одинаково распределены, то они гомоскедастичны и удовлетворяют следующим предположениям:

$$\forall t \begin{cases} E(\varepsilon_{kt}) = 0 \\ E\left(\varepsilon_{kt}\varepsilon_{jt}^{\mathrm{T}}\right) = \sigma(\varepsilon)_{kj}, \end{cases} \quad (2.68)$$

где $\sigma(\varepsilon)_{kj}$ – ковариация ошибок между k и j уравнением, которая одинакова для любого периода t.

Если в данных присутствует гетероскедастичность, тогда данные не независимы и не одинаково распределены и удовлетворяют следующим предположениям:

$$\forall t \begin{cases} E(\varepsilon_{kt}) = 0 \\ E\left(\varepsilon_{kt}\varepsilon_{jt}^{\mathrm{T}}\right) = \sigma(\varepsilon)_{t,kj}, \end{cases} \quad (2.69)$$

где $\sigma(\varepsilon)_{t,kj}$ – ковариация ошибок между k и j уравнением для времени t. Обобщенный метод моментов в условии наличия гетероскедатичности в данных позволяет проводить тестирование статистических гипотез[26].

Рассмотрим случай наличия гетероскедастичности и автокорреляции для лага 1, тогда данные не независимы и не одинаково распределены и удовлетворяют. Введем дополнительное обозначение для периода s, тогда данные удовлетворяют следующим предположениям:

$$E(\varepsilon_{kt}) = 0 \ \forall t,$$

$$E\left(\varepsilon_{kt}\varepsilon_{js}^{\mathrm{T}}\right) = \begin{cases} \sigma(\varepsilon)_{tt,kj} \text{ если } t = s, \\ \sigma(\varepsilon)_{tt-1,kj} \text{ если } t - s = 1, \\ \sigma(\varepsilon)_{t-1t,kj} \text{ если } s - t = 1, \\ 0 \text{ если } |t - s| \geq 2, \end{cases} \quad (2.70)$$

где $\sigma(\varepsilon)_{tt,kj}$ – различные ковариации ошибок между k и j уравнением для времени t, $\sigma(\varepsilon)_{tt-1,kj}$ – различные ковариации ошибок между k и j уравнением для времени t и t с лагом 1.

Для использования теста на основе обобщённого метода моментов при наличии автокорреляции и гетероскедастичности необходимо перестроить матрицу S_T. Поправки, представленные С. Рэем и Б. Равикумару, основаны на поправках Ньювей-Веста[27], предлагают рассматривать матрицу S_T в виде:

$$S_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\eta}_t\hat{\eta}_t^{\ \mathrm{T}} + \sum_{v=1}^{p}\left(1 - \frac{v}{1+p}\right)\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\hat{\eta}_t\hat{\eta}_{t-v}^{\mathrm{T}} + \hat{\eta}_{t-v}\hat{\eta}_t^{\mathrm{T}}\right], \quad (2.71)$$

где p максимальный рассматриваемый лаг, v рассматриваемый лаг от 1 до $p-1$, где

$$\hat{\eta}_t\hat{\eta}_t^{\mathrm{T}} = \varepsilon_t\varepsilon_t^{\mathrm{T}} \otimes x_t x_t^{\mathrm{T}}, \hat{\eta}_t\hat{\eta}_{t-v}^{\mathrm{T}} = \varepsilon_t\varepsilon_{t-v}^{\mathrm{T}} \otimes x_t x_{t-v}^{\mathrm{T}}, \hat{\eta}_{t-v}\hat{\eta}_t^{\mathrm{T}} = \varepsilon_{t-v}\varepsilon_t^{\mathrm{T}} \otimes x_{t-v} x_{t-v}^{\mathrm{T}}, \quad (2.72)$$

[26] Ray S., Ravikumar B., Savin N.E. Robust Wald Tests in SUR Systems with Adding Up Restrictions: An Algebraic Approach to Proofs of Invariance // Econometrics. 1998.

[27] Newey W.K., West K.D. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix // Econometrica. 1987. Vol. 55. No. 3. pp. 703-708. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/1913610 (Дата обращения: 01.05.2022).

где $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{Lt})^{\mathrm{T}}$ вектор размерности $(L \times 1)$ независимых переменных факторов модели, $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{Nt})^{\mathrm{T}}$ вектор размерности $(N \times 1)$ ошибок регрессий модели. То есть матрица S_T имеет размерность $(LN \times LN)$.

Таким образом, тест на основе обобщенного метода моментов позволяет бороться с гетероскедастичностью и автокорреляцией ошибок регрессий, что позволяет основывать тесты на его основе в условиях нарушения предпосылок, которые присутствуют в других тестах, при этом необходимо определить гипотезу и задать вектор содержащий гипотезу и вектор частной производной данного вектора от вектора параметров эконометрической модели.

Рассмотрим альтернативные способы тестирования классической модели CAPM. Основная идея тестирования, предложенная М. П. Маккинлейем и М. П. Ричардсоном, заключается в тестировании эффективности заданного рыночного портфеля[28]. Если заданный портфель эффективный, то должно выполняться следующее равенство:

$$E[R_k] - R_f = \left(E[R_M] - R_f\right)\beta_k, \forall\, k. \tag{2.73}$$

Обозначим за Z_{kt} – значение избыточной доходности k-го актива в t-ый период, то есть $R_{kt} - R_{ft}$, Z_{Mt} –значение избыточной доходности рыночного актива в t-ый период, то есть $R_{Mt} - R_{ft}$.

Тогда уравнение регрессии будет выглядеть следующим образом:

$$Z_{kt} = \alpha_k + \beta_k Z_{Mt} + \varepsilon_{kt}, k = 1, \dots, N, \tag{2.74}$$

где ε_{kt} – остаточный член регрессии в момент t. При предположениях:

$$\begin{gathered} E[\varepsilon_{kt}] = 0, \\ E[\varepsilon_{kt} Z_{Mt}] = 0, \\ \alpha_k = 0, \end{gathered} \tag{2.75}$$

необходимо проверить следующую гипотезу:

$$H_0 \colon \alpha_k = 0, \tag{2.76}$$

для системы уравнений регрессий для каждой ценной бумаги.

Возможно представить оцениваемые по формуле (2.74) регрессии в векторной форме, используя в качестве зависимой переменной вектор избыточной доходности по N ценным

[28] Mackinlay A.C., Richardson M.P. Using Generalized Method of Moments to Test Mean-Variance Efficiency // The Journal of Finance. 1991. Vol. 46. No. 2. pp. 511–527. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb02672.x (Дата обращения: 01.05.2022).

бумагам в момент времени t при предположениях о нормальности распределения доходностей активов[29]:

$$Z_t = \alpha + \beta Z_{Mt} + \varepsilon_t,$$
$$E[\varepsilon_t] = 0, \qquad (2.77)$$
$$E[\varepsilon_t \varepsilon_t^{\mathrm{T}}] = \Xi,$$
$$Cov[Z_{Mt}, \varepsilon_t] = 0,$$

где ε_t – вектор остаточных членов регрессии, Z_t – вектор $(N \times 1)$ избыточных доходностей N активов в момент t, где Ξ – матрица ковариаций остатков регрессии, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^{\mathrm{T}}$ вектора размерности $(N \times 1)$, оценённых методом наименьших квадратов коэффициентов α_k и β_k. Совместную для всех периодов вероятностную функцию распределения можно представить следующим образом:

$$f(Z_1, Z_2, \dots, Z_t | Z_{M1}, Z_{M2}, \dots, Z_{Mt}) = \prod_{t=1}^{T} p(Z_t | Z_{Mt}) =$$
$$= \prod_{t=1}^{T} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Xi|^{-\frac{1}{2}} \times exp\left[-\frac{1}{2}(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})^{\mathrm{T}} \Xi^{-1} (Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})\right]. \qquad (2.78)$$

Тогда логарифмическую функцию правдоподобия можно представить следующим образом:

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, \Xi) = \frac{NT}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln|\Xi| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})^{\mathrm{T}} \Xi^{-1} (Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt}). \qquad (2.79)$$

Для получения оценок методом максимального правдоподобия необходимо найти значения параметров максимизирующих функцию правдоподобия в формуле (2.79):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \Xi^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})\right], \qquad (2.80)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \Xi^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})\, Z_{Mt}\right], \qquad (2.81)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Xi} = -\frac{T}{2}\Xi^{-1} + \frac{1}{2}\Xi^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})^{\mathrm{T}}\right]\Xi^{-1}. \qquad (2.82)$$

Для расчета формул используемых для оценки параметров, приравняем частные производные к нулю:

---

[29] Изложено по Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. The Econometrics of Financial Markets. / J.Y. Campbell. – Princeton University Press, 1997. – pp. 181-218. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/j.ctt7skm5 (Дата обращения: 01.05.2022).

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_t - \hat{\beta}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_{Mt} = \hat{\mu} - \hat{\beta}\bar{Z}_M, \tag{2.83}$$

где $\hat{\mu}$ является вектором средних значений избыточных доходностей ценных бумаг и рассчитывается по формуле:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_t, \tag{2.84}$$

а $\bar{Z}_M$ значение средней доходности рынка за весь период:

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_{Mt} \tag{2.85}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \hat{\mu})(Z_{Mt} - \bar{Z}_M)}{\sum_{t=1}^{T}(Z_{Mt} - \hat{\mu}_M)^2}, \tag{2.86}$$

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})(Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt})^{\mathrm{T}}. \tag{2.87}$$

Можно видеть, что данные формулы советуют формулам оценивания методом наименьших квадратов. Метод максимального правдоподобия позволяет получать состоятельные, асимптотически эффективные и асимптотически нормальные оценки, но при выполнении предпосылок МНК их оценки совпадают с оценками метода наименьших квадратов. Оценки метода максимального правдоподобия верны в условиях нормальности распределения доходностей рынка и их независимости и одинаковой распределённости.

В работе А. Маккинлея и М. Ричардсона при условии независимости и одинаковом распределении доходностей ценных бумаг, а также нормальном распределении доходностей ценных бумаг, возможно использовать статистику Вальда для тестирования эффективности рыночного портфеля классической модели CAPM следующего вида:

$$\phi_0 = T\hat{\alpha}^{\mathrm{T}}\left[\left(1 + \frac{\bar{Z}_M^2}{\hat{\sigma}_M^2}\right)\hat{\Xi}\right]^{-1}\hat{\alpha}, \tag{2.88}$$

где $\hat{\sigma}_M^2$ – оценка дисперсии портфеля ценных бумаг методом максимального правдоподобия. Асимптотически статистика будет иметь распределение χ_N. Для конечных выборок при умножении ϕ_0 на $[(T-N-1)/(NT)]$ статистика имеет F-распределение со степенями свободы $(N;(T-N-1))$. Оценку $\hat{\sigma}_M^2$, методом максимального правдоподобия можно получить по следующей формуле:

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_{Mt} - \bar{Z}_M)^2. \tag{2.89}$$

Пусть $\theta = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_N, \beta_N)^{\mathrm{T}}$ вектор параметров оценённых уравнений размерности $(2N \times 1)$, где N – количество ценных бумаг в тестируемой выборке, а $g_k = \alpha_k$ для $k = 1, \dots, N$. Тогда $g(\theta) = (g_1, \dots, g_N)^{\mathrm{T}}$, тогда тестируемую гипотезу можно представить следующим образом:

$$H_0: g(\theta) = 0. \tag{2.90}$$

Якобиан $g(\theta)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_N} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_N} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_N}{\partial \beta_1} & \frac{\partial g_N}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial g_N}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial \alpha_N} & \frac{\partial g_N}{\partial \beta_N} \end{pmatrix} = \tag{2.91}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = I_N \otimes (1\ 0),$$

где $\otimes$ – произведение Кронекера, I_N – единичная матрица размерности $(N \times N)$.

Для обобщённого метода моментов (GMM) необходимо оценить матрицу W_T. В случае тестирования условий моделей CAPM функцию $h(Y, X; a_0)$ можно представить следующим образом:

$$h_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t(\theta) \otimes z_t, \tag{2.92}$$

где $z_t = (1, Z_{Mt})^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_t(\theta) = Z_t - \alpha - \beta Z_{Mt}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^{\mathrm{T}}$ вектора размерности $(N \times 1)$ параметров регрессий, оценённые методом наименьших квадратов. W_T в данном случае матрица $(2N \times 2N)$. $\hat{\theta} = \left(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_N, \hat{\beta}_N\right)^{\mathrm{T}}$, где $\left(\widehat{\alpha}_k, \widehat{\beta}_k\right)$ – оценки полученные методом наименьших квадратов для k-го актива. Оценки обобщенного метода моментов асимптотически распределены нормально:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{d} N(0, V), \tag{2.93}$$

где V – дисперсия оценок, которую можно представить следующим образом $V = (D^{\mathrm{T}} S^{-1} D)^{-1}$, при этом параметры S и D выглядят следующим образом:

$$S = \lim T * E(h_T(\theta) h_T(\theta)^{\mathrm{T}}), \tag{2.94}$$

$$D = \operatorname{plim}\left(\frac{\partial h_T(\theta)}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}\right).$$

В случае с оценками функции $g(\hat{\theta})$ они также будут стремиться к нормальному распределению:

$$\sqrt{T}\left(g(\hat{\theta}) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}\right) V \left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\right). \quad (2.95)$$

Поэтому возможно представить тестовую статистику Вальда для метода обобщённых моментов следующим образом:

$$\phi_2 = Tg(\hat{\theta})^{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}|_{\theta=\hat{\theta}}\right)\hat{V}_T\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}|_{\theta=\hat{\theta}}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1} g(\hat{\theta}) \xrightarrow{d} \chi_N^2, \quad (2.96)$$

которая имеет распределение χ^2 с N степенями свободы. Матрицу $\hat{V}_T$ для тестов условий моделей CAPM возможно оценить следующим образом:

$$\hat{V}_T = \left[D_T^{\mathrm{T}} S_T^{-1} D_T\right]^{-1}$$

$$D_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_N \otimes z_t z_t^{\mathrm{T}}, \quad (2.97)$$

$$S_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}} \otimes z_t z_t^{\mathrm{T}},$$

где $\hat{\varepsilon}_t = Z_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Z_{Mt}$, $\alpha = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_N)^{\mathrm{T}}$ и $\beta = \left(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_N\right)^{\mathrm{T}}$ вектора размерности $(N \times 1)$ параметров регрессий, оценённые методом наименьших квадратов.

Рассмотренный в данной статье метод был рассмотрен П. Чоу[30]. Уравнение регрессии для тестирования эффективности используемого рыночного портфеля можно представить следующим образом[31]:

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_k R_{Mt} + \varepsilon_{kt}, k = 1, \dots, N, \quad (2.98)$$

R_{Mt} – доходность рыночного портфеля в момент t, $R_t -$ доходность актива в период t. Параметр α должен быть равен $R_z(1 - \beta_k)$, поэтому необходимо проверить следующую гипотезу:

$$H_0: \alpha_k = R_z(1 - \beta_k). \quad (2.99)$$

[30] Chou P.-H. ALTERNATIVE TESTS OF THE ZERO-BETA CAPM // Journal of Financial Research. 2000. Vol. 23. No. 4. pp. 469–493. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.2000.tb00756.x (Дата обращения: 01.05.2022).

[31] Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. The Econometrics of Financial Markets. / J.Y. Campbell. – Princeton University Press, 1997. – pp. 181-218. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/j.ctt7skm5 (Дата обращения: 01.05.2022).

Однако доходность портфеля с нулевым коэффициентом бета неизвестна, поэтому необходимо преобразовать тестируемую гипотезу:

$$H_0\colon \frac{\alpha_k}{(1-\beta_k)} = R_z, k = 1, \dots, N. \tag{2.100}$$

Фактически модель предполагает одну ставку R_z для всех периодов и всех активов, но так как она не известна, и в рамках данного метода не предполагается её нахождение, то должно быть $(N-1)$ кросс-секционных ограничений, а не N:

$$H_0\colon \frac{\alpha_1}{(1-\beta_1)} = \frac{\alpha_2}{(1-\beta_2)} = \dots = \frac{\alpha_N}{(1-\beta_N)}. \tag{2.101}$$

Тогда $g_k = \alpha_k/(1-\beta_k) + \alpha_{k+1}/(1-\beta_{k+1})$, тогда $g(\theta) = (g_1, \dots, g_{N-1})^{\mathrm{T}}$, также как и выше $\theta = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_N, \beta_N)^{\mathrm{T}}$, тогда тестируемую гипотезу, возможно представить следующим образом:

$$H_0\colon g(\theta) = 0. \tag{2.102}$$

Якобиан выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_N} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_N} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \alpha_N} & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \beta_N} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (1-\beta_2) & \alpha_2 & -(1-\beta_1) & -\alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\beta_3) & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-\beta_N) & \alpha_N & -(1-\beta_{N-1}) & -\alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{2.103}$$

и является матрицей $\big((N-1)\times 2N\big)$. Также $\hat{\theta} = \big(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_N, \hat{\beta}_N\big)^{\mathrm{T}}$, где $\big(\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k\big)$ – оценки полученные методом наименьших квадратов для k-го актива. $\hat{\theta}$ распределено асимптотически нормально:

$$\sqrt{T}\big(\hat{\theta} - \theta\big) \xrightarrow{d} N\left(0, \Xi \otimes \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\right), \tag{2.104}$$

где X матрица (e_T, R_M) размерности $(T\times 2)$, где $e_T = (1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$ и $R_M = (R_{M1}, \dots, R_{MT})^{\mathrm{T}}$ размерности $(T\times 1)$. Ξ – матрица ковариации остатков на основе оценок полученных методом наименьших квадратов. Распределение оценок для конечной выборки также нормально:

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \Xi \otimes (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}). \tag{2.105}$$

Если допустить, что доходности не распределены нормально, но ошибки регрессий распределены независимо и идентично, то можно использовать классический вариант теста Вальда, так как оценки $\hat{\theta}$ асимптотически сходятся к нормальному распределению, что также верно для $g(\hat{\theta})$:

$$\sqrt{T}\left(g(\hat{\theta}) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}\right)\left(\Xi \otimes \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\right). \quad (2.106)$$

Тест Вальда при условии, что ошибки распределены независимо и идентично:

$$W_1 = Tg(\hat{\theta})^{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}|_{\theta=\hat{\theta}}\right)\left(\Xi \otimes (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}|_{\theta=\hat{\theta}}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1} g(\hat{\theta}) \xrightarrow{d} \chi^2_{N-1}, \quad (2.107)$$

которая имеет распределение χ^2 с $N-1$ степенями свободы.

В случае невыполнения предположения о независимости и идентичности ошибок регрессии тест Вальда на основе обобщенного метода моментов выглядит идентично представленному выше для классической модели CAPM, за исключением матрицы $\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}|_{\theta=\hat{\theta}}\right)$и вектора $g(\hat{\theta})$:

$$W_2 = Tg(\hat{\theta})^{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}|_{\theta=\hat{\theta}}\right)\hat{V}_T\left(\frac{\partial g}{\partial \theta^{\mathrm{T}}}|_{\theta=\hat{\theta}}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1} g(\hat{\theta}) \xrightarrow{d} \chi^2_{N-1}, \quad (2.108)$$

статистика имеет распределение χ^2 с $N-1$ степенями свободы.

$$\begin{gathered} \hat{V}_T = \left[D_T^{\mathrm{T}} S_T^{-1} D_T\right]^{-1}, \\ D_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_N \otimes r_t r_t^{\mathrm{T}}, \\ S_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}} \otimes r_t r_t^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \quad (2.109)$$

где $r_t = (1, R_{Mt})^{\mathrm{T}}$, $\hat{\varepsilon}_t = R_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}R_{Mt}$, $\alpha = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_N)^{\mathrm{T}}$ и $\beta = \left(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_N\right)^{\mathrm{T}}$ вектора размерности $(N \times 1)$ параметров регрессий, оценённые методом наименьших квадратов. В статье П. Чоу предлагает умножать полученную статистику W_1 и W_2на $((T - N - 1)/T)$.

Для борьбы с автокорреляцией необходимо заменить лаги S_T в (2.71) в соответствии с тем вплоть, до какого порядка тестируется автокорреляция, а также $x_t = (1, z_t)$ и $x_t = (1, r_t)$ для классической модели CAPM и CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета соответственно. В случае отсутствия автокорреляции результаты статистки не изменятся, так как ковариация будет отсутствовать.

Принятие гипотезы об эффективности рыночного портфеля для модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета не означает при этом, что будет отвергнута гипотеза для классической CAPM. Рассматриваемые модели основываются на определенных предпосылках, и их использование означает, предположение об их реальном выполнении.

Таким образом, рассмотренные тесты позволяют сделать вывод об отражении условий применения моделей активов капитала с учетом нарушений предпосылок традиционных тестов.

2.3. Подход Ледуа-Вольфа оценки ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг и показатели результативности управления портфелем ценных бумаг

Ковариационная матрица играет существенную роль в решении задачи оптимизации портфеля. В данном параграфе рассмотрены теоритические аспекты, связанные с улучшением её оценок, которые возможно использовать для целей портфельной оптимизации.

Пусть R_{kt} доходность k-ой ценной бумаги за период t. При этом $1 < k < N$ и $1 < t < T$, N – количество ценных бумаг в выборке, T – количество рассматриваемых периодов. Обозначим за Σ ковариационную матрицу доходностей ценных бумаг, которую необходимо оценить. Обозначим за вектор $R_k = (R_{k1}, \dots, R_{kT})^{\mathrm{T}}$ размерности $(T \times 1)$ доходность рассматриваемой k-ой ценной бумаги. Представим за матрицу размерности $(T \times N)$ в которой представлены все ценные бумаги выборки как $\mathrm{X} = (R_1, \dots, R_N)$. Традиционную оценку Σ, которую называют ковариационной матрицей по выборке можно представить следующим образом:

$$S = \frac{1}{T}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\left(I_T - \frac{1}{T}e_T e_T^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{X}, \qquad (2.110)$$

где I_T – единичная матрица размерности $(T \times T)$, e_T – вектор $e_T = (1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$ размерности $(T \times 1)$.

П. Фрост и Дж. Саварино[32] показали, что при большом количестве ценных бумаг N, и T меньше чем N традиционная оценка матрицы ковариационной матрицы S содержит ошибки в оценке, что удаляет от оценок ковариационной матрицы Σ[33]. Данная проблема является крайне актуальной, так как количество ценных бумаг, которые возможно рассматривать, особенно на американском рынке является достаточно большим, при этом количество

[32] Frost P.A., Savarino J.E. An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection // The Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1986. Vol. 21. No. 3. P. 293. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2331043 (Дата обращения: 01.05.2022).

[33] Данные по результатам эксперимента по моделированию относительно данной проблемы представлены Schäfer J., Strimmer K. A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics // Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology. 2005. Vol. 4. No. 1. P. 3. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2202/1544-6115.1175 (Дата обращения: 01.05.2022).

рассматриваемых периодов ограниченно. Также корреляция большинства ценных бумаг является положительной, что матрица S не учитывает.

В работах О. Ледуа и М. Вольфа[34] было предложено объединить традиционную ковариационную матрицу с матрицей рассчитываемой иным способом с целью приближения оценки ковариационной матрицы портфеля ценных бумаг к матрице Σ. Для оценки ковариационной матрицы, используемой в задаче оптимизации портфеля в дальнейшем, предложено смешать матрицы, рассчитываемые различными способами, используя коэффициент δ, принимающий значения от 0 до 1:

$$\delta F + (1 - \delta)S = [\sigma] \tag{2.111}$$

где F – оценённая ковариационная матрица, рассчитываемая альтернативным способом, $[\sigma]$ – ковариационная матрица, используемая в задаче оптимизации портфеля. Обозначим за Ф матрицу, которую пытаемся оценить, рассчитывая F, то есть матрица F является оценкой Ф. Пусть σ_{kj} – элементы ковариационной матрицы Σ, s_{kj}– элементы ковариационной матрицы S. Задачу минимизации квадратичной функции потерь, выражаемой при помощи Евклидовой нормы можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} L(\delta) &= \left\| \delta \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{kj} \right) I + (1 - \delta)S - \Sigma \right\|^2 = \\ &= \left\| \delta \left(E \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} s_{kj} \right) \right) I + (1 - \delta)S - \Sigma \right\|^2, \end{aligned} \tag{2.112}$$

Евклидовая норма (Норма Фробениуса) для симметричной матрицы А размерности $(N \times N)$ расчитывается следующим образом:

$$\|A\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=k}^{N} a_{kj}^2. \tag{2.113}$$

Идея подхода[35] состоит в том, что матрица S содержит только ковариации и дисперсии, при этом матрица F, оцениваемая подобным образом, содержит исключительно смещение к среднему суммы компонентов матрицы S. Найдя значение δ минимизирующее квадратичную функцию ошибок, возможно получить матрицу Σ^* являющуюся оптимальным

---

[34] Ledoit O., Wolf M. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix // The Journal of Portfolio Management. 2004. Vol. 30. No. 4. pp. 110–119. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.3905/jpm.2004.110 (Дата обращения: 01.05.2022).

[35] Ledoit O., Wolf M. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices // Journal of Multivariate Analysis. 2004. Vol. 88. No. 2. pp. 365–411. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4 (Дата обращения: 01.05.2022).

компромиссом, между ошибкой вызванной значениями ковариаций и дисперсий и смещением к их среднему.

В задаче оптимизации портфеля, как правило, матрица F, являющаяся оценкой матрицы Ф, оценивается иным способом. Элтон, М. Грубер[36] с целью снизить количество расчетов при большом количестве ценных бумаг предложили оценивать ковариационную матрицу ценных бумаг как модель, где каждая пара ценных бумаг имеет одинаковый коэффициент корреляции, который оценивается по средней корреляции ценных бумаг, которые находятся в выборке. Оценку ковариационной матрицы в данном случае можно представить следующим образом. Необходимо рассчитать корреляционную матрицу доходностей ценных бумаг в выборке[37]:

$$r_{kj} = \frac{s_{kj}}{\sqrt{s_{kk}s_{jj}}}, \tag{2.114}$$

где s_{kk} и s_{jj} – дисперсия доходности k и j ценной бумаги соответственно, s_{kj} – ковариация доходности k и j ценной бумаги. Далее оценивается средний коэффициент корреляции:

$$\bar{r} = \frac{2}{(N-1)N}\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=k+1}^{N} r_{kj}, \tag{2.115}$$

Рассчитывается матрица F с постоянной корреляцией следующим образом:

$$\begin{gathered} f_{kk} = \sigma_{kk}^2 \\ f_{kj} = \bar{r}\sqrt{s_{kk}s_{jj}}, \end{gathered} \tag{2.116}$$

Существуют также и иные способы оценки матрицы Ф, можно найти в работе Дж. Шефера и К. Штимера[38], далее будет подразумеваться под матрицей F, матрица оцениваемая способом представленным выше.

Необходимо сказать о наличии следующих предположений:

1. Доходности ценных бумаг независимы и одинаково распределены, однако их нормальное распределение не предполагается

2. Количество ценных бумаг N фиксированы и ограничены, количество периодов T стремится к бесконечности

[36] Elton E.J., Gruber M.J. Estimating the Dependence Structure of Share Prices--Implications for Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1973. Vol. 28. No. 5. pp. 1203-1232. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2978758 (Дата обращения: 01.05.2022).

[37] Ledoit O., Wolf M. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix // The Journal of Portfolio Management. 2004. Vol. 30. No. 4. pp. 110–119. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.3905/jpm.2004.110 (Дата обращения: 01.05.2022).

[38] Schäfer J., Strimmer K. A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics // Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology. 2005. Vol. 4. No. 1. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2202/1544-6115.1175 (Дата обращения: 01.05.2022).

3. Ценные бумаги имеют ограниченный четвертый момент, то есть:

$$\forall k,j,l,b = 1,\dots,n\ \forall t = 1,\dots,T, E\left[\left|R_{kt}R_{jt}R_{lt}R_{bt}\right|\right] < \infty. \quad (2.117)$$

4. Матрица Φ не равна ковариационной матрице Σ: Φ ≠ Σ.

Обозначим за ϕ_{kj} элементы матрицы Φ. Для решения задачи по минимизации квадратичной функции потерь необходимо найти минимум следующей функции:

$$R(\delta) = E\big(L(\delta)\big) = E(\|\delta F + (1-\delta)S - \Sigma\|^2), \quad (2.118)$$

Раскрывая выражение получаем:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\delta^2 Var\left(f_{kj}\right) + (1-\delta)^2 Var\left(s_{kj}\right) + 2\delta(1-\delta)Cov\left(f_{kj},s_{kj}\right) + \delta^2(\phi_{kj}-\sigma_{kj})^2)\right]. \quad (2.119)$$

Необходимо минимизировать функцию риска $R(\delta)$ по отношению δ, производная первого порядка $\frac{dR(\delta)}{d\delta}$ выглядит следующим образом:

$$2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\delta Var\left(f_{kj}\right) - (1-\delta)Var\left(s_{kj}\right) + (1-2\delta)Cov\left(f_{kj},s_{kj}\right) + \delta(\phi_{kj}-\sigma_{kj})^2\right]. \quad (2.120)$$

Приравняв $\frac{dR(\delta)}{d\delta}$ к нулю, получаем значение δ^*:

$$\delta^* = \frac{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(s_{kj}\right) - Cov(f_{kj},s_{kj})}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(f_{kj}\right) + Var\left(s_{kj}\right) - 2Cov(f_{kj},s_{kj}) + (\phi_{kj}-\sigma_{kj})^2} = \\ = \frac{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(s_{kj}\right) - Cov(f_{kj},s_{kj})}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(f_{kj}-s_{kj}\right) + (\phi_{kj}-\sigma_{kj})^2}. \quad (2.121)$$

Производная второго порядка выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2R(\delta)}{d\delta^2} = 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(f_{kj}-s_{kj}\right) + (\phi_{kj}-\sigma_{kj})^2, \quad (2.122)$$

так как полученная производная второго порядка является всегда положительной, функция риска является строго выпуклой вниз и соответственно найденное значение δ^* является минимумом функции $R(\delta)$.

Обозначим за π сумму асимптотических дисперсий и ковариаций матрицы S умноженной на $\sqrt{T}$: $\pi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} AsyVar\left(\sqrt{T}s_{kj}\right)$. Также пусть ρ обозначает сумму асимптотических ковариаций из матрицы F и S $p = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} AsyCov(\sqrt{T}f_{kj},\sqrt{T}s_{kj})$. Если δ^* умножить на T – количество рассматриваемых периодов получим:

$$T\delta^* = \frac{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(\sqrt{T}s_{kj}\right) - Cov(\sqrt{T}f_{kj},\sqrt{T}s_{kj})}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(f_{kj}-s_{kj}\right) + (\phi_{kj}-\sigma_{kj})^2}. \quad (2.123)$$

При предположении о независимости и одинаковой распределенных доходностей ценных бумаг и ограниченности момента четвертого порядка (коэффициента эксцесса) получаем[39]:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(\sqrt{T}s_{kj}\right) \to \pi,$$
$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Cov(\sqrt{T}f_{kj}, \sqrt{T}s_{kj}) \to p, \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(f_{kj} - s_{kj}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{T}\right), \tag{2.124}$$

где O – «O» большое, что обозначает следующее соотношение:

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Var\left(f_{kj} - s_{kj}\right)\right| \leq \mathrm{C}\left(\frac{1}{T}\right), \tag{2.125}$$

где C – некая константа, при условии $\mathrm{C} > 0$, при $T \to \infty$.

Предположим, что $E(R_{kt}) = E\left(R_{jt}\right) = 0$, где R_{jt} компоненты матрицы X^{T}, тогда стандартное отклонение можно представить следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{kj} = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N} R_{kt}R_{jt}, \tag{2.126}$$

средним значением ряда $R_{k1}R_{j1}, \dots, R_{kt}R_{jt}$ является π_{kj} и дисперсией ϱ_{kj}. Исходя из центральной предельной теоремы сходится по распределению:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\sigma}_{kj} - \sigma_{kj}\right) \to N\left(0, {\varrho_{kj}}^2\right). \tag{2.127}$$

Обозначим средние значения за $\bar{R}_k = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} R_{kt}$ и $\bar{R}_j = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} R_{jt}$. Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\left(\hat{\sigma}_{kj} - s_{kj}\right) &= \sqrt{T}\bar{R}_k\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T=1}\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right) + \sqrt{T}\bar{R}_j\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T=1}(R_{kt} - \bar{R}_k) + \sqrt{T}\bar{R}_k\bar{R}_j = \\ &= \sqrt{T}\bar{R}_k\bar{R}_j\end{aligned} \tag{2.128}$$

Среднее значение матрицы X можно представить следующим образом:

$$\mathrm{m} = \frac{1}{T}Xq_T = (\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k)^{\mathrm{T}}. \tag{2.129}$$

Тогда $\sqrt{T}\bar{R}_k$ имеет асимптотическое нормальное распределение и является $\mathrm{O}(\mathrm{m})$, то есть:

$$\left|\sqrt{T}\bar{R}_k\right| \leq \mathrm{C}|\mathrm{m}|, \tag{2.130}$$

а $\bar{R}_j$ сходится почти наверняка к нулю и является $\mathrm{o}(\mathrm{m})$, то есть выполняется неравенство:

---

[39] Изложено по Ledoit O., Wolf M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection // Journal of Empirical Finance. 2003. Vol. 10. No. 5. pp. 603–621. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/S0927-5398(03)00007-0 (Дата обращения: 01.05.2022).

$$|\bar{R}_k| < \epsilon|\mathrm{m}|. \qquad (2.131)$$

В таком случае $\sqrt{T}\left(\hat{\sigma}_{kj} - s_{kj}\right) = \mathrm{o}(\mathrm{m})$. Исходя из схождения по распределению и теоремы Слуцкого $\sqrt{T}\left(\hat{\sigma}_{kj} - s_{kj}\right)$ сходится к нормальному распределению:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\sigma}_{kj} - s_{kj}\right) \to N\left(0, \varrho_{kj}\right). \qquad (2.132)$$

А также $\varrho_{kj} = \pi_{kj}$ и соответственно $Var\left(\sqrt{T}s_{kj}\right)$ сходится к π_{kj}. Поэтому оценку π можно представить следующим образом:

$$\hat{\pi} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{\pi}_{kj}, \qquad (2.133)$$

где оценку $\hat{\pi}_{kj}$ можно представить следующим образом:

$$\hat{\pi}_{kj} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\{(R_{kt} - \bar{R}_k)\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right) - s_{kj}\right\}^2 = \\ = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[(R_{kt} - \bar{R}_k)\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right)\right]^2 - 2\left[(R_{kt} - \bar{R}_k)\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right)\right]s_{kj} + s_{kj}^2. \qquad (2.134)$$

Введем следующую матрицу размерности $(T \times N)$ Ψ:

$$\Psi = \begin{bmatrix} R_{11} - \bar{R}_1 R_{21} - \bar{R}_2 R_{31} - \bar{R}_3 \cdots R_{N1} - \bar{R}_N \\ R_{12} - \bar{R}_1 R_{22} - \bar{R}_2 R_{32} - \bar{R}_3 \cdots R_{N2} - \bar{R}_N \\ R_{13} - \bar{R}_1 R_{23} - \bar{R}_2 R_{33} - \bar{R}_3 \cdots R_{N3} - \bar{R}_N \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ R_{1t} - \bar{R}_1 R_{2t} - \bar{R}_2 R_{3t} - \bar{R}_3 \cdots R_{NT} - \bar{R}_N \end{bmatrix}, \qquad (2.135)$$

обозначим $[\Psi^2]^{\mathrm{T}}\Psi^2 = \mathrm{H}$ и $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi = \mathrm{Z}$, где К и М матрицы размерности $(N \times N)$, а η_{kj} и ζ_{kj} элементы данных матриц соответственно. Можно представить $\hat{\pi}_{kj}$ следующей формулой:

$$\hat{\pi}_{kj} = \frac{1}{T}\left(\eta_{kj} - 2 * \zeta_{kj} * s_{kj} - s_{kj}^2\right). \qquad (2.136)$$

Можно представить p следующим образом:

$$p = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} AsyCov(\sqrt{T}f_{kj}, \sqrt{T}s_{kj}) = \\ = \sum_{k=1}^{N} AsyVar\left[\sqrt{T}s_{kj}\right] + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq k}^{N} AsyCov\left[\sqrt{T}\bar{r}\sqrt{s_{kk}s_{jj}}, \sqrt{T}s_{kj}\right]. \qquad (2.137)$$

Значения на главной диагонали равны $\hat{\pi}_{kk}$:

$$AsyVar\left[\sqrt{T}s_{kj}\right] = \hat{\pi}_{kk} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N}\{(R_{kt} - \bar{R}_k)^2 - s_{kk}\}^2. \qquad (2.138)$$

Значения вне главной диагонали можно представить следующим образом:

$$AsyCov\left[\sqrt{T}\bar{r}\sqrt{s_{kk}s_{jj}}, \sqrt{T}s_{kj}\right] =$$
$$= \frac{\bar{r}}{2}\left(\sqrt{\frac{s_{jj}}{s_{kk}}}AsyCov\left[\sqrt{T}s_{kk}, \sqrt{T}s_{kj}\right] + \sqrt{\frac{s_{kk}}{s_{jj}}}AsyCov\left[\sqrt{T}s_{jj}, \sqrt{T}s_{kj}\right]\right), \quad (2.139)$$

оценку $AsyCov\left[\sqrt{T}s_{kk}, \sqrt{T}s_{kj}\right]$ можно представить следующим образом:

$$\hat{\vartheta}_{kk,kj} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\{(R_{kt} - \bar{R}_k)^2 - s_{kk}\}\{(R_{kt} - \bar{R}_k)(R_{jt} - \bar{R}_j) - s_{kj}\}. \quad (2.140)$$

А оценка $AsyCov\left[\sqrt{T}s_{jj}, \sqrt{T}s_{kj}\right]$ тогда будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{\vartheta}_{jj,kj} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\left\{(R_{jt} - \bar{R}_j)^2 - s_{jj}\right\}\{(R_{kt} - \bar{R}_k)(R_{jt} - \bar{R}_j) - s_{kj}\}. \quad (2.141)$$

Тогда оценка параметра $\hat{\rho}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_{kk} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq k}^{N}\frac{\bar{r}}{2}\left(\sqrt{\frac{s_{jj}}{s_{kk}}}\hat{\vartheta}_{kk,kj} + \sqrt{\frac{s_{kk}}{s_{jj}}}\hat{\vartheta}_{jj,kj}\right). \quad (2.142)$$

Также обозначим за $[\Psi^3]^{\mathrm{T}}\Psi = \mathrm{P}$, где P матрица размерности $(N \times N)$, а ρ_{kj} элемент данной матрицы. Введем матрицу O с нулями на главной диагонали и единицами вне главной диагонали размерности $(N \times N)$, а элементы данной матрицы обозначим как o_{kj}. Также на главной диагонали традиционной ковариационной матрицы S расположены дисперсии ценных бумаг, поскольку корень из дисперсии является стандартным отклонением ценных бумаг σ_{kj}. Вектор стандартных отклонений размерности $(N \times 1)$ $\sqrt{S_{kj}} = \left(\sqrt{s_{11}}, \sqrt{s_{22}}, \dots, \sqrt{s_{kj}}\right)^{\mathrm{T}}$. Компоненты матричного произведения $\frac{1}{\sqrt{S_{kj}}}\sqrt{S_{kj}}$ обозначим ς_{kj}. Тогда можно представить оценку $\hat{\rho}$ следующим образом:

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^{N}\hat{\pi}_{kk} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq k}^{N}\frac{\bar{r}}{2} * (\varsigma_{kj})\frac{1}{T}\left(\rho_{kj} - 2\zeta_{kk} * s_{kj} - \zeta_{kj} * s_{kk} + s_{kk} * s_{kj}\right)o_{kj}. \quad (2.143)$$

Так как выполняется соотношение (2.125), f_{kj} и s_{kj} являются оценками значениями ϕ_{kj} и σ_{kj}. Оценка γ выглядит следующим образом:

$$\hat{\gamma} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(f_{kj} - s_{kj}\right)^2. \quad (2.144)$$

Тогда получаем оценки параметра $\hat{\kappa}$:

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\pi} - \hat{\rho}}{\hat{\gamma}}. \quad (2.145)$$

Таким образом, состоятельная оценка параметром $\hat{\delta}^*$ выглядит следующим образом:

$$\hat{\delta}^* = \max\left\{0, \min\left\{\frac{\hat{\kappa}}{T}, 1\right\}\right\}. \tag{2.146}$$

Маловероятно, что в конечной выборке будет $\frac{\hat{\kappa}}{T} < 0$ или $\frac{\hat{\kappa}}{T} > 0$.

Рассмотрим показатели, которые возможно использовать для оценки результатов инвестиционной стратегии.

У. Шарп предложил[40] оценивать эффективность работы взаимных фондов (*mutural funds*) с помощью показателя, называемого коэффициентом Шарпа, который расчитывается следующим образом:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(R_{Pt} - \bar{R}_f\right)}{\sigma_P}, \tag{2.147}$$

где R_{pt} – доходность стратегии портфеля в t-ый период, $\bar{R}_f$ – средняя безрисковая доходность за весь оцениваемый период, σ_P – стандартное отклонение доходности портфеля. При расчете, возможно заменить $\bar{R}_f$ на иную доходность, которую инвестор ставит себе целью достичь. Данный коэффициент можно трактовать как меру, в которой риск-премия превзошла риск, который взял на себя менеджмент фонда. Если коэффициент оказался выше 1, это означает, что на одну единицу риска портфель сгенерировал большую доходность, что можно трактовать как удовлетворительный результат. В случае если значение коэффициента Шарпа ниже 1, можно сказать, что портфель не сгенерировал достаточно доходности оправданной взятым на себя риском.

М Йенсен предложил использовать для оценки результативности взаимных фондов коэффициент альфа из регрессии модели CAPM. Регрессию, оцениваемую методом наименьших квадратов, можно представить следующим образом:

$$R_{Pt} - R_{ft} = \alpha_P + \beta_P(R_{Mt} - R_{ft}) + \varepsilon_{Pt}, \tag{2.148}$$

где α_P и β_P – параметры модели для доходности портфеля, ε_{Pt} – ошибка модели регрессии. Получаемая в результате регрессии константа α_P позволяет судить результативность управления портфелем. Цель данного показателя оценить позволяла ли стратегия портфеля получить на длительном временном промежутке результат превышающий стратегию по инвестиции в рыночный портфель. Положительное значение α_P (если он является статистически значимым), говорит о том, что стратегии портфеля удалось получить результат лучше, чем стратегия по инвестициям в рыночный портфель.

---

[40] Sharpe W.F. Mutual Fund Performance // The Journal of Business. Vol. 39. No. 1. P. 119–138. [Электронный ресурс]. URL: http://www.jstor.org/stable/2351741 (Дата обращения: 01.05.2022).

Выводы

Метод Фама-МакБета позволяет протестировать отражение условий классической модели CAPM на рынке, но необходимо учитывать проблему смещенности оценок при тестировании и использовать группировку коэффициентов бета ценных бумаг или иные способы для преодоления данной проблемы.

Тестирование модели CAPM с нулевым коэффициентом бета методом, предложенным Кэмпбелом, Ло, Маккинлеем заключается в оценивании параметров ценных бумаг методом максимального правдоподобия и поиска ставки доходности портфеля с нулевой бетой, которая максимизирует логарифмическую функцию правдоподобия, и в дальнейшем используется в тестовой статистике.

Были рассмотрены альтернативные способы тестирования модели CAPM и модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета классическим тестом Вальда и тестом Вальда на основе обобщённого метода моментов. Метод тестирования на основе обобщённого метода моментов отражения условий классической модели CAPM на рынке позволяет проверить эффективность рыночного портфеля, в условиях нарушения предпосылок о нормальности распределения доходности ценных бумаг, независимости и их одинаковом распределении, и как следствие присутствия гетероскедастичности. Тестирование CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета данным методом, где в качестве тестируемой гипотезы выступает равенство параметра альфа произведению ставки доходности портфеля с нулевой бетой на разность единицы и коэффициента бета, также позволяет проверить эффективность используемого рыночного портфеля. В том числе был рассмотрен вариант тестирования не только с учетом присутствия гетероскедастичности, но и с учетом автокорреляции до определенного порядка.

Подход Ледуа-Вольфа оценки ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг заключается в нахождении значения оптимального параметра между ковариационной матрицы, имеющей смещение в сторону среднего значения корреляций доходностей ценных бумаг и традиционной ковариационной матрицей состоящей из дисперсий и ковариаций. Данный подход позволяет получать более состоятельные оценки ковариационной матрицы, при количестве рассматриваемых ценных бумаг больше, чем количество рассматриваемых периодов. Также данный подход улучшает оценку ковариационной матрицы по причине того, что учитывает то, что корреляции ценных бумаг положительна в большинстве случаев.

ГЛАВА 3. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА МОДЕЛЕЙ ОЦЕНКИ АКТИВОВ КАПИТАЛА И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ НА РОССИЙСКОМ РЫНКЕ АКЦИЙ

3.1. Проверка условий применения классической CAPM модели на российском рынке акций

Для тестирования возможности применения классической модели CAPM по методу Фама-Макбета и модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета были использованы данные об обыкновенных акциях, привилегированных акциях, депозитарных расписках. В качестве значений доходности государственных облигаций брались значения кривой бескупонной доходности, рассчитываемой Московской биржей, на начало рассматриваемого месяца. В качестве рыночного портфеля использовался Индекс Московской Биржи (IMOEX). Для тестирования использовались данные по акциям, которые состояли, какое либо время в индексе Московской биржи за рассматриваемый период при наличии данных по ним. Источником данных является портал Yahoo! Finance[41] и терминал Bloomberg, а также сайт Центрального Банка РФ[42].

Для тестирования использовались данные по обыкновенным и привилегированным акциям, которые состояли какое-либо время в Индексе Московской биржи (IMOEX) за рассматриваемый период при наличии данных по ним. Для расчета доходности выбранных акций и рыночного индекса, учитывалось только изменение стоимостных значений. Для этого логарифмировались изменения курсовой стоимости:

$$R_{kt} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) * 100, \quad (3.1)$$

где P_t – стоимость актива или значение для индекса в момент t.

Для тестирования модели CAPM на российском рынке был использован регрессионный метод Фама-Макбэта. Расчеты проводились с использование модулей языка Python – numpy[43], pandas[44], statsmodels[45]. Были использованы доходности обыкновенных и привилегированных акций, входящие в Индекс Московской Биржи (IMOEX), тестировались периоды, включающие с 2012 по 2020 гг., для оценок параметров модели использовались данные доходностей российских акций с 2009 по 2017 гг., подробная информация представлена в табл. 3.1.

---

[41] URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance
[42] URL: https://www.cbr.ru/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Банка России
[43] URL: https://numpy.org/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт NumPy
[44] URL: https://pandas.pydata.org/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт pandas
[45] URL: https://www.statsmodels.org/stable/index.html (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт statsmodels

Таблица 3.1.

Данные о периодах, использованных для тестирования модели CAPM методом Фама-Макбета на российском рынке

Показатели	**Периоды, гг.**		
Период формирования и оценивания параметров	2009-2011	2012-2014	2015-2017
Период тестирования	2012-2014	2015-2017	2018-2020
Количество рассматриваемых ценных бумаг	30	35	40

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

На первом этапе оценивались параметры $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_k$ для ценных бумаг за первый период с помощью метода наименьших квадратов для регрессии (2.1). Также оценивались стандартные отклонения остатков регрессии для каждой ценной бумаги $s_k(\hat{\varepsilon}_{k,t-1})$ по формуле (2.3). Далее для снижения смещения оценок оценённых параметров уравнений регрессии на втором этапе были сформированы портфели ценных бумаг, по 5 ценных бумаг в каждом портфеле. В табл. 3.2. представлен состав сформированных портфелей.

Таблица 3.2.

Состав сформированных портфелей для тестирования модели CAPM по методу Фама-Макбета

2012-2014				**2015-2017**			
Эмитент и тип ценной бумаги	**№**	**Эмитент и тип ценной бумаги**	**№**	**Эмитент и тип ценной бумаги**	**№**	**Эмитент и тип ценной бумаги**	**№**
Аэрофлот, ао Северсталь, ао ФСК ЕЭС, ао Газпром, ао ГМК Норильский никель, ао	1	Транснефть, ап Банк ВТБ, ао Юнипро, ао Уралкалий, ао Сбербанк России, ап	5	АФК Система, ао Аэрофлот, ао Акрон, ао Северсталь, ао ФСК ЕЭС, ао	1	Ростелеком, ап Сбербанк России, ао Сбербанк России, ап Сургутнефтегаз, ао Сургутнефтегаз, ап	5
РусГидро, ао НК ЛУКОЙЛ, ао Группа ЛСР, ао ММК, ао Мосэнерго, ао	2	Фармстандарт Татнефть им. В.Д. Шашина, ап Татнефть им. В.Д. Шашина, ао Интер РАО ЕЭС, ао Сбербанк России, ао	6	Газпром, ао Группа Черкизово, ао ГМК Норильский никель, ао РусГидро, ао НК ЛУКОЙЛ, ао	2	Трубная Металлургическая Компания, ао Транснефть, ап Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ао Банк ВТБ, ао Юнипро, ао	6
НЛМК, ао Полюс, ао Распадская, ао НК Роснефть, ао Российские сети, ао	3	–	–	Группа ЛСР, ао ММК, ао Магнит, ао М.видео, ао НЛМК, ао	3	Татнефть имени В.Д. Шашина, ао Татнефть имени В.Д. Шашина, ап Интер РАО ЕЭС, ао Мобильные ТелеСистемы, ао НОВАТЭК, ао	7
Ростелеком, ао Ростелеком, ап Газпром нефть Сургутнефтегаз, ао Сургутнефтегаз, ап	4	–	–	ПИК-специализированный застройщик, ао Полюс, ао НК Роснефть, ао Российские сети, ао Ростелеком, ао	4	–	–

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

(продолжение таблицы 3.2.)

Состав сформированных портфелей для тестирования модели CAPM по методу Фама-Макбета

2018-2020			
Эмитент и тип ценной бумаги	**№**	**Эмитент и тип ценной бумаги**	**№**
АФК Система, ао Аэрофлот, ао Акрон, ао Северсталь, ао ФСК ЕЭС, ао	1	Ростелеком, ап Сбербанк России, ао Сбербанк России, ап Сургутнефтегаз, ао Сургутнефтегаз, ап	5
Газпром, ао Группа Черкизово, ао ГМК Норильский никель, ао РусГидро, ао НК ЛУКОЙЛ, ао	2	Трубная Металлургическая Компания, ао Транснефть, ап Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ао Банк ВТБ, ао Юнипро, ао	6
Группа ЛСР, ао ММК, ао Магнит, ао М.видео, ао НЛМК, ао	3	Татнефть имени В.Д. Шашина, ао Татнефть имени В.Д. Шашина, ап Интер РАО ЕЭС, ао Мобильные ТелеСистемы, ао НОВАТЭК, ао	7
ПИК-специализированный застройщик, ао Полюс, ао НК Роснефть, ао Российские сети, ао Ростелеком, ао	4	АЛРОСА, ао Распадская, ао ФосАгро, ао Полиметалл Интернэшнл плс, акции ин. эмм. Яндекс Н.В. (PLC Yandex N.V.), ао	8

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Были рассчитаны средние значения коэффициентов бета $\hat{\beta}_{p,t-1}$ по формуле (2.2), средние значения стандартных отклонений ошибок портфелей $\bar{s}_{p,t-1}$ по формуле (2.4), а также доходности используемых портфелей по формуле (2.5). Оценки параметров представлены в табл. 3.3. Структура сформированных портфелей и параметры оценённых регрессий представлены в приложении 1.

Таблица 3.3.

Параметры портфелей ценных бумаг для тестирования модели CAPM по методу Фама-Макбета

Периоды тестирования, гг.								
2012-2014			**2015-2017**			**2018-2020**		
Портфель	$\hat{\beta}_p$	$\bar{s}_p(\hat{\varepsilon}_p)$	**Портфель**	$\hat{\beta}_p$	$\bar{s}_p(\hat{\varepsilon}_p)$	**Портфель**	$\hat{\beta}_p$	$\bar{s}_p(\hat{\varepsilon}_p)$
1	1,0746	9,8732	1	1,1002	11,5241	1	1,0963	9,3971
2	1,3216	9,0926	2	0,7883	4,6973	2	0,8852	5,9943
3	1,1502	10,1337	3	1,4212	8,1630	3	0,5894	7,8756
4	0,7309	9,3535	4	1,1161	9,8006	4	0,7707	7,6885
5	1,4088	10,9496	5	1,3362	5,5585	5	0,7288	6,9537
6	1,1503	9,8107	6	0,8074	8,8674	6	0,6633	7,4817
–	–	–	7	1,0341	6,3596	7	0,7543	6,4522
–	–	–	–	–	–	8	0,5271	8,4565

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Далее с помощью метода наименьших квадратов оценивается регрессия на данных следующего периода вида (2.6). Используя t-статистику, определяемую формулой (2.11), тестировались гипотезы, определяемые соотношениями (2.7)-(2.10). Результаты проведенного тестирования представлены в табл. 3.4.

Таблица 3.4.

Тестирование гипотез по методу Фама-Макбета

Период	Гипотеза	Значение коэффициента	t-статистика	Результат теста, критерий $t(36-1)_{0,05}$
2012-2014	$\gamma_{0t} = R_{ft}$	$\bar{\gamma}_0 = 17,4625$	2,4290	|2,4290|>2,0301, отвергается
	$\gamma_{1t} = R_{Mt} - R_{ft}$	$\bar{\gamma}_1 = -24,0984$	-2,4074	|-2,4074|>2,0301, отвергается
	$\gamma_{2t} = 0$	$\bar{\gamma}_2 = 12,2400$	2,5821	|2,5821|>2,0301, отвергается
	$\gamma_{3t} = 0$	$\bar{\gamma}_3 = -0,7154$	-1,7394	|-1,7394|<2,0301, не отвергается
2015-2017	$\gamma_{0t} = R_{ft}$	$\bar{\gamma}_0 = -9,2264$	-1,5577	|-1,5577|<2,0301, не отвергается
	$\gamma_{1t} = R_{Mt} - R_{ft}$	$\bar{\gamma}_1 = 19,1232$	1,4674	|1,4674|<2,0301, не отвергается
	$\gamma_{2t} = 0$	$\bar{\gamma}_2 = -7,9843$	-1,3461	|-1,3461|<2,0301, не отвергается
	$\gamma_{3t} = 0$	$\bar{\gamma}_3 = -0,0085$	-0,0769	|-0,0769|<2,0301, не отвергается
2018-2020	$\gamma_{0t} = R_{ft}$	$\bar{\gamma}_0 = -0,0152$	-0,0468	|-0,0468|<2,0301, не отвергается
	$\gamma_{1t} = R_{Mt} - R_{ft}$	$\bar{\gamma}_1 = 2,0773$	0,0577	|0,0577|<2,0301,не отвергается
	$\gamma_{2t} = 0$	$\bar{\gamma}_2 = -1,2656$	-0,0884	|-0,0884|<2,0301, не отвергается
	$\gamma_{3t} = 0$	$\bar{\gamma}_3 = 0,0212$	0,0608	|0,0608|<2,0301, не отвергается

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

При использовании 5% уровня значимости гипотеза, определяемая соотношением (2.7), о равенстве константы оцененной регрессии безрисковой доходности не отвергается для периодов 2015-2017 гг. и 2018-2020 гг., что говорит в пользу того, что условия применения классической модели CAPM отражаются на российском рынке. Для периода 2012-2014 гг. данная гипотеза отвергается, что не соответствует требованиям модели CAPM.

Гипотеза, определяемая соотношением (2.8), о равенстве коэффициента при бете ценных бумаг рыночной премии за риск не отвергается для периодов 2015-2017 гг., 2018-2020 гг., что также говорит в пользу применимости классической модели CAPM. Однако для периода 2012-2014 гг. данная гипотеза отвергается, что не соответствует условиям применения модели CAPM. Также коэффициент $\bar{\gamma}_1$ является положительным для периодов, для которых гипотеза не отвергается, что говорит о том, что в среднем премия за риск является положительной.

Гипотеза, определяемая соотношением (2.9), об отсутствии нелинейной связи между ожидаемыми доходностями ценных бумаг и рыночным риском не отвергается для периодов 2015-2017 гг., 2018-2020 гг., что, учитывая результаты для данных периодов тестирования гипотезы о равенстве коэффициента при бете рыночной премии за риск, говорит о линейной зависимости доходности акции и рыночного портфеля. Гипотеза, определяемая соотношением (2.10), о равенстве коэффициента при стандартном отклонении ошибки регрессий на предыдущем периоде также не отвергается для всех рассмотренных периодов, что говорит о том, что инвестор не вознаграждается за не систематический риск. Полученные результаты говорят о невыполнении условий классической модели CAPM для тестируемого периода 2012-2014 гг., однако для последующих периодов условия модели отражаются на рынке.

Полученные результаты не позволяют однозначно говорить об отражении условий применения классической модели CAPM на российском рынке, так как результаты тестирования гипотез для периода 2012-2014 гг. говорят об отсутствии условий использовании классической модели CAPM. Однако для периодов 2015-2017 гг. и 2018-2020 гг. результаты позволяют говорить об отражении условий применения классической модели CAPM, что позволяет сказать о том, что данная модель применима на российском рынке.

Альтернативные тесты проводились на данных с периода по 2011-2022 (по февраль) гг., а также для периодов по 2011-2015 гг. и 2016-2022 (по февраль) гг. Использовались риск-премии ценных бумаг, в качестве безрисковой доходности использовалась значения КБД сроком на 1 год. Расчеты проводились с использование модулей языка Python – numpy, pandas, statsmodels, SciPy[46], cmath[47].

Были получены оценки параметров $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_k$ методом максимального правдоподобия и методом наименьших квадратов для каждой ценной бумаги путем оценивания регрессий вида (2.74). Оценки параметров ценных бумаг методом МНК представлены в приложении 1, оценки методом максимального правдоподобия представлены в приложении 2. Для тестирования тестом Вальда по формуле (2.88) оценивалась средняя рыночная доходность и стандартное отклонение доходности рынка методом максимального правдоподобия. Ковариационна матрица $\hat{\Xi}$ оценивалась методом максимального правдоподобия. Для GMM теста Вальда по формуле (2.96) использовались оценки регрессии, полученные методом наименьших квадратов. В табл. 3.5. представлены результаты тестирования.

Таблица 3.5.

Тестирование классической модели CAPM

Период	**Количество рассматриваемых ценных бумаг**	**Тест Вальда**	**GMM тест Вальда**
2011-2015	43	1,0252 (0,5016)	42,6956 (0,4844)
2016-2022 (по февраль)	46	0,7369 (0,8223)	0,4587 (0,9999)
2011-2022 (по февраль)	35	0,6854 (0,8970)	23,0954 (0,9387)

Примечание: Для теста Вальда статистика $F(N;(T-N-1))$, для GMM теста Вальда статистика χ^2_N, в скобках указано значение *p-value*.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

---

[46] URL: https://docs.python.org/3/library/cmath.html (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Python

[47] URL: https://www.scipy.org/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт SciPy

Тест Вальда, рассчитанный по формуле (2.88), говорит об отражении условий классической модели CAPM на российском рынке для всех рассмотренных периодов. GMM тест Вальда, рассчитанный по формуле (2.96), учитывающий возможность наличия гетероскедастичности, для всех рассматриваемых периодов результат не изменился, также применение классической модели CAPM возможно.

В работе А. В. Бухвалова и В. Л. Окулова[48] использовался способ тестирования с использованием теста Вальда, где рассматривался период с апреля 1996 г. по август 1998 г., в котором гипотеза о возможности применимости классической модели CAPM отвергалась при использовании в качестве безрисковой ставки 7-ми дневной ставки MIACR. Однако при использовании в качестве безрисковой ставки доходности государственных ценных бумаг и доходности вложений в доллары США, гипотеза о возможности применения модели CAPM на российском рынке не отвергалась.

В табл. 3.6. представлены результаты тестирования отражения условий использования классической модели CAPM с учетом автокорреляции. Использовался тест GMM с условием наличия автокорреляции, подразумевающий оценку матрицы S_T по формуле (2.71) с тестовой статистикой по формуле (2.96). В данном случае отражение условий применения классической модели присутствует только для объединённого периода 2011-2022 (по февраль) гг. учитывая автокорреляцию вплоть до порядка 2.

Таблица 3.6.

Результаты тестирования классической модели CAPM, тест GMM с условием наличия автокорреляции

Период	**Порядок автокорреляции**			
	1	**2**	**3**	**4**
2011-2015	78,2661 (0,0008)	146,4403 (3,3173e-013)	246,8849 (1,9863e-030)	281,5761 (8,4181e-037)
2016-2022 (по февраль)	85,9527 (0,0003)	152,9787 (2,0596e-013)	191,4497 (1,1768e-019)	173,7181 (1,0126e-016)
2011-2022 (по февраль)	29,4446 (0,7330)	35,4983 (0,4447)	40,1712 (0,2518)	56,6460 (0,0117)

Примечание: Статистика для всех тестов χ^2_N, в скобках указано значение *p-value*.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Учитывая, в том числе тест с учетом автокорреляции, тем не менее, можно говорить об эффективности рыночного портфеля для классической модели CAPM, так как гипотеза об эффективности тестируемого рыночного индекса для объединённого периода не был отвергнута вплоть до 2 лага.

[48] Бухвалов, А.В. Окулов В.Л. Классические модели ценообразования на капитальные активы и российский финансовый рынок. Часть 1. эмпирическая проверка модели CAPM № 36(R)–2006. СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ, 2006 // URL: http://hdl.handle.net/11701/840 (Дата обращения: 01.05.2022).

Таким образом, тестирование эффективности рыночного портфеля для CAPM классическим тестом Вальда без учета возможной гетероскедастичности, и с учетом возможной гетероскедастичности и автокорреляции говорит об отражении условий применения модели CAPM на российском рынке. Учитывая результаты тестирования методом Фама-Макбета, а также альтернативные тесты: классический тест Вальда и тест Вальда на основе обобщенного метода моментов (GMM), а также тестов GMM учитывающих автокорреляцию, тестирование говорит об отражении условий применения модели CAPM на российском рынке. Однако инвестор должен быть согласен с тем, что безрисковый актив существует, и он подразумевает под ним государственные облигации РФ сроком на 1 год.

3.2. Тестирование модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке акций

В данном параграфе рассмотрены результаты тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета.

Для тестирования условий применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке методом, предложенным Дж. Кэмбэлом, А. Ло, А. Маккинлейем, был использован период с 2011 года по 2022 год по февраль. Расчеты проводились с использование модулей языка Python – numpy, pandas, statsmodels, SciPy, cmath.

Для тестирования применимости модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке, то есть проверке гипотезы, которая определяется соотношением (2.35), были использованы периоды с 2011-2015 гг., 2016-2022 (по февраль) гг., а также для периода 2011-2022 (по февраль) гг. На первом этапе оценивались методом максимального правдоподобия параметры $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_k$ для уравнений регрессии всех ценных бумаг по формуле (2.28). Результаты оценки параметров акций представлены в приложении 2. Далее рассчитывалась ковариационная матрица остатков регрессии по формуле (2.36). После оценки средней доходности рыночного индекса $\bar{R}_M$ по формуле (2.32) и вектора среднего ценных бумаг R по формуле (2.33), а также стандартного отклонения доходности рыночного индекса $\hat{\sigma}_M$ по формуле (2.40), рассчитывались параметры A, B, C по формулам (2.46)-(2.48).

В табл. 3.7. представлены результаты тестирования гипотезы, определяемой соотношением (2.35), об отражении условий применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета с использованием статистики (2.50). По результатам тестирования возможности применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке данная гипотеза не была отвергнута при рассмотрении как периода 2011-2022 (по февраль) гг., так и периодов 2011-2015 гг., 2016-2022 (по февраль) гг. Были получены оценки ожидаемой доходности портфеля с нулевым коэффициентом бета с Индексом Московской Биржи (IMOEX) для российского рынка акций, что позволяет реализовать практическое применение данной модели.

Таблица 3.7.

Результаты тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета

Период	N	Параметры уравнения (2.45)	Ставка R_z	$J(R_z)$	*p-value*
2011-2015	43	A=0,0073 B=0,1317 C=-0,2225	1,5550%	1,0061	0,5195
2016-2022(по фев.)	46	A=-0,0013 B=0,4025 C=-0,1386	0,3448%	0,7184	0,8412
2011-2022(по фев.)	35	A=0,0016 B=0,0626 C=-0,0683	1,0636%	0,6310	0,9382

Примечание: N – количество рассматриваемых ценных бумаг.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

В приложении 3 представлена структура портфелей с нулевым коэффициентом бета рассчитанных исходя из решения задачи вида (2.49).

Рассчитать ожидаемую риск-премию, например, для акций «ГМК Норильский Никель» для периода 2011-2015 гг. возможно исходя из уравнения модели (1.62), того что α_k для каждой ценной бумаги равна $(1-\beta_k)R_z$, а также значений параметров данной регрессии указанных в приложении 1 и ставке доходности портфеля с нулевым коэффициентом бета из табл. 3.7.:

$$R_z + \beta_k(R_{Mt} - R_z) = 1{,}5550 + 0{,}7959(0{,}0703 - 1{,}5550) = 0{,}3733. \quad (3.2)$$

Разница между средней доходностью ценной бумаги и ожидаемой доходностью рассчитанной по формуле (3.2) равна значениям $\alpha_k - (1-\beta_k)R_z$, гипотезы о равенстве которых нулю проверялись ранее.

Соответственно премия за риск для актива, являющаяся разницей между средней месячной доходностью и доходностью портфеля с нулевым коэффициента бета, объясняется чувствительностью к премии за риск рыночного портфеля, определяемая коэффициентом бета. Коэффициенты альфа по результатам проведенного анализа не являются статистически значимыми, поэтому не должны учитываться при расчетах.

Соответственно премия за риск для актива, являющаяся разницей между средней месячной доходностью и доходностью портфеля с нулевым коэффициентом бета, объясняется чувствительностью к премии за риск рыночного портфеля, определяемый коэффициентом бета. Коэффициенты альфа по результатам проведенного анализа не являются статистически значимыми, поэтому не должны учитываться при анализе. Среди оценённых компаний присутствуют компании с отрицательными и коэффициентами бета ниже нуля. Следует отметить, что портфель с нулевым коэффициентом бета предполагает наличие возможности коротких продаж, за которые в реальной жизни взимается дополнительная плата.

Тестирование модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке акций ранее проводилось в работе А. В. Бухвалова и В. Л. Окулова[49], рассматривался период с июля 1996 г. по июль 1998 г. Тестирование проводилось с использованием отраслевых индексов, доходности вложений в доллар и государственные казначейские облигации в качестве независимых переменных уравнений регрессии. По результатам проверки гипотеза об отражении условий применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке отвергалась.

Тестирование условий применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке методом, предложенным Дж. Кэмбэлом, А. Ло, А. Маккинлейем, говорит о том, что рыночный Индекс Московской Биржи является эффективным, для выборки акций, которые участвовали в тестировании, и условия применения модели на российском рынке отражаются. Также были получены оценки ожидаемой доходности портфеля с нулевым коэффициентом бета с Индексом Московской Биржи (IMOEX) для российского рынка акций, что позволяет реализовать практическое применение данной модели.

Альтернативные способы тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета проводились на тех же данных с периода по 2011-2022 (по февраль) гг., а также на периодах 2011-2015 гг. и 2016-2022 (по февраль) гг. В табл. 3.8. представлены результаты тестирования условий применения CAPM с нулевым коэффициентом бета.

Таблица 3.8.

Результаты тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета

Период	**Количество рассматриваемых ценных бумаг**	**Тест Вальда**	**GMM тест Вальда**
2011-2015	43	5,3824 (0,9999)	11,4951 (0,9999)
2016-2022 (по февраль)	46	16,2060 (0,9999)	40,0344 (0,5576)
2011-2022 (по февраль)	35	14,7512 (0,9983)	15,4899 (0,9973)

Примечание: Используемая статистика для всех тестов χ^2_{N-1}, в скобках указано значение *p-value*.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Рассмотрен тест Вальда, подразумевающий независимость и одинаковое распределение ошибок регрессий, по формуле (2.107), по итогам которого отражение условий для модели

[49] Бухвалов А.В., Окулов В.Л. Классические модели ценообразования на капитальные активы и российский финансовый рынок. Часть 1. эмпирическая проверка модели CAPM // СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ. 2006. № 36(R)–2006. [Электронный ресурс]. URL: http://hdl.handle.net/11701/840 (Дата обращения: 01.05.2022).

CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета присутствует для всех периодов 2011-2015 гг., 2016-2022 (по февраль) гг. и 2011-2022 (по февраль) гг. Тест на основе оценок обобщенным методом моментов, учитывающий присутствие гетероскедастичности, по формуле (2.108) говорит об эффективности рыночного индекса модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета.

Результаты теста с учетом автокорреляции, представленного в табл. 3.9., подразумевающего оценку матрицы S_T по формуле (2.71) с тестовой статистикой по формуле (2.108), говорят о неэффективности рыночного портфеля для модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета для периода 2016-2022 (по февраль) гг. Для периода 2011-2015 гг. рыночный портфель является эффективным вплоть до автокорреляции 3-го порядка. Результаты тестирования для объеденного периода 2011-2022 (по февраль) гг. говорят об эффективности индекса для модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке, так как в вплоть до 4-го лага гипотеза отвергнута не была.

Таким образом, можно говорить об отражении условий модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке, однако нахождение доходности портфеля с нулевым коэффициентом бета для дальнейшего использования модели реализовано в рамках метода предложенного Дж. Кэмбэлом, А. Ло, А. Маккинлейем.

Таблица 3.9.

Результаты тестирования модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета, тест GMM с условием наличия автокорреляции

Период	**Порядок автокорреляции**			
	1	**2**	**3**	**4**
2011-2015	18,5214 (0,9994)	46,0047 (0,3099)	49,2412 (0,2059)	88,8490 (3,3125e-005)
2016-2022 (по февраль)	94,3690 (6,7138e-006)	204,8096 (2,7515e-023)	248,1245 (4,8159e-031)	227,6511 (2,4424e-027)
2011-2022 (по февраль)	16,7551 (0,9942)	19,7758 (0,9753)	15,2733 (0,9977)	25,3185 (0,8590)

Примечание: Статистика для всех тестов χ^2_{N-1}, в скобках указано значение *p-value*.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Таким образом, была протестирована работоспособность двух моделей оценки активов капитала. Полученные результаты альтернативных тестов также позволяют говорить об отражении условий применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета, то есть выбранный рыночный портфель (Индекс Московской Биржи) является эффективным для акций, которые использовались в тестах.

3.3. Применение методов управления портфелем на российском рынке акций

В данном параграфе рассмотрены результаты использования различных способов оценки ковариационной матрицы для задач оптимизации портфеля, а также результативность применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета.

Для оценки результатов использования различных стратегий был использован способ тестирования с использованием временного сдвигающегося окна. Была взята выборка из доходностей без учета дивидендов 35 акций за период 2011-2022 (по февраль) гг., в качестве безрисковой доходности использовались значения кривой бескупонной доходности на 1 год. Источником данных является портал Yahoo! Finance и терминал Bloomberg, а также сайт Центрального Банка РФ. Использовались данные по обыкновенным и привилегированным акциям, которые состояли какое-либо время в Индексе Московской биржи (IMOEX) за рассматриваемый период при наличии данных по ним.

Расчеты проводились с использование модулей языка Python – numpy, pandas, statsmodels, ScyPy, cmath. Для решения оптимизационных задач использовался метод последовательного квадратичного программирования, реализованный в модуле ScyPy.

Ввиду высокой волатильности в некоторые месяцы использование логарифмических доходностей не является возможным, поэтому использовались относительные изменения цен к концу месяца:

$$R_{kt} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, \tag{3.3}$$

где P_t – стоимость актива или значение для индекса на последний день месяца. Предполагается, что в конце месяца портфель может полностью поменяться по ценам закрытия месяца.

При тестировании рассматриваемый период разбивался на временные окна в рамках которых оценивалась ковариационная матрица и доходности портфелей, после решения оптимизационной задачи временное окно передвигалось на один месяц и структура портфеля менялась. В рамках данного подхода предполагается, что акции бесконечно делимы, а также что возможно изменять веса в портфеле каждый месяц по ценам закрытия последнего торгового дня в месяце. Было рассмотрено временное окно равное 60 месяцам, которое является общепринятым. Рассматривались портфели с различными видами ковариационных матриц [σ]: традиционная ковариационная матрица, рассчитываемая по формуле (2.110), матрица с постоянной ковариацией, по формулам (2.114)-(2.116), а также ковариационные матрицы, объединяющие традиционную матрицу и матрицу с постоянной ковариацией, рассчитываемая по формуле (2.111). Были использована ковариационная матрица вида (2.111) соответствующая подходу Ледуа-Вольфа с параметром $\hat{\delta}^{*}$, который рассчитывался по формуле (2.146). Показатели результативности управления портфелем рассчитаны по формулам (2.147)-(2.148). Предполагается, что короткие продажи отсутствуют, были проведены оценки как без отсутствия ограничения на минимальное количество акций в портфеле, так и при наличии ограничений на максимальный вес одного актива 30% и 10%. Графики совокупной доходности портфелей с ограничениями на аллокацию приведены в приложении 4.

На рис. 3.1. представлен результат решения задачи, по поиску портфеля состоящего только из рисковых активов по минимизации волатильности с учетом существования безрискового актива, исходя из задачи определяемой соотношением (1.37) с минимальным количеством акций для отдельного месяца равным одному с различными ковариационными матрицами доходностей ценных бумаг.

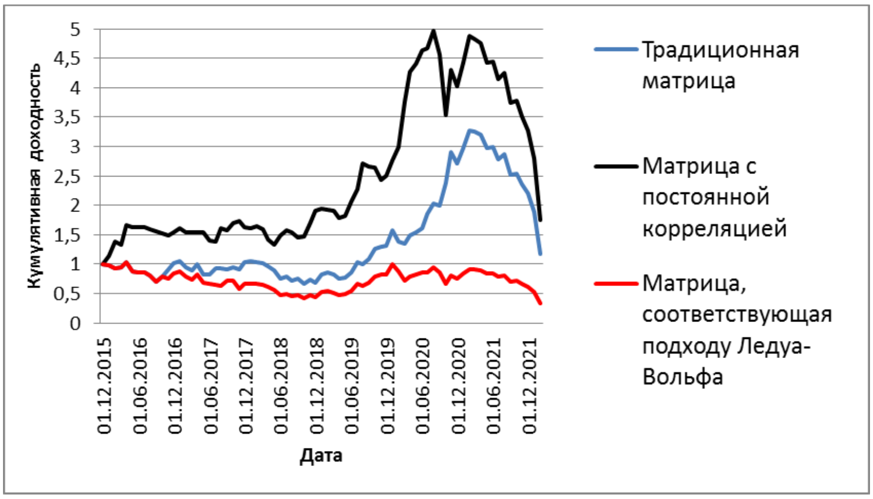

Рис. 3.1. **Кумулятивная доходность портфелей акций с минимальной волатильностью с учетом безрискового актива**

Как можно видеть в табл. 3.10. все рассмотренные стратегии являются крайне рискованными. Коэффициенты Шарпа находятся в отрицательной зоне, кроме портфелей, с матрицей с постоянной корреляцией без ограничения на минимальное количество акций. Данный факт можно трактовать как то, что дополнительно взятый риск снизил доходность портфелей.

Также можно заметить, что введение ограничений на минимальное количество акций в портфеле не привело к существенным улучшениям показателей результативности, а во многих случаях привело только к ухудшению результативности.

Альфа ни для какой из рассмотренных стратегий, не является статистически значимой, что означает, что никакая стратегия не была значительно лучше, чем инвестиция в рыночный индекс. При этом следует отметить, что доходность большинства рассмотренных стратегий положительна, однако никакая из представленных стратегий не была бы предпочтительней вложению в безрисковый актив или вложению в инструменты, строго привязанные к доходности рыночного индекса.

Таблица 3.10.

Показатели портфелей акций с минимальной волатильностью с учетом безрискового актива

Тип ковариационной матрицы	Мин. кол-во акций	Средняя доходность	Стандартное отклонение	Коэфф. Шарпа	Альфа
Традиционная	1	0,0024	0,1064	-0,1213	0,0076
С постоянной корреляцией		0,0101	0,1030	0,0535	0,0127
Подход Ледуа-Вольфа		-0,0091	0,1088	-0,5941	-0,0092
Традиционная	4	-0,0011	0,0846	-0,2714	0,0025
С постоянной корреляцией		0,0034	0,0557	-0,1646	0,0044
Подход Ледуа-Вольфа		-0,0012	0,0779	-0,2993	0,0017
Традиционная	10	0,0054	0,0642	-0,0761	0.0065
С постоянной корреляцией		0,0032	0,0449	-0,2316	0,0037
Подход Ледуа-Вольфа		0,0019	0,0754	-0,1873	0,0046

Примечание: ***,** – статистическая значимость на 1% и 5% уровне соответственно, использовалась *t*-статистика. Для стратегий с минимальным количеством акций 4 и 10, использовалось ограничение 30% и 10% на максимальный вес одного актива в портфеле соответственно для определенного месяца.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Отдельно стоит отметить, что применение классической модели CAPM для рассмотренного периода с традиционной ковариационной матрицей не позволяло получать доходность выше чем давал рыночный индекс, а также взятый риск лишь уменьшил доходность портфеля.

Таким образом, нельзя назвать ни одну из рассмотренных выше стратегий успешной, что можно связать с тем, что использование средних значений доходностей ценных бумаг по прошлым данным существенно отличаются от будущих значений доходности ценных бумаг.

На рис. 3.2. представлена результативность портфелей оптимизированных с решением задачи по минимизации дисперсии портфеля с различными ковариационными матрицами без ограничений на минимальное количество акций, исходя из задачи (1.7). Как можно заметить все стратегии дали существенно лучший результат, чем стратегии рассмотренные выше.

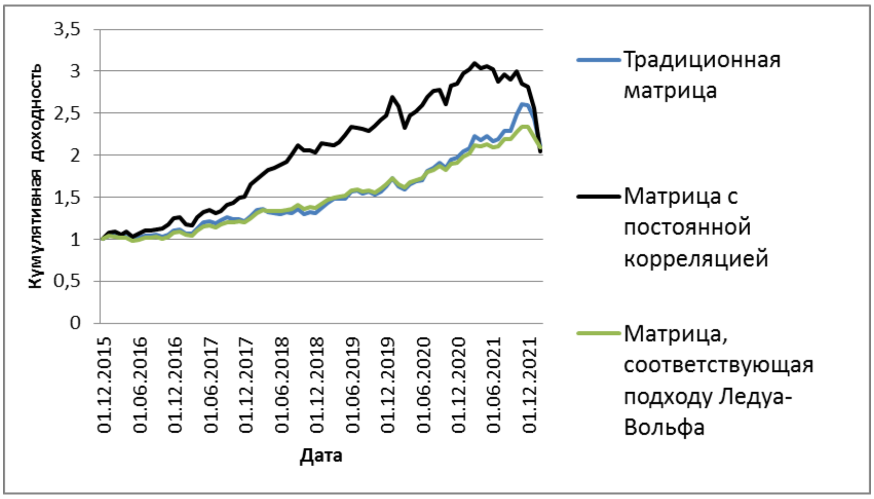

Рис. 3.2. **Кумулятивная доходность портфелей с минимальной дисперсией**

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Как можно видеть из табл. 3.11. совокупная доходность и альфа стратегий с одинаковым количеством акций различается не сильно. В условиях отсутствия ограничений на количество акций в портфеле коэффициенты Шарпа у стратегии, с ковариационной матрицей исходя их подхода Ледуа-Вольфа, то есть с оптимальным параметром $\hat{\delta}^*$ и смешанной матрицей, наибольшие. Стратегия с использованием традиционной ковариационной матрицы по выборке даёт схожую доходность, но с большей волатильностью, в результате чего коэффициенты Шарпа ниже, чем у стратегий с использованием матрицы по подходу Ледуа-Вольфа.

Как можно видеть из графика совокупной доходности долгий период времени кумулятивный доход стратегии с использованием матрицы с постоянной корреляцией был выше, однако в последние рассматриваемые месяцы кумулятивная доходность опустилась до уровня других стратегий. В результате данная стратегия является наихудшей среди стратегий с отсутствием ограничений на минимальное количество акций в портфеле.

Наличие дополнительных ограничений на количество активов в портфеле снижает результаты, а также альтернативные методы оценки ковариационной матрицы уже не дают значимого эффекта по увеличению результативности. Следует отметить, что для всех рассмотренных стратегий с решением задачи по минимизации дисперсии все значения альф статистически значимы и положительны, что говорит о том, что данные стратегии давали большую доходность, чем инвестиция в рыночный индекс.

Таким образом, для стратегий с минимизацией дисперсии портфеля без ограничений на минимальное количество активов в портфеле способ оценки смешанной матрицей с оптимальным коэффициентом $\hat{\delta}^*$ является более предпочтительным.

Таблица 3.11.

Показатели результативности портфелей с минимальной дисперсией

Тип ковариационной матрицы	Мин. кол-во акций	Средняя доходность	Стандартное отклонение.	Коэфф. Шарпа	Альфа
Традиционная	1	0,0149	0,0361	0,4074	0,0106***
С постоянной корреляцией		0,0142	0,0464	0,2882	0,0106***
Подход Ледуа-Вольфа		0,0147	0,0259	0,5585	0,0102***
Традиционная	4	0,0143	0,0360	0,3987	0,0103***
С постоянной корреляцией		0,0128	0,0459	0,2528	0,0103***
Подход Ледуа-Вольфа		0,0152	0,0367	0,4356	0,0108***
Традиционная	10	0,0112	0,0350	0,2234	0,0086***
С постоянной корреляцией		0,0145	0,0374	0,3742	0,0104***
Подход Ледуа-Вольфа		0,0110	0,0342	0,2201	0,0085***

Примечание: ***,** – статистическая значимость на 1% и 5% уровне соответственно, использовалась *t*-статистика. Для стратегий с минимальным количеством акций 4 и 10, использовалось ограничение 30% и 10% на максимальный вес одного актива в портфеле соответственно для определенного месяца.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Для проверки результативности использования модели CAPM с портфелем с нулевой бетой также использовалось оценочное окно равное 60 месяцам. Для реализации модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета необходимо найти значения ставки доходности портфеля с нулевым коэффициентом бета, которое рассчитывается по формулам (2.45)-(2.48). Решалась оптимизационная задача вида (1.37) – поиска портфеля с минимальной волатильностью с учетом безрискового актива с использованием традиционной ковариационной матрицы и доходности портфеля с нулевым коэффициентом бета вместо безрисковой ставки. Также оценивались стратегии без ограничения на вес одной ценной бумаги в портфеле, и с ограничениями 30% и 10%.

Кумулятивные графики доходностей стратегий с ограничениями на минимальное количество активов в портфеле представлены в приложении 5. Портфель с нулевым коэффициентом бета предполагает наличие бесплатных коротких продаж, которые в реальности невозможны. По данной причине для расчета показателей результативности использовалась безрисковая ставка.

На рис. 3.3. представлен совокупный доход портфеля с оптимизацией по модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета.

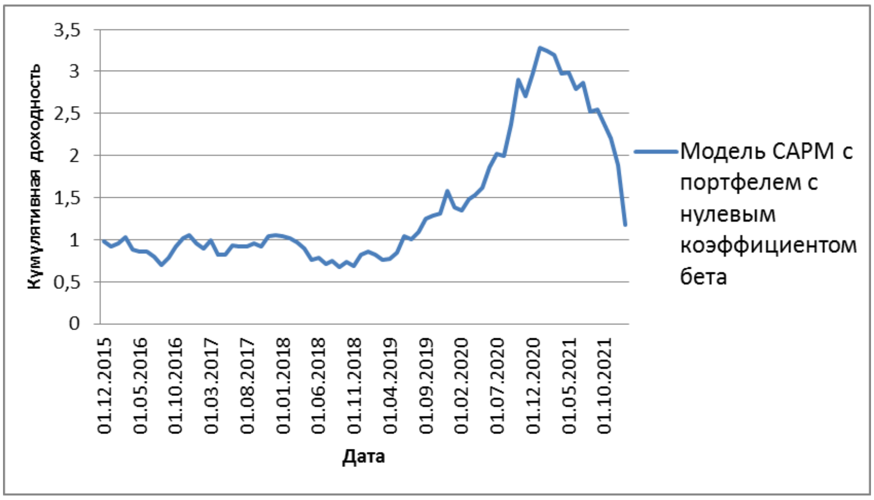

Рис. 3.3. **Кумулятивная доходность портфелей с использованием модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета**

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Как можно видеть в табл. 3.12. результаты схожи с результатами использования модели традиционной модели CAPM, представленной в табл. 3.10., с использование традиционной матрицы.

Таблица 3.12.

Показатели результативности портфелей с использованием модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета

Мин. кол-во акций	Средняя доходность	Стандартное отклонение	Коэфф. Шарпа	Альфа
1	0,0024	0,1064	-0,1213	0,0076
4	-0,0011	0,0846	-0,2785	0,0025
10	0,0054	0,0642	-0,0761	0,0065

Примечание: ***,** – статистическая значимость на 1% и 5% уровне соответственно, использовалась *t*-статистика.

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Таким образом, было обнаружено, что результаты применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета приводят практически к тем же результатам, что и применение классической модели CAPM.

Выводы

Было протестировано отражение условий применения классической модели CAPM, модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета различными методами, было выяснено, что условия применения данных моделей на российском рынке отражаются.

Для рассмотренного периода 2016-2022 (по февраль) гг. для стратегий с решением оптимизационной задачи по минимизации волатильности с учетом существования безрискового актива нельзя назвать ни одну из рассмотренных стратегий успешной. Однако ковариационная матрица доходностей с использованием одного коэффициента корреляции, среднего коэффициента по всей рассматриваемой выборке, без ограничения на минимальное количество акций в портфеле, дает лучшие результаты, чем при использовании иных способов оценки. Для стратегий с решением задачи минимизации дисперсии портфеля способ оценки ковариационной матрицы, исходя из подхода Ледуа-Вольфа, показывает лучшие результаты показателей управления портфелям.

Наличие дополнительных ограничений на минимальное количество ценных бумаг в портфеле снижает результативность показателей качества управления портфелем, а также снижает различия, между результатами исходя из различных способов оценки ковариационной матрицы

Для рассмотренного периода 2016-2022 (по февраль) гг. применение классической модели CAPM не позволяло получать доходность выше рынка, а также взятый риск давал меньшую доходность, чем инвестиции в безрисковый актив. Также на данном периоде результаты применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке акций приводят к схожим результатам, что и применение классической модели CAPM.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования получены следующие результаты и сделаны выводы:

В результате тестирования условий классической модели CAPM методом Фама-Макбета для периода 2012-2014 гг., при использовании периода 2009-2011 гг. для оценивания коэффициентов бета и формирования портфелей, гипотеза о том, что доходность активов на российском рынке зависит от безрисковой ставки, была отвергнута. Также для данного периода была отвергнута гипотеза о наличии линейной связи между доходностью рыночного индекса и доходности акций, что говорит об отсутствии зависимостей, предполагаемых классической моделью CAPM. Гипотеза о равенстве нулю коэффициента при квадрате беты портфеля ценной бумаги отвергается, что говорит о присутствии нелинейной зависимости доходности акции и рыночного портфеля, что не соответствует классической модели CAPM

Для периодов 2015-2017 гг. и 2018-2020 гг., при использовании периода оценивания коэффициентов бета и формирования портфеля 2012-2014 гг. и 2015-2017 гг. гипотеза о равенстве константы оцененной регрессии безрисковой доходности не отвергается. Для данных периодов гипотеза, о равенстве коэффициента при бете ценных бумаг рыночной премии за риск не отвергается, также данный коэффициент является положительным, что говорит о том, что в среднем премия за риск является положительной. Также гипотеза об отсутствии нелинейной связи между ожидаемыми доходностями ценных бумаг и рыночным риском не отвергается, что позволяет говорить о линейной зависимости доходности акции и рыночного портфеля. Гипотеза о равенстве коэффициента при стандартном отклонении ошибки регрессий для всех тестируемых периодов 2012-2014 гг., 2015-2017 гг. и 2018-2020 гг. не отвергается, то есть вознаграждение за не систематический риск для инвестора на российском рынке отсутствует. Таким образом, для периодов 2015-2017 гг. и 2018-2020 гг. все тестируемые гипотезы не отвергаются, можно сказать, что теоретические условия применения модели CAPM выполняются на российском рынке

Тестирование классической модели CAPM с использованием классического теста Вальда, который подразумевает независимость и одинаковое распределение ошибок регрессий, а также их гомоскедастичность, говорит об отражении условий классической CAPM для всех тестируемых периодов: 2011-2015 гг., 2016-2022 (по февраль) гг. и 2011-2022 (по февраль). Гипотеза об эффективности рыночного индекса для модели CAPM на российском рынке с использованием теста Вальда на основе обобщенного метода моментов с учетом возможной гетероскедастичности подтверждает его эффективность для всех рассмотренных периодов

В случае использования теста на основе оценок обобщённого метода моментов с учетом наличия автокорреляции рыночный портфель является эффективным для классической модели CAPM только для объединённого периода 2011-2022 (по февраль) гг. учитывая автокорреляцию вплоть до порядка 3, для остальных периодов тесты показывают отсутствие условий данной модели. Результаты тестирования методом Фама-Макбета и альтернативными методами позволяют говорить об отражении условий применения классической модели CAPM на российском рынке

Тест на отражение условий применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета методом, предложенный Кэмпбелом, Ло, Маккинлеем, не отверг гипотезу о присутствии теоритических условий применения моделей для всех рассмотренных периодов: 2011-2015 гг., 2016-2022 (по февраль) гг. и 2011-2022 (по февраль) гг. Тестирование с использованием классического теста Вальда говорит об отражении условий CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета для всех тестируемых периодов: 2011-2015 гг., 2016-2022 (по февраль) гг. и 2011-2022 (по февраль). Гипотеза об эффективности рыночного индекса для модели CAPM на российском рынке с учетом возможной гетероскедастичности данных также не отвергает такую возможность для всех рассмотренных периодов. В случае использования теста на основе оценок обобщённого метода моментов с учетом наличия автокорреляции рыночный портфель является эффективным для классической модели CAPM для периода 2011-2015 гг., учитывая автокорреляцию вплоть до порядка 3, а также для объединённого периода 2011-2022 (по февраль) гг., учитывая автокорреляцию вплоть до порядка 4. Для периода 2016-2022 (по февраль) гг. тесты показывают отсутствие условий применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета. Проведенные тесты позволяют сказать, что использование модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета, где доходность портфеля с нулевым коэффициентом бета используется вместо безрисковой ставки, также возможно на российском рынке

По результатам формирования портфелей с ежемесячным изменением структуры весов в портфеле для периода 2016-2022 (по февраль) гг., с использованием данных периода 2011-2022 (по февраль) гг., для стратегий с решением задачи минимизации дисперсии портфеля способ оценки ковариационной матрицы, исходя из подхода Ледуа-Вольфа, показывает лучшие результаты показателей управления портфелям, чем оценка с применением традиционной ковариационной матрицы. Для стратегий с решением оптимизационной задачи по минимизации волатильности с учетом существования безрискового актива ни одна из рассмотренных стратегий не показала результативности, позволяющей говорить о превосходстве над вложением в рыночный актив или безрисковый актив. Наличие дополнительных ограничений на максимальный вес одного актива для определённого месяца в портфеле снижает результативность показателей качества управления портфелем, а также снижает различия, между результатами исходя из различных способов оценки ковариационной матрицы

Для рассмотренного периода 2016-2022 (по февраль) гг. применение классической модели CAPM не являлось целесообразным: получить на длительном промежутке доходность выше рыночного индекса не удалось, а также взятый риск привел к меньшей доходности портфеля, чем инвестиции в безрисковый актив. На данном периоде результаты применения модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета на российском рынке акций приводят к схожим результатам, что и применение классической модели CAPM.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Книги

1 Воронцовский А.В. Современные теории рынка капитала: Учебник / А.В. Воронцовский; СПбГУ, экон. факультет. – Москва: Экономика, 2010. – 719 с.

2 Шарп У. Инвестиции [Текст]: / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. - пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 1028 с.

3 Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. The Econometrics of Financial Markets. / J.Y. Campbell. – Princeton University Press, 1997. – 610 p. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/j.ctt7skm5 (Дата обращения: 01.05.2022).

4 Elton E.J., Gruber M.J., Brown S.J., Goetzmann W.N. Modern portfolio theory and investment analysis, 9 edition / Elton E.J. – New York, Chichester: Wiley, 2014.

5 Gourieroux C., Monfort A. Statistics and Econometric Models / C. Gourieroux. – Cambridge University Press, 1995. – 504 p. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511751967 (Дата обращения: 01.05.2022).

6 Huang C., Litzenberger R.H. Foundations for financial economics / C. Huang. - Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1993. – 365 p.

7 Kruschwitz L.; Husmann. S. Finanzierung und Investition. v. 7th. München: De Gruyter Oldenbourg, 2012. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1524/9783486716078 (Дата обращения: 01.05.2022).

8 Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. / H.M. Markowitz. – New York: John Willey & Sons Inc, 1959. – 344 p. [Электронный ресурс]. URL: https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h (Дата обращения: 01.05.2022).

Статьи в журналах

9 Бухвалов А.В., Окулов В.Л. Классические модели ценообразования на капитальные активы и российский финансовый рынок. Часть 1. эмпирическая проверка модели CAPM // СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ. 2006. № 36(R)–2006. [Электронный ресурс]. URL: http://hdl.handle.net/11701/840 (Дата обращения: 01.05.2022).

10 Бухвалов А.В., Окулов В.Л. Классические модели ценообразования на капитальные активы и российский финансовый рынок. Часть 2: эмпирическая проверка модели CAPM // СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ. 2006. № 36 (R)– 2006. [Электронный ресурс]. URL: http://hdl.handle.net/11701/823 (Дата обращения: 01.05.2022).

11 Black F. Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing // The Journal of Business. 1972. Vol. 45. No. 3. P. 444–455. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/2351499 (Дата обращения: 01.05.2022).

12 Buiter W.H. James Tobin: an appreciation of his contribution to economics // The Economic Journal. 2003. Vol. 113. No. 491. P. F585-F631. [Электронный ресурс]. URL: http://eprints.lse.ac.uk/847/ (Дата обращения: 01.05.2022).

13 Chou P.-H. ALTERNATIVE TESTS OF THE ZERO-BETA CAPM // Journal of Financial Research. 2000. Vol. 23. No. 4. P. 469–493. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.2000.tb00756.x (Дата обращения: 01.05.2022).

14 Elton E.J., Gruber M.J. Estimating the Dependence Structure of Share Prices--Implications for Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1973. Vol. 28. No. 5. P. 1203-1232. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2978758 (Дата обращения: 01.05.2022).

15 Fama E.F., MacBeth. J.D. Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. No. 3. P. 607–636. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/1831028 (Дата обращения: 01.05.2022).

16 Frost P.A., Savarino J.E. An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection // The Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1986. Vol. 21. No. 3. P. 293-305. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2331043 (Дата обращения: 01.05.2022).

17 Gibbons M.R. Multivariate tests of financial models: A new approach // Journal of Financial Economics. 1982. Vol. 10. No. 1. P. 3–27. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90028-9 (Дата обращения: 01.05.2022).
18 Gibbons M.R., Ross S.A., Shanken J.A Test of the Efficiency of a Given Portfolio // Econometrica. 1989. Vol. 57. No. 5. P. 1121-1152. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/1913625 (Дата обращения: 01.05.2022).
19 Hansen L.P. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators // Econometrica. 1982. Vol. 50. No. 4. P. 1029-1054. [Электронный ресурс]. https://doi.org/10.2307/1912775 (Дата обращения: 01.05.2022).
20 Hogan W.W., Warren J.M. Computation of the Efficient Boundary in the E-S Portfolio Selection Model // The Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1972. Vol. 7. No. 4. P. 1881-1896. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2329623 (Дата обращения: 01.05.2022).
21 Hogan W.W., Warren J.M. Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Model Based on Semivariance // The Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1974. Vol. 9. No. 1. P. 1-11. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2329964 (Дата обращения: 01.05.2022).
22 Jensen M.C., Black F., Scholes M.S. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. Michael C. Jensen, STUDIES IN THE THEORY OF CAPITAL MARKETS, Praeger Publishers Inc., 1972. [Электронный ресурс]. URL: https://ssrn.com/abstract=908569 (Дата обращения: 01.05.2022).
23 Kandel S. The likelihood ratio test statistic of mean-variance efficiency without a riskless asset // Journal of Financial Economics. 1984. Vol. 13. No 4. P. 575–592. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(84)90017-5 (Дата обращения: 01.05.2022).
24 Lintner J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // The Review of Economics and Statistics. 1965. Vol. 47. No. 1. P. 13–37. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/1924119 (Дата обращения: 01.05.2022).
25 Ledoit O., Wolf M. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices // Journal of Multivariate Analysis. 2004. Vol. 88. No. 2. P. 365–411. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4 (Дата обращения: 01.05.2022).
26 Ledoit O., Wolf M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection // Journal of Empirical Finance. 2003. Vol. 10. No. 5. P. 603–621. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/S0927-5398(03)00007-0 (Дата обращения: 01.05.2022).
27 Ledoit O., Wolf M. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix // The Journal of Portfolio Management. 2004. Vol. 30. No. 4. P. 110–119. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.3905/jpm.2004.110 (Дата обращения: 01.05.2022).
28 MacKinlay A.C. Multifactor models do not explain deviations from the CAPM // Journal of Financial Economics. 1995. Vol. 38. No. 1. P. 3–28. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(94)00808-E (Дата обращения: 01.05.2022).
29 Mackinlay A.C., Richardson M.P. Using Generalized Method of Moments to Test Mean-Variance Efficiency // The Journal of Finance. 1991. Vol. 46. No. 2. pp. 511–527. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb02672.x (Дата обращения: 01.05.2022).
30 Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7. No. 1. P. 77–91. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2975974 (Дата обращения: 01.05.2022).
31 Markowitz H. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. // 1956. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1002/nav.3800030110 (Дата обращения: 01.05.2022).
32 Mossin J. Equilibrium in a Capital Asset Market // Econometrica. 1996. Vol. 34. No. 4. P. 768–783. [Электронный ресурс]. URL: www.jstor.org/stable/1910098 (Дата обращения: 01.05.2022).

33 Nawrocki D.N. A Brief History of Downside Risk Measures // The Journal of Investing. 1999. Vol. 8. No. 3. P. 9–25. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.3905/joi.1999.319365 (Дата обращения: 01.05.2022).
34 Newey W.K., West K.D. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix // Econometrica. 1987. Vol. 55. No. 3. P. 703-708. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/1913610 (Дата обращения: 01.05.2022).
35 Ray S., Ravikumar B., Savin N.E. Robust Wald Tests in SUR Systems with Adding Up Restrictions: An Algebraic Approach to Proofs of Invariance // Econometrics. 1998.
36 Ray S., Ravikumar B., Savin N.E. Robust Wald Tests in SUR Systems with Adding Up Restrictions // Econometrica. 2000. Vol. 68. No. 3. P. 715-719. [Электронный ресурс]. URL: https://www.jstor.org/stable/2999606 (Дата обращения: 01.05.2022).
37 Ray S., Savin N.E. The Performance of Heteroskedasticity and Autocorrelation Robust Tests: A Monte Carlo Study with an Application to the Three-Factor Fama: French Asset-Pricing Model // Journal of Applied Econometrics. 2008. Vol. 23. No. 1. P. 91-109. [Электронный ресурс]. URL: https://www.jstor.org/stable/25146590 (Дата обращения: 01.05.2022).
38 Roll R. A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 4. No. 2. P. 129-176. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90009-5 (Дата обращения: 01.05.2022).
39 Roy A.D. Safety First and the Holding of Assets // Econometrica. 1952. Vol. 20. No 3. P. 431-449. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/1907413 (Дата обращения: 01.05.2022).
40 Schäfer J., Strimmer K. A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics // Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology. 2005. Vol. 4. No. 1. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2202/1544-6115.1175 (Дата обращения: 01.05.2022).
41 Shanken J. Multivariate tests of the zero-beta CAPM // Journal of Financial Economics. 1985. Vol. 14. No. 3. P. 327–348. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/0304-405X(85)90002-9 (Дата обращения: 01.05.2022).
42 Shanken J. On the estimation of beta-pricing models. // The Review of Financial Studies. 1992. Vol. 5. No. 1. P. 1-33 [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1093/rfs/5.1.1 (Дата обращения: 01.05.2022).
43 Shanken J. Testing Portfolio Efficiency When the Zero–Beta Rate Is Unknown // Journal of Finance. 1986. Vol. 41. No. 1. P. 269–276. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2328359 (Дата обращения: 01.05.2022).
44 Shanken J., Zhou G. Estimating and testing beta pricing models: Alternative methods and their performance in simulations // Journal of Financial Economics. 2007. Vol. 84. No. 1. P. 40–86. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2006.02.003 (Дата обращения: 01.05.2022).
45 Sharpe W.F. A Simplified Model for Portfolio Analysis // Management Science. 1963. Vol. 9. No. 2. P. 277–293. [Электронный ресурс]. URL: https://www.jstor.org/stable/2627407 (Дата обращения: 01.05.2022).
46 Sharpe W.F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // The Journal of Finance. 1964. Vol. 19. No. 3. P. 425–442. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2977928 (Дата обращения: 01.05.2022).
47 Sharpe W. F. Mutual Fund Performance // The Journal of Business. Vol. 39. No. 1. P. 119–138. [Электронный ресурс]. URL: http://www.jstor.org/stable/2351741 (Дата обращения: 01.05.2022).
48 Tobin J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk // The Review of Economic Studies. 1958. Vol. 25. No. 2. P. 65–86. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.2307/2296205 (Дата обращения: 01.05.2022).

49 French C.W. Jack Treynor's «Toward a Theory of Market Value of Risky Assets» // SSRN Electronic Journal. 2002. [Электронный ресурс]. URL: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.628187 (Дата обращения: 01.05.2022).

50 Velu R., Zhou G. Testing multi-beta asset pricing models // Journal of Empirical Finance. 1999. Vol. 6. No. 3. P. 219-241. [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.1016/S0927-5398(99)00002-X (Дата обращения: 01.05.2022).

51 Zhou G. Analytical GMM Tests: Asset Pricing with Time-Varying Risk Premiums // Review of Financial Studies. 1994. Vol. 7. No. 4. P. 687-709. [Электронный ресурс]. URL: https://ssrn.com/abstract=5396 (Дата обращения: 01.05.2022).

Интернет-ресурсы и электронные базы данных

52 Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ

53 URL: https://www.cbr.ru/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Банка России

54 URL: https://docs.python.org/3/library/cmath.html (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Python

55 URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

56 URL: http://gretl.sourceforge.net/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт gretl

57 URL: https://www.moex.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Московской Биржи

58 URL: https://numpy.org/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт NumPy

59 URL: https://pandas.pydata.org/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт pandas

60 URL: https://www.scipy.org/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт SciPy

61 URL: https://www.statsmodels.org/stable/index.html (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт statsmodels

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 1.

Оценки параметров классической модели CAPM за период 2009-2011 гг. для ценных бумаг российского фондового рынка и результаты разделения ценных бумаг на портфели по методу Фама-Макбета за период 2012-2014 гг.

Эмитент и тип ценной бумаги	Тиккер	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	$s_k(\hat{\varepsilon}_k)$	Портф.	$\hat{\beta}_p$	$\bar{s}_p(\hat{\varepsilon}_p)$
Аэрофлот, ао	AFLT	0,0057	0,7500	11,1857	1	1,0746	9,8732
Северсталь, ао	CHMF	1,3790	1,1994	11,0081			
ФСК ЕЭС, ао	FEES	-0,8169	1,3847	14,6845			
Газпром, ао	GAZP	-0,7890	0,9281	3,9718			
ГМК Норильский никель, ао	GMKN	0,0366	1,1111	8,5156			
РусГидро, ао	HYDR	-0,8990	1,0082	7,3307	2	1,3216	9,0926
НК ЛУКОЙЛ, ао	LKOH	-0,0165	0,7154	5,1552			
Группа ЛСР, ао	LSRG	-0,7526	1,8965	12,8348			
ММК, ао	MAGN	-1,2399	1,4938	9,5676			
Мосэнерго, ао	MSNG	-1,7433	1,4941	10,5749			
НЛМК, ао	NLMK	-0,6898	1,2046	9,0143	3	1,1502	10,1337
Полюс, ао	PLZL	0,1583	0,2949	12,3304			
Распадская, ао	RASP	0,0027	1,4971	11,8767			
НК Роснефть, ао	ROSN	-0,5179	1,0246	5,2039			
Российские сети, ао	RSTI	-1,1687	1,7300	12,2433			
Ростелеком, ао	RTKM	-2,2027	0,3247	12,7930	4	0,7309	9,3535
Ростелеком, ап	RTKMP	2,5187	1,1976	12,5697			
Газпром нефть	SIBN	0,4908	0,8458	7,2386			
Сургутнефтегаз, ао	SNGS	-0,4052	0,7219	6,9678			
Сургутнефтегаз, ап	SNGSP	1,4561	0,5646	7,1985			
Транснефть, ап	TRNFP	2,2518	1,4281	9,6752	5	1,4088	10,9496
Банк ВТБ, ао	VTBR	-1,6073	1,4206	9,9805			
Юнипро, ао	UPRO	1,4277	1,4845	10,5676			
Уралкалий, ао	URKA	1,4116	1,1920	11,4545			
Сбербанк России, ап	SBERP	1,7686	1,5189	13,0702			
Фармстандарт	PHST	1,0465	0,9006	10,3169	6	1,1503	9,8107
Татнефть им. В.Д. Шашина, ап	TATNP	0,3402	1,0829	6,7659			
Татнефть им. В.Д. Шашина, ао	TATN	2,1320	0,9137	9,4391			
Интер РАО ЕЭС, ао	IRAO	2,2062	1,1154	13,4496			
Сбербанк России, ао	SBER	-0,4783	1,7388	9,0820			

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Таблица 2.

Оценки параметров классической модели CAPM за период 2012-2014 гг. для ценных бумаг российского фондового рынка и результаты разделения ценных бумаг на портфели по методу Фама-Макбета за период 2015-2017 гг.

Эмитент и тип ценной бумаги	Тиккер	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	$s_k(\hat{\varepsilon}_k)$	Портф.	$\hat{\beta}_p$	$\bar{s}_p(\hat{\varepsilon}_p)$
АФК Система, ао	AFKS	-1,9885	0,9625	19,2446	1	1,1002	11,5241
Аэрофлот, ао	AFLT	-1,2742	1,0831	9,5822			
Акрон, ао	AKRN	0,8647	0,6032	8,9969			
Северсталь, ао	CHMF	0,8768	0,8853	9,4217			
ФСК ЕЭС, ао	FEES	-5,0890	1,9668	10,3750			
Газпром, ао	GAZP	-0,7674	1,0885	4,1372	2	0,7883	4,6973
Группа Черкизово, ао	GCHE	0,5259	0,1905	4,4747			
ГМК Норильский никель, ао	GMKN	1,3771	0,8023	5,6890			
РусГидро, ао	HYDR	-1,6281	1,3226	6,7111			
НК ЛУКОЙЛ, ао	LKOH	0,7438	0,5374	2,4744			
Группа ЛСР, ао	LSRG	0,0755	1,4664	8,5690	3	1,4212	8,1630
ММК, ао	MAGN	-0,3826	1,5325	7,9733			
Магнит, ао	MGNT	3,5139	1,3242	6,2176			
М.видео, ао	MVID	-1,0833	1,8775	10,3482			
НЛМК, ао	NLMK	0,1710	0,9052	7,7069			
ПИК-специализированный застройщик, ао	PIKK	2,4724	0,2903	11,6860	4	1,1161	9,8006
Полюс, ао	PLZL	-0,0243	0,6133	12,9993			
НК Роснефть, ао	ROSN	-0,2536	0,7491	5,3017			
Российские сети, ао	RSTI	-4,7538	2,5757	11,2388			
Ростелеком, ао	RTKM	-1,5236	1,3521	7,7770			
Ростелеком, ап	RTKMP	-1,3661	1,1579	7,5856	5	1,3362	5,5585
Сбербанк России, ао	SBER	-1,0064	1,5004	4,7246			
Сбербанк России, ап	SBERP	-1,2365	1,4737	6,3863			
Сургутнефтегаз, ао	SNGS	-0,2252	1,2473	4,0043			
Сургутнефтегаз, ап	SNGSP	1,6183	1,3016	5,0916			
Трубная Металлургическая Компания, ао	TRMK	-2,0495	1,3576	11,5751	6	0,8074	8,8674
Транснефть, ап	TRNFP	2,5697	0,7781	7,4016			
Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ао	VSMO	1,2551	0,2684	9,6683			
Банк ВТБ, ао	VTBR	0,4186	0,6138	9,8213			
Юнипро, ао	UPRO	0,1939	1,0190	5,8707			
Татнефть имени В.Д. Шашина, ао	TATN	1,0093	0,8569	4,8914	7	1,0341	6,3596
Татнефть имени В.Д. Шашина, ап	TATNP	1,1758	0,8069	3,7744			
Интер РАО ЕЭС, ао	IRAO	-4,3880	1,2412	10,1558			
Мобильные ТелеСистемы, ао	MTSS	-0,2151	1,1136	7,1596			
НОВАТЭК, ао	NVTK	0,2857	1,1520	5,8168			

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Таблица 3.

Оценки параметров классической модели CAPM за период 2015-2017 гг. для ценных бумаг российского фондового рынка и результаты разделения ценных бумаг на портфели по методу Фама-Макбета по методу Фама-Макбета за период 2018-2020 гг.

Эмитент и тип ценной бумаги	Тиккер	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	$s_k(\hat{\varepsilon}_k)$	Портф.	$\hat{\beta}_p$	$\bar{s}_p(\hat{\varepsilon}_p)$
АФК Система, ао	AFKS	-1,3918	1,3571	11,8618	1	1,0963	9,3971
Аэрофлот, ао	AFLT	3,0460	0,8753	10,3275			
Акрон, ао	AKRN	1,0074	0,9778	6,7367			
Северсталь, ао	CHMF	0,4480	0,9905	7,1479			
ФСК ЕЭС, ао	FEES	2,0490	1,2809	10,9117			
Газпром, ао	GAZP	-1,3237	1,1587	3,9011	2	0,8852	5,9943
Группа Черкизово, ао	GCHE	1,3093	-0,0098	7,5501			
ГМК Норильский никель, ао	GMKN	-0,7188	1,3418	6,3624			
РусГидро, ао	HYDR	-0,0226	0,7401	8,3275			
НК ЛУКОЙЛ, ао	LKOH	-0,2459	1,1953	3,8305			
Группа ЛСР, ао	LSRG	1,5046	0,1180	7,6350	3	0,5894	7,8756
ММК, ао	MAGN	2,6343	0,9805	8,8789			
Магнит, ао	MGNT	-1,7295	0,4948	8,0822			
М.видео, ао	MVID	2,7933	0,5024	5,7781			
НЛМК, ао	NLMK	1,2199	0,8513	9,0036			
ПИК-специализированный застройщик, ао	PIKK	1,2736	0,2357	5,5982	4	0,7707	7,6885
Полюс, ао	PLZL	3,6153	0,5844	10,6883			
НК Роснефть, ао	ROSN	-0,2284	1,1640	5,2606			
Российские сети, ао	RSTI	0,1693	1,5069	11,5997			
Ростелеком, ао	RTKM	-1,2730	0,3626	5,2957			
Ростелеком, ап	RTKMP	-0,3306	0,2392	5,1185	5	0,7288	6,9537
Сбербанк России, ао	SBER	3,6065	0,4147	7,6434			
Сбербанк России, ап	SBERP	3,1610	1,1494	5,8519			
Сургутнефтегаз, ао	SNGS	-0,7276	1,0481	7,6320			
Сургутнефтегаз, ап	SNGSP	-1,0384	0,7926	8,5226			
Трубная Металлургическая Компания, ао	TRMK	1,0036	0,9359	8,8088	6	0,6633	7,4817
Транснефть, ап	TRNFP	-0,1936	1,0322	8,1935			
Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ао	VSMO	1,1411	0,7177	6,7762			
Банк ВТБ, ао	VTBR	-1,2106	0,2135	6,9944			
Юнипро, ао	UPRO	-0,1905	0,4175	6,6356			
Татнефть имени В.Д. Шашина, ао	TATN	0,8329	1,0717	5,6734	7	0,7543	6,4522
Татнефть имени В.Д. Шашина, ап	TATNP	2,1361	0,5650	7,3525			
Интер РАО ЕЭС, ао	IRAO	4,1117	0,2018	9,0194			
Мобильные ТелеСистемы, ао	MTSS	-0,0251	1,2102	4,7574			
НОВАТЭК, ао	NVTK	0,4057	0,7229	5,4585			
АЛРОСА, ао	ALRS	-0,0485	0,6756	8,3497	8	0,5271	8,4565
Распадская, ао	MOEX	1,3710	0,4357	8,1487			
ФосАгро, ао	PHOR	-0,0372	0,9335	7,4716			
Полиметалл Интернэшнл плс, акции ин. эмм.	POLY	0,2589	0,3188	9,9546			
Яндекс Н.В. (PLC Yandex N.V.), ао	YNDX	1,7461	0,2720	8,3577			

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица 1.

Параметры оценок модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета для акций российского фондового рынка, для периода 2011-2015 гг. методом наибольшего правдоподобия

Эмитент и тип ценной бумаги	Тиккер	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	$\bar{R}_k$
Индекс МосБиржи	IMOEX	0	1	0,0703
Акрон, ао	AKRN	1,9492	0,9306	2,0146
АФК Система, ао	AFKS	-0,8073	1,1988	-0,7230
Аэрофлот, ао	AFLT	-0,6800	1,0618	-0,6053
Банк ВТБ, ао	VTBR	-0,3778	0,5752	-0,3373
Газпром нефть, ао	SIBN	0,2321	0,8021	0,2885
Газпром, ао	GAZP	-0,6593	1,0623	-0,5846
ГМК Норильский никель, ао	GMKN	0,3508	0,7959	0,4067
Группа ЛСР, ао	LSRG	-0,8057	1,3612	-0,7100
Группа Черкизово, ао	GCHE	0,2654	0,3344	0,2889
ДИКСИ Групп, ао	DIXY	-0,5209	1,0597	-0,4464
Интер РАО, ао	IRAO	-2,5027	0,8612	-2,4421
Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ао	VSMO	2,0818	0,3629	2,1073
М.видео, ао	MVID	0,4435	1,3462	-0,0194
Магнит, ао	MGNT	1,6334	1,0926	1,7102
Мечел, ао	MTLR	-4,5773	2,4703	-4,4035
ММК, ао	MAGN	-1,0599	1,6536	-0,9435
Мосэнерго, ао	MSNG	-2,3338	0,9230	-2,2689
МТС, ао	MTSS	-0,4403	1,2104	-0,3552
Нижнекамскнефтехим, ао	NKNC	1,0332	0,8823	1,0954
НК ЛУКОЙЛ, ао	LKOH	0,4578	0,7948	0,5137
НК Роснефть, ао	ROSN	0,1497	0,9165	0,2141
НЛМК, ао	NLMK	-1,4844	1,1693	-1,4021
НОВАТЭК, ао	NVTK	0,8767	0,9324	0,9423
Полюс, ао	PLZL	0,6672	0,4525	0,6991
ПИК-специализированный застройщик, ао	PIKK	0,9701	0,2942	0,9907
Распадская, ао	RASP	-3,3342	1,7380	-3,2119
Россети, ао	RSTI	-4,2486	2,0663	-4,1032
Ростелеком, ао	RTKM	-0,9671	0,9829	-0,8980
Ростелеком, ап	RTKMP	-0,2542	0,9053	-0,1906
РусГидро, ао	HYDR	-1,5271	1,0220	-1,4552
Сбербанк, ао	SBER	-0,0314	1,1035	0,0463
Сбербанк, ап	SBERP	-0,0738	1,5017	0,0317
Северсталь, ао	CHMF	0,2026	1,1657	0,2846
Сургутнефтегаз, ао	SNGS	0,0062	1,1016	0,0837
Сургутнефтегаз, ап	SNGSP	1,6346	0,9999	1,7049
Татнефть им. В.Д. Шашина, ао	TATN	1,2167	1,0718	1,2921
Татнефть им. В.Д. Шашина, ап	TATNP	1,3483	0,9523	1,4153
ТМК, ао	TRMK	-1,7290	1,5657	-1,6189
Транснефть, ап	TRNFP	2,6691	0,9066	2,7328
Уралкалий, ао	URKA	-0,4073	0,7158	-0,3569
Фармстандарт, ао	PHST	-1,7554	0,4899	-1,7210
ФСК ЕЭС, ао	FEES	-3,1841	1,8066	-3,0570
Юнипро, ао	UPRO	0,0586	0,9630	0,1263
Статистические результаты	$R_z = 1{,}5550\%, J(R_z) = 1{,}0061, F(43, 16)_{0.05} = 2{,}3304$			

Примечание: $\bar{R}_k$ – средняя доходность месячная k-ой ценной бумаги, %, оценивалась исходя из формулы (2.33).

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Таблица 2.

Параметры оценок модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета для акций российского фондового рынка, для периода 2016-2022 (по февраль) гг. методом наибольшего правдоподобия

Эмитент и тип ценной бумаги	Тиккер	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	$\bar{R}_k$
Индекс МосБиржи	IMOEX	0	1	0,4572
Акрон, ао	AKRN	1,8829	-0,2316	1,7770
АЛРОСА, ао	ALRS	0,1859	0,7999	0,5515
АНК Башнефть, ао	BANE	-1,4521	0,8228	-1,0759
АНК Башнефть, ап	BANEP	-2,4376	1,2681	-1,8578
АФК Система, ао	AFKS	-1,0533	1,2727	-0,4714
Аэрофлот, ао	AFLT	-1,1246	1,2136	-0,5698
Банк ВТБ, ао	VTBR	-2,6063	1,5739	-1,8867
БАНК САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, ао	BSPB	-0,4016	1,0939	0,0986
Газпром, ао	GAZP	0,2537	1,0972	0,7553
ГМК Норильский никель, ао	GMKN	0,8172	0,4369	1,0169
Группа ЛСР, ао	LSRG	-0,6030	0,5565	-0,3485
Группа Черкизово, ао	GCHE	1,2726	0,1832	1,3564
Интер РАО ЕЭС, ао	IRAO	0,9305	0,7626	1,2791
Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ао	VSMO	1,5183	0,4348	1,7171
М.видео, ао	MVID	-0,3463	0,7120	-0,0208
Магнит, ао	MGNT	-2,1659	0,9535	-1,7300
ММК, ао	MAGN	0,9214	0,7650	1,2711
Мобильные ТелеСистемы, ао	MTSS	-0,1412	0,6412	0,1520
МОСТОТРЕСТ, ао	MSTT	-0,2885	0,2978	-0,1524
НК ЛУКОЙЛ, ао	LKOH	0,6347	0,9381	1,0635
НК Роснефть, ао	ROSN	-0,4383	1,5371	0,2645
НЛМК, ао	NLMK	1,3319	0,3293	1,4825
НОВАТЭК, ао	NVTK	0,6131	0,9178	1,0327
Новороссийский морской торговый порт, ао	NMTP	-0,5315	0,9810	-0,0830
ПИК-специализированный застройщик, ао	PIKK	0,6660	0,9952	1,1210
Полиметалл Интернэшнл плс, акции ин. эмм.	POLY	0,4032	0,2564	0,5205
Полюс, ао	PLZL	1,7719	0,1684	1,8489
Распадская, ао	MOEX	-0,5183	0,9502	-0,0839
Российские сети, ао	RSTI	-0,1314	1,3684	0,4943
Ростелеком, ао	RTKM	-0,4796	0,3303	-0,3287
Ростелеком, ап	RTKMP	-0,4576	0,5286	-0,2160
РусГидро, ао	HYDR	-0,1636	0,4479	0,0412
Сбербанк России, ао	SBER	-0,4313	1,6931	0,3428
Сбербанк России, ап	SBERP	0,0484	1,4941	0,7315
Северсталь, ао	CHMF	0,9928	0,3074	1,1334
СОЛЛЕРС Авто, ао	SVAV	-1,4110	0,3886	-1,2334
Сургутнефтегаз, ао	SNGS	-1,0450	1,0404	-0,5693
Сургутнефтегаз, ап	SNGSP	-0,6581	0,4551	-0,4500
Татнефть имени В.Д. Шашина, ао	TATN	0,2638	0,9345	0,6910
Татнефть имени В.Д. Шашина, ап	TATNP	-0,2381	1,0110	0,2241
Транснефть, ап	TRNFP	-0,5119	0,3593	-0,3476
Трубная Металлургическая Компания, ао	TRMK	-0,3195	0,6983	-0,0002
ФСК ЕЭС, ао	FEES	0,0251	1,2059	0,5764
ФосАгро, ао	PHOR	0,6570	0,3042	0,7961
Юнипро, ао	UPRO	-1,2194	0,7270	-0,8870
Яндекс Н.В. (PLC Yandex N.V.), ао	YNDX	-0,0177	1,2810	0,5680
Статистические результаты	$R_z = 0{,}3448\%, J(R_z) = 0{,}7184,\ F(46,27)_{0.05} = 1{,}8166$			

Примечание: $\bar{R}_k$ – средняя доходность месячная, %, оценивалась исходя из формулы (2.33).

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

Таблица 3.

Параметры оценок модели CAPM с портфелем с нулевым коэффициентом бета для акций российского фондового рынка, для периода 2011-2022 (по февраль) гг. методом наибольшего правдоподобия

Эмитент и тип ценной бумаги	Тиккер	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	$\bar{R}_k$
Индекс МосБиржи	IMOEX	0	1	0,284
Акрон, ао	AKRN	1,8163	0,2361	1,8834
АФК Система, ао	AFKS	-0,9368	1,2422	-0,5841
Аэрофлот – российские авиалинии, ао	AFLT	-0,9126	1,1512	-0,5857
Банк ВТБ, ао	VTBR	-1,5238	1,1653	-1,1929
Газпром, ао	GAZP	-0,1530	1,0858	0,1553
ГМК Норильский никель, ао	GMKN	0,5783	0,5828	0,7437
Группа ЛСР, ао	LSRG	-0,7606	0,8811	-0,5104
Группа Черкизово, ао	GCHE	0,8083	0,2470	0,8784
Интер РАО ЕЭС, ао	IRAO	-0,6178	0,8124	-0,3871
Корпорация ВСМПО-АВИСМА, ао	VSMO	1,7770	0,4042	1,8918
М.видео, ао	MVID	-0,2956	0,9699	-0,0202
Магнит, ао	MGNT	-0,4731	0,9983	-0,1896
ММК, ао	MAGN	-0,0410	1,1286	0,2795
Мобильные ТелеСистемы, ао	MTSS	-0,3225	0,8713	-0,0751
НК ЛУКОЙЛ, ао	LKOH	0,5672	0,8809	0,8174
НК Роснефть, ао	ROSN	-0,1232	1,2855	0,2419
НОВАТЭК, ао	NVTK	0,7302	0,9229	0,9922
Новолипецкий металлургический комбинат, ао	NLMK	-0,0011	0,6757	0,1909
ПИК-специализированный застройщик, ао	PIKK	0,8604	0,7121	1,0627
Полюс, ао	PLZL	1,2528	0,2860	1,3340
Российские сети, ао	RSTI	-2,0361	1,6616	-1,5643
Ростелеком, ао	RTKM	-0,7524	0,5944	-0,5836
Ростелеком, ап	RTKMP	-0,3976	0,6797	-0,2046
РусГидро, ао	HYDR	-0,8228	0,6830	-0,6288
Сбербанк России, ао	SBER	-0,2030	1,4546	0,2101
Сбербанк России, ап	SBERP	-0,0071	1,4975	0,4182
Северсталь, ао	CHMF	0,5673	0,6553	0,7533
Сургутнефтегаз, ао	SNGS	-0,5785	1,0619	-0,2769
Сургутнефтегаз, ап	SNGSP	0,3253	0,6677	0,5149
Татнефть имени В.Д. Шашина, ао	TATN	0,6799	0,9870	0,9601
Татнефть имени В.Д. Шашина, ап	TATNP	0,4785	0,9827	0,7575
Транснефть, ап	TRNFP	0,8698	0,5702	1,0317
Трубная Металлургическая Компания, ао	TRMK	-1,0236	1,0517	-0,7250
ФСК ЕЭС, ао	FEES	-1,4643	1,4572	-1,0505
Юнипро, ао	UPRO	-0,6657	0,8182	-0,4333
Статистические результаты	$R_z = 1{,}0636\%, J(R_z) = 0{,}6310,\ F(35, 98)_{0.05} = 1{,}5431$			

Примечание: $\bar{R}_k$– средняя доходность месячная, %, оценивалась исходя из формулы (2.33).

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица 1.

Структура портфелей с нулевым коэффициентом бета

Тиккер	2016-2022	2011-2015	2011-2022	Тиккер	2016-2022	2011-2015	2011-2022	Тиккер	2016-2022	2011-2015
AFKS	-0,0589	0,0022	-0,0027	PIKK	0,0165	-0,1709	0,0170	BANE	0,0797	–
AFLT	-0,0380	0,0170	-0,0272	PLZL	-0,0513	0,1014	0,0724	BANEP	-0,0093	–
AKRN	0,1461	0,0149	0,1350	ROSN	-0,1789	0,2008	-0,0631	BSPB	0,0587	–
CHMF	0,0865	-0,0930	0,0155	RSTI	-0,0744	-0,1601	-0,2092	MOEX	0,0037	–
FEES	-0,0345	-0,0390	-0,0539	RTKM	0,1755	0,2838	0,0380	MSTT	-0,0390	–
GAZP	0,0789	0,0505	0,0765	RTKMP	0,1441	-0,2224	0,1620	NMTP	0,0719	–
GCHE	0,0259	0,2054	0,2086	SBER	-0,1195	-0,0315	-0,0268	PHOR	-0,0808	–
GMKN	0,0510	-0,1424	0,1428	SBERP	-0,0060	-0,3143	-0,1636	POLY	0,0853	–
HYDR	-0,0347	0,2529	0,1184	SNGS	-0,0394	-0,3020	-0,0419	SVAV	0,1513	–
IRAO	0,0830	0,2266	0,1861	SNGSP	0,0209	0,2139	-0,0290	YNDX	-0,0350	–
LKOH	0,1428	0,4360	0,2098	TATNP	-0,1405	0,1018	-0,1501	DIXY	–	0,0282
LSRG	-0,0152	0,0306	0,0278	TATN	0,0669	0,1171	0,0433	NKNC	–	0,1936
MAGN	-0,1020	-0,1314	-0,1609	TRMK	0,0058	-0,1176	-0,0191	MSNG	–	0,0339
MGNT	0,0343	0,2234	0,0678	TRNFP	0,0536	0,0114	0,1075	MTLR	–	-0,1262
MTSS	0,1167	-0,1129	0,0849	UPRO	0,0623	0,0469	0,1319	RASP	–	0,0190
MVID	0,0243	0,0461	-0,0097	VSMO	0,1140	0,0735	0,0499	SIBN	–	0,0434
NLMK	0,1585	0,0010	0,1371	VTBR	0,0376	-0,0176	-0,0641	URKA	–	0,0117
NVTK	0,0257	-0,1459	-0,0110	ALRS	-0,0643	–	–	PHST	–	0,1403

Рассчитано автором по данным Bloomberg Terminal // Доступ предоставлен Экономическим факультетом СПбГУ, URL: https://finance.yahoo.com/ (Дата обращения: 01.05.2022) – сайт Yahoo! Finance

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

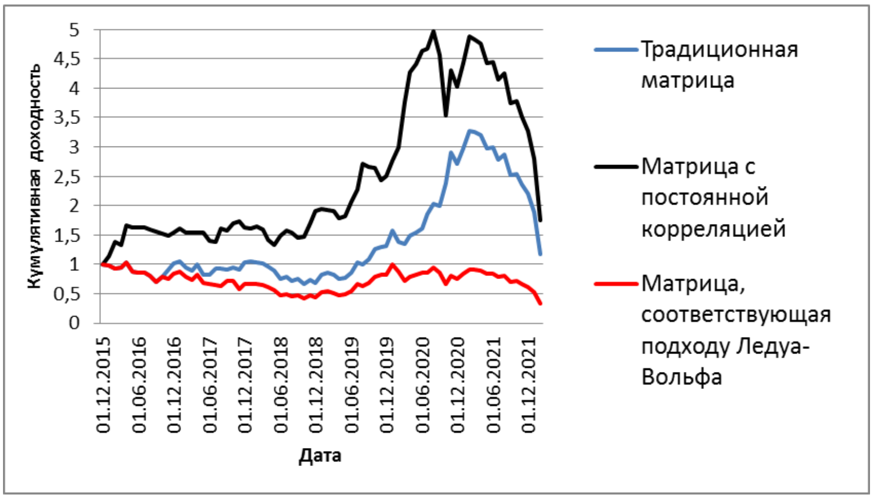

Рис. 1. **Кумулятивная доходность портфелей акций с минимальной волатильностью с учетом безрискового актива, ограничение на максимальный вес 30 процентов**

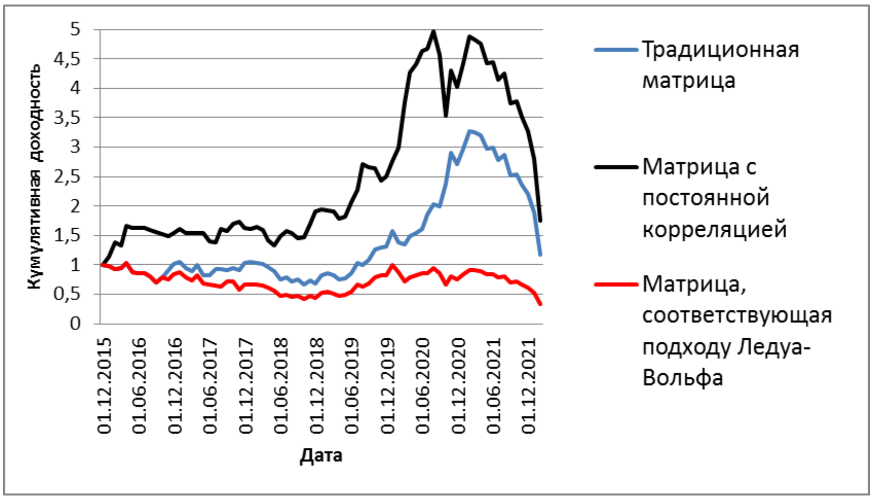

Рис. 2. **Кумулятивная доходность портфелей акций с минимальной волатильностью с учетом безрискового актива, ограничение на максимальный вес 10 процентов**

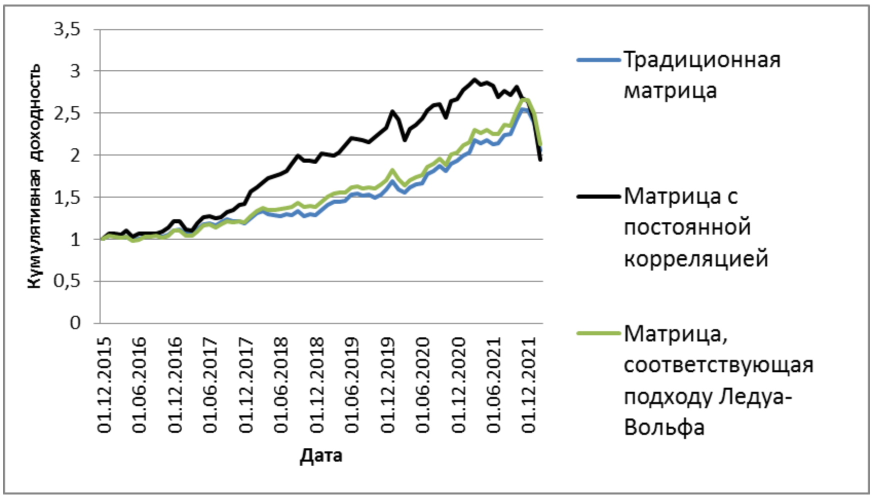

Рис. 3. **Кумулятивная доходность портфелей с минимальной дисперсией, ограничение на аллокацию 30 процентов**

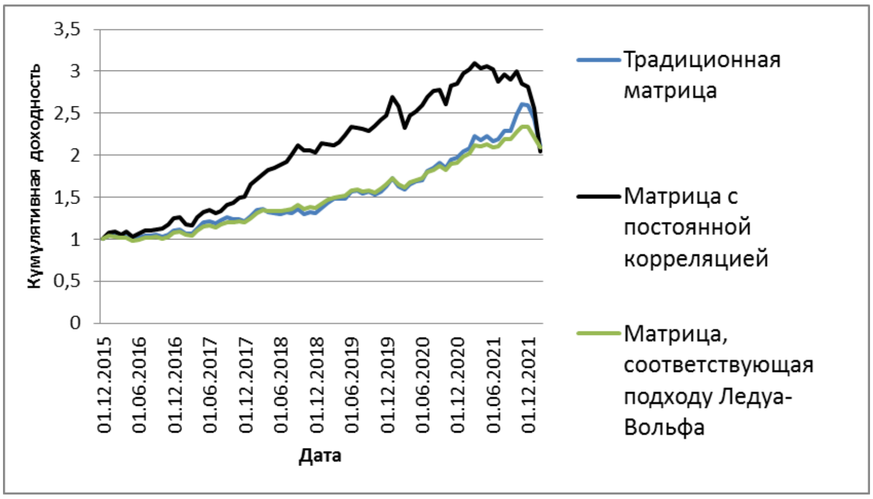

Рис. 4. **Кумулятивная доходность портфелей с минимальной дисперсией, ограничение на аллокацию 10 процентов**

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

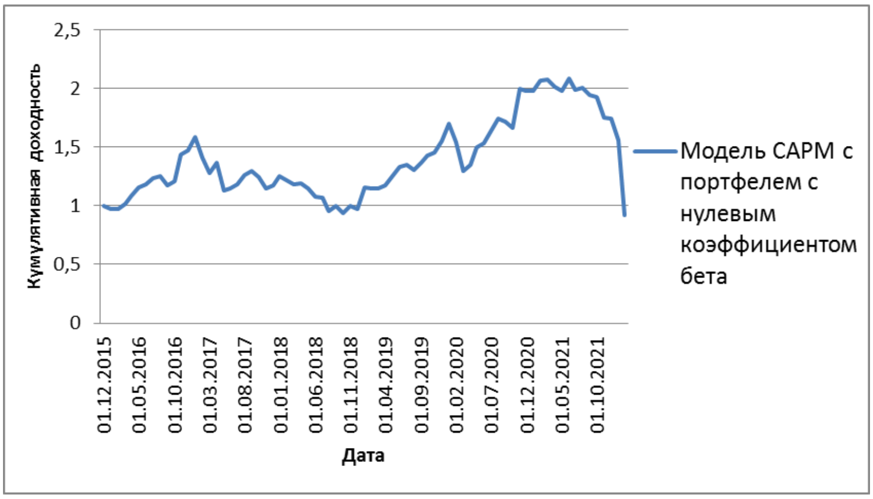

Рис. 1. **Кумулятивная доходность портфелей с минимальной волатильностью с доходностью портфеля с нулевым коэффициентом бета, ограничение на аллокацию 30 процентов**

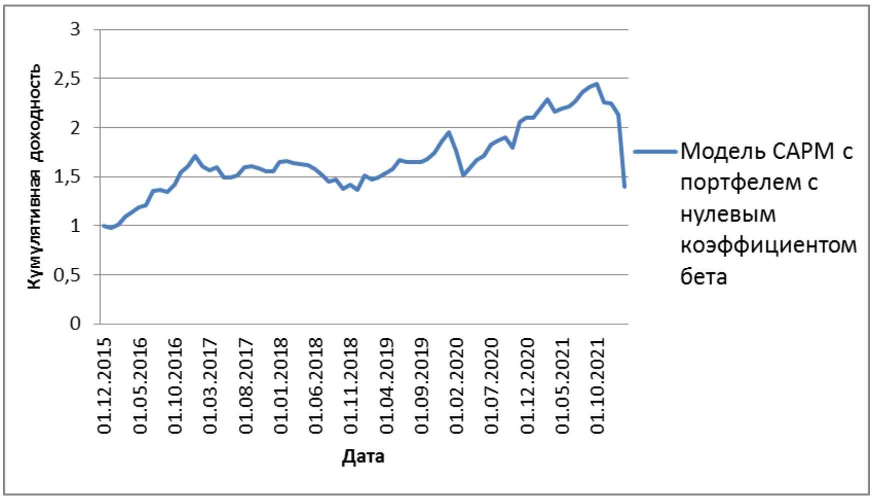

Рис. 2. **Кумулятивная доходность портфелей с минимальной волатильностью с доходностью портфеля с нулевым коэффициентом бета, ограничение на аллокацию 10 процентов**