Санкт–Петербургский государственный университет

Чен Александр Петрович

Выпускная квалификационная работа
Дискретные задачи случайного размещения интервалов на отрезке

Уровень образования: бакалавриат
Направление 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
Основная образовательная программа СВ.5001.2018 «Математика и компьютерные науки»

Научный руководитель:
доцент, кафедра теории вероятностей и математической статистики,
к.ф. - м.н. Ананьевский Сергей Михайлович

Рецензент:
приглашенный преподаватель, НИУ ВШЭ,
к.ф. - м.н. Пусев Руслан Сергеевич

Санкт-Петербург
2022

Saint-Petersburg State University

Chen Aleksandr Petrovich

Final Qualifying Work

Discrete problems of random placement of intervals on a segment

Level of education: bachelor
Field of education 02.03.01 "Mathematics and Computer Science"
Main education program CB.5001.2018 "Mathematics and Computer Science"

Scientific supervisor:
Associate Professor, Department of Probability Theory and Mathematical Statistics,
Candidate of Physics and Mathematics,
Ananevskii S.M.

Reviewer:
Visiting Lecturer, National Research University Higher School of Economics,
Candidate of Physics and Mathematics,
Pusev R.S.

Saint-Petersburg
2022

Содержание

1 Обзор литературы

Задача случайного заполнения отрезка интервалами, также известная как задача о «парковке», имеет длинную историю, которая берет свое начало в 1958 году. Именно тогда Реньи опубликовал свою работу [1], в которой им была исследована асимптотика среднего числа случайно размещенных интервалов единичной длины на отрезке, размер которого безгранично растет.

Первоначальная постановка была следующей. На отрезке $[0, x]$ для некоторого фиксированного $x > 1$ случайным образом размещается интервал $(t, t+1)$, который разбивает изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Если какой-либо из них имеет длину меньше единицы, он исключается из дальнейшего рассмотрения. Остальные продолжают заполняться по вышеописанному правилу. Выражение «случайным образом» означает, что t является равномерно распределённой на $[0, x-1]$ случайной величиной, которая не зависит от других аналогичных случайных величин. Данный процесс заканчивается в тот момент, когда не остаётся отрезков, длина которых не меньше 1. Когда он заканчивается, подсчитывается суммарное количество размещённых на изначальном отрезке интервалов. Оно обозначается за N_x. Для $0 \le x < 1$ значение N_x принимается равным нулю.

Реньи было отмечено, что данная постановка задачи имеет следующую интерпретацию. На улице длины x случайным образом в соответствии с описанным выше правилом паркуются автомобили единичной длины. Тогда N_x означает количество автомобилей, остановившихся на рассматриваемой улице. Эта интерпретация и дала название задаче как задача о «парковке».

В своей работе Реньи [1] показал, что при любом $n \ge 1$

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + o(x^n), \quad (x \to +\infty).$$

Для константы λ также было получено следующее выражение

$$\lambda = \int_0^\infty e^{-2\int_0^t \frac{1-e^u}{u} du} dt \approx 0.748.$$

В дальнейшем Дворецкий и Роббинс [2] показали, что для математического ожидания выполняется более сильное соотношение. А именно было получено выражение

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O\Big(\Big(\frac{2e}{x}\Big)^{x-\frac{3}{2}}\Big), \quad (x \to +\infty).$$

Помимо этого авторами также была изучена дисперсия случайной величины N_x и было доказано, что существует положительная константа λ_1 такая, что

$$DN_x = \lambda_1 x + \lambda_1 + O\Big(\Big(\frac{4e}{x}\Big)^{x-4}\Big), \quad (x \to +\infty).$$

Моменты более старших порядков случайной величины N_x также изучались в работе П. Нея [3].

Позднее, стали появляться работы, обобщающие задачи Реньи о случайном заполнении отрезка. Так, например, в работе [4] были рассмотрены две модели, обобщающие классическую задачу о «парковке» в двух направлениях. В первой части была исследована задача парковки, когда длина l размещаемых интервалов является случайной величиной, при этом закон размещения равномерный. Для этой модели было получено выражение для математического ожидания числа N_x разместившихся интервалов

$$EN_x = \lambda E\frac{1}{l}x + \lambda - 1 + O\Big(\frac{c}{x}\Big)^{x-\frac{3}{2}}, \quad (x \to +\infty),$$

где c - некоторая константа, зависящая от El.

Вторая часть работы [4] посвящена рассмотрению задачи, в которой интервалы по-прежнему имеют единичную длину, однако закон их случайного расположения отличен от равномерного. В частности, в случае когда закон распределения, по которому размещаются интервалы, имеет плотность

$$q_x(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1-2\varepsilon} & \text{при} \quad u \in [\varepsilon, x-1-\varepsilon] \\ 0 & \text{при} \quad u \notin [\varepsilon, x-1-\varepsilon] \end{cases},$$

было получено следующее выражение

$$EN_x = \frac{\lambda}{1+\varepsilon}x + -\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} + o(x^{-n}), \quad (x \to +\infty).$$

В последнее время появились работы, посвященные изучению дискретных аналогов задачи о «парковке». В частности, в работе [5] рассмотрена дискретная модель, которую авторы назвали задачей об «эгоистичной парковке». Данная задача имеет следующую формулировку. Пусть n, i целые, $n \geq 0$ и $0 \leq i \leq n-1$. На отрезок $[0, n]$ помещается интервал $(i, i+1)$, где i - случайная величина с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, 2, ..., n-1$ для всех $n \geq 2$. Считаем, что интервал не помещается, если $n < 2$. После размещения первого интервала образуются два свободных отрезка $[0, i]$ и $[i+1, n]$, которые заполняются интервалами единичной длины по тому же правилу, независимо друг от друга и т. д. По окончании процесса заполнения отрезка

$[0, n]$ единичными интервалами между двумя любыми соседними интервалами расстояние будет не больше 1. Пусть X_n означает количество разместившихся интервалов. Авторами было получено выражение для математического ожидания случайной величины X_n

$$EX_n = \frac{2n-1}{3} \ \text{ при } \ n \geq 2 \quad \text{и} \quad EX_n = 0 \ \text{ при } \ n < 2,$$

а также выражения для некоторых моментов старших порядков

$$DX_n = \frac{n+1}{45} \ \text{ при } \ n \geq 4, \quad DX_3 = \frac{2}{9} \quad \text{и} \quad DX_n = 0 \ \text{ при } \ n < 3,$$

$$E(X_n - EX_n)^3 = -\frac{n+11}{135} \ \text{ при } \ n \geq 4.$$

Задачи о случайном заполнении пространства не ограничиваются задачей о «парковке». Наряду с ней рассматривается задача об «упаковке»[6]. Она имеет следующую формулировку. Имеются n молекул, расположенных в ряд на одной линии. Для фиксированного натурального $k \geq 2$ рассматриваются всевозможные множества из k молекул, идущих подряд. Среди $n-k-1$ таких множеств случайным образом выбирается одно, и k молекул в этом множестве объединяются. После этого процесс продолжается с остальными молекулами по вышеописанному правилу. Данный процесс заканчивается, когда не остается k молекул, идущих подряд. Обозначим число объединенных молекул за $M_{n,k}$. Автором был получен следующий результат для математического ожидания случайной величины $M_{n,k}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{EM_{n,k}}{n} = k \exp\Big(-2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\Big)\int_0^1 \exp\Big(2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{s^j}{j}\Big)ds,$$

причем для $\dfrac{M_{n,k}}{n}$ выполнен слабый закон больших чисел.

2 Введение

В настоящей работе будут рассмотрены две новые дискретные модели задачи о «парковке», а также будет исследована непрерывная модель задачи об «эгоистичной парковке».

2.1 Модель I

Сначала будет рассмотрена модель, которая является обобщением задачи об «эгоистичной парковке», описанной в работе [5].

Пусть n и k – целые неотрицательные числа, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Будем заполнять отрезок $[0, n]$ единичными интервалами по следующему правилу. Если $n \leq k$, то будем говорить, что единичный интервал не размещается, и отрезок $[0, n]$ остается незаполненным. В противном случае помещаем интервал $(i, i+1)$ на отрезок $[0, n]$, где i – случайная величина, принимающая значения $0, 1, \dots, n-1$ с равной вероятностью так, чтобы справа или слева от интервала было свободное место размером не менее k. После размещения первого интервала образуются два незанятых отрезка $[0, i]$ и $[i+1, n]$, которые в свою очередь заполняются независимо друг от друга по такому же правилу. Когда длины всех незанятых отрезков станут не больше k, процесс заполнения отрезка закончится. Пусть X_n – количество разместившихся единичных интервалов на отрезке $[0, n]$. Нас будет интересовать среднее число разместившихся единичных интервалов EX_n в зависимости от n. Для $k = 1$ эта модель является задачей об «эгоистичной парковке», описанной в работе [5].

2.2 Модель II

Вторая модель, которая будет исследоваться в данной работе, следующая. Пусть n – целое неотрицательное число. Процесс заполнения отрезка $[0, n]$ интервалами длины 2 будет проходить по следующему правилу. Если $n < 4$, то будем говорить, что интервал не размещается. В противном случае помещаем на отрезок $[0, n]$ интервал $(i, i+2)$, где i – случайная величина, принимающая значения $1, 2, \dots, n-3$ с равной вероятностью (левый и правый концы размещаемого интервала должны быть на расстоянии не меньше 1 от границ заполняемого отрезка). После размещения первого интервала получаем два отрезка $[0, i]$ и $[i+2, n]$, которые в дальнейшем заполняются интервалами длины 2 по такому же правилу независимо друг от друга. Когда длины всех незаполненных отрезков станут меньше 4, процесс заполнения заканчивается и подсчитывается общее количество разместившихся интервалов, которое обозначим через Y_n. Нас так же, как и в первой рассматриваемой модели, будет интересовать среднее число разместившихся интервалов EY_n.

2.3 Модель III

Последняя рассмотренная модель является обобщением задачи об «эгоистичной парковке» на непрерывный случай и имеет следующую формулировку. На отрезке $[0, x]$ для некоторого фиксированного $x > 1$ размещается интервал $(t, t+1)$, где t является равномерно распределённой на $[0, x-1]$ случайной величиной. Данный интервал разбивает изначальный отрезок на два: $[0,t]$ и $[t+1,x]$. Оба отрезка продолжают заполняться по вышеописанному правилу независимо друг от друга. Данный процесс заканчивается в тот момент, когда не остаётся отрезков длины не меньше 2. Когда он заканчивается, подсчитывается суммарное количество размещённых на изначальном отрезке интервалов. Оно обозначается за M_x. Для $0 \le x < 2$ значение M_x принимается равным нулю.

3 Результаты

Теорема 1. Для определенной в Модели I случайной величины X_n справедливы равенства:

$$EX_n = 0 \quad \text{для} \ \ 0 \le n \le k,$$

$$EX_n = H_{n-k} \quad \text{для} \ \ k < n \le 2k, \tag{1}$$

$$EX_n = \frac{H_k + 1}{2k+1}(n+1) - 1 \quad \text{для} \ \ n > 2k, \tag{2}$$

где $H_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

Теорема 2. Для случайной величины Y_n из Модели II справедливо соотношение:

$$\frac{EY_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \nu, \tag{3}$$

где $\quad \nu = e^{-3} \int\limits_0^1 e^{t^2+2t} dt \approx 0.274551.$

Теорема 3. Для случайной величины M_x из Модели III справедливо соотношение:

$$EM_x = \eta x + \eta - 1 + O\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}, \tag{4}$$

где $\eta = \int_0^\infty (t+1) \exp\Big(-t - 2\int_s^t \frac{1-\exp(-u)}{u} du\Big) dt \approx 0.531417.$

Результаты, отраженные в теоремах 1 и 2 вошли в статью [7]. Также отметим, что доказательство теоремы 3 следует схеме, предложенной в работах Дворецкого, Роббинса [2] и Реньи [1].

Доказательство теоремы 1.

1. Если $0 \le n \le k$, то по правилу заполнения $X_n = 0$ и $EX_n = 0$.

2. Если $k < n \le 2k$, то по правилу заполнения левый конец размещаемого первого интервала не может принимать значения из $[n-k, k)$. Предположим, что первый интервал занял место $(i, i+1)$. Обозначим через $X_{n,i}$ число размещенных на отрезке $[0, n]$ единичных интервалов, при условии, что левый конец первого интервала занял место i. Тогда справедливо равенство

$$X_{n,i} = X_i + X_{n-i-1} + 1. \tag{5}$$

Введем обозначение $E_n = EX_n$. Учитывая равенство (5) и то, что случайная величина i с равной вероятностью может принимать значения $0, 1, \dots, n-k-1, k, k+1, \dots, n-1$, получаем соотношение

$$E_n = \frac{1}{2(n-k)}\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} E_i + \sum_{i=k}^{n-1} E_i\right) + \frac{1}{2(n-k)}\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} E_{n-i-1} + \sum_{i=k}^{n-1} E_{n-i-1}\right) + 1 =$$

$$= \frac{1}{(n-k)}\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} E_i + \sum_{i=k}^{n-1} E_i\right) + 1.$$

Учитываем пункт 1, из которого следует, что $E_i = 0$ для всех $i = 0, 1, \dots, k$. Тогда получаем

$$E_n = \frac{1}{(n-k)} \sum_{i=k+1}^{n-1} E_i + 1. \tag{6}$$

Для решения этого уравнения введем еще одно обозначение:

$$S_n = \sum_{j=k+1}^{n} E_j. \tag{7}$$

Тогда

$$E_n = S_n - S_{n-1}. \tag{8}$$

Учитывая (6), (7) и (8), получаем рекуррентное соотношение

$$S_n = \frac{n-k+1}{n-k} S_{n-1} + 1, \tag{9}$$

или

$$S_{n+1} = c_n S_n + 1, \tag{10}$$

где $c_n = \frac{n-k+2}{n-k+1}$. Таким образом, учитывая равенство $S_{k+1} = 1$, имеем

$$S_{n+1} = c_n S_n + 1 = c_n(c_{n-1}S_{n-1} + 1) + 1 = \ldots =$$

$$= c_n c_{n-1} \ldots c_{k+1} + c_n c_{n-1} \ldots c_k + \ldots + c_n + 1,$$

или, принимая во внимание, что $c_n = \frac{n-k+2}{n-k+1}$, можем записать

$$S_{n+1} = \sum_{i=k+1}^{n} \prod_{j=i}^{n} c_j + 1 = \sum_{i=k+1}^{n} \prod_{j=i}^{n} \frac{j-k+2}{j-k+1} + 1 = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{n-k+2}{i-k+1} + 1 =$$

$$= (n-k+2) \sum_{i=2}^{n-k+1} \frac{1}{i} + 1.$$

Учитывая (6), можем записать

$$E_n = \frac{1}{(n-k)} S_{n-1} + 1 = \sum_{i=2}^{n-k-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n-k} + 1 = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} = H_{n-k},$$

где H_{n-k} – частичная сумма первых $n-k$ членов гармонического ряда.

3. Пусть $n > 2k$.

Учитывая равенство (5) и то, что i случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, \ldots, n-1$, получаем равенство

$$E_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_i + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_{n-i-1} + 1 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_i + 1$$

Введем следующее обозначение: $c = \sum\limits_{i=0}^{2k} E_i$.

Тогда верно равенство

$$E_n = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_i + 1 = \frac{2}{n} \left(c + \sum_{i=2k+1}^{n-1} E_i \right) + 1.$$

Пусть

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} E_i.$$

Тогда

$$E_n = T_n - T_{n-1}$$

и

$$T_{2k} = c.$$

С другой стороны, учитывая равенство:

$$E_n = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i + 1 = \frac{2}{n}T_{n-1} + 1,$$

получаем

$$T_n = \frac{n+2}{n}T_{n-1} + 1.$$

Или

$$T_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}T_n + 1.$$

Если введем обозначение $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ и учтем равенство $T_{2k} = c$, получим

$$T_{n+1} = a_nT_n + 1 = a_n(a_{n-1}T_{n-1} + 1) + 1 = a_n(a_{n-1}(a_{n-2}T_{n-2} + 1) + 1) + 1 = \ldots$$

$$= a_n(a_{n-1}(a_{n-2}(\ldots a_{2k+1}(a_{2k}T_{2k} + 1) + 1)\ldots) + 1 = a_na_{n-1}\ldots a_{2k}c +$$

$$+ a_na_{n-1}\ldots a_{2k+1} + \ldots + a_n + 1.$$

Если введем обозначение $p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$, то получаем равенство

$$T_{n+1} = c\frac{p_n}{p_{2k-1}} + \frac{p_n}{p_{2k}} + \ldots + \frac{p_n}{p_n} = c\frac{p_n}{p_{2k-1}} + \sum_{i=2k}^{n}\frac{p_n}{p_i}.$$

Используя последнее равенство, имеем

$$E_n = T_n - T_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{p_{n-1}} + \sum_{i=2k}^{n-2}\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_i} + c\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_{2k-1}}.$$

Заметим, что

$$p_n = \prod_{i=1}^{n}\frac{i+3}{i+1} = \frac{(n+3)(n+2)}{6}.$$

Поэтому

$$p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{(n+2)(n+1)}{6} - \frac{(n+1)n}{6} = \frac{n+1}{3}.$$

Таким образом из последних равенств следует

$$E_n = 1 + \sum_{i=2k}^{n-2}\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_i} + c\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_{2k-1}} = 1 + \frac{n+1}{3}\sum_{i=2k}^{n-2}\frac{1}{p_i} + c\frac{n+1}{3}\frac{1}{p_{2k-1}} =$$

$$= 1 + \frac{(n+1)}{3} \sum_{i=2k}^{n-2} \frac{6}{(i+3)(i+2)} + c\frac{n+1}{3} \frac{6}{(2k+2)(2k+1)} =$$

$$= 1 + 2(n+1) \sum_{i=2k}^{n-1} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+3} \right) + c\frac{n+1}{(k+1)(2k+1)} =$$

$$= 1 + 2(n+1) \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{n+1} \right) + c\frac{n+1}{(k+1)(2k+1)} = 1 + \frac{n+1}{k+1} - 2 +$$

$$+ c\frac{n+1}{(k+1)(2k+1)} = \frac{(n+1)(2k+1) + c(n+1)}{(k+1)(2k+1)} - 1 = \frac{2k+1+c}{(k+1)(2k+1)}(n+1) - 1.$$

Найдем константу c, вспомнив результат пункта 2:

$$c = \sum_{i=0}^{2k} E_i = S_{2k} = (k+1)H_k - k,$$

где $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Итак, для всех $n > 2k$ получено выражение для E_n:

$$E_n = \frac{k+1+(k+1)H_k}{(k+1)(2k+1)}(n+1) - 1 = \frac{H_k+1}{2k+1}(n+1) - 1.$$

На этом теорема полностью доказана. □

Замечание.

При $k = 1$ наша задача является задачей об «эгоистичной парковке», рассмотренной в работе [5], и в этом случае:

$$E_n = \frac{2n-1}{3}.$$

При $k = 2$: $\qquad E_n = \dfrac{n-1}{2}.$

При $k = 3$: $\qquad E_n = \dfrac{17n-25}{42}.$

При $k = 4$: $\qquad E_n = \dfrac{37n-70}{108}.$

Доказательство теоремы 2.

Предположим, что первый интервал занял место $(i, i+2)$, где $i = 1, 2, \ldots, n-3$, и обозначим через $Y_{n,i}$ число разместившихся интервалов на отрезке $[0, n]$ при условии, что левый конец первого интервала занял место i. При этом количества разместившихся интервалов на отрезках $[0, i]$ и $[i+2, n]$ равны соответственно Y_i и Y_{n-i-2}. Тогда выполняется равенство:

$$Y_{n,i} = Y_i + Y_{n-i-2} + 1.$$

Введем обозначение: $E_n = EY_n$. Учитывая, что i случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $1, 2, \ldots, n-3$, получаем рекуррентное соотношение

$$E_n = \frac{1}{n-3}\sum_{k=1}^{n-3} E_k + \frac{1}{n-3}\sum_{k=1}^{n-3} E_{n-k-2} + 1 = \frac{2}{n-3}\sum_{k=1}^{n-3} E_k + 1 \tag{11}$$

с начальными данными

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0, \qquad E_4 = E_5 = E_6 = 1, \qquad E_7 = \frac{3}{2}.$$

Введем обозначение

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} E_k.$$

Тогда верно

$$E_n = Z_n - Z_{n-1}. \tag{12}$$

Перепишем в новых обозначениях уравнение (11) и начальные данные:

$$Z_n - Z_{n-1} = \frac{2}{n-3} Z_{n-3} + 1,$$

$$Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0, \qquad Z_4 = 1.$$

Умножаем полученное уравнение на $(n-3)$ и получаем:

$$(n-3)Z_n - (n-3)Z_{n-1} - 2Z_{n-3} - (n-3) = 0.$$

Далее умножим на t^n и просуммируем от 3 до ∞:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_n t^n - \sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_{n-1}t^n - 2\sum_{n=3}^{\infty} Z_{n-3}t^n - \sum_{n=3}^{\infty}(n-3)t^n = 0 \tag{13}$$

Пусть $P(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n t^n$ – производящая функция последовательности Z_n. Тогда

$$P'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n t^{n-1}.$$

Преобразуем первое слагаемое уравнения (13), учитывая, что $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_n t^n = \sum_{n=3}^{\infty} nZ_n t^n - 3\sum_{n=3}^{\infty} Z_n t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} nZ_n t^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} Z_n t^n =$$
$$= tP'(t) - 3P(t).$$

Аналогично преобразуем остальные слагаемые:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)Z_{n-1}t^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)Z_{n-1}t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} Z_{n-1}t^n = t^2P'(t) - 2tP(t),$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} Z_{n-3}t^n = t^3P(t),$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)t^n = \sum_{n=3}^{\infty} nt^n - 3\sum_{n=3}^{\infty} t^n = t\left(\sum_{n=3}^{\infty} t^n\right)' - \frac{3t^3}{1-t} =$$
$$= t\left(\frac{t^3}{1-t}\right)' - \frac{3t^3}{1-t} = t\left(\frac{3t^2}{1-t} + \frac{t^3}{(1-t)^2}\right) - \frac{3t^3}{1-t} = \frac{3t^3}{1-t} + \frac{t^4}{(1-t)^2} - \frac{3t^3}{1-t} =$$
$$= \frac{t^4}{(1-t)^2}.$$

Таким образом, уравнение (13) преобразуется в следующее:

$$P'(t)(t-t^2) + P(t)(-2t^3+2t-3) - \frac{t^4}{(1-t)^2} = 0 \qquad (14)$$

Полученное уравнение (14) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка для производящей функции $P(t)$. Для нахождения его решения рассмотрим сначала следующее однородное уравнение:

$$R'(t)(t-t^2) + R(t)(-2t^3+2t-3) = 0.$$

Имеем

$$(\ln R(t))' = \frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{2t^3-2t+3}{t-t^2} = -2t - 2 + \frac{3}{t} + \frac{3}{1-t}$$
$$\ln R(t) = -t^2 - 2t + 3\ln t - 3\ln(1-t) + c_1, \quad c_1 \in \mathbf{R}$$

Откуда следует:

$$R(t) = \frac{c_2 t^3}{(1-t)^3} e^{-t^2-2t}, \quad c_2 \in \mathbf{R}, c_2 > 0.$$

Вернемся к уравнению (13).

Пусть $P(t) = R(t)T(t)$. Тогда, подставив наше выражение в (14) и учитывая, что $R(t)$ – решение однородного уравнения, получим:

$$(t-t^2)R(t)T'(t) - \frac{t^4}{(1-t)^2} = 0,$$

$$T'(t) = \frac{t^3}{(1-t)^3} \cdot \frac{1}{R(t)} = c_2 e^{t^2+2t},$$

$$T(t) = c_2 \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau + c_3, \quad c_3 \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, получено общее решение уравнения (14):

$$P(t) = R(t)T(t) = \frac{t^3}{(1-t)^3} e^{-t^2-2t} \left(c_3 + \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau \right).$$

Вспоминая, что $P(t)$ – производящая функция Z_n и $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$, имеем

$$\left.\frac{P(t)}{t^3}\right|_{t=0} = Z_3 = 0.$$

Отсюда получаем значение для c_3: $\quad c_3 = 0$ и

$$P(t) = \frac{t^3}{(1-t)^3} e^{-t^2-2t} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau.$$

Вернемся к равенству (12). Умножим обе части этого равенства на t^n и просуммируем от 1 до ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n-1} t^n.$$

Если $Q(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n t^n$ производящая функция последовательности E_n, то

$$Q(t) = P(t) - tP(t) = (1-t)P(t) = \frac{t^3}{(1-t)^2} e^{-t^2-2t} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau.$$

Положим $f(t) = t^2 e^{-t^2-2t} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau$ и пусть $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$.

Через ν обозначим значение $f(1) = e^{-3} \int\limits_0^1 e^{\tau^2+2\tau} d\tau$.

Тогда

$$Q(t) = \frac{t}{(1-t)^2} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Из последнего равенства имеем

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} b_k (n-k) = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) n - \sum_{k=0}^{n} b_k k.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} b_k = f(1) = \nu.$$

Далее

$$\sum_{k=0}^{n} b_k k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} b_k k = f'(1) = \frac{d}{dt} \left(t^2 e^{-(t^2+2t)} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau \right) \Big|_{t=1} =$$

$$= \left((2t - 2t^3 - 2t^2) e^{-(t^2-2t)} \int\limits_0^t e^{\tau^2+2\tau} d\tau + t^2 \right) \Big|_{t=1} = 1 - 2\nu.$$

Таким образом,

$$\frac{E_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu \approx 0.274551,$$

что заканчивает доказательство теоремы 2. $\square$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3 понадобится сперва сформулировать и доказать лемму, описывающую асимптотическое поведение функции, удовлетворяющей некоторому интегральному уравнению, о котором пойдет речь далее.

Лемма.

Пусть $f(x)$ - функция, определенная для неотрицательных x и удовлетворяющая условию

$$f(x+1) = \frac{2}{x} \int\limits_0^x f(t) dt + p(x+1), \tag{15}$$

где $p(x)$ - непрерывная функция, определенная для $x > 1$. И пусть выполнено

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{i} < \infty,$$

где через p_x обозначено

$$p_x = \sup_{x \le t \le x+1} |p(t)|.$$

Тогда существует константа λ такая, что

$$\sup_{n+1 \le x \le n+2} |f(x) - \lambda x - \lambda| \le \frac{2^n}{n!} \sup_{1 \le x \le 2} |f(x) - \lambda x - \lambda| + \frac{2^n}{n!} \sum_{j=1}^{n} \frac{j!}{2^j} R_j,$$

где

$$R_j = \frac{2j+1}{j} p_{j+1} + \frac{2(j+1)(j+3)}{j} \sum_{i=j+2}^{\infty} \frac{p_i}{i+1}.$$

Доказательство леммы.

Из условия (15) для положительных x, y имеем

$$f(y+1) = \frac{2}{y} \int_0^x f(t)dt + \frac{2}{y} \int_x^y f(t)dt + p(y+1) = \frac{1}{y}(xf(x+1) - xp(x+1))$$

$$+\frac{2}{y} \int_x^y f(t)dt + p(y+1),$$

или

$$f(y+1) = \frac{x}{y} f(x+1) + \frac{2}{y} \int_x^y f(t)dt + p(y+1) - \frac{x}{y} p(x+1). \qquad (16)$$

Введем обозначения

$$I_x = \inf_{x \le t \le x+1} \frac{f(t)}{t+1}, \quad S_x = \sup_{x \le t \le x+1} \frac{f(t)}{t+1}.$$

Несложно видеть, что $f(x) = x + 1$ удовлетворяет (15) (нужно взять $p \equiv 0$), и поэтому

$$y + 2 = \frac{x}{y}(x+2) + \frac{2}{y} \int_x^y (t+1)dt. \qquad (17)$$

Вычтем из (15) равенство (17), умноженное на I_x:

$$f(y+1) - I_x(y+2) = \frac{x}{y}(f(x+1) - I_x(x+2)) + \frac{2}{y}\int\limits_x^y (f(t) - I_x(t+1))dt +$$

$$+p(y+1) - \frac{x}{y}p(x+1).$$

Следовательно, в силу определения I_x и p_x для $x \le y \le x+1$ верно

$$f(y+1) - I_x(y+2) \ge 0 + 0 - p_{x+1} - p_{x+1} = -2p_{x+1}.$$

Из чего следует

$$I_{x+1} \ge I_x - \frac{2p_{x+1}}{x+2}.$$

Введя обозначение $\Delta_x = 2\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{p_{x+i}}{x+i+1}$ и последовательно заменяя x в неравенстве выше на $x+1$, $x+2$, …, получаем, что

$$I_y \ge I_x - \Delta_x.$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to\infty} \inf I_y \ge I_x - \Delta_x.$$

Из определения Δ_x и из условия леммы имеем $\Delta_x = o(1)$, поэтому справедливо

$$\lim_{y\to\infty} \inf I_y \ge \lim_{x\to\infty} \sup I_x.$$

Вспомним неравенство $I_y \ge I_x - \Delta_x$ и возьмем $x = 1$, тогда можно сделать вывод

$$\exists \lim_{x\to\infty} I_x = I_\infty, \quad I_\infty > -\infty.$$

Аналогичным образом получаем утверждения для S_y:

$$S_y \le S_x + \Delta_x,$$

$$\exists \lim_{x\to\infty} S_x = S_\infty, \quad S_\infty < \infty.$$

Так как $I_x \le S_x$, то верно

$$-\infty < I_\infty \le S_\infty < \infty. \qquad (18)$$

Вспоминая равенство (16), получаем для $x, y > 0$

$$f(y+1) - f(x+1) = \frac{x-y}{y} f(x+1) + \frac{2}{y} \int\limits_x^y f(t)dt + p(y+1) - \frac{x}{y} p(x+1).$$

В силу неравенства (18) $f(x) = O(x)$. Поэтому учитывая равенство, указанное выше, справедливо следующее:

$$\sup_{x \le y \le x+1} |f(y+1) - f(x+1)| = O(1) + 2p_x,$$

из чего следует (учитывая $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{i} < \infty$)

$$S_x - I_x = o(1).$$

И поэтому

$$I_\infty = S_\infty \neq \pm\infty.$$

Теперь определим константу $\lambda = \lim_{x\to\infty} I_x = \lim_{x\to\infty} S_x = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x+1}$. Применяя уже полученные неравенства, запишем

$$I_x - \Delta_x \le \lambda \le S_x + \Delta_x.$$

Заметим, что для любого $x > 1$ найдется x' такой, что

$$x \le x' \le x+1, \quad \left| \frac{f(x')}{x'+1} - \lambda \right| \le \Delta_x.$$

Это верно, поскольку в противном случае было бы выполнено

$$I_x > \lambda + \Delta_x \quad \text{или} \quad S_x < \lambda - \Delta_x.$$

что противоречит (18).
Для каждого $x = n$ такой x' обозначим через x_n. Для $n \ge 2$ имеем

$$|f(x_n) - \lambda(x_n+1)| \le (n+2)\Delta_n, \quad (n \le x_n \le n+1). \tag{19}$$

Введем функцию $f^*(x) = f(x) - \lambda(x+1)$. Заметим, что f^* удовлетворяет условию леммы. Применяя равенства (16) (для $n \le y \le n+1$ и $x = x_{n+1} - 1$) и (19), получим

$$|f^*(y+1)| \le \frac{n+1}{n}(n+3)\Delta_{n+1} + \frac{2}{n} \sup_{n \le t \le n+1} |f^*(t)| + p_{n+1} + \frac{n+1}{n} p_{n+1}.$$

Введя обозначение $T_x = \sup_{x \le t \le x+1} |f^*(t)|$ преобразуем неравенство выше:

$$T_{n+1} \le \frac{2}{n} T_n + \frac{2n+1}{n} p_{n+1} + \frac{(n+1)(n+3)}{n} \Delta_{n+1} = \frac{2}{n} T_n + R_n.$$

где R_n определено в условии леммы.
Последовательно применяя данное неравенство для натуральных n, получаем требуемое утверждение

$$T_{n+1} \le \frac{2^n}{n!} T_1 + \frac{2^n}{n!} \left(\frac{1!}{2} R_1 + \frac{2!}{2^2} R_2 + \cdots + \frac{n!}{2^n} R_n \right),$$

и лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3.

Рассмотрим промежуток $[0, x+1]$ и допустим, первая машина припарковалась на место $[t, t+1]$. Заметим, что по завершении процесса конечное число машин (M_t), припаркованных слева от первой машины, не зависит от количества машин, расположенных справа (M_{x-t}). Поэтому число машин, расположившихся в конце процесса при условии, что первой машиной было занято $[t, t+1]$, равно $M_t + M_{x-t} + 1$, где M_t, M_{x-t} - независимы. Таким образом,

$$E(M_{x+1}|t) = E(M_t) + E(M_{x-t}) + 1, \quad (0 \le t \le x).$$

Введя обозначение $\mu(x) = E(M_x)$ и заметив, что случайная величина t равномерно распределена на $[0, x]$, имеем

$$\mu(x+1) = \frac{2}{x} \int\limits_0^x \mu(t) dt + 1.$$

Определим функцию $f(x) = \mu(x) + 1$. Тогда верно следующее:

$$f(x+1) = \frac{2}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Имея начальные данные

$$f(x) = 1 \quad (0 \le x < 2), \quad f(2) = 2,$$

видно, что функция $f(x)$ последовательно определена на промежутках $2 < x \le 3$, $3 < x \le 4, \ldots$:

$$2 \le x < 3: \quad f(x) = 2,$$

$$3 \le x < 4: \quad f(x) = \frac{2}{x-1}\Big(\int_0^2 f(t)dt + \int_2^{x-1} f(t)dt\Big) = \frac{4}{x-1} + \frac{4(x-3)}{x-1} =$$
$$= 4 - \frac{4}{x-1},$$
$$4 \le x < 5: \quad f(x) = \frac{2}{x-1}\Big(\int_0^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + \int_3^{x-1} f(t)dt\Big) = \frac{8}{x-1} +$$
$$+ \frac{2}{x-1}\int_3^{x-1}\Big(4 - \frac{4}{t-1}\Big)dt = \frac{8}{x-1} + \frac{8(x-4)}{x-1} - \frac{8}{x-1}\ln(x-1)\Big|_3^{x-1} =$$
$$= 8 - \frac{16}{x-1} - \frac{8}{x-1}\ln\Big(\frac{x-2}{2}\Big),$$
и т. д.

Воспользуемся доказанной леммой для получения формулы, оценивающей $\mu(x)$. Как мы уже заметили, функция $f(x) = \mu(x) + 1$ удовлетворяет условию (15) ($p \equiv 0$), поэтому применима лемма:

$$\exists \eta = \lim_{x\to\infty} \frac{\mu(x)}{x}.$$

И в силу равенства (18) имеем для любых $x > 0$

$$\inf_{x \le t \le x+1} \frac{\mu(t)+1}{t+1} = I_x \le \eta \le S_x = \sup_{x \le t \le x+1} \frac{\mu(t)+1}{t+1}.$$

Вспомним также, что при $3 \le x \le 4$: $f(x) = 4 - \dfrac{4}{x-1}$. Поэтому в случае $x = 3$ имеет место соотношение:

$$0.5 \le \eta \le 0.5359.$$

Заметим, что можно получить и более точную оценку, если взять $x = 4$.

$$4 \le x \le 5: \quad f(x) = 8 - \frac{16}{x-1} - \frac{8}{x-1}\ln\Big(\frac{x-2}{2}\Big),$$

тогда

$$0.5306 \le \eta \le 0.5333.$$

Из соображения, что $\mu(x) = 0$ при $1 \le x \le 2$, и из даже более грубой оценки $\frac{1}{2} < \eta < \frac{2}{3}$ следует

$$\sup_{1 \le x \le 2} |\mu(x) + 1 - \eta x - \eta| = \max_{1 \le x \le 2} |1 - \eta x - \eta| = |1 - 3\eta| < 1.$$

Итак, вновь воспользовавшись леммой для $p \equiv 0$, получаем, что

$$\exists \eta, \quad \frac{1}{2} < \eta < 1: \quad \sup_{n+1 \le x \le n+2} |\mu(x) + 1 - \eta x - \eta| < \frac{2^n}{n!}.$$

В силу формулы Стирлинга о приближении факториала, справедливо

$$\mu(x) - \eta x - \eta + 1 = O\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}},$$

что частично доказывает теорему.

Выше был приведен промежуток, в котором находится μ. Однако константу η можно вычислить явно.

Имеем интегральное уравнение

$$\mu(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x \mu(t)dt + 1 \tag{20}$$

с начальными данными

$$0 \le x < 2: \quad \mu(x) = 0, \tag{21}$$

$$2 \le x < 3: \quad \mu(x) = 1,$$

$$3 \le x < 4: \quad \mu(x) = 3 - \frac{4}{x-1},$$

$$4 \le x < 5: \quad \mu(x) = 7 - \frac{16}{x-1} - \frac{8}{x-1}\ln\left(\frac{x-2}{2}\right).$$

Найдем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mu(x)}{x}.$$

Умножив равенство (20) на x и взяв производную по x от правой и левой части, получим дифференциальное уравнение

$$x\mu'(x+1) + \mu(x+1) = 2\mu(x) + 1, \quad x > 1. \tag{22}$$

Рассмотрим преобразование Лапласа функции $\mu(x)$:

$$\phi(s) = \int_0^\infty \mu(x)e^{-sx}dx.$$

Преобразование Лапласа существует, поскольку для функции $\mu(x)$ существует мажоранта: $0 \leq \mu(x) \leq x$. Умножив теперь обе части равенства (22) на e^{-sx} и взяв интеграл от 1 до бесконечности, приходим к следующему

$$\int_1^\infty x\mu'(x+1)e^{-sx}dx + \int_1^\infty \mu(x+1)e^{-sx}dx = 2\phi(s) + \frac{e^{-s}}{s}. \tag{23}$$

Учитывая начальные данные (21), перепишем каждое слагаемое в уравнении (23)

$$\int_1^\infty \mu(x+1)e^{-sx}dx = e^s\int_2^\infty \mu(t)e^{-st}dt = e^s\phi(s) \tag{24}$$

и

$$\int_1^\infty x\mu'(x+1)e^{-sx}dx = e^s\Big(\int_1^\infty (x+1)\mu'(x+1)e^{-s(x+1)}dx - \int_1^\infty \mu'(x+1)e^{-s(x+1)}dx\Big) =$$

$$= e^s\Big(\int_2^\infty t\mu'(t)e^{-st}dt - \int_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt\Big) = -\frac{d}{ds}\Big(e^s\int_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt\Big),$$

то есть

$$\int_1^\infty x\mu'(x+1)e^{-sx}dx = -\frac{d}{ds}\Big(e^s\int_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt\Big), \tag{25}$$

причем, интегрируя по частям, получаем

$$\int_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt = \mu(t)e^{-st}\Big|_2^\infty + s\int_2^\infty \mu(t)e^{-st}dt = -e^{-2s} + s\phi(s). \tag{26}$$

Из равенств (23)-(26) следует, что функция $\phi(s)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{ds}\Big(se^s\phi(s)\Big) = \phi(s)(e^s - 2) - e^{-s} - \frac{e^{-s}}{s}.$$

Введем обозначение $\omega(s) = e^s\phi(s)$, тогда

$$s\omega'(s) = -2\omega(s)e^{-s} - e^{-s} - \frac{e^{-s}}{s}. \tag{27}$$

Данное дифференциальное уравнение относительно ω можно решить, например, методом Лагранжа. Прежде чем выписать решение уравнения (27) заметим, что в силу неравенства $0 \leq \mu(x) \leq x$, выполнено соотношение

$$0 \leq \omega(s) \leq e^s\int_1^\infty xe^{-sx}dx,$$

из которого следует, что

$$\lim_{s\to\infty}\omega(s)=0.$$

Тогда решение уравнения (27) имеет вид

$$\omega(s)=\frac{1}{s^2}\int_s^\infty (t+1)\exp\Big(-t-2\int_s^t\frac{1-e^{-u}}{u}du\Big)dt.$$

Поэтому

$$\phi(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}\int_0^\infty (t+1)\exp\Big(-t-2\int_s^t\frac{1-e^{-u}}{u}du\Big)dt,$$

из чего следует

$$\lim_{s\to+0}s^2\phi(s)=C_0,$$

где

$$C_0=\int_0^\infty (t+1)\exp\Big(-t-2\int_s^t\frac{1-e^{-u}}{u}du\Big)dt\approx 0.531417.$$

Теперь можно воспользоваться теоремой Таубера: если функция $\alpha(x)$ монотонно возрастает при $x>0$, $\beta>0$ и если

$$\lim_{s\to+0}s^\beta\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha(x)=C,$$

тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x^\beta}=C.$$

Функция

$$\alpha(x)=\int_0^x\mu(t)dt$$

монотонно возрастает, и

$$s^\beta\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha(x)=s^2\phi(s).$$

Поэтому по теореме Таубера при $\beta=2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x^2}=\frac{C_0}{2}.$$

Разделив обе части уравнения (20) на $x+1$ и устремив x к бесконечности, получаем, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mu(x+1)}{x+1}=C_0,$$

или

$$\eta=\lim_{x\to\infty}\frac{\mu(x)}{x}=C_0\approx 0.531417,$$

что полностью доказывает теорему. $\square$

Список литературы

[1] *Renyi A.* On a one-dimensional problem concerning space-filling // Publ.of the Math. Inst. of Hungarian Acad. Of Sciences. Vol. 3. 1958. P. 109-127.

[2] *Dvoretzky A.*, *Robbins H.* On the "parking" problem // Publ.of the Math. Inst. of Hungarian Acad. Of Sciences. Vol. 9. 1964. P. 209-226.

[3] *Ney P.E.* A random interval filling problem // Annals of Math. Statist. Vol. 33. 1962. P 702-718.

[4] *Ананьевский С.М.* Некоторые обобщения задачи о «праковке» // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т.3(61). Вып. 4. С. 525–532.

[5] *Ананьевский С.М.*, *Крюков Н.А.* Задача об эгоистичной парковке // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т.5(63). Вып.4. С. 549–555.

[6] *Pinsky R.* Problems from the Discrete to the Continuous // Springer. Vol. 3. 2014. P. 21-34.

[7] *Ананьевский С.М.*, *Чен А.П.* Обобщение задачи об эгоистичной парковке // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. (принята к печати)