Санкт–Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Скородумова Юлия Владимировна

Магистерская диссертация

Кооперативное решение на основе S-P-ядра в многошаговых играх

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5504.2020
«Исследование операций и системный анализ»

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры МТИиСР
Кузютин Денис Вячеславович

Рецензент:
ассистент, Санкт–Петербургский филиал
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»,
Бартель Мария Владимировна

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

Введение . . . 3

Постановка задачи . . . 5

Обзор литературы . . . 6

Глава 1. β-S-P-ядро в играх в развернутой форме с выигрышами в каждой позиции . . . 9

1.1. Игра в развернутой форме с совершенной информацией . . . 9

1.2. S-P-ядро в игре в развернутой форме с терминальными выигрышами . . . 11

1.3. Процедура распределения дележа и β-S-P-ядро . . . 14

1.4. Стратегическая поддержка β-S-P-ядра . . . 18

1.5. Сужение β-S-P-ядра . . . 21

1.6. β-S-P-ядро в модели «рыбных войн» в развернутой форме . . . 24

Глава 2. β-S-P-ядро в многошаговой модели добычи возобновляемых ресурсов . . . 28

2.1. Описание модели. Анализ некооперативного поведения . . . 29

2.2. Кооперативное поведение. β-S-P-ядро . . . 33

2.3. Алгоритм сужения β-S-P-ядра . . . 37

2.4. Численный пример . . . 39

Заключение . . . 43

Список литературы . . . 44

Введение

Основной целью работы является исследование свойств новой схемы кооперативного поведения в многошаговых играх с трансферабельными выигрышами, основанной на введенной в 2020 г. в работе [10] концепции Subgame-Perfect Core. Мы предлагаем обобщение данного решения для класса многошаговых игр в развернутой форме с полной информацией и выигрышами, заданными в каждой позиции игры, а также для одной многошаговой игры с дискретной динамикой, заданной разностным уравнением.

Проблеме обеспечения устойчивого долгосрочного сотрудничества (кооперации) в динамических играх n лиц посвящены сотни работ различных исследователей (см., например, [14, 46, 48]). В качестве инструментов стабилизации кооперативного соглашения используется подход, предложенный Л.А. Петросяном в статье [45]. Он заключается в том, чтобы построить такое распределение кооперативного выигрыша каждого игрока вдоль кооперативной траектории развития динамической игры, чтобы полученное распределение (процедура распределения дележа - ПРД, payoff distribution procedure, payment schedule) удовлетворяло ряду привлекательных свойств, например: поддерживало стимул к кооперации на протяжении всего времени игры, было динамически устойчивым (состоятельным во времени [43]), сильно динамически устойчивым [28, 44, 46, 48], устойчивым против иррационального поведения игроков [58] и т.д. Развитию данного подхода применительно к различным классам динамических игр посвящены, в частности, работы [12, 18, 21, 22, 25, 26, 28, 33, 41, 42, 44, 49, 50, 52, 55, 57, 60].

В статье [10] была представлена новая концепция решения для игр в развернутой форме с терминальными выигрышами (заданными только в окончательных позициях дерева игры) - так называемое S-P-ядро. Любой вектор из S-P-ядра является таким распределением суммарного кооперативного выигрыша (исключительно в окончательной позиции кооперативной партии), что никакая коалиция не может совершить выгодное для себя отклонение ни в какой подыгре с начальной позицией на кооперативной партии (при условии, что в случае отклонения коалиции S в подыгре между S и остальными игроками, действующими индивидуально, разыгрывается абсолютное равновесие по Нэшу - subgame-perfect equilibria [56]).

В работе [29] было предложено распространить естественным образом данную концепцию ядра на класс игр в развернутой форме, в котором выигрыши игроков заданы в каждой позиции игры, за счет применения специальной ПРД (процедуры распределения дележа) β - то есть подходящего правила распределения текущих выигрышей в каждой позиции вдоль кооперативной партии [14, 18, 45, 46, 59]. Были изучены свойства предложенного обобщения S-P-ядра, названного β-S-P-ядро.

Постановка задачи

Основными задачами данной работы являются:

1. Изучить предложенную в работе [10] для игр в развернутой форме с терминальными выигрышами концепцию S-P-ядра;
2. Обобщить концепцию S-P-ядра на класс игр в развернутой форме с выигрышами, определенными в каждой позиции игры (с использованием подходящей процедуры распределения дележа);
3. На нескольких примерах сравнить S-P-ядро и β-S-P-ядро;
4. Определить наличие/отсутствие взаимосвязи между сильным равновесием по Нэшу (SNE) и β-S-P-ядром;
5. Предложить методы сужения β-S-P-ядра, если оно представляет собой множество процедур распределения дележа;
6. Продемонстрировать свойства и реализацию β-S-P-ядра в многошаговой игре с дискретной динамикой, моделирующей добычу возобновляемых ресурсов (с симметричными и асимметричными игроками).

Обзор литературы

Теория динамических игр подробно описана в книгах [14, 46, 48, 59], основы теории игр в развернутой форме были заложены в статье [17]. Понятие равновесия по Нэшу было введено в статье [39], а наиболее известное уточнение этого решения - Subgame Perfect Equilibrium (SPE или абсолютное равновесие) для игр в развернутой форме было предложено в статье [56].

Метод распределения кооперативного выигрыша каждого игрока вдоль кооперативной траектории развития динамической игры (чтобы полученная процедура распределения дележа - ПРД, payoff distribution procedure, удовлетворяла свойству динамической устойчивости [43]), был впервые предложен в работе [45]. Развитию данного подхода применительно к различным классам динамических игр, а также с учетом иных желательных свойств кооперативных решений (например, сильная динамическая устойчивость, устойчивость против иррационального поведения игроков [58] и т.д.) посвящены, в частности, работы [12, 18, 21, 22, 25, 26, 28, 33, 41, 42, 44, 49, 50, 52, 55, 57, 60].

В работах [21, 22] для многокритериальных игр в развернутой форме предложены алгоритмы построения «улучшенной» ПРД (удовлетворяющей свойству эффективности, неравенству динамической устойчивости и свойству неотрицательности) и «обобщенной» ПРД (удовлетворяющей свойствам эффективности и неотрицательности, неравенству динамической устойчивости, свойству сильной устойчивости относительно иррационального поведения игроков), а также отмечена принципиальная невозможность построения динамически устойчивой ПРД, одновременно удовлетворяющей свойству неотрицательности и условию баланса.

В статье [25] для многошаговой игры в развернутой форме со случайными ходами сформулирован Attitude SPE алгоритм, позволяющий построить единственное абсолютное равновесие по Нэшу (subgame perfect equilibrium) в чистых стратегиях с использованием информации об отношении игроков друг к другу. Для выбора единственного кооперативного пучка оптимальных траекторий предложен PRB алгоритм, основанный на «ранге» игроков внутри гранд-коалиции, доказана состоятельность во времени этого метода выбора кооперативного пучка. Для игр со случайными ходами формализованы свойства эффективности в подыграх и состоятельности в подыграх, предложена схема долгосрочной кооперации (график платежей), удовлетворяющая указанным свойствам и условию баланса.

В статье [18] для многокритериальных игр в развернутой форме (без ходов случая) предложен RL-алгоритм для выбора единственной кооперативной траектории (а также построения векторной характеристической функции), рассмотрена проблема сильной динамической устойчивости С-ядра.

В статье [28] для многокритериальных игр в развернутой форме (без ходов случая) предложен MSRD-алгоритм для выбора единственной кооперативной траектории (а также построения векторной характеристической функции), рассмотрены три процедуры распределения дележей (ПРД) и их свойства.

В статье [26] для многокритериальной игры со случайными ходами (т.е. при наличии неопределенности) доказано существование равновесия по Парето в чистых стратегиях. На основе предложенного авторами ранее MSRD подхода (минимизация суммы отклонений выигрыша игрока по каждому критерию от «идеального вектора» выигрышей) построено обоснованное сужение множества (совершенных в подыграх) равновесий Парето (Subgame perfect Pareto equilibrium).

В статье [9] было введено понятие γ-характеристической функции и соответствующая концепция ядра кооперативной игры.

Схема кооперации, связанная с концепцией S-P-ядра в одной теоретико-игровой модели управления изменением климата, была исследована в [8].

В настоящей работе рассматривается модель «рыбных войн» (модель управления рыболовством), впервые представленная в [31]. Модель имеет две особенности: каждая сторона конфликта учитывает действия другой стороны, и в результате их действий меняется численность популяции рыбы.

Эта модель относится к динамическим моделям, связанным с проблемами управления биоресурсами. В обзоре [54], посвященном анализу кооперативного поведения в таких моделях, рассмотрено несколько подходов для определения и поддержания сотрудничества. Анализу различных моделей управления рыбными ресурсами посвящены работы [2, 33, 34]

В статье [4] исследуется асимметричный случай модели «рыбной войны» (в предположении, что игроки имеют разные коэффициенты дисконтирования).

Глава 1. β-S-P-ядро в играх в развернутой форме с выигрышами в каждой позиции

В настоящей главе вводится новая концепция кооперативного решения для игры в развернутой форме с выигрышами, определенными на всех позициях дерева игры, названная β-S-P-ядро. Исследуются некоторые свойства и способы сужения β-S-P-ядра, приводятся примеры его реализации.

В первом параграфе представлены основные обозначения для класса игр в развернутой форме с совершенной информацией. В параграфе 2 приведены определение S-P-ядра из [10], а также пример игры в развернутой форме с терминальными выигрышами и пустым S-P-ядром. Затем, в параграфе 3, рассматривается та же игра, только с выигрышами, определенными в каждой вершине дерева игры. Приведено определение β-S-P-ядра, показано, что для рассматриваемой игры оно не является пустым и состоит из множества ПРД. В параграфе 4 раскрыта взаимосвязь между сильным равновесием по Нэшу (SNE) и β-S-P-ядром. В параграфе 5 представлено несколько подходов к сужению β-S-P-ядра. Пример реализации β-S-P-ядра в симметричной двухэтапной модели управления рыболовством в развернутой форме рассматривается в параграфе 6.

1.1 Игра в развернутой форме с совершенной информацией

Рассматриваем конечную многошаговую игру в развернутой форме [17, 24, 25, 46]. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

- $N = \{1, \ldots, n\}$ – конечный набор всех игроков.
- K – дерево игры с корнем x_0 и множеством всех вершин P.
- $S(x)$ – множество всех прямых потомков вершины x, и $S^{-1}(y)$ является предшествующей вершиной относительно вершины $y \neq x_0$:

$y \in S(S^{-1}(y))$.

- P_i – множество всех вершин, в которых i-й игрок делает выбор, $P_i \cap P_j = \emptyset$, для любых $i, j \in N$, $i \neq j$.

- $P_{n+1} = \{z^j\}_{j=1}^m$ – множество окончательных позиций, $S(z^j) = \emptyset$ $\forall z^j \in P_{n+1}$. Заметим, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} P_i = P$.

- $\omega = (x_0, \ldots, x_{t-1}, x_t, \ldots, x_T)$ – траектория (путь) в дереве игры, $x_{t-1} = S^{-1}(x_t),\ 1 \leq t \leq T$, $x_T = z^j \in P_{n+1}$.

- $h_i(x)$ – выигрыш i-го игрока в позиции $x \in P$. Предполагаем, что выигрыши неотрицательны, то есть $h_i(x) \geqslant 0$ для любых $i \in N$ и $x \in P$.

Пусть $G^P(n)$ обозначает класс всех конечных игр n лиц в развернутой форме с совершенной информацией [14, 17, 46], а $\Gamma^{x_0} \in G^P(n)$ обозначает игру с начальной вершиной x_0.

Будем считать, что игроки используют чистые стратегии. Чистая стратегия $u_i(\cdot)$ i-го игрока – это функция, для каждой позиции $x \in P_i$ определяющая следующую позицию $u_i(x) \in S(x)$, которую i-й игрок должен выбрать в x. Пусть U_i – множество всех чистых стратегий i-го игрока, $U = \prod_{i \in N} U_i$.

Каждая ситуация $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$ создает путь $\omega(u) = (x_0, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_T) = (x_0, x_1(u), \ldots, x_t(u), x_{t+1}(u), \ldots, x_T(u))$, где $x_{t+1} = u_j(x_t) \in S(x_t)$, если $x_t \in P_j$, $0 \leq t \leq T-1$, $x_T \in P_{n+1}$, и, следовательно, вектор выигрыша игроков. Обозначим значение функции выигрыша i-го игрока в ситуации u как

$$H_i(u) = \tilde{h}_i(\omega(u)) = \sum_{\tau=0}^{T} h_i(x_\tau(u)).$$

Согласно [14, 17, 46], каждая промежуточная позиция $x_t \in P \setminus P_{n+1}$ генерирует подыгру Γ^{x_t} с деревом K^{x_t}. Пусть $P_i^{x_t}$, $i \in N$ обозначает сужение P_i на дереве подыгры K^{x_t}, а $u_i^{x_t}$, $i \in N$ обозначает сужение чистой стратегии i-го игрока $u_i(\cdot)$ в Γ^{x_0} на $P_i^{x_t}$. Ситуация (подыгры) $u^{x_t} =$

$(u_1^{x_t}, \ldots, u_n^{x_t})$ определяет путь $\omega^{x_t}(u^{x_t}) = (x_t, x_{t+1}, \ldots, x_T) = (x_t, x_{t+1}(u^{x_t}), \ldots, x_T(u^{x_t}))$ в подыгре и, соответственно, вектор выигрыша игроков в подыгре Γ^{x_t}:

$$H_i^{x_t}(u^{x_t}) = \tilde{h}_i^{x_t}(\omega^{x_t}(u^{x_t})) = \sum_{\tau=t}^{T} h_i(x_\tau(u^{x_t})). \tag{1}$$

Заметим, что (1) существенно отличается от определения выигрышей в подыгре, которое принято для игр в развернутой форме с терминальными выигрышами (см. [17, 46]).

Определение 1. [39] Ситуация $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ является ситуацией равновесия по Нэшу (NE) в игре $\Gamma^{x_0} \in G^P(n)$, если $H_i(v_i, u_{-i}) \leqslant H_i(u_i, u_{-i})$, $\forall v_i \in U_i, \forall i \in N$.

Пусть $NE(\Gamma^{x_0})$ обозначает множество всех ситуаций равновесия Нэша в чистых стратегиях в игре Γ^{x_0}.

Определение 2. [56] Ситуация u является ситуацией абсолютного равновесия по Нэшу (SPE, SPNE) в игре $\Gamma^{x_0} \in G^P(n)$, если $\forall x \in P \setminus P_{n+1}$ $u^x \in NE(\Gamma^x)$, т. е. сужение u на любую подыгру Γ^x формирует ситуацию равновесия по Нэшу (NE) в этой подыгре.

1.2 S-P-ядро в игре в развернутой форме с терминальными выигрышами

Новая многообещающая концепция последовательного кооперативного поведения под названием subgame-perfect core была представлена в [10] для игр в развернутой форме с совершенной информацией и выигрышами, которые определены и, следовательно, могут быть перераспределены только в терминальных позициях. Приведем ниже определение subgame-perfect core из [10].

Игрок $i \in N$ называется активным в подыгре Γ^x, если у этого игрока есть хотя бы одна позиция в этой подыгре, т.е. $P_i \cap K^x \neq \emptyset$. Аналогично, будем называть коалицию $S \subset N$ активной в Γ^x (или «активной в x»), если все игроки из S активны в Γ^x.

Пусть $\Gamma^{x_0,S}$ обозначает индуцированную игру, которая отличается от Γ^{x_0} только тем, что коалиция S становится новым игроком с $h_S(x) = \sum\limits_{i \in S} h_i(x)$, $x \in P^{n+1}$. Индуцированная подыгра $\Gamma^{x,S}$ определяется таким же образом (если S активна в Γ^x).

Обозначим через $\gamma(S; x)$, $x \in P \setminus P_{n+1}$, $S \subset N$ максимально возможный выигрыш S в ситуации абсолютного равновесия в индуцированной игре $\Gamma^{x,S}$. В игре в развернутой форме с терминальными выигрышами вектор $(p_1, \ldots, p_n)$ возможен, если $\sum\limits_{i \in N} p_i = \sum\limits_{i \in N} h_i(z) = h_N(z)$ для некоторой терминальной позиции $z \in P_{n+1}$. Обратим внимание, что для любой терминальной позиции $z \in P_{n+1}$ существует единственная траектория $\omega = (x_0, \ldots, z)$, ведущая к этой позиции. Будем ссылаться на траекторию, ведущую к $z \in P_{n+1}$, как на траекторию, ведущую к возможному вектору выигрыша $(p_1, \ldots, p_n)$, учитывая, что $\sum\limits_{i \in N} p_i = h_N(z)$ [10].

Определение 3. [10] Возможный вектор выигрыша $(p_1, \ldots, p_n)$ принадлежит S-P-ядру (subgame-perfect core, S-P Core) игры $\Gamma \in G^P(n)$ в развернутой форме с терминальными выигрышами, если для любой позиции x на траектории $\omega = (x_0, \ldots, z)$, ведущей к $(p_1, \ldots, p_n)$, $\sum\limits_{i \in N} p_i = h_N(z)$ и для любой коалиции $S \subset N$, активной в x, выполняется:

$$\gamma(S; x) \leqslant \sum_{i \in S} p_i. \tag{2}$$

Замечание 1. Определение 3 подразумевает (см. [10]), что любой возможный вектор выигрыша $(p_1, \ldots, p_n)$ из S-P-ядра эффективен, т.е.

$$\sum_{i \in N} p_i = \max_{z \in P_{n+1}} \sum_{i \in N} h_i(z) = h_N(z^*). \tag{3}$$

Более того, (2) означает, что ни одна коалиция S, которая активна в любой подыгре Γ^x вдоль траекторий, ведущих ко всем конечным позициям

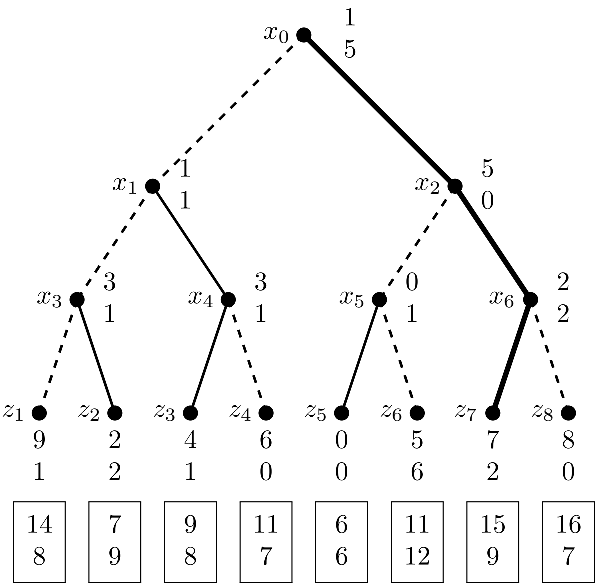

Рис. 1: Игра двух лиц в развернутой форме

z^*, в которых выполняется (3), не может получить выигрыш SPE $\gamma(S;x)$, который превышает ее общий выигрыш в векторе $(p_1,\ldots,p_n)$ S-P-ядра.

Общая сумма выигрышей (3) может быть интерпретирована как (максимальный) совместный выигрыш большой коалиции N, когда траектория $(x_0,\ldots,z^*)$ является кооперативной. Тогда вектор выигрыша $(p_1,\ldots,p_n)$ из S-P-ядра является распределением кооперативного выигрыша среди игроков, который соответствует (2) в любой подыгре Γ^x в любой кооперативной траектории. Следовательно, если S-P-ядро игры в развернутой форме $\Gamma \in G^P(n)$ с терминальными выигрышами не является пустым, игроки могут обеспечить устойчивость кооперативного соглашения путем перераспределения общей суммы выигрышей $h_N(z^*)$ на всех конечных позициях z^* с (3) в соответствии с вектором $(p_1,\ldots,p_n)$ S-P-ядра.

Воспользуемся следующим примером, чтобы продемонстрировать S-P-ядро.

Пример 1. (S-P-ядро в игре двух лиц в развернутой форме с терминальными выигрышами).

Пусть $n=2, P_{n+1}=\{z_1,\ldots,z_8\}, P_1=\{x_0,x_3,x_4,x_5,x_6\}, P_2=\{x_1,x_2\}$. Рассматриваем игру в развернутой форме с терминальными выигрышами, т.е. выигрыши игроков $h_i(z)$ определяются только в терминальных позициях $z \in P_{n+1}$. Эти выигрыши $(h_1(z), h_2(z))^T$ на Рис. 1 записаны в прямоугольниках под каждой терминальной вершиной. Предполагаем, что выигрыши игроков равны нулю для всех промежуточных позиций $x_0, \ldots, x_6$.

Кооперативная траектория $\bar{\omega} = (x_0, x_2, x_6, z_7 = z^*)$, выделенная на Рис. 1, соответствует максимальному общему (кооперативному) выигрышу 24. Эта игра имеет единственную ситуацию абсолютного равновесия (SPE) (соответствующие выборы игроков отмечены пунктирными линиями), которая определяет траекторию $\omega = (x_0, x_1, x_3, z_1)$ и вектор выигрыша $(14, 8)$.

Очевидно, что $p_1 + p_2 = 24$ в соответствии с (3), и S-P-ядро пустое, так как

$$\gamma(\{1\}; x_0) = 14 \leqslant p_1, \quad \gamma(\{2\}; x_2) = 12 \leqslant p_2.$$

Следовательно, игроки не могут обеспечить устойчивость кооперативного соглашения только за счет перераспределения выигрышей на терминальной позиции $z_7 = z^*$.

Используем этот пример, чтобы мотивировать расширение концепции S-P-ядра на более широкий класс игр. А именно, на класс игр в развернутой форме, где выигрыши определены на всех вершинах, и игроки могут перераспределять текущие выигрыши на каждой позиции кооперативной траектории. Естественная модификация определения S-P-ядра позволяет гарантировать непустоту (модифицированного или расширенного) S-P-ядра для игры в примере 1, а также предоставить алгоритм его реализации с помощью соответствующей процедуры распределения дележа (см. [14, 45, 46]).

1.3 Процедура распределения дележа и β-S-P-ядро

Далее рассматриваем общий случай игры в развернутой форме $\Gamma^{x_0} \in G^P(n)$, где выигрыши игроков $h_i(x)$ определены во всех позициях $x \in P$. Пусть $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{u}) = (x_0 = \bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_t, \ldots, \bar{x}_T)$ обозначает кооперативную траекторию, т. е.

$$\max_{u\in U}\sum_{i\in N}H_i(u)=\sum_{i\in N}H_i(\bar u)=\sum_{i\in N}\sum_{\tau=0}^{T}h_i(\bar x_\tau)=\sum_{i\in N}\widetilde{h}_i(\bar\omega). \tag{4}$$

Предположим, что существует единственный кооперативный путь в $\Gamma^{x_0}\in G^P(n)$ или что игроки используют определенный подход (например, алгоритм PRB, предложенный в [25]), чтобы выбрать единственный кооперативный путь из всех $\bar\omega$, удовлетворяющих (4). Стоит отметить, что было доказано, что алгоритм PRB удовлетворяет свойству согласованности во времени (см. [25, 43, 45, 46]).

Вектор $(p_1^{\bar x_t},\dots,p_n^{\bar x_t})$:

$$\sum_{i\in N}p_i^{\bar x_t}=\sum_{i\in N}\sum_{\tau=t}^{T}h_i(\bar x_\tau)=\sum_{i\in N}\widetilde{h}_i(\bar\omega^{\bar x_t}) \tag{5}$$

определяет возможное распределение общего кооперативного выигрыша (в подыгре) между игроками и может рассматриваться как кооперативное решение для подыгры $\Gamma^{\bar x_t},\bar x_t\in\bar\omega$.

Пусть $\beta=\{\beta_i(\bar x_\tau)\},i=1,\dots,n;\tau=0,\dots,T;\bar x_\tau\in\bar\omega$ – процедура распределения дележа (ПРД) для кооперативного решения $(p_1,\dots,p_n)=(p_1^{\bar x_0},\dots,p_n^{\bar x_0})$ (см. [14, 18, 45, 46, 59]). То есть $\beta_i(\bar x_\tau)$ обозначает фактический текущий выигрыш, который i-й игрок получает в $\bar x_\tau\in\bar\omega$ вместо $h_i(\bar x_\tau)$, если игроки используют ПРД β.

Напомним несколько свойств ПРД β (см. [18, 25, 45, 46]).

Определение 4. [25] ПРД β для вектора выигрыша $(p_1,\dots,p_n)$ при условии (5) удовлетворяет условию эффективности в подыгре, если для любых $\bar x_t\in\bar\omega=(\bar x_0,\dots,\bar x_T)$

$$\sum_{\tau=t}^{T}\beta_i(\bar x_\tau)=\widetilde{\beta}_i(\bar x_t,\bar x_{t+1},\dots,\bar x_T)=\widetilde{\beta}_i(\bar\omega^{\bar x_t})=p_i^{\bar x_t}. \tag{6}$$

Условие (6) для $t=0$ называют условием эффективности в игре [25, 45, 46].

Определение 5. [18, 45, 46] ПРД $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_\tau)\}$ удовлетворяет условию строгого баланса, если для каждой позиции $\bar{x}_\tau \in \bar{\omega}, \tau = 0, \dots, T$

$$\sum_{i \in N} \beta_i(\bar{x}_\tau) = \sum_{i \in N} h_i(\bar{x}_\tau). \tag{7}$$

Замечание 2. Условие строгого баланса (7) для ПРД β следует из условия эффективности в подыгре (6).

Предполагаем, что ПРД β должна удовлетворять условию неотрицательности:

$$\beta_i(\bar{x}_\tau) \geqslant 0 \ \ \forall i \in N \ \ \forall t = 0, \dots, T. \tag{8}$$

В [29] введена такая ПРД β, что у всех активных коалиций $S \subset N$ есть стимул следовать соглашению о сотрудничестве $(p_1^{\bar{x}_t}, \dots, p_n^{\bar{x}_t})$ в каждой подыгре $\Gamma^{\bar{x}_t}, \bar{x}_t \in \bar{\omega}$ вдоль кооперативной траектории. Приведем ниже определение β-S-P-ядра [29].

Предположим, что коалиция $S \subset N$ следует кооперативному сценарию (т.е. ПРД β реализуется по кооперативному пути от $\bar{x}_0$ до некоторой промежуточной позиции $\bar{x}_t \in \bar{\omega},\ 1 \leqslant t \leqslant T-1$), но затем решает отклониться от сотрудничества в подыгре $\Gamma^{\bar{x}_t}$ (S должна быть активна в $\Gamma^{\bar{x}_t}$). Предполагая, что оставшиеся игроки действуют индивидуально (см. [7, 10]), наибольший выигрыш, который коалиция S может достичь за всю игру Γ^{x_0}, равен $\sum\limits_{\tau=0}^{t-1} \beta_S(\bar{x}_\tau) + \gamma(S; \bar{x}_t)$.

Если предположить, что

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_S(\bar{x}_\tau) + \gamma(S; \bar{x}_t) \leqslant \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_S(\bar{x}_\tau) + \sum_{\tau=t}^{T} \beta_S(\bar{x}_\tau), \tag{9}$$

тогда у коалиции S нет причин отклоняться от кооперативного сценария в $\bar{x}_t$.

Если упростить (9) и принять $t = 0$, получим следующее условие для «состоятельности в подыграх» соглашения о сотрудничестве (S активна в

$\bar{x}_t$):

$$\gamma(S;\bar{x}_t) \leqslant \sum_{\tau=t}^{T} \beta_S(\bar{x}_\tau), \quad \bar{x}_t \in \bar{\omega}, \quad t = 0, \ldots, T-1. \tag{10}$$

Обратим внимание, что неравенство (10) подразумевает ту же устойчивость соглашения о сотрудничестве, что и неравенство (2) в определении S-P-ядра.

Определение 6. [29] Множество всех ПРД β, удовлетворяющих (5), (6), (7), (8) и (10), называется β-S-P-ядром (β-subgame-perfect core, β-S-P Core) для игры в развернутой форме $\Gamma^{x_0} \in G^P(n)$.

Снова используем игру двух лиц в развернутой форме из примера 1, чтобы продемонстрировать предлагаемое расширение S-P-ядра, основанное на процедуре распределения дележа.

Пример 2. (β-S-P-ядро в игре двух лиц в развернутой форме с выигрышами, определенными в каждой позиции).

Предположим, что выигрыши игроков в игре в развернутой форме Γ^{x_0} из примера 1 определяются во всех вершинах $x \in P$ (эти выигрыши $(h_1(x), h_2(x))^T$ написаны в дереве игры на Рис. 1, а общие выигрыши, собранные вдоль каждой траектории, написаны ниже соответствующих терминальных вершин).

Ограничения (5) и (6) для $t = 0$ примут вид

$$\beta_1(x_0) + \beta_1(x_2) + \beta_1(x_6) + \beta_1(z_7) = \widetilde{\beta}_1(\bar{\omega}) = p_1,$$

$$\beta_2(x_0) + \beta_2(x_2) + \beta_2(x_6) + \beta_2(z_7) = \widetilde{\beta}_2(\bar{\omega}) = p_2,$$

$$p_1 + p_2 = 24.$$

Запишем условия (10), например, в подыгре Γ^{x_2} на кооперативной траектории для всех коалиций S, активных в x_2:

$$
\begin{cases}
\gamma(N;x_2) = 18 \leqslant \beta_1(x_2) + \beta_2(x_2) + \beta_1(x_6) + \\
\qquad\qquad\qquad + \beta_2(x_6) + \beta_1(z_7) + \beta_2(z_7), \\
\gamma(\{1\};x_2) = 10 \leqslant \beta_1(x_2) + \beta_1(x_6) + \beta_1(z_7), \\
\gamma(\{2\};x_2) = 7 \leqslant \beta_2(x_2) + \beta_2(x_6) + \beta_2(z_7).
\end{cases} \tag{11}
$$

Обратим внимание, что первое ограничение в (11) является обязательным из-за условий строгого баланса (7).

Система (5)–(8) и (10) для этой игры совместна, и поэтому β-S-P-ядро не является пустым. Более того, каждая ПРД β из β-S-P-ядра должна удовлетворять следующему условию:

$$\widetilde{\beta}_1 = 15 + \varepsilon, \quad \widetilde{\beta}_2 = 9 - \varepsilon, \quad -1 \leqslant \varepsilon \leqslant 1.$$

Ниже представлены два примера ПРД β из β-S-P-ядра. Первая ПРД β подразумевает, что игроки делят поровну общую выгоду от сотрудничества: $\widetilde{\beta}_1 = 15, \quad \widetilde{\beta}_2 = 9$;

$\bar{\omega}$	x_0	x_2	x_6	z_7
$\beta_1(x_t)$	4	1	2	8
$\beta_2(x_t)$	2	4	2	1

Другая ПРД β' подразумевает, что второй игрок получает всю выгоду от кооперации: $\widetilde{\beta}'_1 = 14, \quad \widetilde{\beta}'_2 = 10$;

$\bar{\omega}$	x_0	x_2	x_6	z_7
$\beta'_1(x_t)$	3	1	2	8
$\beta'_2(x_t)$	3	4	2	1

1.4 Стратегическая поддержка β-S-P-ядра

Если игроки перераспределяют текущие выигрыши на каждой позиции кооперативной траектории в соответствии с некоторой ПРД β, интересно рассмотреть связанную некооперативную игру $\Gamma_{\beta}^{x_0}$, которая отличается от оригинальной игры Γ^{x_0} тем, что выигрыши $h_i(\bar{x}_t),\ i \in N$, в каждой позиции $\bar{x}_t \in \bar{\omega}$ кооперативной траектории заменяются на $\beta_i(\bar{x}_t)$. Этот подход использовался ранее, в частности, в [46] для введения «упорядоченной игры» для дифференциальной и многошаговой кооперативной игры, и в [10], чтобы определить «стратегическое преобразование» игры в развернутой форме с терминальными выигрышами.

Как было доказано в [27], если β-S-P-ядро непустое, то в связанной некооперативной игре $\Gamma_{\beta}^{x_0}$ существует SPE (ситуация абсолютного равновесия) $\underline{u}$, которая создает кооперативную траекторию $\bar{\omega} = \omega(\underline{u})$ с вектором выигрыша $H_i(\underline{u}),\quad i \in N$, из β-S-P-ядра оригинальной игры Γ^{x_0}. Это свойство означает, что кооперативный сценарий, основанный на ПРД β из β-S-P-ядра, стратегически поддерживается (т.е. может быть реализован как ситуация абсолютного равновесия) в связанной некооперативной игре $\Gamma_{\beta}^{x_0}$.

Утверждение 1. [27] Пусть β-S-P-ядро игры в развернутой форме $\Gamma^{x_0} \in G^P(n)$ непустое, и $\beta = \beta_i(\bar{x}_t),\quad i \in N,\quad \bar{x}_t \in \bar{\omega}$, – ПРД из β-S-P-ядра. Тогда существует SPE (ситуация абсолютного равновесия) $\underline{u} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$ в связанной некооперативной игре $\Gamma_{\beta}^{x_0}$, которая создает кооперативную траекторию $\bar{\omega} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_T)$ с вектором выигрыша $H_i(\underline{u}) = \sum\limits_{t=0}^{T} \beta_i(\bar{x}_t) = \widetilde{\beta}_i(\bar{\omega}),\ i \in N$.

В [1] было введено уточнение концепции равновесия по Нэшу (NE) под названием сильное NE (SNE) для стратегических игр. Как выясняется, если игра в развернутой форме $\Gamma \subset G^P(n)$ допускает единственное абсолютное SNE, тогда β-S-P-ядро состоит из единственной ПРД.

Определение 7. [10] Ситуация в чистых стратегиях $\underline{u} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$ – ситуация абсолютного сильного равновесия по Нэшу (SPSNE) в игре $\Gamma^{x_0} \subset G^P(n)$, если $\underline{u}$ является ситуацией абсолютного равновесия (SPE) каждой индуцированной игры $\Gamma^{x_0,S}, \quad S \subset N$.

Если игра в развернутой форме имеет SPSNE $\underline{u}$, то ни у одной коалиции нет выгодного совместного отклонения от $\underline{u}$ ни в одной подыгре.

Заметим, что определение чистой стратегии для игры в развернутой форме изначально подразумевает некоторую гибкость (см. [17, 37, 46]): две ситуации могут определять различные варианты выбора некоторых игроков на некоторых позициях, но генерировать один и тот же путь в дереве игры и одни и те же выигрыши игроков. В дальнейшем будем ссылаться на «игра Γ имеет единственную ситуцию абсолютного равновесия (SPE) или Γ имеет несколько ситуций абсолютного равновесия (SPE), но все они генерируют один и тот же путь на дереве игры» как «игра Γ допускает единственную ситуцию абсолютного равновесия (SPE)».

Утверждение 2. Пусть каждая индуцированная игра $\Gamma^{x_0,S}, \quad S \subset N$, игры $\Gamma^{x_0} \subset G^P(n)$ допускает единственную ситуацию абсолютного равновесия (SPE). Если Γ^{x_0} допускает ситуацию SPSNE, то эта ситуация SPSNE единственна и β-S-P-ядро состоит из единственной ПРД:

$$\beta_i(\bar{x}_t) = h_i(\bar{x}_t), \quad \bar{x}_t \in \bar{\omega}. \tag{12}$$

Доказательство. Доказательство первого утверждения является простым и уже представлено в [10]. Пусть $\underline{u} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$ обозначает единственную ситуацию SPSNE в Γ^{x_0}.

Поскольку $\underline{u}$ является единственной ситуацией SPE в $\Gamma^{x_0,N}$, она генерирует кооперативную траекторию $\bar{\omega} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_T)$ в дереве игры. Более того, единственная ситуация SPE в каждой индуцированной игре $\Gamma^{x_0,S}, \quad S \subset N$ – это $\underline{u}$, и каждая индуцированная подыгра $\Gamma^{\bar{x}_t,S}, \quad S \subset N, \quad t = 0, \ldots, T-1$ допускает единственную ситуацию SPE (а именно, сужение $\underline{u}$ на подыгру $\Gamma^{\bar{x}_t,S}$), которая генерирует траекторию $\bar{\omega}^{\bar{x}_t} = (\bar{x}_t, \ldots, \bar{x}_T)$.

Тогда (10) принимает вид

$$\gamma(S;\bar{x}_t)=\sum_{\tau=t}^{T}h_S(\bar{x}_\tau)\leqslant\sum_{\tau=t}^{T}\beta_S(\bar{x}_\tau),\quad t=0,\ldots,T-1. \tag{13}$$

Принимая во внимание (5), (6) и условие строгого баланса (7), получаем из (13) методом обратной индукции, что

$$\beta_i(\bar{x}_t)=h_i(\bar{x}_t),\quad \bar{x}_t\in\bar{\omega}.$$

Следовательно, в β-S-P-ядре существует единственная ПРД β, которая не подразумевает никаких перераспределений выигрыша между игроками, пока игра следует кооперативной траектории $\bar{\omega}$. $\square$

Следствие 1. Если игра двух лиц в развернутой форме $\Gamma^{x_0}\in G^P(2)$ допускает единственную ситуацию SPE, которая эффективна по Парето, то β-S-P-ядро состоит из единственной ПРД (12).

Стоит отметить, что β-S-P-ядро для игр в развернутой форме является более слабой концепцией, чем ситуация SPSNE. Например, игра из примера 2 имеет непустое β-S-P-ядро, но не имеет ситуации SPSNE.

1.5 Сужение β-S-P-ядра

Если β-S-P-ядро игры в развернутой форме не является пустым, то, как правило, состоит из нескольких процедур распределения дележа.

Утверждение 3. [29] Если β-S-P-ядро игры в развернутой форме $\Gamma\in G^P(n)$ непусто, то это (замкнутый) выпуклый многогранник B в $R^{n\times(T+1)}$.

Стоит отметить, что основная цель каждого игрока j при выборе единственной ПРД β из β-S-P-ядра – максимизировать значение $p_j=\widetilde{\beta}_j(\bar{\omega})$, которое j-й игрок получит в соответствии с соглашением о сотрудничестве, учитывая, что распределение $\widetilde{\beta}_i(\bar{\omega})$ $(\{\beta_i(\bar{x}_t)\},\ \bar{x}_t\in\bar{\omega})$ вдоль кооперативного пути удовлетворяет ограничениям (6), (8) и (10).

Предложим несколько подходов сужения β-S-P-ядра, т.е. некоторые правила выбора $\widetilde{\beta}_j(\bar{\omega}),\ \ j \in N$. Один из подходов заключается в максимизации выгоды некоторого (целевого) игрока j от сотрудничества:

$$\widetilde{\beta}_j - \gamma(\{j\}; x_0) \to \max_{\beta \in B}. \tag{14}$$

Заметим, что (14) – это задача линейного программирования, которая имеет решение благодаря Утв. 3. Если применить этот подход к игре в примере 2, предполагая, что выигрыш 2-го игрока β_2 – целевая функция, результирующей ПРД будет $\beta' \ :\ \widetilde{\beta}'_1 = 14,\ \ \widetilde{\beta}'_2 = 10$.

Возможен подход к сужению β-S-P-ядра с применением арбитражных схем (см. [6, 38]). Выбираем единственный вектор $(\widetilde{\beta}_j)_{j\in N}$ из B, когда вектор выигрыша в ситуации абсолютного равновесия (SPE) $(\gamma(\{j\}; x_0))_{j\in N}$ служит точкой разлада («status quo»). Например, при использовании симметричного арбитражного решения Нэша соответствующая проблема принимает вид

$$\prod_{i\in N} (\widetilde{\beta}_i - \gamma(\{i\}; x_0)) \to \max_{\beta \in B}. \tag{15}$$

Если применить (15) к игре в примере 2, то будет выбрана ПРД β : $\widetilde{\beta}_1 = 15,\ \ \widetilde{\beta}_2 = 9$.

Другой (оптимизационный) подход максимизирует относительную выгоду от сотрудничества (RBC - relative benefit of cooperation) игрока, который менее других выигрывает от кооперации. Пусть Δ_j обозначает абсолютный диапазон выигрыша j-го игрока в Γ^{x_0}. Тогда $\frac{\widetilde{\beta}_j - \gamma(\{j\}; x_0)}{\Delta_j}$ можно интерпретировать как относительную выгоду игрока j от сотрудничества в соответствии с ПРД β. Тогда ожидается, что игроки найдут решение следующей задачи оптимизации:

$$\max_{\beta\in B} \min_{j\in N} \frac{\widetilde{\beta}_j - \gamma(\{j\}; x_0)}{\Delta_j}. \tag{16}$$

Замечание 3. Для игры двух лиц (16) принимает вид

$$\frac{\widetilde{\beta}_1 - \gamma(\{1\}; x_0)}{\Delta_1} = \frac{\widetilde{\beta}_2 - \gamma(\{2\}; x_0)}{\Delta_2}. \tag{17}$$

Проиллюстрируем последний подход, используя игру из примера 2:

$$\frac{\widetilde{\beta}_1 - 14}{16 - 6} = \frac{\widetilde{\beta}_2 - 8}{12 - 6} \iff \frac{(15 + \epsilon) - 14}{10} = \frac{(9 - \epsilon) - 8}{6} \iff \epsilon = 0.2.$$

Следовательно, $\widetilde{\beta}_1 = 15.2, \widetilde{\beta}_2 = 8.8$, а распределение $\widetilde{\beta}_j$ вдоль кооперативной траектории $\bar{\omega}$ удовлетворяет условиям (7), (8) и (10). Например, следующая ПРД β'' соответствует всем ограничениям.

$\bar{\omega}$	x_0	x_2	x_6	x_7	$\widetilde{\beta}''_j(\bar{\omega})$
$\beta''_1(x_t)$	4.2	1	2	8	15.2
$\beta''_2(x_t)$	1.8	4	2	1	8.8

Позже будем ссылаться на последний подход сужения β-S-P-ядра как на правило maxmin RBC. Заметим, что другой подход к оценке относительной выгоды от сотрудничества был предложен в [11] для дифференциальных игр.

Еще один способ сужения β-S-P-ядра состоит в том, чтобы предположить, что ПРД β из ядра должна удовлетворять некоторым дополнительным свойствам. Например, давайте рассмотрим условие Янга - принцип защиты от иррационального поведения (IBP – irrational-behavior-proof) для кооперативного решения, которое реализовано через ПРД β в игре в развернутой форме (это условие было впервые введено в [58] для кооперативных дифференциальных игр).

Определение 8. [22, 28, 58] ПРД β для вектора выигрыша $(p_1, \ldots, p_n)$, удовлетворяющая (5), (6), удовлетворяет условию Янга (IBP) (для коалиций), если в каждой позиции $\bar{x}_t \in \bar{\omega} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_T)$, $t = 1, \ldots, T-1$, для любой коалиции S, активной в $\bar{x}_t$, выполняется:

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_S(\bar{x}_\tau) + \gamma(S; \bar{x}_t) \geqslant \gamma(S; x_0). \tag{18}$$

Неравенство (18) означает, что у каждой активной коалиции S есть стимул к сотрудничеству (по крайней мере, от x_0 до достижения промежуточной позиции $\bar{x}_t$), даже если S предполагает, что соглашение о сотрудничестве может быть нарушено в позиции $\bar{x}_t$ из-за «иррационального поведения» некоторых других игроков.

Обратим внимание, что формулы (9) и (18) дают оценки общего выигрыша коалиции в следующем случае частичного сотрудничества: игроки сотрудничают от x_0 до $\bar{x}_t$, а затем переключаются на некооперативное (на SPE) поведение.

Давайте проверим, удовлетворяют ли ПРД β и β' в примере 2 условию Янга (IBP). Оказывается, что для первой ПРД β условие Янга (18) выполняется, тогда как для второй ПРД β' - не выполняется. Например, для коалиции $S = \{1\}$ неравенства (18) в x_2 принимают вид:

$$\beta_1(x_0) + \gamma(\{1\}; x_2) = 4 + 10 \geqslant 14 = \gamma(\{1\}; x_0),$$

$$\beta'_1(x_0) + \gamma(\{1\}; x_2) = 3 + 10 \geqslant 14 = \gamma(\{1\}; x_0).$$

Следовательно, когда β-S-P-ядро состоит из нескольких ПРД, можно использовать условие Янга (18) в качестве правила сужения β-S-P-ядра.

1.6 β-S-P-ядро в модели «рыбных войн» в развернутой форме

Чтобы продемонстрировать, как β-S-P-ядро может быть реализовано в динамических моделях добычи возобновляемых ресурсов (см. [2, 8, 31, 33, 36, 40]), используем модель управления рыболовством для двух игроков в развернутой форме, представленную в [27], которая является конечной версией исходной модели управления рыболовством [31], изученной в [14]. В данной работе предполагаем, что конкурирующие страны (игроки) в равной степени оценивают ценность ресурса (биомассы рыбы), оставшегося после окончания процесса добычи (рыбной ловли), т. е. $K_1 = K_2 = 1$, тогда как в статье [27] игроки по-разному оценивают остаток ресурса (причины асимметричной оценки окружающей среды обсуждались, например, в [5]). Заметим, что кооперативный путь и процедура распределения дележа из β-S-P-ядра, которые найдены ниже для симметричного случая, существенно отличаются от кооперативного решения, полученного в [27] для случая асимметричной оценки.

Пример 3. (Симметричная модель управления рыболовством для двух игроков в развернутой форме).

Пусть $y(t)$ обозначает количество рыбы в год t, $t = 0, 1, \ldots, T$, которое меняется в соответствии с уравнением

$$y(t+1) = a \cdot y(t),$$

где $a > 1$ – годовой темп роста популяции.

Предположим, что два игрока (например, компании или страны) занимаются рыболовством, и пусть $u_j(t) \geq 0$ обозначает добычу игрока j в год t. Учитывая начальное условие $y(0) = y^0$, динамика системы описывается уравнением состояния

$$y(t+1) = a \cdot (y(t) - (u_1(t) + u_2(t))), \qquad (19)$$

где $0 \leq u_1(t) + u_2(t) \leq y(t)$.

Функция полезности игрока j имеет следующий вид:

$$H_j(\cdot) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta_j^t \sqrt{u_j(t)} + K_j \cdot \delta_j^T \sqrt{y(T)},\ j = 1, 2, \qquad (20)$$

где $\delta_j \in [0, 1)$ – коэффициент дисконтирования j-го игрока, а $K_j > 0$ описывает, как j-й игрок оценивает остаток биомассы рыбы.

Некоторые дополнительные допущения приняты в [27] для внедрения модели управления рыболовством (19)–(20) в структуру игры в развернутой форме. Во-первых, предположим, что оба игрока могут ловить рыбу только на двух уровнях: низком ($u_j^L = L_j$) или высоком ($u_j^H = H_j$), и рассмотрим двухлетнюю модель, т. е. $T = 2$. Во-вторых, для получения игры с совершенной информацией предполагаем, что в каждом году игрок 1 ходит (т.е. выбирает определенный уровень u_1) первым.

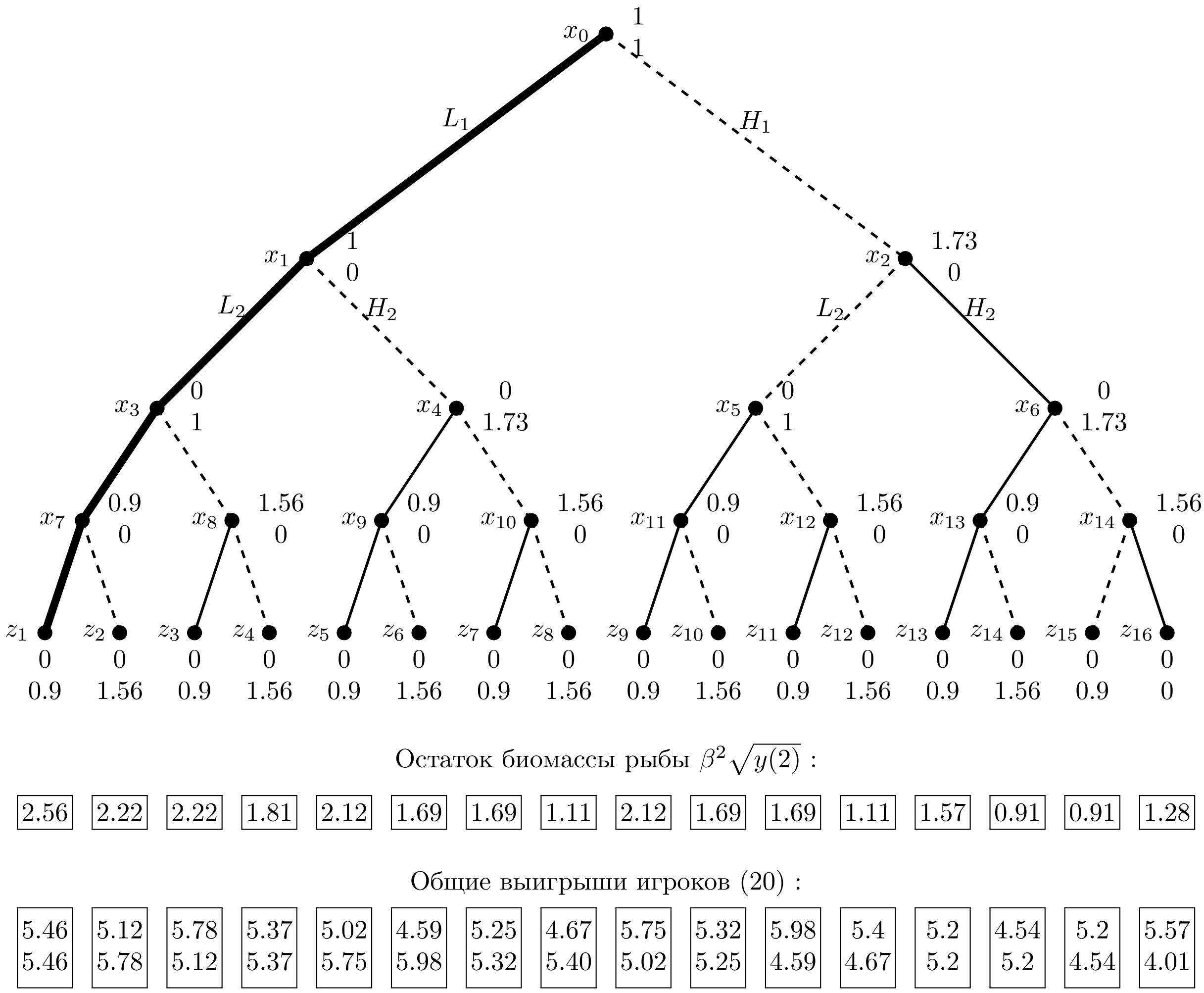

Рис. 2: Симметричная модель «рыбных войн» для двух игроков в развернутой форме

Полученная симметричная модель управления рыболовством в развернутой форме с дискретным временем для конкретных значений параметров: $y(0) = 10$; $a = 1.25$; $u_j^H = H_j = 3$, $u_j^L = L_j = 1$; $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.9$; $K_1 = K_2 = 1$, представлена на Рис. 2. Обратим внимание, что $P_1 = \{x_0, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $P_2 = \{x_1, x_2, x_7 - x_{14}\}$, $P_{n+1} = \{z_1, \ldots, z_{16}\}$, правая альтернатива на каждой позиции $x_k \in P_j$ соответствует высокому уровню добычи рыбы ($u_j(x_k) = H_j$). Стоит отметить, что текущие выигрыши $\sqrt{u_j(0)}$ в $x_1 - x_6$ соответствуют первому году процесса рыболовства (т. е. $\delta^0 = 1$ в соответствии с (20)), а текущие выигрыши $\sqrt{u_j(1)}$ в $x_7 - x_{14}$ и $z_1 - z_{16}$ соответствуют второму году (т. е. $\delta^1 = 0.9$).

Выигрыши $h_j(x_0)$, $j = 1, 2$, в начале x_0 можно рассматривать как начальные активы игроков.

Описанная выше игра имеет единственную ситуацию абсолютного равновесия (SPE) (соответствующие выборы игроков в каждой позиции обозначены пунктирными линиями на Рис. 2). Эта ситуация SPE генерирует путь $\omega^{SPE} = (x_0, x_2, x_5, x_{12}, z_{12})$ с некооперативными выигрышами $(5.4; 4.67)$.

Кооперативная траектория $\bar{\omega} = (x_0, x_1, x_3, x_7, z_1)$, которая выделена на Рис. 2, соответствует наибольшему остатку биомассы рыбы (оба игрока каждый год вылавливают рыбу на низком уровне). Максимальный суммарный выигрыш игроков равен $\widetilde{h}_1(\bar{\omega}) + \widetilde{h}_2(\bar{\omega}) = 5.46 + 5.46 = 10.92$.

Заметим, что система (5)–(8) и (10) для этой модели совместна, поэтому β-S-P-ядро не является пустым. Чтобы выбрать вектор $(\widetilde{\beta}_1(\bar{\omega}), \widetilde{\beta}_2(\bar{\omega}))$ из β-S-P-ядра, используем правило maxmin RBC. Используя обозначения $\widetilde{\beta}_1(\bar{\omega}) = 5.46 + \varepsilon$, $\widetilde{\beta}_2(\bar{\omega}) = 5.46 - \varepsilon$, получаем уравнение (17) в виде

$$\frac{(5.46 + \varepsilon) - 5.4}{5.98 - 4.54} = \frac{(5.46 - \varepsilon) - 4.67}{5.98 - 4.01} \iff \varepsilon = 0.3.$$

Следовательно, $\widetilde{\beta}_1(\bar{\omega}) = 5.76$, $\widetilde{\beta}_2(\bar{\omega}) = 5.16$. В таблице ниже представлен пример конкретной ПРД β из β-S-P-ядра, которая была определена с помощью метода обратной индукции и подразумевает отсутствие перераспределения выигрыша на терминальной вершине z_1 и минимальные передачи между игроками на промежуточных позициях кооперативной траектории.

$\bar{\omega}$	x_0	x_1	x_3	x_7	z_1	$\widetilde{\beta}_j(\bar{\omega})$
$\beta_1(x_t)$	1.39	1	0.23	0.58	2.56	5.76
$\beta_2(x_t)$	0.61	0	0.77	0.32	3.46	5.16
$\beta_1(x_t) - h_1(x_t)$	0.39	0	0.23	-0.32	0	0.3

Точные значения передач выигрышей (от игрока 2 к игроку 1), которые необходимы на каждой позиции кооперативного пути для обеспечения устойчивости соглашения о сотрудничестве, приведены в нижней строке таблицы.

Глава 2. β-S-P-ядро в многошаговой модели добычи возобновляемых ресурсов

В настоящей главе рассматривается конкурентная модель добычи возобновляемых ресурсов как многошаговая конечная игра, которая, в частности, может быть интерпретирована как модель управления рыболовством (см. [2, 3, 4, 16, 31, 33, 34, 35, 36, 51, 53, 54]). В отличие от игры, представленной в примере 3 первой главы, здесь принимается общее предположение о том, что критерием эффективности этапа каждого игрока является логарифм (log) текущего уровня добычи, и игроки по-разному оценивают остаточный запас ресурсов после завершения процесса добычи. Это единственная причина асимметрии игроков, принятая в данной работе (см. [4, 5, 35, 53] с другими причинами и аспектами асимметрии игроков).

Некооперативное поведение в динамических моделях добычи возобновляемых ресурсов при общих допущениях приводит к худшим результатам (в частности, к более экстенсивной эксплуатации ресурсов), чем кооперативное поведение (см., например, [3, 4, 16, 33, 34, 35, 36, 53], принимая во внимание исключения [13, 32]). Следовательно, возникает проблема обеспечения устойчивого сотрудничества (особенно в долгосрочной перспективе). Предполагаем, что выигрыши могут передаваться (между игроками), и исследуем подход, основанный на процедуре распределения дележа (ПРД), для достижения и реализации соглашения о сотрудничестве. Такой подход был впервые введен в [45] для дифференциальных игр, а затем был успешно применен к различным классам динамических игр [5, 14, 19, 20, 22, 25, 33, 46, 50, 54, 59].

В первом параграфе введена модель, представлено некооперативное решение (стратегии в ситуации абсолютного равновесия). В параграфе 2 получены кооперативная стратегия и кооперативная траектория, определено β-S-P-ядро для рассматриваемого класса многошаговых игр. Алгоритм сужения β-S-P-ядра, основанный на максимизации относительной выгоды от сотрудничества и построении конкретной ПРД, указан в параграфе 3. В параграфе 4 приведен численный пример многошаговой игры двух лиц.

2.1 Описание модели. Анализ некооперативного поведения

Рассматриваем следующую конечную модель добычи возобновляемых ресурсов с дискретным временем [30]. Предположим, что n игроков добывают общий возобновляемый ресурс. Пусть $x(t)$ является мерой ресурса в момент времени $t = 0, 1, \dots, T$ (переменная состояния), а $u_j(t)$ обозначает уровень добычи игрока j в этот период (контрольная переменная). Игрок $j \in N = \{1, \dots, n\}$ стремится максимизировать целевую функцию или критерий производительности вида

$$H_j(\cdot) = \sum_{\tau=0}^{T-1} \delta^{\tau} \ln u_j(\tau) + K_j \; \delta^T \ln x(T), \tag{21}$$

где $\delta \in (0, 1)$ - коэффициент дисконтирования, а $K_j > 0$ - параметр, который определяет оценку j–го игрока остатка ресурсов после завершения процесса добычи.

Предполагаем линейную динамику эволюции запасов ресурсов при их использовании, а именно:

$$x(t+1) = \alpha \cdot x(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j(t), \quad x(0) = x_0, \tag{22}$$

где $\alpha \geq 1$ обозначает естественный темп роста, с использованием позиционных стратегий, т. е. $u_j(\cdot) = u_j(t, x(t)), \quad j = 1, \dots, n; \quad t = 0, \dots, T-1$.

Обозначим через $G^0(n, x_0, T)$ многошаговую игру n лиц, начинающуюся в момент времени $t = 0$ с дискретной динамикой (22), целевыми функциями (21) и использованием позиционных стратегий. Каждая промежуточная позиция $x(t), \ t = 0, \dots, T-1$ определяет подыгру $G^t(n, x(t), T)$, начинающуюся в момент времени $\tau = t$ с целевой функцией подыгры

$$H_j^t(\cdot) = \sum_{\tau=t}^{T-1} \delta^{\tau-t} \ln u_j(\tau) + K_j \ \delta^{T-t} \ln x(T), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Концепция абсолютного равновесия [56] теперь принята в качестве стандартного некооперативного решения в динамической игре.

Определение 9. Ситуация $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x))$ является ситуацией равновесия по Нэшу (NE) в игре $G^0(n, x(0), T)$, если

$$H_j(v_j(\cdot), u_{-j}(\cdot)) \leqslant H_j(u_j(\cdot), u_{-j}(\cdot))$$

для любой возможной стратегии $v_j(\cdot)$ каждого игрока $j = 1, \ldots, n$.

Определение 10. Ситуация u является ситуацией абсолютного равновесия (SPE) в игре $G^0(n, x(0), T)$ если для каждого промежуточного момента времени $t = 1, \ldots, T-1$ и позиции $x(t)$ сужение u в подыгре $G^t(n, x(t), T)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в этой подыгре.

Воспользуемся алгоритмом динамического программирования для определения стратегий равновесия в многошаговой игре $G^0(n, x(0), T)$.

Пусть $(u_j^{SPE}(t,x), u_{-j}^{SPE}(t,x)),\ t = 0, 1, \ldots, T-1$, обозначает решение SPE. Тогда функция полезности игрока j в подыгре $G^t(n, x(t), T)$ принимает вид

$$\begin{gathered} V_j(t,x) = \max_{u_j} \{ \ln u_j + \delta \cdot V_j(t+1, \quad \alpha x - u_j - \sum_{i \neq j} u_i^{SPE}(t,x)) \}, \\ V_j(T,x) = K_j \cdot \ln x(T). \end{gathered} \tag{23}$$

Для простоты далее рассмотрим игру двух лиц (j и $-j$) для получения равновесных и кооперативных решений. Тот же подход применим для многошаговой игры n лиц (можно получить аналогичные результаты для случая $n > 2$).

Пусть функции полезности игроков имеют следующую форму:

$$V_j(t,x) = A_j(t)\ln x + B_j(t), \quad t = 0,1,\ldots,T, \quad j = 1,2. \tag{24}$$

Утверждение 4. Многошаговая конечная игра $G^0(n = 2, x(0), T)$ имеет единственную ситуацию абсолютного равновесия (SPE)

$$u_j(x) = \alpha\frac{A_{-j}(t+1)}{\varphi(t+1)} \cdot x, \quad j = 1,2; \quad t = 0,\ldots,T-1, \tag{25}$$

где $\varphi(t+1) = A_j(t+1) + A_{-j}(t+1) + \delta A_j(t+1)A_{-j}(t+1)$, а коэффициенты $A_j(t)$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$A_j(t) = 1 + \delta A_j(t+1), \quad A_j(T) = K_j. \tag{26}$$

Траектория в ситуации SPE - это

$$x(t+1) = \frac{\alpha\delta A_j(t+1)\cdot A_{-j}(t+1)}{\varphi(t+1)} \cdot x(t), \quad t = 0,\ldots,T-1. \tag{27}$$

Функции полезности (24) представляют выигрыши в ситуации SPE в подыгре $G^t(n = 2, x(t), T), t = 0,\ldots,T-1$, а $B_j(t)$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$\begin{gathered}B_j(t) = \Phi_j(\alpha,\delta,A_j(t+1),A_{-j}(t+1),B_j(t+1)) = \ln\frac{\alpha A_{-j}(t+1)}{\varphi(t+1)} + \\ + \delta[A_j(t+1)\cdot\ln\frac{\alpha\delta A_j(t+1)\cdot A_{-j}(t+1)}{\varphi(t+1)} + B_j(t+1)], \quad B_j(T) = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Доказательство (план). Используем стандартную технику, основанную на динамическом программировании (подробнее см. [14]), и функции полезности (24). Подставляя (24) в (23), получаем

$$V_j(t,x) = A_j(t)\ln x + B_j(t) =$$

$$= \max\{\ln u_j + \delta(A_j(t+1)\cdot\ln(\alpha x - u_j - u_{-j}^{SPE}(t,x)) + B_j(t+1))\}. \tag{29}$$

Используя условия первого порядка для внутреннего решения, получаем линейную систему

$$\frac{1}{u_j} = \delta \frac{A_j(t+1)}{\alpha x - (u_j + u_{-j})}, \quad j = 1, 2,$$

которая имеет единственное решение (25). Следовательно, соответствующая траектория задается (27).

Далее подставляем (25) в (29) и сравниваем коэффициенты в левой и правой частях. Простые расчеты дадут рекуррентные формулы (26) и (28), которые могут быть использованы для вычисления (в обратном направлении времени) всех характеристик ситуации SPE. $\square$

Замечание 4. Можно доказать, что многошаговая конечная игра $G^0(n, x(0), T)$, $n > 2$, имеет единственную ситуацию SPE, и, кроме того, стратегии равновесия $u_j(x)$ пропорциональны x.

Замечание 5. Рекуррентные формулы (26) и (28) удобны для вычисления всех коэффициентов функций (24). Однако можно записать явные формулы для $A_j(t)$ и $B_j(t)$, $\ t = 0, 1, \ldots, T, \ \ j = 1, 2$. А именно,

$$A_j(t) = \delta^{T-t} \cdot K_j + \sum_{\tau=t+1}^{T} \delta^{T-\tau}, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \quad A_j(T) = K_j. \qquad (30)$$

Для упрощения (28) будем использовать следующие обозначения:

$$L_1(t+1) = \ln \frac{\alpha A_{-j}(t+1)}{\varphi(t+1)}, \quad L_2(t+1) = \ln \frac{\alpha \delta A_j(t+1) \cdot A_{-j}(t+1)}{\varphi(t+1)}.$$

Имея все коэффициенты $A_j(t)$, $\ t = 0, 1, \ldots, T, \ \ j = 1, 2$, можно использовать следующие формулы для вычисления $B_j(t)$:

$$B_j(t) = \sum_{\tau=t+1}^{T} \delta^{\tau-(t+1)} \cdot [L_1(\tau) + \delta A_j(\tau) \cdot L_2(\tau)], t = 0, \ldots, T-1, \ B_j(T) = 0. \quad (31)$$

2.2 Кооперативное поведение. β-S-P-ядро

Индуцированная многошаговая игра $G^0_S(n-|S|+1, x(0), T)$ (где $S \subset N$ – непустая коалиция) описывает случай, когда коалиция S становится новым игроком, т. е. все игроки в S координируют свои стратегии, чтобы максимизировать общий выигрыш:

$$H_S(\cdot) = \sum_{\tau=0}^{T-1} \delta^\tau \ln \sum_{j \in S} u_j(\tau) + \sum_{j \in S} K_j \cdot \delta^T \ln x(T).$$

Обозначим через $\gamma(S, t, x)$ выигрыш в ситуации абсолютного равновесия (SPE) коалиции S в индуцированной подыгре $G^t_S(n-|S|+1, x(t), T), t = 0, \ldots, T-1$. Заметим, что для $n = 2$ значения $\gamma(\{j\}, t, x),\ \ j = 1, 2;\ \ t = 0, \ldots, T-1$ задаются через (24), (26) и (28) в соответствии с Утв. 4.

Теперь рассмотрим кооперативное решение, когда все игроки сотрудничают, чтобы достичь максимального общего выигрыша

$$H_N(\cdot) = \sum_{\tau=0}^{T-1} \delta^\tau \ln u(\tau) + K \cdot \delta^T \ln x(T),$$

где

$$u(\tau) = \sum_{j \in N} u_j(\tau), \quad K = \sum_{j \in N} K_j.$$

Предполагаем логарифмически-линейную форму функции полезности:

$$V(t, x) = A(t) \cdot \ln x + B(t), \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{32}$$

Утверждение 5. Многошаговая конечная игра $G^0(n = 2, x(0), T)$ имеет кооперативное решение

$$u(x) = \frac{\alpha}{1 + \delta A(t+1)} \cdot x, \quad t = 0, \ldots, T-1, \tag{33}$$

где коэффициенты $A(t)$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$A(t) = 1 + \delta A(t+1), \quad A(T) = K. \tag{34}$$

Кооперативная траектория имеет вид:

$$x(t+1) = \frac{\alpha \delta A(t+1)}{1 + \delta A(t+1)} \cdot x(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \tag{35}$$

Функция полезности (32) определяет кооперативный выигрыш в подыгре $G^t(n = 2, x(t), T)$, $t = 0, \dots, T-1$, а коэффициенты $B(t)$ задаются рекуррентной формулой:

$$\begin{gathered} B(t) = \ln \frac{\alpha}{1 + \delta A(t+1)} + \delta A(t+1) \ln \frac{\alpha \delta A(t+1)}{1 + \delta A(t+1)} + \delta B(t+1), \\ B(T) = 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Доказательство, основанное на методе динамического программирования, аналогично доказательству Утв. 4.

Обратим внимание, что могут быть представлены явные формулы для $A(t)$ и $B(t)$, аналогичные (30) и (31), хотя рекуррентные формулы (34) и (36) являются более удобными для вычисления функции полезности (32).

Замечание 6. По построению, кооперативный выигрыш в любой подыгре $G^t(n = 2, x(t), T)$, $t = 0, \dots, T-1$, больше или равен сумме выигрышей в ситуации абсолютного равновесия (SPE) игроков в этой подыгре.

Предполагаем, что разрешены любые перераспределения выигрышей между игроками. Пусть $\bar{\omega} = (x(0) = \bar{x}(0), \dots, \bar{x}(t), \dots, \bar{x}(T))$ обозначает кооперативную траекторию (35), а $\bar{u}(\bar{x}(t))$ обозначает общий уровень совместной добычи за период t, который определяется выражениями (33), (34).

Вектор $(p_1^t, \dots, p_n^t)$:

$$\sum_{i \in N} p_i^t = V(t, \bar{x}(t)) \tag{37}$$

определяет возможное правило для распределения общего кооперативного выигрыша (в подыгре) между игроками и может рассматриваться как кооперативное решение для подыгры $G^t(n, \bar{x}(t), T)$.

Определение 11. Векторы $\beta_i(\bar{\omega}) = (\beta_i(\bar{x}(\tau))),\ \ \tau = 0, \ldots, T;\ \ i = 1, \ldots, n$ называются процедурой распределения дележа (ПРД) для кооперативного решения $(p_1^0, \ldots, p_n^0)$ если

$$p_i^0 = \sum_{\tau=0}^{T} \delta^\tau \beta_i(\bar{x}(\tau)). \tag{38}$$

Основанный на ПРД подход, впервые представленный в [45] для дифференциальных игр, подразумевает, что все игроки согласились распределить общий кооперативный выигрыш в $G^0(n, x(0), T)$ в соответствии с вектором $(p_1^0, \ldots, p_n^0)$ и, кроме того, распределить выигрыш каждого игрока p_i^0 по кооперативной траектории $\bar{\omega}$ в соответствии с некоторым графиком (а именно, ПРД β). $\beta_i(\bar{x}(\tau))$ обозначает фактический текущий платеж, который должен получить i-й игрок во время τ, когда игроки используют ПРД β.

Далее принимаем следующие предположения о некооперативном поведении игроков, если соглашение о сотрудничестве нарушается в некоторый промежуточный момент времени $t = 0, \ldots, T-1$, из-за отклонения коалиции S от кооперативной траектории (33):

- все игроки $j \in N \setminus S$ действуют индивидуально и переключаются на некооперативную (SPE) схему поведения в подыгре $G^t(n, \bar{x}(t), T)$ - см., например, [10];

- максимальный гарантированный выигрыш, который коалиция S может ожидать в $G^t(n, \bar{x}(t), T)$ в случае отклонения, равен $\gamma(S, t, \bar{x}(t))$ вместо $\sum\limits_{\tau=t}^{T} \delta^{\tau-t} \beta_S(\bar{x}(\tau))$, где $\beta_S(\bar{x}(\tau)) = \sum\limits_{j \in S} \beta_j(\bar{x}(\tau))$.

Определение 12. ПРД $\beta = (\beta_i(\bar{x}(\tau))),\ \ \ i = 1, \ldots, n;\ \ \ \tau = 0, \ldots, T$ принадлежит β-S-P-ядру многошаговой конечной игры $G^0(n, x(0), T)$, если для каждой непустой коалиции $S \subset N$ и каждого промежуточного момента времени $t = 0, \ldots, T-1$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{\tau=t}^{T} \delta^{\tau-t} \beta_S(\bar{x}(\tau)) \geqslant \gamma(S, t, \bar{x}(t)). \tag{39}$$

Неравенство (39) означает, что ни у одной коалиции $S \subset N$ нет стимула отклоняться от соглашения о сотрудничестве (т. е. (33) и ПРД β) в каждой подыгре $G^t(n, \bar{x}(t), T)$, $t = 0, \ldots, T-1$ вдоль кооперативной траектории $\bar{\omega}$. Более того, как следует из (37), (38) и Утв. 5, ограничение (39) является обязательным для $S = N$, и

$$\sum_{\tau=t}^{T} \delta^{\tau-t} \beta_N(\bar{x}(\tau)) = V(t, \bar{x}(t)) = A(t) \ln \bar{x}(t) + B(t),$$

где коэффициенты $A(t)$, $B(t)$ соответствуют (34), (36).

Замечание 6 подразумевает, что следующее утверждение справедливо (по крайней мере, для игры двух лиц).

Утверждение 6. β-S-P-ядро многошаговой конечной игры $G^0(2, x(0), T)$ непусто.

Замечание 7. $n \times (T+1)$ компоненты $\beta_j(\bar{x}_\tau)$ ПРД β из β-S-P-ядра должны удовлетворять системе нестрогих линейных неравенств (39) и линейных уравнений (38). Следовательно, непустое β-S-P-ядро для многошаговой конечной игры $G^0(n, x(0), T)$ является выпуклым замкнутым многогранником Δ в $R^{n \times (T+1)}$.

Следующее свойство гарантирует, что ПРД β может быть реализована без каких-либо займов или кредитов, поскольку на каждом этапе игроки перераспределяют именно то, что они получили на этом этапе, в соответствии с кооперативным сценарием (см. [22, 25, 46]).

Определение 13. Процедура распределения дележа β удовлетворяет условию строгого баланса, если

$$\sum_{j\in N}\beta_j(\bar{x}(\tau)) = \ln \bar{u}(\bar{x}(\tau)), \quad \tau = 0,\ldots,T-1;$$
$$\sum_{j\in N}\beta_j(\bar{x}(T)) = K\cdot \ln \bar{x}(T). \tag{40}$$

2.3 Алгоритм сужения β-S-P-ядра

Для сужения β-S-P-ядра (выбора единственной ПРД β), можно использовать, например, правило maxmin RBC, представленное в п. 1.5 настоящей работы.

Если применить этот подход к многошаговой конечной игре $G^0(n, x(0), T)$ в том случае, когда $\gamma(\{i\}, 0, \bar{x}(0)) > 0$, $i = 1, 2$, то нужно решить следующую задачу оптимизации

$$\max_{\beta\in\Delta}\min_{i\in N}\frac{p_i^0 - \gamma(\{i\}, 0, \bar{x}(0))}{\gamma(\{i\}, 0, \bar{x}(0))}, \tag{41}$$

а затем распределить кооперативный выигрыш каждого игрока i $p_i^0 = \sum_{\tau=0}^{T}\delta^\tau\beta_i(\bar{x}(\tau))$ по кооперативной траектории таким образом, чтобы ПРД β удовлетворяла (39) и (40). Можно использовать относительную выгоду от сотрудничества (41) для измерения так называемой ценности сотрудничества (см. [11]).

Замечание 8. Для игры двух лиц (41) принимает следующую форму:

$$\frac{p_1^0 - \gamma(\{1\}, 0, \bar{x}(0))}{\gamma(\{1\}, 0, \bar{x}(0))} = \frac{p_2^0 - \gamma(\{2\}, 0, \bar{x}(0))}{\gamma(\{2\}, 0, \bar{x}(0))}. \tag{42}$$

Вектор (p_1^0, p_2^0) подразумевает, что оба игрока достигают максимальной (в смысле (41)) и равной относительной выгоды от сотрудничества.

Чтобы определить распределение кооперативного выигрыша игроков по траектории $\bar{\omega}$ в игре двух лиц $G^0(2, x(0), T)$, зададим следующий алгоритм.

Алгоритм (квазипропорциональная ПРД из β-S-P-ядра):

1. Используя Утв. 5, найти кооперативную траекторию $\bar{\omega} = (\bar{x}(0), \bar{x}(1), \ldots, \bar{x}(T-1), \bar{x}(T))$ и соответствующую $\bar{u}(\bar{x}(t)),\ \ t = 0, \ldots, T-1$.

2. Вычислить $\gamma(\{j\}, t, \bar{x}(t)),\ \ t = 0, \ldots, T-1;\ \ j = 1, 2$, используя (24), (26) и (28) в соответствии с Утв. 4.

3. Решить (37) и (42) для получения p_1^0 и p_2^0.

4. Используя неравенства (39) и условие строгого баланса (40), записать систему двойных неравенств для $\sum\limits_{\tau=t}^{T} \delta^{\tau-t}\beta_1(\bar{x}(\tau)),\ t = T-1, T-2, \ldots, 1$ в виде:

$$\begin{cases} c_1^{T-1} \leqslant \beta_1(\bar{x}(T-1)) + \delta \cdot \beta_1(\bar{x}(T)) \leqslant C_1^{T-1} \\ \vdots \\ c_1^t \leqslant \beta_1(\bar{x}(t)) + \delta \cdot \beta_1(\bar{x}(t+1)) + \ldots + \delta^{T-t} \cdot \beta_1(\bar{x}(T)) \leqslant C_1^t \\ \vdots \\ c_1^1 \leqslant \sum\limits_{\tau=1}^{T} \delta^{\tau-1} \cdot \beta_1(\bar{x}(\tau)) \leqslant C_1^1 \end{cases}, \quad (43)$$

   где $c_1^t \leqslant C_1^t$, для любого $t = 1, \ldots, T-1$.

5. Пусть μ – доля первого игрока в общем кооперативном выигрыше $\frac{p_1^0}{p_1^0+p_2^0}$. Тогда $\frac{p_2^0}{p_1^0+p_2^0} = 1 - \mu$. Пусть $\beta_1(\bar{x}(T)) = \mu \cdot K \cdot \ln \bar{x}(T)$.

6. Решить (43) последовательно в предположении, что в каждой подыгре $G^t(2, \bar{x}(t), T),\ \ t = T-1, T-2, \ldots, 1$, игрок 1 получает ровно μ от допустимого диапазона $(C_1^t - c_1^t)$ подыгрового выигрыша. А именно,

$$\begin{cases} \beta_1(\bar{x}(T-1)) = c_1^{T-1} + \mu(C_1^{T-1} - c_1^{T-1}) - \delta\beta_1(\bar{x}(T)) \\ \vdots \\ \beta_1(\bar{x}(1)) = c_1^1 + \mu(C_1^1 - c_1^1) - \sum\limits_{\tau=2}^{T} \delta^{\tau-1}\beta_1(\bar{x}(\tau)) \end{cases} \quad (44)$$

7. Принять
$$\beta_1(\bar{x}(0) = p_1^0 - \sum_{\tau=1}^{T} \delta^\tau \beta_1(\bar{x}(\tau)). \tag{45}$$

8. Вычислить $\beta_2(\bar{x}(t))$, $t = 0, \ldots, T$, из условий строгого баланса (40).

Замечание 9. ПРД β, указанная выше, удовлетворяет следующим свойствам:

- она принадлежит β-S-P-ядру многошаговой игры $G^0(2, \bar{x}(0), T)$;
- результирующее кооперативное решение (p_1^0, p_2^0) максимизирует относительную выгоду от сотрудничества (41) игрока, получающего наименьший выигрыш от кооперации;
- она удовлетворяет условию строгого баланса (40);
- ПРД β реализует разумное и согласованное с подыгрой правило дележа в том смысле, что в каждой промежуточной позиции $\bar{x}(t))$, $t = 1, \ldots, T$, первый игрок получает ту же долю диапазона $(C_1^t - c_1^t)$ допустимого в подыгре $G^t(2, \bar{x}(t), T)$ выигрыша $\sum\limits_{\tau=2}^{T} \delta^{\tau-1}\beta_1(\bar{x}(\tau))$, какую он ожидал получить в игре $G^0(2, \bar{x}(0), T)$ в соответствии с кооперативным решением (p_1^0, p_2^0).

2.4 Численный пример

Чтобы продемонстрировать приведенные выше теоретические результаты на простом численном примере, рассмотрим многошаговую игру двух лиц по добыче возобновляемых ресурсов со следующими значениями параметров: $T = 2$ $(t = 0, 1, 2)$, $\alpha = 1.5$, $\delta = 0.95$, $K_1 = 1$, $K_2 = 0.5$, $K = K_1 + K_2 = 1.5$. Стратегии игроков в ситуации абсолютного равновесия (SPE) задаются формулами (25) и (26). Кооперативная стратегия $\bar{u}$ определяется (33) и (34). Все стратегии линейно зависят от начального состояния x_0 (см. таблицу 1).

t	u_1^{SPE}	u_2^{SPE}	u^{Coop}
0	$0.3593 \cdot x_0$	$0.475 \cdot x_0$	$0.454 \cdot x_0$
1	$0.2528 \cdot x_0$	$0.5056 \cdot x_0$	$0.647 \cdot x_0$

Таблица 1: Стратегии SPE и кооперативная стратегия

Относительные значения этих стратегий в моменты времени $t = 0$ и $t = 1$ (текущие уровни добычи, деленные на $\bar{x}_0$) представлены на Рис. 3 и соединены пунктирными линиями для наглядности.

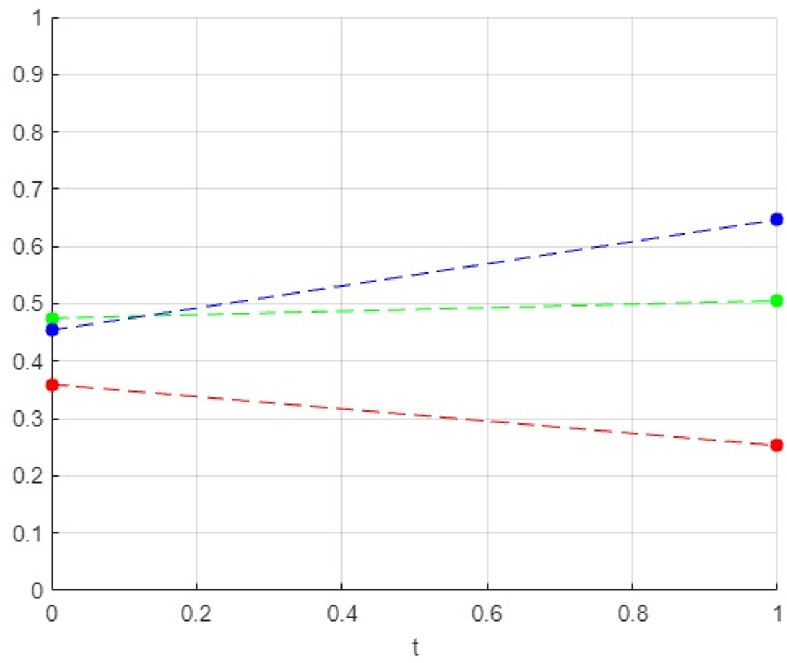

Рис. 3: Стратегии SPE – для первого игрока (красный), для второго игрока (зеленый), кооперативная стратегия (синий)

Траектория ситуации абсолютного равновесия и кооперативная траектория вычисляются с использованием формул (27) и (35) соответственно. Результаты (текущие значения ресурса, деленные на x_0) приведены в таблице 2 и представлены на Рис. 4.

Чтобы сравнить сумму выигрышей игроков в ситуации SPE (24) и кооперативный выигрыш (32) в игре $G^0(2, \bar{x}(0), T)$ и в подыграх $G^t(2, \bar{x}(t), T)$, $t = 1, 2$, вдоль кооперативной траектории, фиксируем начальное состояние $x_0 = e^{1.5} \approx 4.4817$. Результаты представлены в таблице 3.

t	x^{SPE}/x_0	x^{Coop}/x_0
0	1	1
1	0.6656	1.046
2	0.2401	0.922

Таблица 2: Траектория SPE и кооперативная траектория

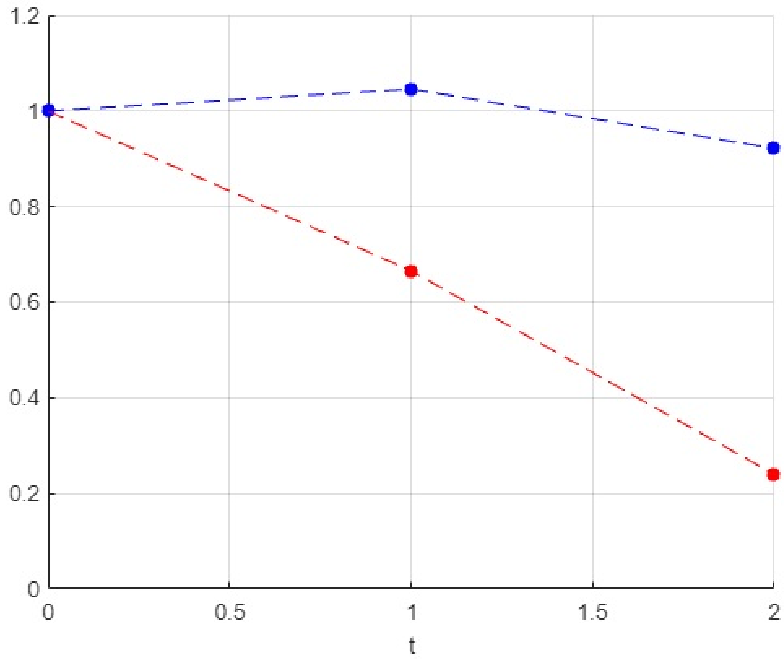

Рис. 4: Траектория SPE (красный) и кооперативная траектория (синий)

t	$V_1(t, \bar{x}(t)) + V_2(t, \bar{x}(t))$	$V(t, \bar{x}(t))$
0	2.227	3.642
1	2.595	3.086
2	2.128	2.128

Таблица 3: Сумма выигрышей игроков в ситуации SPE по сравнению с кооперативными выигрышами по кооперативной траектории

Следуя алгоритму и используя (37) и (42), получаем условия на p_1^0, p_2^0:

$$\frac{p_1^0 - 0.66}{0.66} = \frac{p_2^0 - 1.56}{1.56}, \ p_1^0 + p_2^0 = 3.64,$$

откуда получаем $p_1^0 = 1.08$, $p_2^0 = 2.56$. Тогда система неравенств (43) принимает следующий вид:

$$1.076 \leqslant \beta_1(\bar{x}(1)) + 0.95 \cdot \beta_1(\bar{x}(2)) \leqslant 1.567.$$

Коэффициент μ равен 0.297 для этой игры. Далее, используя условие строгого баланса (40), (44) и (45), получаем квазипропорциональную ПРД из β-S-P-ядра:

	$\beta_i(\bar{x}(0))$	$\beta_i(\bar{x}(1))$	$\beta_i(\bar{x}(2))$
$i = 1$	-0.079	0.621	0.632
$i = 2$	0.789	0.443	1.496

Обратим внимание, что отрицательный платеж какому-либо игроку в соответствии с (45) может возникнуть только в начальной позиции многошаговой игры (когда игроки просто заключают соглашение о сотрудничестве).

Стоит отметить, что если умножить обе стороны неравенства (39) на δ^t, а затем добавить $\sum\limits_{\tau=0}^{t-1} \delta^\tau \beta_S(\bar{x}(\tau))$, левая часть результирующего неравенства представляет общий выигрыш коалиции S (оцененный в начальный момент времени $t = 0$ при условии, что все игроки будут использовать кооперативные стратегии и ПРД β на протяжении всей игры). Правая часть неравенства - это оценка выигрыша коалиции S, которая соответствует комбинированному типу поведения игроков (а именно, все игроки сотрудничают до некоторого промежуточного момента времени t, а затем отклоняются от кооперации в индуцированной подыгре $G_S^t(n - |S| + 1, \bar{x}(t), T)$). Следовательно, неравенство (39) в определении β-S-P-ядра для многошаговых игр можно рассматривать как условие состоятельности в подыграх (см. [19, 25, 46, 59]) соглашения о сотрудничестве, а также реализации этого соглашения через ПРД β.

Заключение

В диссертационной работе новая концепция S-P-ядра с применением процедуры распределения дележей распространена на более общий класс игр в развернутой форме (с выигрышами, заданными в каждой позиции игры). Показано, что полученное решение – β-S-P-ядро – является более мощным инструментом стабилизации долгосрочного кооперативного соглашения, чем S-P-ядро. Установлена взаимосвязь между сильным равновесием и β-S-P-ядром для класса игр в развернутой форме с совершенной информацией и выигрышами, определенными в каждой позиции. Предложено несколько методов сужения β-S-P-ядра (некоторые из них требуют решения вспомогательных задач оптимизации, другие подразумевают, что конкретная ПРД должна удовлетворять дополнительным свойствам).

Дополнительно продемонстрирована возможность применения концепции β-S-P-ядра для анализа многошаговой модели добычи возобновляемых ресурсов. А именно: рассмотрен случай симметричных и асимметричных игроков, методом динамического программирования построено абсолютное равновесие и кооперативное решение, установлена непустота β-S-P-ядра в игре двух лиц, предложен алгоритм выбора единственной ПРД из ядра, полученные результаты проиллюстрированы численным примером.

Список литературы

[1] Aumann R. Acceptable points in general cooperative n-person games. // Contributions to the Theory of Games, Vol. IV. Princeton University Press, Princeton, 1959, 287–324.

[2] Breton M., Dahmouni I., Zaccour G. Equilibria in a two-species fishery. // Mathematical Biosciences, 2019, Vol. 309, 78–91.

[3] Breton M.; Keoula M.Y. Farsightedness in a Coalitional Great Fish War. // Environmental and Resource Economics, 2012, Vol. 51, 297–315.

[4] Breton M., Keoula M. A great fish war model with asymmetric players. // Ecological Economics, 2014, Vol. 97, 209-223.

[5] Cabo F.; Tidball M. Cooperation in a Dynamic Setting with Asymmetric Environmental Valuation and Responsibility. // Dynamic Games and Applications, 2021.

[6] Castañer A.; Marín-Solano J.; Ribas C. A time consistent dynamic bargaining procedure in differential games with heterogeneous discounting. // Mathematical Methods of Operations Research, 2021, Vol. 93, 555–584.

[7] Chander P. The gamma-core and coalition formation. // International Journal of Game Theory, 2007, Vol. 35, 539–556.

[8] Chander P. Subgame-perfect cooperative agreements in a dynamic game of climate change. // Journal of Environmental Economics and Management, 2017, Vol. 84, 173–188.

[9] Chander P.; Tulkens H. The core of an economy with multilateral environmental externalities. // International Journal of Game Theory, 1997, Vol. 26, 379–401.

[10] Chander P.; Wooders M. Subgame-perfect cooperation in an extensive game. // Journal of Economic Theory, 2020, Vol. 187, 105017.

[11] Chebotareva A.; Su S.; Tretyakova S.; Gromova E. On the Value of the Preexisting Knowledge in an Optimal Control of Pollution Emissions. // Contributions to Game Theory and Management, Vol. 14. St. Petersburg State University Press, St. Petersburg, 2021, 49–58.

[12] Gromova E.V.; Plekhanova T.M. On the regularization of a cooperative solution in a multistage game with random time horizon. // Discrete Applied Mathematics, 2019, Vol. 255, 40–55.

[13] Crettez B.; Hayek N.; Zaccour G. Do charities spend more on their social programs when they cooperate than when they compete? // European Journal of Operational Research, 2020, Vol. 283, 1055–1063.

[14] Haurie A.; Krawczyk J.B.; Zaccour G. Games and Dynamic Games. // Scientific World: Singapore, 2012.

[15] Hillas J.; Kvasov D. Backward induction in games without perfect recall. // Games and Economic Behavior, 2020, Vol. 124, 207–218.

[16] Kaitala V. T.; Lindroos M. Game Theoretic Applications to Fisheries. // Handbook Of Operations Research In Natural Resources. International Series In Operations Research & Mana, 2007, Vol. 99, 201–215.

[17] Kuhn H. Extensive games and the problem of information. // Contribution to the Theory of Games, 1953, Vol. II, Annals of Mathematics Studies, 28, 193-–216, Princeton.

[18] Kuzyutin D.; Gromova E.; Pankratova Ya. Sustainable cooperation in multicriteria multistage games. // Operations Research Letters, 2018, Vol. 46, 557–562.

[19] Kuzyutin D.; Gromova E.; Smirnova N. On the cooperative behavior in multistage multicriteria game with chance moves. // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2020), International Conference Proceedings, LNCS Series, 2020, Vol. 12095, 184–199.

[20] Kuzyutin D.; Lipko I.; Pankratova Y.; Tantlevskij I. (2020). Cooperation Enforcing in Multistage Multicriteria Game: New Algorithm and Its Implementation. // Frontiers of Dynamic Games, Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications, 2020, 141–159.

[21] Kuzyutin D.; Nikitina M. Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs. // Operations Research Letters, 2017, Vol. 45, 269–274.

[22] Kuzyutin D.; Nikitina M. An irrational behavior proof condition for multistage multicriteria games. // Consrtuctive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov); CNSA 2017; IEEE: New York, NY, USA, 2017, 178–181.

[23] Kuzyutin D.; Pankratova Y.; Svetlov R. A-Subgame Concept and the Solutions Properties for Multistage Games with Vector Payoffs. // Frontiers of Dynamic Games, Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications, 2019, 85–102.

[24] Kuzyutin D.; Romanenko I. On properties of equilibrium solutions for n-person games in extensive form. Vestnik St. Petersburg Univ. Math., 1998, Vol. 3(15), 17–27.

[25] Kuzyutin D.; Smirnova N. Subgame consistent cooperative behavior in an extensive form game with chance moves. // Mathematics, 2020, Vol. 8, 1061.

[26] Kuzyutin D.; Smirnova N.; Tantlevskij I. Subgame perfect Pareto equilibria for multicriteria game with chance moves. // Submitted to "IV Stability and Control Processes (SCP 2020)" Conference Proceedings, LNCIS series, Springer (2020)

[27] Kuzyutin D., Smirnova N. Subgame-perfect core based on the payoff distribution procedure. // Submitted to Economics Letters, 2021.

[28] Kuzyutin D.; Smirnova N.; Gromova E. Long-term implementation of the cooperative solution in multistage multicriteria game. // Operations Research Perspectives, 2019, Vol. 6, 100107.

[29] Kuzyutin D., Skorodumova Y., Smirnova N. Implementation of subgame-perfect cooperative agreement in an extensive-form game. // Contributions to Game Theory and Management, St. Petersburg State Univ., 2021, Vol. 14, 257–272.

[30] Kuzyutin D., Skorodumova Y., Smirnova N. A cooperation scheme in multistage game of renewable resource extraction with asymmetric players. // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2022), International Conference Proceedings, LNCS Series (to appear).

[31] Levhari D.; Mirman L.J. The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot–Nash solution. // The Bell Journal of Economics, 1980, Vol. 11 (1), 322–334.

[32] Masoudi N.; Zaccour G. Adapting to climate change: Is cooperation good for the environment? // Economics Letters, 2017, Vol. 153, 1–5.

[33] Mazalov V.V.; Rettiyeva A.N. The discrete-time bioresource sharing model. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2011, Vol. 75, 180–188.

[34] Mazalov, V.V.; Rettieva, A.N. Cooperation maintenance in fishery problems. // Fishery Management. Nova Science Publishers, 2012, 151–198.

[35] Mazalov, V.V.; Rettieva, A.N. Asymmetry in a cooperative bioresource management problem. // Game-Theoretic Models in Mathematical Ecology, Nova Science Publishers, 2015, 113–152.

[36] Mazalov V., Parilina E.; Zhou J. Altruistic-Like Equilibrium in a Differential Game of Renewable Resource Extraction. // Mathematical Optimization Theory and Operations Research, 2021, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 12755, 326–339.

[37] Myerson R. Game Theory. Analysis of Conflict // Harvard University Press: Cambridge, MA, USA, 1997.

[38] Moulin H. Axioms of cooperative decision making. // Cambridge University Press: Cambridge, MA, USA, 1988.

[39] Nash J.F. Equilibrium points in n-person games. // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1950, Vol. 36, 48–49.

[40] Ougolnitsky G.; Usov A. Spatially distributed differential game theoretic model of fisheries. // Mathematics, 2019, Vol. 7, 732.

[41] Parilina E.; Zaccour G. Node-consistent core for games played over event trees. // Automatica, 2015, Vol. 55, 304–311.

[42] Parilina E.; Zaccour G. Node-consistent Shapley value for games played over event trees with random terminal time. // Journal of Optimization Theory and Applications, 2017, Vol. 175, 236–254.

[43] Petrosyan L. Time-consistency of solutions in multi-player differential games. // Astronomy, 1977, Vol. 4, 46–52.

[44] Petrosyan L.A.; Danilov N.N. Cooperative Differential Games and Their Applications. // Publishing House of Tomsk University: Tomsk, Russia, 1985.

[45] Petrosyan L.A.; Danilov N.N. Stability of solutions in non-zero sum differential games with transferable payoffs. // Astronomy, 1979, Vol. 1, 52–59.

[46] Petrosyan L.; Kuzyutin D. Games in Extensive Form: Optimality and Stability. // Saint Petersburg University Press: St. Petersburg, Russia, 2000.

[47] Petrosyan L.A.; Kuzyutin D.V. On the stability of E-equilibrium in the class of mixed strategies. // Vestnik St.Petersburg Univ. Math., 1995, 3, 54–58.

[48] Petrosyan L.; Zenkevich N. Game Theory. // World Scientific Publisher: Singapure, London, 1996.

[49] Petrosyan L.; Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. // Journal of Economic Dynamics and Control, 2003, Vol. 27, 381–398.

[50] Petrosyan O.; Zakharov V. IDP-Core: Novel Cooperative Solution for Differential Games. // Mathematics, 2020, Vol. 8, 721.

[51] Pintassilgo P.; Finus M.; Lindroos M.; Munro G.R. Stability and Success of Regional Fisheries Management Organizations // Environmental and Resource Economics, 2010, Vol. 46, 377–402.

[52] Reddy P.; Shevkoplyas E.; Zaccour G. Time-consistent Shapley value for games played over event trees. // Automatica, 2013, Vol. 49, 1521–1527.

[53] Rettieva A. N. A discrete-time bioresource management problem with asymmetric players. // Automation and Remote Control, 2014, Vol. 75, 1665–1676.

[54] Rettieva A. Cooperation in bioresource management problems. // Contributions to Game Theory and Management, 2017, Vol. 10, 245-286.

[55] Sedakov A. On the Strong Time Consistency of the Core. // Automation and Remote Control, 2018, Vol. 79, 757–767.

[56] Selten R. Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games. // International Journal of Game Theory, 1975, Vol. 4, 25–55.

[57] Yeung D.; Petrosyan, L. Subgame consistent solutions for cooperative stochastic dynamic games. // Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, Vol. 145, 579–596.

[58] Yeung D. An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games. // International Game Theory Review, 2006, Vol. 8 (4), 739–744.

[59] Yeung D.; Petrosyan L. Subgame Consistent Economic Optimization: An Advanced Cooperative Dynamic Game Analysis. // Static and Dynamic Game Theory: Foundations and Applications, Birkhäuser Verlag AG, 2012.

[60] Zakharov V.; Dementieva M. Multistage Cooperative Games and Problem of Time Consistency. // International Game Theory Review, 2004, Vol. 6, 157–170.