Санкт–Петербургский государственный университет

ЖИГАЛОВ Валентин Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Управляемость и наблюдаемость линейных систем с неограниченным запаздыванием

Уровень образования: магистратура
Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5517.2020 «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель:
профессор, кафедра теории управления,
д.ф. - м.н. Жабко Алексей Петрович

Рецензент:
Воронежский Государственный университет,
кафедра уравнений в частных производных и
теории вероятностей, д.ф. - м.н., доцент,
Провоторов Вячеслав Васильевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

Введение

В данной работе рассматривается система дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(\alpha t) + f(t), \tag{1}$$

заданная на отрезке $[t_0, T]$, где $A_0, A_1 - (n \times n)-$матрицы, $B - (n \times r)-$ матрица, $\alpha \in (0,1)$, $f(t)-$ кусочно-непрерывная функция, заданная на отрезке $[t_0, T]$.

Системы и уравнения с линейным запаздыванием, встречаются в математических моделях радиоактивного распада [1], работы информационного сервера [2], смесительного бака [3] и в ряде других случаев. Поэтому решение задач, связанных с системами вида (1), имеет большую практическую ценность.

Глава 1. Вспомогательные сведения

Рассмотрим систему (1) с кусочно-непрерывной начальной функцией $\phi(t)$, заданной на промежутке $[\alpha t_0, t_0]$.

Определение 1. *Фундаментальной матрицей системы* (1) *называется матричная функция* $\Phi(t, t_0)$, *удовлетворяющая соотношениям:*

$$\begin{cases} \Phi(t,t_0) \equiv 0, & t < t_0, \\ \Phi(t,t_0) = E, & t = t_0, \\ \frac{\partial \Phi(t,t_0)}{\partial t} = A_0 \Phi(t,t_0) + A_1 \Phi(\alpha t, t_0), & t > t_0. \end{cases}$$

Известно, что общее решение системы (1) в форме Коши имеет вид

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\alpha^{-1}t_0} \Phi(t,\tau) A_1 \phi(\alpha\tau) d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) f(\tau) d\tau. \qquad (2)$$

Общий вид фундаментальной матрицы системы (1) на промежутках $[t_0, \alpha^{-1}t_0]$ и $[\alpha^{-1}t_0, \alpha^{-2}t_0]$ получен в работе $[7]$.

При $t \in [t_0, \alpha^{-1}t_0]$ рассматриваемая система (1) эквивалентна линейной неоднородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому на данном промежутке выполняется

$$\Phi(t,t_0) = \exp(A_0(t - t_0)). \qquad (3)$$

Чтобы получить общий вид фундаментальной матрицы системы (1) на отрезке $[\alpha^{-1}t_0, \alpha^{-2}t_0]$, в работе $[7]$ используется метод шагов. Получаем следующее представление:

$$\Phi(t,t_0) = \exp(A_0(t-t_0)) + \int\limits_{\alpha^{-1}t_0}^{t} \exp(A_0(t-\tau)) A_1 \exp(A_0(\alpha\tau - t_0)) d\tau.$$

Замечание. *Используя метод шагов, можно построить матрицу* $\Phi(t,t_0)$ *при* $t \in [t_0, T]$.

Глава 2. Задача управляемости

2.1 Введение

Управление и стабилизация систем вида (1) с постоянным запаздыванием рассматривались в работах [4, 5], в которых введено понятие полной управляемости и точечной управляемости для систем с постоянным запаздыванием. Однако (1) является системой с линейно возрастающим (неограниченным) запаздыванием, для которой стоит задача выявить достаточные условия точечной управляемости.

В работе [6] построен весь класс программных управлений в случае системы дифференциальных уравнений без запаздывания. В данной работе решение задачи основано на развитии этого подхода для систем с линейно-возрастающим запаздыванием.

2.2 Постановка задачи

Введем следующее определение:

Определение 2. *Система* (1) *называется точечно управляемой на промежутке* $[t_0, T]$, *где* $t_0 > 0$, *если для любых начальных условий*

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [\alpha t_0, t_0]$$

и любого значения $x(T) = x_1$ *существует вектор-функция* $u(t)$, *переводящая ее из функции* $x_{t_0} = \phi$ *в состояние* x_1.

На данный момент стоит задача нахождения достаточных условий точечной управляемости систем (1) на языке матриц A_0, A_1, B по аналогии с системами без запаздывания или с постоянным запаздыванием.

Замечание. *В нашем случае для анализа системы* (1) *формула* (2) *принимает вид*

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\alpha^{-1}t_0} \Phi(t, \tau)A_1\phi(\alpha\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau. \qquad (4)$$

2.3 Достаточные условия точечной управляемости

Из (3) следует

Теорема 1. *Система* (1) *точечно управляема на промежутке* $[t_0, \alpha^{-1}t_0]$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang}(B, A_0B, \ldots, A_0^{n-1}B) = n$.

С условием $x(T) = x_1$ из (4) получаем равенство

$$\Phi(T, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\alpha^{-1}t_0} \Phi(T, \tau)A_1\phi(\alpha\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{T} \Phi(T, \tau)Bu(\tau)d\tau = x_1. \quad (5)$$

Обозначим

$$b = \Phi(T, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\alpha^{-1}t_0} \Phi(T, \tau)A_1\phi(\alpha\tau)d\tau - x_1,\ Q(\tau) = \Phi(T, \tau)B. \quad (6)$$

Будем искать управление в виде

$$u(t) = Q^T c + v(t), \quad (7)$$

где c – постоянный вектор, а $v(t)$ – функция, суммируемая с квадратом на $[t_0, T]$ и такая, что

$$\int\limits_{t_0}^{T} Q(t)v(t)dt = 0.$$

После подстановки $(6), (7)$ в уравнение (5) получаем

$$A(T, t_0)c = b, \quad (8)$$

где $A(T, t_0) = -\int\limits_{t_0}^{T} QQ^T dt$.

Уравнение (8) имеет решение для любого b, если $\det A(T, t_0) \neq 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *была точечно управляемой на промежутке* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы матрица* $A(T, t_0) =$

$= -\int\limits_{t_0}^{T} QQ^T dt$, *где* $Q = \Phi B$, *была неособой. При этом все множество программных управлений задается формулой*

$$u = Q^T c + v,$$

где $v(t)$ *– суммируемая с квадратом на* $[t_0, T]$ *функция и*

$$\int\limits_{t_0}^{T} Qv dt = 0,\ c = A^{-1}\left(\Phi(T, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\alpha^{-1}t_0} \Phi(T, \tau)A_1\phi(\alpha\tau)d\tau - x_1\right).$$

Замечание. *В качестве достаточного условия точечной управляемости* (1) *можно рассмотреть следующее:*

$$\exists t \in [t_0, T] : \mathrm{rang}\left(\Phi(t, t_0)B, \frac{\partial\Phi(t, t_0)}{\partial t}B, \ldots, \frac{\partial^{n-1}\Phi(t, t_0)}{\partial t^{n-1}}B\right) = n. \qquad (9)$$

При исследовании точечной управляемости более полезным может оказаться интегральный признак линейной независимости векторных функций.

Теорема 3. *[6] Для того чтобы строки* $q_1(t), \ldots, q_m(t)$ *матрицы* $Q(t)$ *были линейно независимыми на отрезке* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы интегральная матрица*

$$A = \int\limits_{t_0}^{T} Q(t)Q^T(t)dt$$

была определенно-положительной.

Следствие. *Для того чтобы система* (1) *была точечно управляема на* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы строки матрицы* $\Phi(T, t)B$ *были линейно независимы на отрезке* $[t_0, T]$.

2.4 Пример

Пусть в системе (1)

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и известно, что $x_0 = x(t_0), T = \alpha^{-2} t_0$. Построим для такой системы управление $u(t)$ на отрезке $[t_0, T]$, чтобы выполнялось условие $x(T) = 0$. После вычисления фундаментальной матрицы получим представление

$$\Phi(T,t)B = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{T-t} \\ \frac{1}{\alpha-1}(e^{\alpha T + (\alpha^{-1}-1)t} - e^T), \end{pmatrix}, & t \in [t_0, \alpha^{-1} t_0], \\ \begin{pmatrix} e^{T-t} \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [\alpha^{-1} t_0, \alpha^{-2} t_0]. \end{cases}$$

Очевидно, что строки матрицы $\Phi(T,t)B$ линейно независимы на промежутке $[t_0, T]$. Следовательно, согласно следствию из теоремы 3, для любого значения ϕ существует точечное управление, переводящее систему в состояние $x(T) = 0$.

Теперь проверим выполнение (9). Матрица из этого условия выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & e^{t-t_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [t_0, \alpha^{-1} t_0], \\ \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & e^{t-t_0} \\ \frac{1}{\alpha-1}(\beta - e^t) & \frac{1}{\alpha-1}(\alpha\beta - e^t), \end{pmatrix}, & t \in [\alpha^{-1} t_0, \alpha^{-2} t_0], \end{cases}$$

где $\beta = e^{\alpha t + (\alpha^{-1}-1)t_0}$.

Очевидно, что условие (9) в случае рассматриваемой системы выполняется.

2.5 Выводы

В главе предложено несколько критериев точечной управляемости систем вида (1). Однако остался вопрос о существовании критерия точечной управляемости, выраженного в терминах матриц A_0, A_1, B.

Глава 3. Задача наблюдаемости

3.1 Постановка задачи

Зададим наблюдение

$$y(t) = Cx(t), \tag{10}$$

где $y(t)$ – известная вектор-функция размерности r, C – $(r \times n)$-матрица. **Задача наблюдения.** Пусть наблюдения ведутся на отрезке $[t_0, T]$. По известным измерениям $y(t)$ нужно однозначно определить движение системы $x(t)$.

В работе [8] приведено понятие полной наблюдаемости систем $(1), (10)$.

Определение 3. *Система* $(1), (10)$ *называется полностью наблюдаемой на промежутке* $[t_0, T]$, *если по значениям вектора наблюдений* $y(t)$ *на* $[t_0, T]$ *можно однозначно восстановить движение системы на начальном множестве – вектор* $\phi(t)$.

В рассматриваемом далее методе предполагается наблюдение всего вектора состояния $x(t)$ и используется производная наблюдения, что влечет существование шума, поэтому в работе предлагается метод фильтрации для восстановления движения системы (1). Рассматривается также случай неполного наблюдения, в котором решение основано на применении асимптотического наблюдателя.

3.2 Предварительные рассуждения

Рассмотрим случай вырожденной матрицы A_1.

Существует такая матрица D, что $DA_1 = 0$. Если $DA_0 = \Lambda D$, то при домножении левой и правой частей системы (1) на D и замены $Dx = z$ получаем систему

$$\dot{z} = \Lambda z + Df(t). \tag{11}$$

Система (11) – ненаблюдаемая часть системы (1). Данные рассуждения применимы для любых начальных точек t_0. Из чего следует

Теорема 4. *Если матрица A_1 – вырожденная, и для некоторой ненулевой матрицы D выполнены условия $DA_1 = 0$ и $DA_0 = \Lambda D$, то система* $(1), (10)$ *не является полностью наблюдаемой.*

Далее считаем матрицу A_1 невырожденной.

3.3 Построение начальной функции

Сделаем в системе $(1), (3)$ замену $x(t) = e^{A_0 t} z(t)$. Получим

$$\begin{cases} e^{A_0 t}\dot{z} = A_1 \phi(\alpha t) + f(t), \\ y(t) = e^{A_0 t} z. \end{cases} \tag{12}$$

Из первого уравнения системы (12) при условии $\det A_1 \neq 0$ найдем

$$\phi(\alpha t) = A_1^{-1}[e^{A_0 t}\dot{z} - f(t)].$$

Дифференцируя второе уравнение системы (12), получаем

$$\dot{y}(t) = A_0 e^{A_0 t} z + e^{A_0 t}\dot{z}.$$

откуда можно выразить $e^{A_0 t}\dot{z}$.

3.4 Пример фильтра

Обозначим за $x_{ист}(t)$ реальное движение системы (1). В работе [9] в качестве фильтра, решающего задачу наблюдения, предложен следующий:

$$\dot{x}_{ист}(t) \approx \frac{1}{K\delta}\sum_{j=1}^{K}[x(t - 2j\delta) - x(t - (2j-1)\delta)], \tag{13}$$

где δ – малая величина, K – целое.

3.5 Случай неполного наблюдения

Предположим, что в (10) матрица $C \neq E$. Введем вспомогательную систему уравнений

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(\alpha t) + L_0(Cz(t) - y(t)) + L_1(Cz(\alpha t) - y(\alpha t)), \quad (14)$$

которую назовем асимптотическим наблюдателем.

Теорема 5. *Если существуют такие матрицы L_0 и L_1, что матрица $(A_0 + L_0 C)$ – гурвицева матрица, а матрица $(A_0 + L_0 C)^{-1}(A_1 + L_1 C)$ имеет все собственные числа в единичном круге, то справедливо предельное соотношение*

$$z(t) \to x(t) \text{ при } t \to \infty.$$

Доказательство. Вычитая из системы (14) систему (1), с учетом равенства (10) и обозначения $u(t) = z(t) - x(t)$, получаем систему уравнений

$$\dot{u}(t) = (A_0 + L_0 C)u(t) + (A_1 + L_1 C)u(\alpha t).$$

Тогда в соответствии с работой [10] $u(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

Далее начальная функция строится по изложенному в пункте 3.3 алгоритму с заменой вектора $x(t)$ его асимптотическим приближением $z(t)$.

3.6 Выводы

В главе представлена конструктивная теорема, дающая необходимое условие полной наблюдаемости систем вида $(1), (10)$ и получен метод определения движения системы в случае неполной наблюдаемости. Также предложен фильтр (13), позволяющий на основе наблюдения приближенно найти производную истинного решения $(1), (10)$.

Заключение

По итогу работы было получено несколько важных результатов, а именно, фундаментальная матрица систем вида (1) на определенном отрезке, несколько критериев точечной управляемости, необходимый признак полной наблюдаемости и метод построения приближенного решения системы (1) по известному вектору наблюдения и с использованием асимптотического наблюдателя.

Полученные результаты продемонстрированы на Международной конференции студентов и аспирантов «Процессы управления и устойчивость» в 2021 - 2022 гг. Темы докладов «Условия точечной управляемости дифференциально-разностной системы с линейно-возрастающим запаздыванием» и «Проблема фильтрации в задаче наблюдения состояния в дифференциально-разностных системах».

Однако еще стоит вопрос определения общего вида фундаментальной матрицы системы (1) для любого значения переменной t, решение которого поможет в построении программного управления для рассматриваемых систем. Также предложенный в главе 3 фильтр является не единственным, решающим поставленную задачу фильтрации.

Список литературы

[1] Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М: Мир, 1967. 548 с.

[2] Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Т. 11. № 3. С. 105–115.

[3] Жабко А. П., Чижова О. Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и техническое науки. 2015. Т. 20. № 4. С. 843–850.

[4] Марченко В. М. К управляемости линейных систем с последействием // ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083–1086.

[5] Метельский А. В. Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы с регулятором того же типа // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.

[6] Зубов В. И. Лекции по теории управления. СПб.: Лань, 2009. 496 с.

[7] Жигалов В. С. Условия управляемости дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. №1. С. 55–60.

[8] Водичев А. В, О наблюдаемости систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. Т 23. № 4. 1987. С. 589—597.

[9] Жигалов В. С. Проблема фильтрации в задаче наблюдения состояния в дифференциально-разностных системах // Процессы управления и устойчивость. 2022. Т. 9. №1 (в печати).

[10] Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.