Санкт-Петербургский государственный университет

ЗУБАХИНА Татьяна Сергеевна

Выпускная квалификационная работа по программе подготовки магистра

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РУНГЕ—КУТТЫ—ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.02

«Прикладная математика и информатика»

Образовательная программа ВМ.5517.2020

«Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Еремин А. С.

Санкт-Петербург

2022

Содержание

Введение

В последнее время дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (ДУЗА) всё чаще встречаются во многих научных областях: медицине, экологии, биологии [14]. Также данный вид уравнений нашёл применение и в задачах физики, теории колебаний, ракетной технике, автоматики. Нередко встречаются в экономике, химии и инженерии [15, 16]. Такое разнообразие приложений привело к развитии теории ДУЗА, в частности к анализу устойчивости.

Для явного интегрирования жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), возникающих в результате пространственной дискретизации параболических уравнений в частных производных, существует метод, по аналитической форме функций устойчивости которого называют методом Рунге — Кутты — Чебышёва (RKC).

Однако применение методов Рунге — Кутты — Чебышёва к дифференциальным уравнениям с запаздыванием ещё мало исследовано. Поэтому в данной работе будет проведён анализ P-устойчивости расширения методов Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка [1] для ДУЗА, а также показан пример работы с данными методами. Для реальных систем с помощью рассматриваемых методов будет получено устойчивое численное решение.

Так как подробный анализ устойчивости метода Рунге — Кутты — Чебышёва был приведён в выпускной квалификационной работе бакалавра [6], основной задачей данного исследования будет являться изучение метода второго порядка. В первой главе приводятся формулировка и анализ устойчивости метода Рунге — Кутты — Чебышёва для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. После этого во второй главе рассматриваются несколько расширений для решения уравнений с запаздыванием: с помощью линейной интерполяции и интерполяции второго порядка. В силу своей обширности анализ устойчивости рассматриваемых методов для решения ДУЗА был выделен в третью главу. В четвёртой главе полученные области устойчивости проверяются с помощью программы, написанной на языке программирования MATLAB. Наконец в пятой главе показывается пример работы с методами Рунге — Кутты — Чебышёва, получение численных решений систем дифференциальных систем прикладного характера.

Таким образом, итогом данной работы будет являться не только теоретическое исследование областей устойчивости, но и программа, с помощью которой можно будет получать численные решения и для других систем.

Постановка задачи

Основной целью данной работы является изучение методов Рунге—Кутты—Чебышёва для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (ДУЗА), проведение для них анализа устойчивости. ДУЗА — это такие дифференциальные уравнения, в которых производная неизвестной функции в определенное время задается в терминах значений функции в предыдущие моменты времени. Начальная задача для таких уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_k)), & t \geqslant t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leqslant t_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\phi(t)$ — *функция предыстории.* В настоящей работе мы ограничиваемся случаем постоянных запаздываний τ_i.

Для достижения цели необходимо исследовать вопрос расширения метода для решения ДУЗА, получить формулировки методов, аналитически вывести формулы областей устойчивости. Для проверки областей устойчивости реализовать рассматриваемые методы на языке программирования MATLAB, сделать программу масштабируемой и удобной для дальнейшего применения. Для практической части привести способ, который позволил бы находить численные решения и для других уравнений с помощью реализованной программы, при необходимости расширить функционал написанного класса.

Обзор литературы

В данной работе рассматривается метод Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка, его анализ устойчивости для решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также его применение к двум системам: к модели «хищник — жертва» и системе уравнений с частными производными.

На данный момент существует множество работ, посвященных анализу устойчивости численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (см. напр. [24]), в частности анализ устойчивости методов Рунге — Кутты — Чебышёва представлен в [3]. Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом также существует много исследований (напр. [4, 5]), хоть, к сожалению, не так много, как для ОДУ.

Анализ устойчивости для методов Рунге — Кутты — Чебышёва первого порядка применительно к ДУЗА был проведён в [6] и представлен в статье [7]. Однако анализ устойчивости не был качественно проведен для метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка, который и будет рассмотрен в данной работе. Стоит отметить, что в ходе написания данной магистерской работы часть результатов была опубликована в статье [8]. Также в статье [9] представлена формулировка второго метода Рунге — Кутты — Чебышёва, которая была взята за теоретическую основу для рассматриваемого численного метода в текущем анализе. Методы Рунге — Кутты — Чебышёва первого порядка были сформулированы в статье [3].

Метод проведения анализа устойчивости численных методов для решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, который используется в данной работе, был изложен Белленом и Ценнаро в книге «Численные методы для дифференциальных уравнений с запаздыванием» [5]. Необходимо отметить, что данная книга является основополагающим источником по изучению различных численных методов для уравнений с запаздыванием. В десятой главе [5] приводится метод для проведения анализа устойчивости на примере метода Рунге — Кутты. В данной работе этот способ нахождения области устойчивости применяется для метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка.

В качестве одной из систем для практической части была взята модель «хищник — жертва», которая является важной моделью в изучении динамики популяции многих видов. Изучению популяционных моделей типа Лотки—Вольтерры было посвящено множество работ. Например, в публикации [20] Чао Чжу отражено исследование конкурентной модели Лотки — Вольтерры в случайных средах. Была использована диффузия с переключением режимов для моделирования динамики численности популяций разных видов в экосистеме. Также рассматривается стохастический принцип конкурентного исключения. Чэнчжи Ли и Хуайпин Чжу, используя теорию сингулярных возмущений, изучают данную модель с применением реакционных функций типа Холлинга [21]. В работе [22] представлено нахождение возможной точки стабилизации равновесия рассматриваемой модели при наличии интервальной неопределенности через фиксированную линейную обратную связь. Также показывается, что предлагаемый ими подход распространяется на более широкий класс низковольтных систем с изменяющимися во времени и зависимыми от состояния системными матрицами. Эффективность предложенной схемы показывается на численных примерах и моделировании. В статье [23] Денгата Лему Джока и Шуфанг Ма находят решение системы «хищник — жертва» с запаздывание методом коллокации Чебышёва. Данный метод преобразует исходную задачу в систему нелинейных алгебраических уравнений, после чего с помощью функции невязки операторный уравнений строятся дифференциальные уравнения ошибок, происходит коррекция приближенных решений. В данном исследовании за основу будет взята система с запаздывании из статьи [23], но для её решения будет предложен метод Рунге — Кутты —

Чебышёва.

Также будет найдено численное решение для другой модели, представленной в статье [26]. Данный пример покажет, как можно применять метод Рунге — Кутты — Чебышёва для нахождения решения системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Глава 1. Метод Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка для решения ОДУ

1.1 Формулировка метода

Рассмотрим s-этапный метод Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка для решения автономного ОДУ

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0.$$

Данный метод, сформулированный в [9], имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + b_1 w_1 h f(K_0), \\ K_i &= K_0 + \mu_i h(f(K_{i-1}) - a_{i-1} f(K_0)) + \nu_i (K_{i-1} - y_0) + \kappa_i (K_{i-2} - y_0), \\ y_{n+1} &= K_s, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\mu_i = \frac{2b_i w_1}{b_{i-1}}, \quad \nu_i = \frac{2b_i w_0}{b_{i-1}}, \quad \kappa_i = \frac{-b_i}{b_{i-2}}, \quad i = \overline{2, s}, \tag{3}$$

a_s, b_s, w_1 и w_0 задаются как:

$$a_s = 1 - b_s T_s(w_0), \quad b_s = \frac{T''_s(w_0)}{(T'_s(w_0))^2}, \quad w_1 = \frac{T'_s(w_0)}{T''_s(w_0)}, \quad w_0 = 1 + \frac{\eta}{s^2}, \tag{4}$$

η — коэффициент демпфирования, а $T_k(x)$ — полином Чебышёва первого рода степени k

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_k(x) = 2xT_{k-1} - T_{k-2}(x), \quad k = \overline{2, s}.$$

Стоит отметить, что b_0 и b_1 — свободные параметры.

1.2 Устойчивость

Так как настоящая работа является продолжением исследования, которое было начато в ходе написания выпускной квалификационной работы бакалавра [6], здесь лишь продублируем необходимые формулировки и выкладки подхода к проведению анализа устойчивости. Так как сам метод анализа используется такой же. Также в данном анализе будем часто обращаться к результатам относительно устойчивости метода Рунге — Кутты — Чебышёва первого порядка, которые были получены в упомянутой работе.

Устойчивость методов решения ОДУ изучается на примере линейного тестового уравнения Далквиста [24]:

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Асимптотическая сходимость решению к нулю обеспечивается условием $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$. Поэтому левая комплексная полуплоскость и есть область устойчивости уравнения (5).

Для методов Рунге — Кутты численное решение (5) может быть выражено в форме $y_n = R(h\lambda)^n y_0$. Численное решение называется устойчивым при заданной длине шага h, если $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для определения их области устойчивости необходимо получить *функцию устойчивости* $R(\alpha)$. Неравенство $|R(\alpha)| < 1$ задаёт область устойчивости, а равенство $|R(\alpha)| = 1$ — её границу. Подробнее алгоритм для вывода функции устойчивости, а также построения по ней области устойчивости будет приведен в третьей главе, которая посвящена самому методу проведения анализа устойчивости для численных методов.

Заметим, что новые области устойчивости при изменении параметров методов (коэффициент демпфирования η, размер шага h, количество этапов s) можно получить с помощью файлов, созданных с помощью пакета Maple. Данные файлы опубликованы в публичном репозитории

GitHub: https://github.com/tanya525625/Stability_analysis_of_the_Runge-Kutta-Chebyshev_methods_for_DDE.

Для метода Рунге—Кутты—Чебышёва второго порядка функция устойчивости записывается в виде:

$$R_s(z) = a_s + b_s T_s(w_0 + w_1 z), \tag{6}$$

где a_s, b_s, w_1, w_0 задаются уравнениями (11).

Заметим, что при $s = 2$ любой явный метод Рунге—Кутты 2-го порядка имеет функцию устойчивости $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$.

Область устойчивости недемпфированного двухэтапного методов Рунге—Кутты—Чебышёва второго порядка представлена на рис. 1

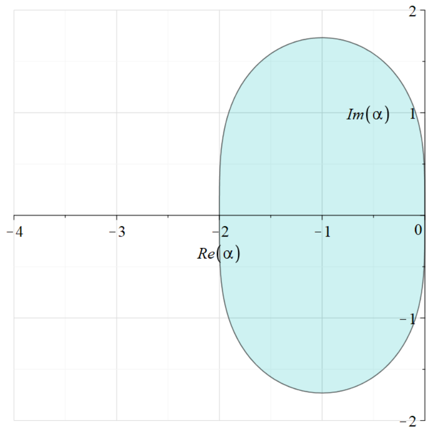
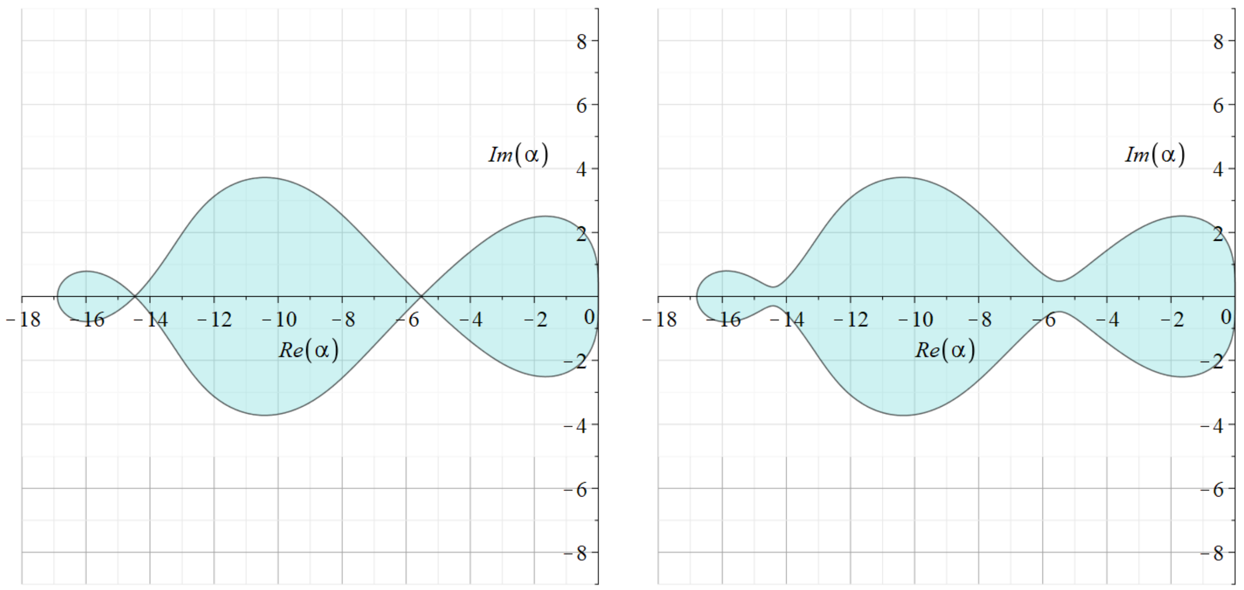


Рис. 1. Область устойчивости двухэтапного RKC 2-го порядка

Необходимо отметить, что область определения метода Рунге—Кутты—Чебышёва 2-го порядка меньше, чем у первого: $D_2 = [-2; 0]$ и $D_1 = [-8, 0]$ соответственно, но при этом область значений равна $E_2 \approx [-1.75; 1; 75]$ в то время, как у первого: $E_1 \approx [-1.5; 1; 5]$. Подобное поведение сохраняется и для больших значений s. Рассмотрим для $s = 5$ (рис. 2):

Заметим, что коэффициент демпфирования влияет так же на область устойчивости метода 2-го порядка, как и на метод 1-го: область определения уменьшается, а в точках сужений области значений увеличиваются.



(a) при $s = 5$, $\eta = 0$ (b) при $s = 5$, $\eta = 0.05$

Рис. 2. Области устойчивости пятиэтапных RKC 2-го порядка

Также стоит отметить, что количество областей сужений для метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка меньше, чем для первого.

Глава 2. Метод Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка для ДУЗА

Более подробные выводы могут быть найдены в сборнике «Процессы управления и устойчивость» [8], так как текущая работа является продолжением начатого ранее исследования.

Анализ устойчивости рассматриваемого численного метода будем проводить на основе обобщения тестового уравнения Далквиста (5), которое получается путём введения слагаемого с постоянным запаздыванием τ:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t-\tau), & t \geqslant t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $\phi(t)$ — функция *предыстории*, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в работе [6] приводились анализы устойчивости для расширений метода Рунге — Кутты — Чебышёва первого порядка. Было установлено, что вариант расширения через линейную интерполяцию имеет область устойчивости, которая больше, чем варианта расширения с использованием ранее найденных значений K. Поэтому в настоящем исследовании ограничимся лишь расширением с использованием интерполяции. Однако в силу увеличившегося порядка метода рассмотрим ещё интерполяцию второго порядка.

Рассмотрим расширения методов Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка на автономное уравнение с постоянным запаздыванием.

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), y(t-\tau)), & t \geqslant t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases} \tag{8}$$

Значения запаздывающего решения находятся через *непрерывное расширение* метода $\tilde{y}(t)$, которое полагается равным $\varphi(t)$ при $t \leqslant t_0$, а на $k+1$-м шаге при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ принимает значение интерполяционного полинома. Для сохранения второго порядка сходимости метода (9) при решении ДУЗА достаточно использовать линейную интерполяцию между точками сетки. Однако более точным будет использование интерполянта второго порядка.

2.1 Линейная интерполяция

При линейной интерполяции решения между точками сетки примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&K_1^{(n)} = K_0^{(n)} + b_1 w_1 h f\left(K_0^{(n)}, \tilde{y}(T_0 - \tau)\right), \\
&K_i^{(n)} = K_0^{(n)} + \mu_i h \left((f(K_{i-1}^{(n)}, \tilde{y}(T_{i-1} - \tau)) - a_{i-1} f(K_0^{(n)})\right) + \\
&\qquad + \nu_i (K_{i-1}^{(n)} - y_0) + \kappa_i (K_{i-2}^{(n)} - y_0), \\
&y_{n+1} = K_s^{(n)},
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\mu_i = \frac{2 b_i w_1}{b_{i-1}}, \quad \nu_i = \frac{2 b_i w_0}{b_{i-1}}, \quad \kappa_i = \frac{-b_i}{b_{i-2}}, \quad i = \overline{2, s}, \tag{10}$$

a_s, b_s, w_1 и w_0 задаются как:

$$a_s = 1 - b_s T_s(w_0), \quad b_s = \frac{T_s''(w_0)}{(T_s'(w_0))^2}, \quad w_1 = \frac{T_s'(w_0)}{T_s''(w_0)}, \quad w_0 = 1 + \frac{\eta}{s^2}, \tag{11}$$

Интерполяционная функция $\tilde{y}(t)$ определяется как

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leqslant t_0, \\ y_r(1-\theta) + y_{r+1}\theta, \;\; \theta = \dfrac{t - t_r}{h}, & t \in [t_r, t_{r+1}]. \end{cases} \tag{12}$$

2.2 Интерполяция второго порядка

Для рассмотрения варианта расширения путём квадратичного интерполянта достаточно заменить интерполяционную функцию $\tilde{y}(t)$ (12). Выразим в записи (9) y_{n+1} через $f(Y_i, \tilde{y}(X_i - \tau))$, $i = 0, ..., s-1$, и положим коэффициенты квадратичными полиномами от $\theta = \theta = (t - t_k)/h$

$$\tilde{y}(t) = y_k + h \sum_{i=0}^{s-1} p_i(\theta) f(Y_i, \tilde{y}(X_i - \tau)), \quad p_i(\theta) = p_{i1}\theta + p_{i2}\theta^2. \tag{13}$$

Подробности построения *непрерывных расширений* численных методов для решения уравнений с запаздыванием можно найти в [5].

Глава 3. Устойчивость методов Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка для ДУЗА

Построенные области устойчивости будут рассматриваться в действительной плоскости $(\alpha, \beta) = (\lambda h, \mu h)$, где λ и μ параметры уравнения Далквиста с запаздыванием (7).

3.1 Устойчивость решений тестового уравнения

Известно, что область асимптотической устойчивости уравнения (7) при известном τ на действительной плоскости (λ, μ) — это множество точек, для которых $\mu < -\lambda$ и $\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} < \dfrac{1}{\tau} \arccos(-\lambda/\mu)$ (см. [25]).

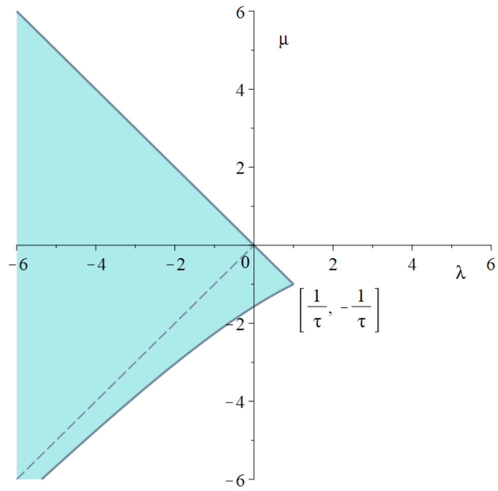


Рис. 3. Область устойчивости точного решения.

Не зависящая от τ область устойчивости будет описываться условием $\lambda \leqslant \mu < -\lambda$. В данной работе будут рассматриваться только области, которые обеспечивают устойчивость для любого зааздывания.

3.2 Анализ численной устойчивости

На данный момент есть несколько вариантов обобщения понятия устойчивости для методов, решающих дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. В данном исследовании рассматривается P-устойчивость.

Определение 1. *Область P-устойчивости численного метода для решения ДУЗА (7) — это набор S_P таких пар комплексных чисел (α, β), где $\alpha = h\lambda$, $\beta = h\mu$, что численное решение $\{y_n\}_{n\geqslant 0}$ системы (7), полученное на постоянном шаге h*

$$h = \frac{\tau}{m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

удовлетворяет равенству

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

для всех функций предыстории $\phi(t)$ и всех постоянных τ.

Для методов, использующих расширение через интерполяционные полиномы, можно выразить корни характеристического полинома для системы (7) в виде равенства:

$$\xi = R^*\left(\alpha, \frac{\beta}{\xi^m}\right),$$

где рациональная функция устойчивости

$$R^*(\alpha, r) = 1 + (\alpha + r)b^T(I - \alpha A - rB)^{-1}e, \tag{15}$$

является обобщением функции $R(\alpha)$, рассмотренной выше для ОДУ [5]. Здесь I — единичная матрица порядка s, e — вектор размерности s, состоящий из единиц, матрица $B = cb$, вектор $c = Ae$, а матрица $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^s$ и вектор-строка $b = (b_1, ..., b_s)$ определяются через таблицу Бутчера метода Рунге—Кутты [24].

Область P-устойчивости можно выразить через (15):

$$P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : \alpha \in S_A \ \text{ и } \ |\beta| < \sigma_\alpha\}, \tag{16}$$

где

$$S_A = \{\alpha \in \mathbb{C} : |R^*(\alpha, 0)| < 1\},$$

$$\sigma_\alpha = \inf_{z \in \Gamma_\alpha} |r|, \quad \Gamma_\alpha = \{r \in \mathbb{C} : |R^*(\alpha, r)| = 1\}.$$

3.3 Линейная интерполяция

Построим область устойчивости для метода Рунге—Кутты—Чебышёва второго порядка при $\eta = 0$. При использовании линейной интерполяции матрицы A и b примут вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \frac{2b_1 - 1}{2b_1} & \frac{1}{2b_1}. \end{bmatrix},$$

Так как b_1 — свободный параметр, он может принимать любое значение. После проведённого анализа функция устойчивости (15) для данного метода получилась равной:

$$R^*(\alpha, r) = 1 - \frac{\alpha(\alpha + r)}{r - 2} - \frac{2(\alpha + r)}{r - 2} \tag{17}$$

Полученная область Р-устойчивости приведена на рис. 4.

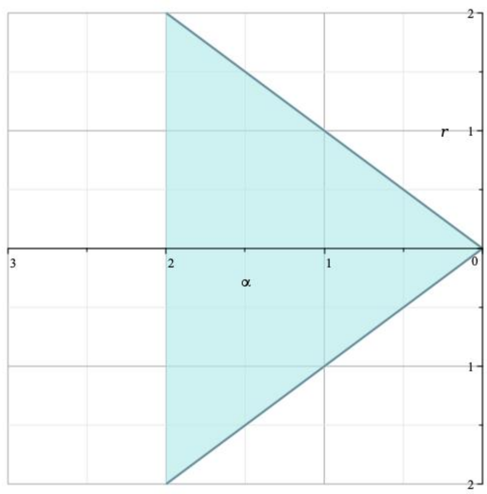


Рис. 4. Область устойчивости метода RKC 2-го порядка при $s = 2, \eta = 0$

Для методов с большим количеством этапов проведём расширенный анализ и построим огибающую семейства кривых в комплексной плоскости.

Определение 2. *Огибающая семейства кривых — это такая кривая, которая касается в каждой принадлежащей ей точке одной из кривых рассматриваемого семейства.*

Если семейство кривых задано уравнением:

$$f(x, y, C) = 0,$$

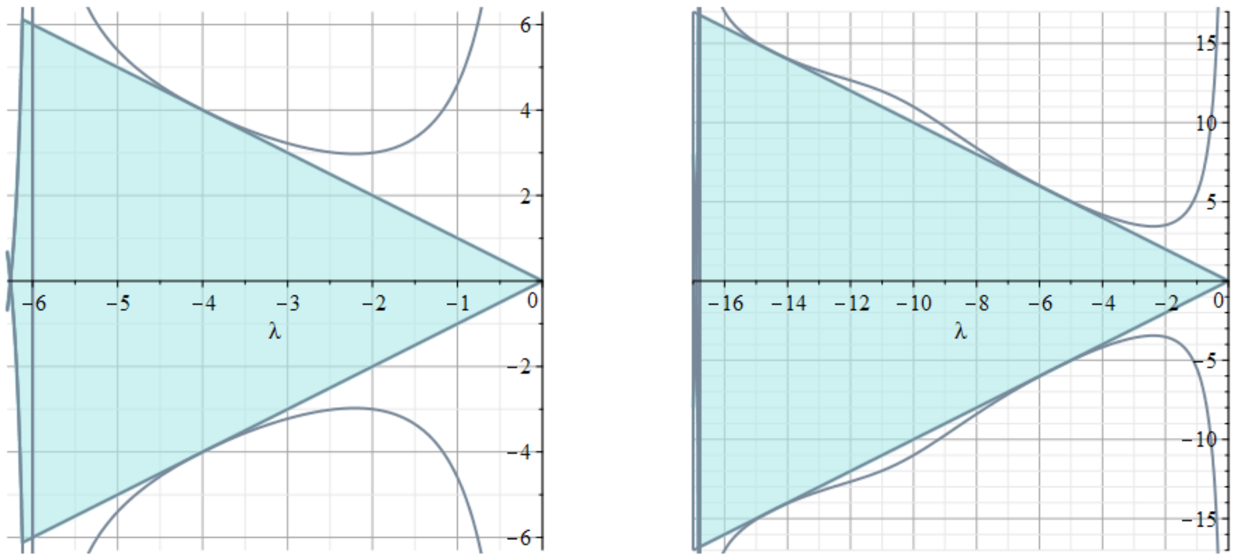
где C — параметр, то параметрические уравнения огибающей можно представить в виде:

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0, \\ f'_C(x, y, C) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Получаем уравнение огибающей в неявном или явном виде при исключении параметра С. Построим огибающую семейства кривых. Для этого представим z в функции устойчивости (15) в показательной форме: $z = \rho e^{i\phi}$ и выпишем условие $|R(\alpha, z)| = 1$ или $R^2 = 1$. Варируя параметр ϕ от 0 до π, получим семейство кривых. По формуле (18) имеем уравнение для огибающей. На рис. 5 приведены области устойчивости для трёхшагового и пятишагового методов.

Таким образом, кривые огибающих находятся вне полученной области устойчивости для действительных значений z, значит данная область будет верной и в комплексной плоскости. В сравнении с методами Рунге—Кутты—Чебышёва 1-го порядка для методов 2-го порядка не были замечены сужения функций, в них присутствуют только вертикальные прямые, в которых функция устойчивости $|R| = 1$. Данное свойство уже также было отмечено для методов Рунге—Кутты—Чебышёва 1-го порядка, использующих для приближения линейную интерполяцию.

Стоит отметить, что увеличение коэффициента демпфирования приводит к изменению области устойчивости лишь по оси абсцисс (уменьше-



(a) С тремя этапами

(b) С пятью этапами

Рис. 5. Области P-устойчивости недемпфированных методов RKC 2-го порядка с линейной интерполяцией

ние), область значений не увеличивается, так как изначально не было сужений, свойственных методам Рунге — Кутты — Чебышёва (рис. 6).

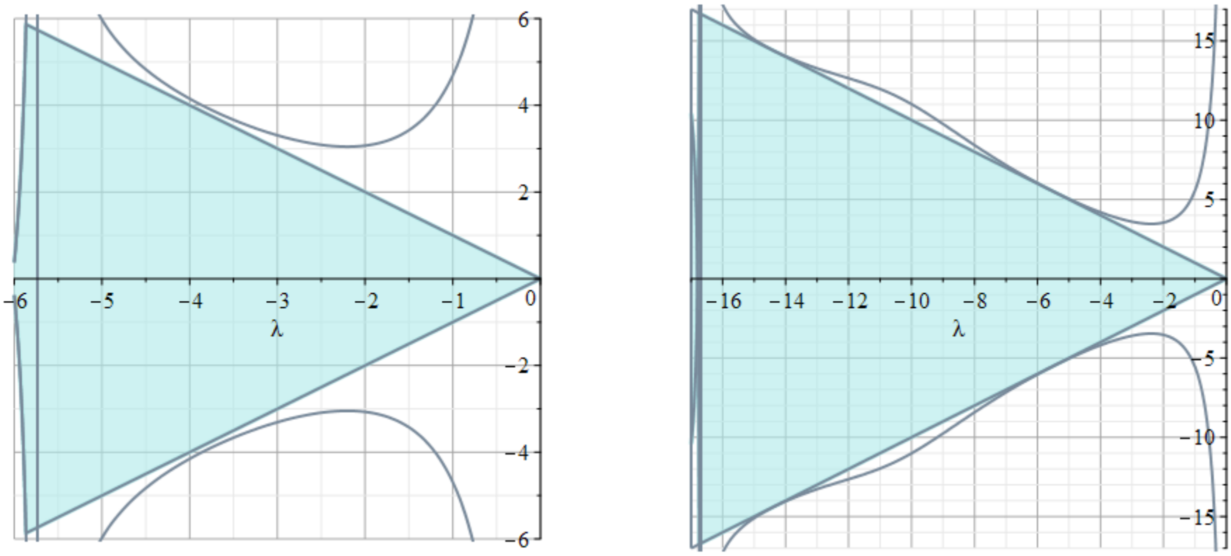
3.4 Интерполяция 2-го порядка

Анализ устойчивости метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка, который для приближения запаздывающих решений использует квадратичный интерполянт, будем проводить на примере трехэтапного недемпфированного метода. Ограничимся пока лишь этим примером, так как главной целью текущего исследования мы ставим сравнение самих вариантов расширений: интерполяции первого и второго порядков.

Рассмотрим недемпфированный метод (9) с тремя этапами ($\eta = 0$, $s = 3$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3b_1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{6b_1-3}{16b_1} & \frac{3}{16b_1} & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \frac{b_1-4}{9b_1} & \frac{4}{9b_1} & \frac{8}{9} \end{bmatrix},$$

где b_1 - свободный параметр.



(a) При $s = 3, \eta = 0.5$ (b) При $s = 3, \eta = 0.05$

Рис. 6. Области P-устойчивости недемпфированных методов RKC 2-го порядка с линейной интерполяцией

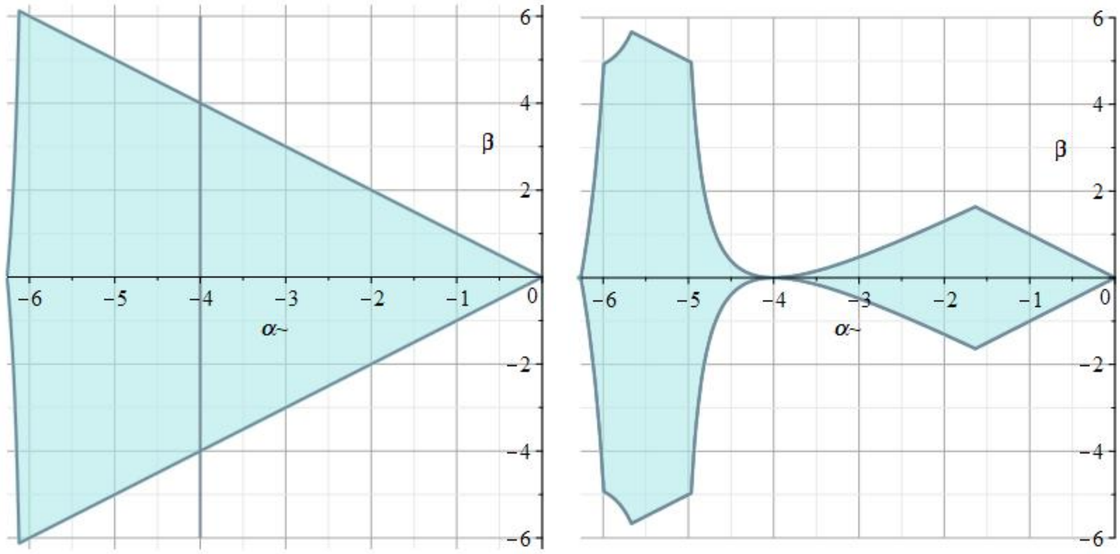
При линейной интерполяции функция устойчивости

$$R^*(\alpha, z) = \frac{-\alpha^3 + (-z-8)\,\alpha^2 + (-7\,z-16)\,\alpha - 8\,z - 16}{\alpha\, z + 8\, z - 16}.$$

При квадратичной интерполяции есть два свободных параметра. Одна из возможных функций устойчивости имеет вид

$$R^*(\alpha, z) = \frac{(31\,\alpha + 168)\,z^2 + \left(63\,\alpha^2 + 423\,\alpha + 416\right) z\,\alpha + 512}{512 + 8\,z^2 + (7\,\alpha - 96)\,z} + \\ + \frac{32\,\alpha^3 + 256\,\alpha^2 + 512\,\alpha + 512}{512 + 8\,z^2 + (7\,\alpha - 96)\,z} \quad (19)$$

Стоит отметить, что подобный анализ был проведён нами при многих разных других вариантах свободных параметров, но «провал» в точке $\alpha = -4$ также сохранялся. При интерполяции 1-го порядка этот «провал» вырождается в вертикальную прямую. В то же время интерполяция 1-го порядка достаточна, чтобы обеспечить сходимость 2-го порядка методов Рунге—Кутты—Чебышёва для ДУЗА [5]. Таким образом, можно заключить, что данный метод более устойчив.



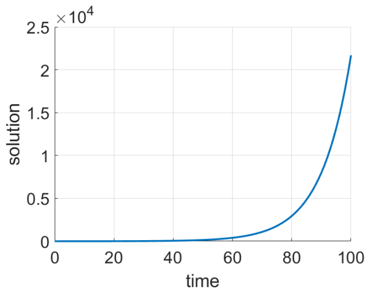
(a) Первого порядка (b) Второго порядка

Рис. 7. Области устойчивости метода RKC с использованием интерполяции 1-го и 2-го порядков.

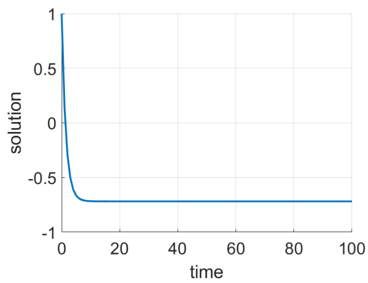
Глава 4. Проверка областей устойчивости

После изучения официальной документации MATLAB [27] было сделан вывод о том, что на данный пакет пакет указанный момент не имеет встроенных методов для нахождения дифференциальных уравнений с запаздываниями методами Рунге — Кутты — Чебышёва первого и второго порядков. Поэтому для проверки областей устойчивости был реализован метод Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка на языке программирования MATLAB. Был создан класс с набором методов, позволяющих работать с разными видами дифференциальными уравнений: ОДУ, ДУЗА. Также с помощью данной программы можно найти численные решения систем дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Код исходной программы может быть найден в публичном репозитории GitHub: https://github.com/tanya525625/RungeKutta-Chebyshev_methods_for_DDE. Стоим отметить, что для нахождения значений полинома Чебышёва был использован тоже пользовательский метод, который более эффективен по памяти, так как базируется не на рекурсивном подходе (как реализовано в MATLAB [28]), а на итеративном.

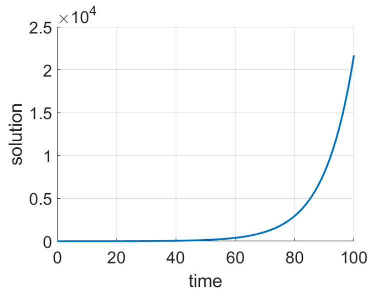
Целью данной главы является удостовериться в том, что нами был верно реализован метод для нахождения и построения областей устойчивости численных метод. На примере двухшагового метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка с использованием линейной интерполяции проведём тесты (рис. 8).



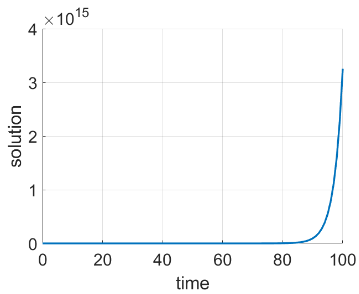
(a) при $s = 2$, $h = 1$, $\eta = 0$, $\lambda = -2.1$, $\mu = 0$



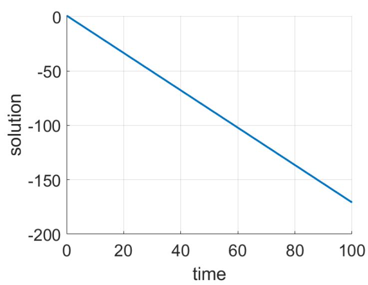
(b) при $s = 2$, $\eta = 0$, $\lambda = -2$, $\mu = 1$



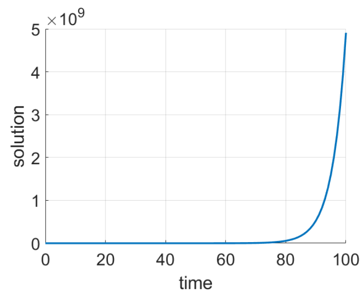
(c) при $s = 2$, $\eta = 0$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0$



(d) при $s = 2$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0.5$



(e) при $s = 2$, $\eta = 0$, $\lambda = -2$, $\mu = 2$



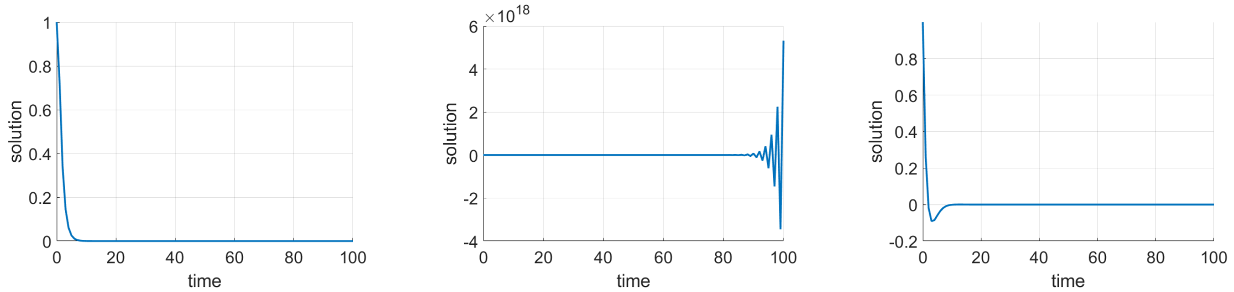
(f) при $s = 2$, $\eta = 0$, $\lambda = -1$, $\mu = 1.5$

Рис. 8. Численные решения системы (7), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва 2-го порядка, использующего линейную интерполяцию.

Таким образом, при выходе за границы области определения функции 4 решение расходится (рис. 8a и рис. 8c). Графики, иллюстрирующие решения, полученные при применении коэффициентов, которые предполагают сходимость, подтверждают правильность полученной области устойчивости (рис. 8b и рис. 8e). При выходе за пределы области значений функция, изображённая на графике, перестаёт быть устойчивой (рис. 8d и рис. 8f).

4.0.1 При увеличении количества этапов метода

На примере трёхшагового метода убедимся, что полученная ранее область устойчивости для метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка при $\eta = 0$ верна (рис. 9).



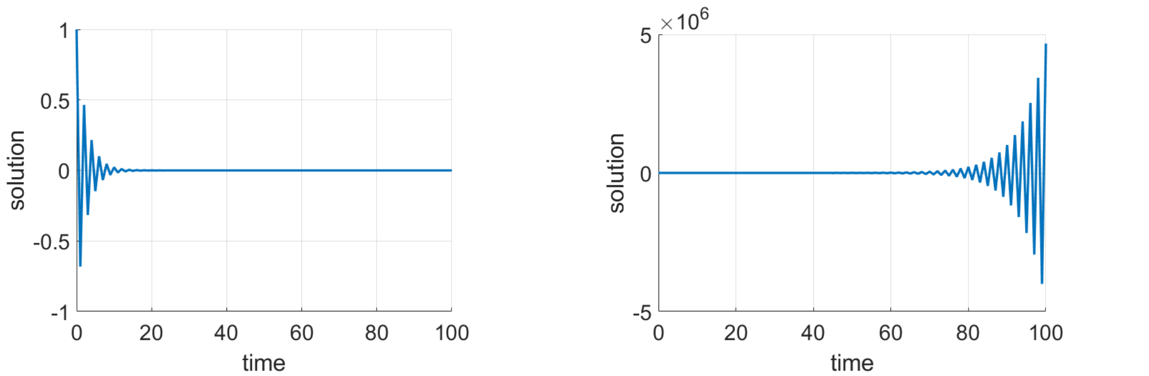
(a) при $s = 3$, $\eta = 0$, $\lambda = -5$, $\mu = 4$ (b) при $s = 3$, $\eta = 0$, $\lambda = -6.5$, $\mu = 0$ (c) при $s = 3$, $\eta = 0$, $\lambda = -3$, $\mu = 2$

Рис. 9. Численные решения системы (7), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва 2-го порядка, использующего линейную интерполяцию.

4.0.2 При увеличении коэффициента демпфирования

Также при $s = 3$ проведём тесты для метода RKC второго порядка при изменении коэффициента демпфирования (η).

Ввиду того, что изменения области значений не наблюдалось, рассмотрим только граничные значения по оси абсцисс (рис. 10).



(a) при $s = 3$, $\eta = 0$, $\lambda = -6.1$, $\mu = 0$ (b) при $s = 3$, $\eta = 0.5$, $\lambda = -6.1$, $\mu = 0$

Рис. 10. Численные решения системы (7), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва 2-го порядка, использующего линейную интерполяцию..

При увеличении η решение для исходного уравнения перестаёт быть устойчивым (рис. 10b) ввиду выхода за пределы области устойчивости демпфированного метода.

Таким образом, все полученные графики подтверждают правильность построенных областей устойчивости, а также то, что метод для нахождения областей устойчивости был реализован верно.

Глава 5. Применение метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка

5.1 Модель «хищник — жертва»

В статье [23] рассматривается модель «хищник — жертва» с запаздываниями, также приводятся численные эксперименты по нахождению численного решения с помощью модифицированного метода Чебышёва. Так как характер расположения собственных чисел системы подходит для применения метода Рунге — Кутты — Чебышёва, в настоящей работе будет проведен анализ нахождения решения с помощью указанного метода. Также одним из преимуществ метода Рунге — Кутты — Чебышёва является качественная интерполяция запаздывающей части.

Рассмотрим из статьи [23] модель «хищник — жертва» с запаздываниями:

$$\begin{cases} y_1' = y_1(t)[r_1 - a_{11}y_1(t-\tau) - a_{12}y_2(t)], \\ y_2' = y_2(t)[-r_2 + a_{21}y_1(t) - a_{22}y_2(t)], \end{cases} \quad t \in [0, T] \tag{20}$$

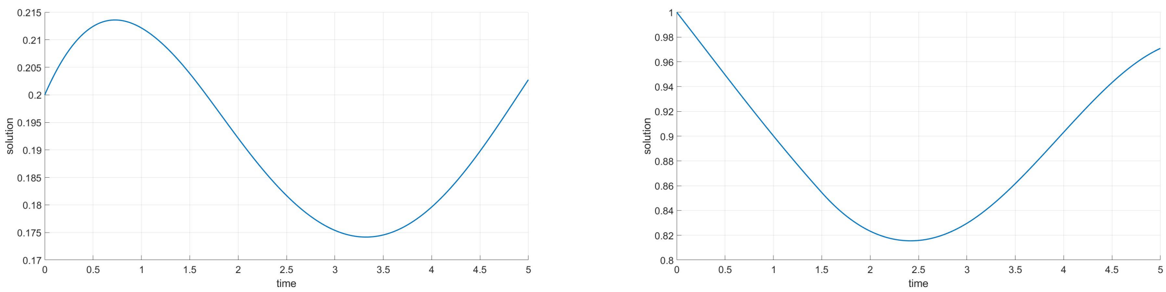
с начальными условиями $y_1(0) = \alpha$, $y_2(0) = \beta$, где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются количественными показателями популяции жертв и хищников соответственно, $r_1 > 0$ — скорость роста популяции жертв в отсутствии хищников, $a_{11} > 0$ — коэффициент саморегуляции жертв, $a_{12} > 0$ — коэффициент хищничества, влияние количества хищников на популяцию жертв, $r_2 > 0$ — смертность хищников в отсутствии жертв, $a_{21} > 0$ — коэффициент конверсии хищников, положительное влияние количества жертв на хищников, $a_{22} > 0$ описывает внутривидовую конкуренцию между хищниками, τ — необходимое время для воспроизводства новых видов жертв, а α и β — некоторые постоянные величины.

5.1.1 Численное решение

Возьмем значения коэффициентов для системы (20) из статьи [23]: $r_1 = 1$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0.5$, $r_2 = -1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 4$, $T = 5$. Начальные условия: $\alpha = 1$, $\beta = 0.2$. Также запаздывание будем считать постоянным $\tau = 1.5$. Получим:

$$\begin{cases} y_1' = y_1(t)[1 - y_1(t-1.5) - 0.5y_2(t)], \\ y_2' = y_2(t)[-1 + 2y_1(t) - 4y_2(t)], \end{cases} \quad t \in [0,5] \tag{21}$$

С помощью реализованного метода Рунге — Кутты — Чебышёва первого порядка получим численное решение системы. Возьмем двухэтапный численный без демпфирования ($s = 2$, $\eta = 0$) метод Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием линейной интерполяции для аппроксимации запаздывающей части. Поскольку устойчивость зависит от выбранного шага, все дальнейшие численные эксперименты будут проводиться на одинаковом постоянном шаге $h = 0.01$.

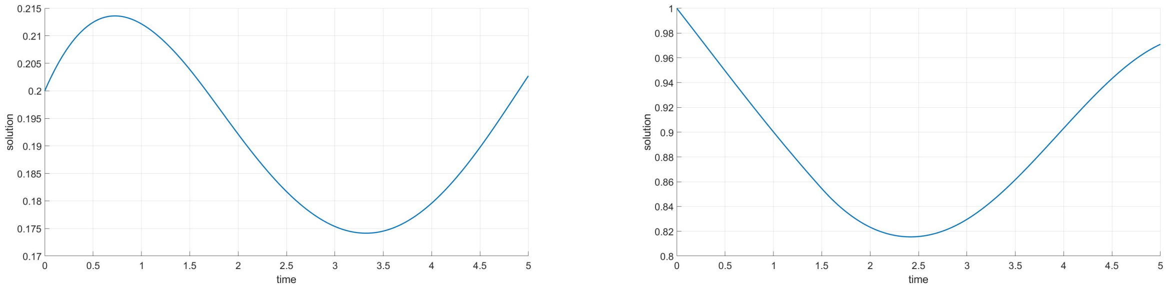


(a) Хищник (b) Жертва

Рис. 11. Решения системы, полученные Рунге — Кутты — Чебышёва 1-го порядка с интерполяцией, $s = 2$, $\eta = 0$

Стоит отметить, что решения, полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва первого порядка, эквивалентны решениям в статье. Однако данный метод за счет возможности увеличения количества этапов и коэффициента демпфирования позволяет расширить область устойчивости метода, что позволит рассматривать систему с большим количеством разнообразных параметров.

При использовании метода Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка также получаем устойчивое верное решение (рис.12).



(a) Хищник

(b) Жертва

Рис. 12. Решения системы, полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва 2-го порядка, $s = 3$, $\eta = 0$

Продолжив решения, видим, что решения устойчивы (рис.13).

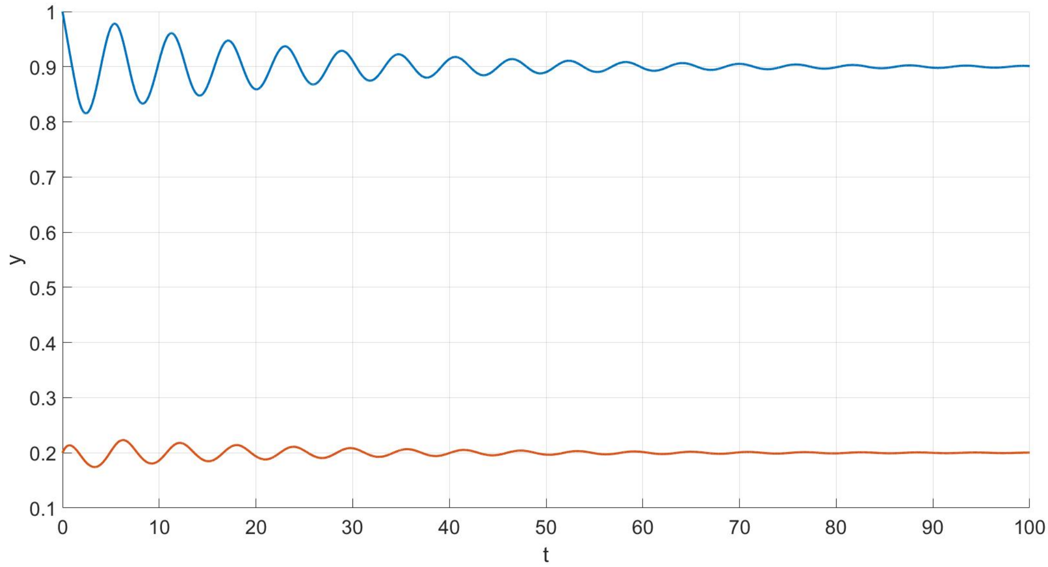
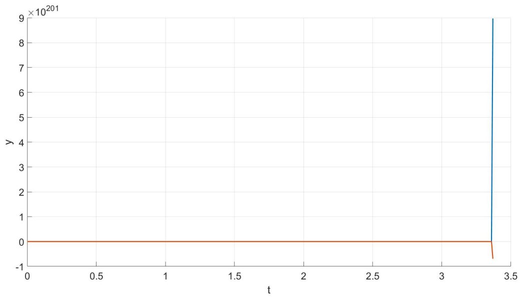


Рис. 13. Устойчивость системы

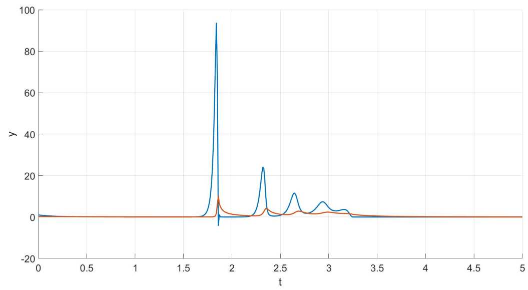
Посмотрим на характер устойчивости при изменении параметров систем. Рассмотрим, например, систему:

$$\begin{cases} y_1' = 60y_1(t)[1 - y_1(t - 1.5) - 0.5y_2(t)], \\ y_2' = y_2(t)[-1 + 2y_1(t) - 4y_2(t)], \end{cases} \qquad t \in [0, 5] \tag{22}$$

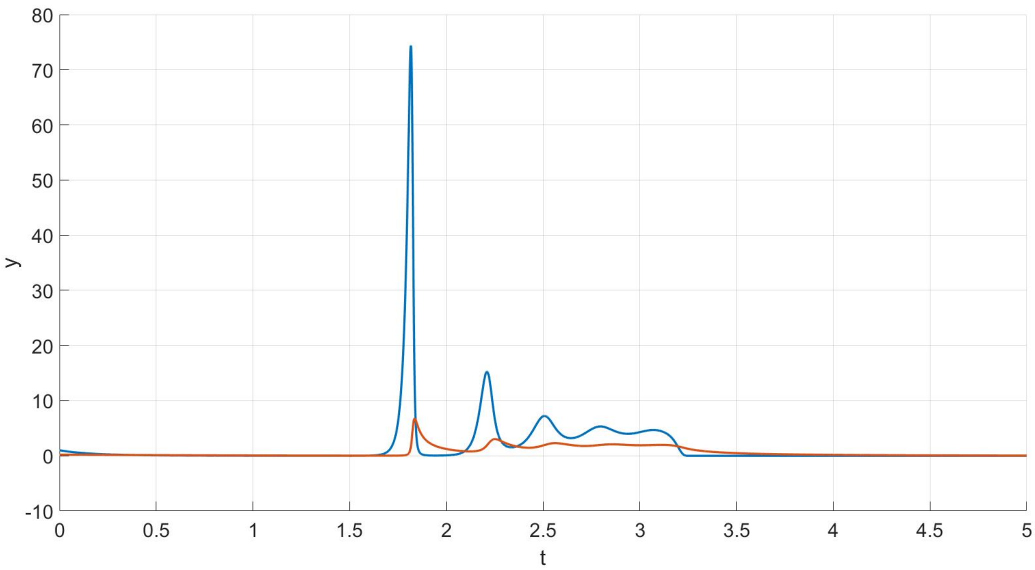
Двухэтапный метод Рунге — Кутты — Чебышёва без демпфирования не может обеспечить должный уровень устойчивости, но при увеличении количества этапов до $s = 11$ и коэффицента демпфирования $\eta = 1$ снова наблюдаем устойчивость решения. Таким образом, с помощью изменения параметров метода можем добиться получения устойчивого решения, что дает метод, удобный для применения на практике (рис. 14). Заметим, что решение неверно (есть отрицательные значения для жертвы), однако устойчивость была доказана. Для получения верного решения уменьшим шаг до $h = 0.001$ (рис. 14c).



(a) $s = 2$, $\eta = 0$, $h = 0.01$



(b) $s = 11$, $\eta = 1$, $h = 0.01$



(c) $s = 11$, $\eta = 1$, $h = 0.001$

Рис. 14. Решения системы, полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва с разными параметрами

5.2 Уравнение в частных производных

Многие задачи прикладной науки, физики и техники математически моделируются уравнениями в частных производных. Поэтому так важно иметь численный метод, с помощью которого можно найти решения этих систем.

В данной части мы найдём решение для модели, представленной в статье [26], которая является системой дифференциальных уравнений в частных производных. Данная система используется для описания температуры в изолированном стержне, концы которого находятся при температуре, равной нулю, и при начальном распределении температуры вдоль стержня $\phi(x,t)$, а $k > 0$ — коэффициент температуропроводности изолированного стержня. Из-за проблем задержки в реальной жизни уравнение теплопроводности часто записывается в виде уравнения в частных производных с запаздыванием:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + r\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t-\tau), \quad t > 0, \ \ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant -\tau, \\ u(x,t) = \phi(x,t), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{23}$$

Здесь функция истории $\phi(x)$ может быть задана любой дифференцируемой функцией, которая удовлетворяет условию $\phi(0,t) = \phi(\pi,t) = 0$ при $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, где τ - запаздывание, а $r > 0$, $k > 0$ - произвольные константы. Например, в качестве функции истории можно взять функцию $f(x) = sin(x)$, как это было сделано в настоящей работе.

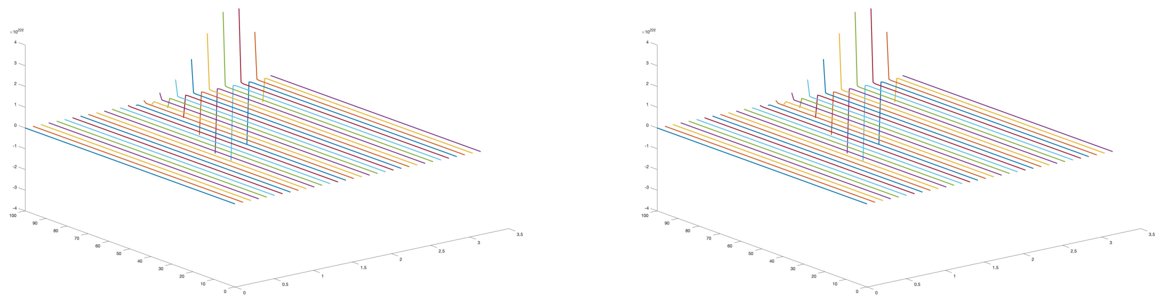
5.2.1 Численное решение

Для разрешения уравнений в частных производных применим пространственную дискретизацию.

Заменим вторые пространственные производные конечными разностями на сетке из N точек $x_i = \frac{i}{N+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$, $\Delta x = \frac{i}{N+1}$, тогда из (23) получим:

$$
\begin{cases}
u_i' = \frac{k}{(\Delta x)^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{r}{(\Delta x)^2}(u_{i-1-\tau} - 2u_{i-\tau} + u_{i+1-\tau}), \\
u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0, \\
u_i(t) = \phi(x_i), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad i = \overline{1, N}
\end{cases}
\tag{24}
$$

Реализовав методы Рунге — Кутты — Чебышёва первого и второго порядков с помощью описанного подхода, найдём численное решение (рис. 15). Заметим, что будем использовать методы, которые для нахождения приближения решения в прошлом будут использовать линейную интерполяцию. Так как именно этот вариант расширения имеет наибольшую область устойчивости среди рассмотренных методов.



(a) Первого порядка

(b) Второго порядка

Рис. 15. Решения системы, полученные методами Рунге — Кутты — Чебышёва

Таким образом, получили одинаковые численные решению с помощью методов Рунге — Кутты — Чебышёва первого и второго порядков. Для обеспечения верного численного решения в обоих случаях использовался пятиэтапный недемпфированный метод.

Выводы

Подведём итоги. В ходе данного исследования были приведены формулировки методов Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Для получения численных решений ДУЗА были рассмотрены два возможных варианта расширения метода: интерполяции первого и второго порядков. Заметим, что существует ещё вариант нахождения запаздывающих значений с помощью ранее найденных значений K. Данный метод был рассмотрен в выпускной работе бакалавра [6], в силу того, что область устойчивости этого метода меньше, чем у линейной интерполяции, а также того факта, что данный вариант расширения требует больше памяти для хранения всех промежуточных значений K, в настоящем исследовании не рассматривался этот вариант аппроксимации решений в прошлом.

Далее был проведён анализ устойчивости для всех рассмотренных методов. По итогам анализа был сделан вывод, что использование интерполяции первого порядка даёт большую область устойчивости. При использовании квадратичного интерполянта образуется «провал» в точке $\alpha = -4$, в случае линейной интерполяции данный «провал» вырождается в вертикальную прямую, что позволяет избежать уменьшения области устойчивости по оси ординат в области указанной точки.

Область устойчивости может быть увеличена за счёт увеличения значения параметров самого метода: количества этапов (s), коэффициента демпфирования (η), что также было продемонстрировано на примере построения соответствующих областей.

Данная особенность позволяет сделать метод гибким и удобным для практического применения. На примере модели «хищник — жертва» был рассмотрен случай, когда при изменении коэффициентов системы, метод перестает обеспечивать получение устойчивого решения, однако при увеличении количества этапов и значения коэффициента демпфирования удалось добиться устойчивого решения. Также было показано, что для системы в частных производных численное решение может быть получено и методом Рунге — Кутты — Чебышёва как первого, так и второго порядков.

Для проверки областей устойчивости и нахождения численных решений рассматриваемые методы были реализованы на языке программирования MATLAB. На данный момент с помощью реализованной программы можно находить решения для следующих систем: ОДУ и ДУЗА любой размерности. Доступны методы Рунге — Кутты — Чебышёва первого и второго порядков с разными вариантами расширений, а также явный и неявный методы Эйлера.

Заключение

Так как целью данной работы было не только проведение теоретического исследование по поиску областей устойчивости изучаемых методов, но и создание эффективной программы для решения систем разного типа (ОДУ И ДУЗА) с помощью методов Рунге — Кутты — Чебышёва, были получены результаты и прикладного характера, продемонстрирован пример работы с реальными системами, для которых необходимо найти численное решение.

Был приведён вариант проведения анализа устойчивости для численных методов, использующихся для нахождения дифференциальных уравнений с запаздываниями. В дальнейшем подобный подход может быть использован и для других методов. Так данный алгоритм был применён для нахождения областей устойчивости методов Рунге — Кутты — Чебышёва и первого, и второго порядков.

Список литературы

[1] Van der Houwen P., Sommeijer B. On the internal stage Runge-Kutta methods for large m-values // Z. Angew. Math. Mech. 1980. Vol. 60. P. 479–485.

[2] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. 685 с.

[3] Verwer J.G., Hundsdorfer W.H., Sommeijer B.P. Convergence properties of the Runge-Kutta-Chebyshev method // Numerische Mathematik, 1990, vol. 57. pp. 157–178.

[4] Al-Mutib A.N. Stability properties of numerical methods for solving delay differential equations // J. Comput. Appl. Math., 1984, vol. 10, pp. 71–79.

[5] Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations, Oxford University Press, 2013. 413 p.

[6] Зубахина Т. С. ВКР бакалавра: Анализ Устойчивости Методов Рунге — Кутты — Чебышёва Для Уравнений с запаздыванием

[7] Eremin A. S., Zubakhina T. S. Real-valued stability analysis of Runge–Kutta–Chebyshev methods for delay differential equations // AIP Conference Proceedings 2425 (ICNAAM-2020)

[8] Зубахина Т. С. Анализ устойичовсти методов Рунге — Кутты — Чебышёва второго порядка для уравнений с запаздыванием // ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ, 2021, 126-130 с.

[9] Abdulle A. Explicit stabilized Runge-Kutta methods // MATHICSE Technical Report, 2011, pp. 1–20.

[10] Desmond J. Higham. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations // J. SIAM, 2001,Vol. 43, No. 3, pp. 525–546.

[11] Yoshihiro Saito, Taketomo Mitsui. Stability Analysis of Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, Vol. 33, No. 6, pp.2254-2267

[12] Assyr Abdulle, Stephane Cirilli, S-ROCK: Chebyshev methods for stiff stochastic differential equations // SIAM J. SCI. COMPUT., 2008, Vol. 30, No. 2, pp. 997–1014

[13] Evelyn Buckwar, Thorsten Sickenberger, A comparative linear mean-square stability analysis of Maruyama- and Milstein-type methods // 2010, pp. 1–19

[14] Smith H. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, Springer, 2011. 172 p.

[15] Erneux T. Applied Delay Differential Equations, Springer, 2009. 204 p.

[16] Kyrychko Y.N., Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications // Journal of Vibration and Control, 2017, vol. 16, no. 7–8, pp. 943–960.

[17] Ashyralyev A., Agirseven D. Stability of delay parabolic difference equations // Filomat, 2014, vol. 28, no. 5, pp. 995–1006.

[18] Ashyralyev A., Ağirseven D. Finite difference method for delay parabolic equations // AIP Conference Proceedings, 2011, vol. 1389, 573–576.

[19] Kubiaczyk I., Saker S.H. Oscillation of delay parabolic differential equations with several coefficients // J. Comput. Appl. Math., 2002, vol. 147, no. 2, pp. 263–275.

[20] Zhu, C., Yin, G.: On competitive Lotka–Volterra model in random environments. J. Math. Anal. Appl. 357, 154–170 (2009)

[21] Li, C., Zhu, H.: Canard cycles for predator–prey systems with Holling types of functional response. J. Differ. Equ. 254, 879–910 (2013)

[22] Badri, V., Yazdanpanah, M.J., Tavazoei, M.S.: Global stabilization of Lotka–Volterra systems with interval uncertainty. IEEE Trans. Autom. Control 64, 1209–1213 (2018)

[23] J. Dengata, Shufang Ma: Modified Chebyshev collocation method for delayed predator–prey system. Advances in Difference Equations. Springer (2020)

[24] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. 685 с.

[25] Hayes N.D. Roots of transcendental equations associated with certain difference-differential equations // J. London Math. Soc, 1950, vol. 25, pp. 226–232.

[26] Hongjiong Tian. Asymptotic stability of numerical methods for linear delay parabolic differential equations // Journal of Computers and Mathematics with Applications, 2008, vol. 56, pp. 1758–1765.

[27] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/dde23.html

[28] https://www.mathworks.com/help/symbolic/chebyshevt.html