Санкт-Петербургский государственный университет

Шашков Тимофей Юрьевич

Выпускная квалификационная работа

О рёберных раскрасках

Уровень образования: Магистратура
Направление: 01.04.01 "Математика"
Основная образовательная программа: ВМ.5832.2020
"Современная математика"

Научный руководитель: Профессор СПбГУ,
Факультет математики и компьютерных наук,
Доктор физико-математических наук
Петров Фёдор Владимирович

Рецензент: Старший научный сотрудник,
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А.Стеклова
Российской академии наук,
Доктор физико-математических наук
Карпов Дмитрий Валерьевич

Санкт-Петербург
2022 год

Содержание

1 Введение

Рёберные раскраски мультиграфов являются важной активно развивающейся областью теории графов. Одними из наиболее известных результатов в этом направлении являются теорема Визинга, изучающая правильные рёберные раскраски, и теорема Гупты, связанная с покрывающими раскрасками рёбер. Ниже мы сформулируем эти теоремы.

Напомним, что раскраска рёбер называется **правильной**, если любые 2 смежных ребра покрашены в разные цвета. Здесь и далее через $\chi'(G)$ мы будем обозначать рёберный хроматический индекс, то есть минимальное число цветов, для которого существует правильная рёберная раскраска графа G в это число цветов.

Теорема. (*В. Г. Визинг,* 1964) *Пусть G – мультиграф с максимальной степенью вершин $\Delta(G)$, а $\mu(G)$ – максимальная кратность рёбер G. Тогда $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$.*

Помимо правильных раскрасок рёбер нередко рассматривают **покрывающие** раскраски, то есть такие, в которых рёбра каждого из используемых цветов покрывают все вершины графа G. Через $\kappa'(G)$ мы будем везде в этой работе обозначать покрывающий индекс мультиграфа G, то есть такое максимальное число цветов, для которого существует покрывающая раскраска рёбер в данное число цветов. Гупта получил оценку снизу на $\kappa'(G)$.

Теорема. (*R. P. Gupta,* 1974) *Пусть G – мультиграф с минимальной степенью вершин $\delta(G)$, а $\mu(G)$ – максимальная кратность рёбер G. Тогда $\kappa'(G) \geqslant \delta(G) - \mu(G)$.*

Оба результата будут в дальнейшем часто применяться в нашей работе.

Любопытно, что двудольные графы являются в некотором роде "самыми неоптимальными графами" относительно обеих оценок!

Теорема. *Пусть G – двудольный граф с максимальной и минимальной степенями вершин Δ и δ соответственно. Тогда*

1.(*D. König, 1916*)

$$\chi'(G) = \Delta.$$

2.(*R. P. Gupta, 1966*)

$$\kappa'(G) = \delta.$$

Замечание. *Если же G – произвольный граф с максимальной степенью вершин Δ и минимальной степенью вершин δ, то легко видеть, что $\chi'(G) \geqslant \Delta$ и $\kappa'(G) \leqslant \delta$.*

Все эти результаты указывают на своего рода двойственность характеристик $\chi'(G)$ и $\kappa'(G)$. Отсюда естественно было бы задаться вопросом существует ли какая-то связь между этими, на первый взгляд, очень разными типами рёберных раскрасок? В этой работе будет исследоваться зависимость между $\chi'(G)$ и $\kappa'(G)$, что в каком-то смысле даст нам ответ на поставленный вопрос.

2 Постановка задачи и полученные результаты

Здесь и далее мы будем предполагать, что G – r-регулярный связный мультиграф, а $\mu(G)$ – максимальная кратность рёбер в G. Цель работы – исследовать возможные значения суммы $\chi'(G) + \kappa'(G)$ в терминах r и $\mu(G)$.

Приведём формулировки основных результатов этой работы:

Теорема. *Пусть G – r-регулярный связный граф с $\mu(G) = \mu$ – максимальной кратностью рёбер. Тогда:*

1. $\kappa'(G) + \chi'(G) \geqslant 2r$ и, более того, для всех пар (r, μ), $r \geqslant \mu$, существует граф указанного выше вида, на котором в оценке достигается равенство.

2. $\kappa'(G) + \chi'(G) \leqslant 2r + \lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor$.

Кроме того, в работе даётся полное описание пар (r, μ), для которых достигается равенство в верхней оценке из теоремы. Полная формулировка всех основных результатов представлена в заключении этой работы.

Стоит, однако, отметить, что при доказательстве верхней точной оценки (пункт 2 теоремы) будет использоваться гипотеза Голдберга-Сеймура, предлагающая очень интересный и простой способ нахождения рёберного хроматического числа мультиграфов.

Перед тем, как формулировать гипотезу, введём следующее обозначение (оно же будет использоваться при анализе верхней оценки для суммы хроматических чисел).

Обозначение 1. $\mathit{\Gamma}(G) := max\{\frac{E(W)}{\lfloor \frac{|W|}{2} \rfloor} : W \subset V(G), 3 \leqslant |W| \equiv 1 \ (mod\ 2)\}$.

Здесь мы под $|E(W)|$ подразумеваем количество рёбер графа, индуцированного на множестве вершин W, $V(G)$ – множество вершин графа G.

Гипотеза. $(Goldberg - Seymour, 1984?)$ *Если в мультиграфе G с максимальной кратностью рёбер $\mu(G)$ и максимальной степенью вершин $\Delta(G)$ верно $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$, то $\chi'(G) = \lceil \mathit{\Gamma}(G) \rceil$.*

Замечание. *Нетрудно видеть, что $\chi'(G) \geqslant \lceil \mathit{\Gamma}(G) \rceil$.*

Доказательство. Действительно, предположим, что W – множество вершин из определения $\Gamma(G)$ и зафиксируем правильную раскраску рёбер в $\chi'(G)$ цветов. Тогда, в силу правильности такой раскраски и нечётности числа вершин множества W, среди рёбер множества $E(W)$ не более, чем $\frac{|W|-1}{2}$ одноцветных для каждого из $\chi'(G)$ цветов. Тогда ясно, что

$$\chi'(G)(\frac{|W|-1}{2}) \geqslant |E(W)| \iff \chi'(G) \geqslant \frac{|E(W)|}{\frac{|W|-1}{2}}.$$

После этого требуемое неравенство становится очевидным. □

Обратное неравенство, однако, уже совсем неочевидно. Тем не менее, предполагая дополнительно некоторые ограничения на рёберное хроматическое число, гипотезу уже давно удалось проверить. Приведём пример одного из полученных результатов:

Теорема. (*"Слабая гипотеза Голдберга-Сеймура" ,Nishizeki T., Kashiwagi K.,1990,* [4])

Пусть G – мультиграф с $\chi'(G) > 1.1\Delta(G) + 0.8$. Тогда верна гипотеза Голдберга-Сеймура.

Полное же доказательство этой гипотезы было предложено в статье [1] (2019, публикация доступна в электронном архиве arXiv.org).

3 Простейшие свойства рёберных раскрасок регулярных графов

Зафиксируем в этом пункте несколько простых утверждений, который будут нами очень часто использоваться при доказательстве как верхней, так и нижней оценки. С учётом теорем Визинга и Гупта получаем в этом случае утверждение:

Теорема 1. *Пусть G – r-регулярный граф с кратностью рёбер $\mu(G)$. Тогда*

1. $r - \mu(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant r$;
2. $r \leqslant \chi'(G) \leqslant r + \mu(G)$.

Доказательство. 1. Нижняя оценка вытекает из теоремы Гупты, а верхняя оценка следует из определения покрывающей раскраски.

2. Нижняя оценка следует из определения правильной раскраски рёбер, а верхняя оценка следует из теоремы Визинга. □

Отметим, что для r-регулярных графов легко проверить следующее утверждение:

Утверждение 1. *Предположим, что G – r-регулярный граф, описанного выше вида. Тогда*

$$\kappa'(G) = r \iff \chi'(G) = r.$$

Доказательство. $\kappa'(G) = r$ означает, что существует раскраска рёбер графа G в r цветов, в которой из любой вершины выходит как минимум по одному ребру каждого цвета. Поскольку G – r-регулярный граф, получается, что в рассматриваемой раскраске из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета, что, в свою очередь, означает, что эта раскраска - правильная.

В обратную сторону утверждение доказывается аналогично. □

4 Нижняя оценка для $\kappa'(G) + \chi'(G)$

Теорема 2. *Пусть G – r-регулярный граф с максимальной кратностью рёбер μ. Тогда*

$$\kappa'(G) + \chi'(G) \geqslant 2r.$$

Доказательство. Для этого докажем лемму:

Лемма 1. *Пусть G – r-регулярный мультиграф с максимальной кратностью рёбер μ и он имеет правильную раскраску рёбер в $r + k$ цветов для некоторого неотрицательного целого числа k. Тогда G имеет покрывающую раскраску рёбер в $r - k$ цветов.*

Доказательство. Рассмотрим правильную раскраску рёбер ρ_{r+k} в $r+k$ цветов и переделаем её в покрывающую раскраску α_{r-k} в $r - k$ цветов (см. рис. 1a). Мы будем для удобства считать, что ρ_{r+k} красит рёбра в цвета $1, ..., r + k$, а α_{r-k} – в цвета $1, ..., r - k$.

Положим $\alpha_{r-k}(e) := \rho_{r+k}(e)$, если $\rho_{r+k}(e) \in \{1, ..., r - k\}$.

Удалим все рёбра e, для которых $\rho_{r+k}(e) \in \{1, ..., r - k\}$.

Тогда нетрудный подсчёт показывает, что в оставшемся графе G' все вершины будут иметь степени от k до $2k$. Действительно, с одной стороны, мы могли удалить у вершины максимум $r - k$ рёбер и, следовательно, тогда в G' любая вершина будет иметь степень не меньше, чем $r - (r - k) = k$. С другой стороны, в графе G' все рёбра могут быть покрашены в $(r + k) - (r - k) = 2k$ цветов в раскраске ρ_{r+k} и, поскольку раскраска ρ_{r+k} – правильная раскраска, получаем, что никакая вершина не может быть инцидентна двум одноцветным рёбрам, то есть степень любой вершины не превосходит $2k$.

Теперь задача состоит в том, чтобы покрасить оставшиеся рёбра в цвета $\{1, ..., r - k\}$ так, чтобы каждая вершина была покрыта рёбрами всех цветов в графе G.

В графе G' чётное число вершин нечётной степени. Разобьём все такие вершины на пары любым способом и добавим по одному ребру между вершинами в парах.

Получим граф G'', в котором все вершины имеют чётную степень. Отсюда следует, что все компоненты связности нового графа имеют Эйлеров цикл, и рёбра можно ориентировать в соответствии с этими циклами.

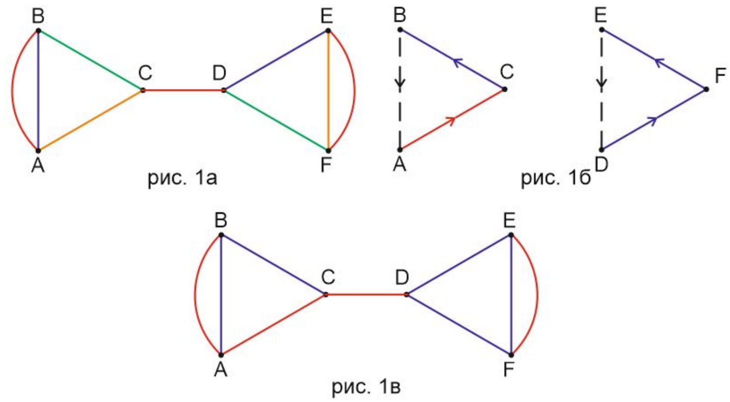

Рис. 1: Пример построения покрывающей раскраски, цветам $1, 2, 3, 4$ соответствуют здесь цвета красный, синий, зелёный и оранжевый соответственно.

Удалим добавленные рёбра и попробуем рёбра графа G' покрасить нужным способом. При этом сохраним ориентацию оставшихся рёбер.

Рассмотрим любую вершину v. Как было сказано выше, она будет иметь степень l в графе G', где $k \leqslant l \leqslant 2k$. Чтобы получить в итоге покрывающую раскраску рёбер α_{r-k}, нам необходимо покрыть вершину v недостающими $(r-k)-(r-l) = l-k$ цветами (которых не было среди удалённых из графа G рёбер).

Будем для каждой вершины красить в недостающие цвета только исходящие рёбра (см. рис. 1б). Это позволит красить рёбра независимо от других вершин. Если у вершины исходящих рёбер хотя бы половина, то, как легко видеть, их хватит, чтобы покрыть вершину недостающими $l-k$ цветами:

$$\frac{l}{2} \geqslant l-k \iff l \geqslant 2l-2k \iff 2k \geqslant l.$$

Но мы знаем, что последнее неравенство верно. Значит можно считать, что исходящих рёбер меньше половины. Поскольку в G'' исходящих и входящих рёбер для любой вершины поровну и G'' получается из графа G' добавлением к каждой вершине не более одного ребра, то ясно, что тогда вершина v имеет нечётную степень в графе G' и у v – $\frac{l+1}{2}$ входящих рёбер и $\frac{l-1}{2}$ исходящих рёбер (в графе G'' эта вершина имеет по $\frac{l+1}{2}$ входящих и исходящих рёбер).

Более того, $l \leqslant 2k$ и l – нечётное $\Rightarrow l \leqslant 2k-1$.

Покажем, что $\frac{l-1}{2} \geqslant l-k$. Это легко следует из следующей цепочке равносильных неравенств:

$$\frac{l-1}{2} \geqslant l-k \iff l-1 \geqslant 2l-2k \iff 2k-1 \geqslant l.$$

Но последнее неравенство мы уже только что установили. Таким образом, можно получить покрывающую раскраску в $r-k$ цветов (см. рис. 1в), лемма доказана. □

Из леммы 1 сразу же следует утверждение теоремы 2. □

Следствие 1. *1. Если $\chi'(G) = r+1$, то $\kappa'(G) = r-1$.*

2. Если $\kappa'(G) = r - \mu(G)$, то $\chi'(G) = r + \mu(G)$.

Таким образом, любой граф, для которого достигается равенство в теореме Гупты является графом, на котором достигается равенство в оценке Визинга.

Замечание. *Обратные утверждения, как будет видно ниже, вообще говоря не верны.*

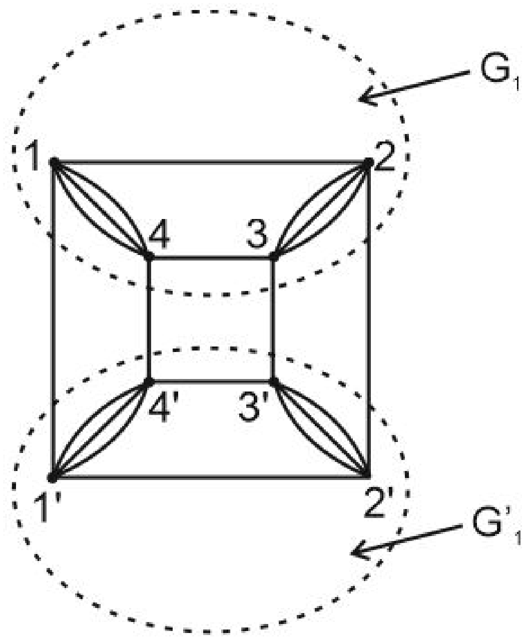

Рис. 2: Пример графа G_2 при $\mu(G) = 3$.

Доказательство. 1. По лемме 1 получаем сразу, что $\kappa'(G) \geqslant r - 1$, а по утверждению 1 ясно, что $\kappa'(G) \neq r$. Значит $\kappa'(G) = r - 1$.

2. Сразу следует из теорем 1 и 2. □

Нижняя оценка из теоремы 2 точна для любых r, μ, $r \geqslant \mu$. Она достигается, например, для любого r-регулярного графа с $\chi'(G) = r$ (см. утверждение 1). Серию примеров графов, на которых достигается равенство, можно легко построить индукцией по $k = r - \mu$. Действительно, для $k = 0$ подойдёт граф, состоящий из двух вершин, соединенных $r = \mu$ рёбрами.

Пусть уже есть граф G_{k-1}, удовлетворяющий нужному условию для $k - 1$, тогда пронумеруем в этом графе вершины произвольным образом, возьмём его копию G'_{k-1} с вершинами $1', 2', \ldots$ и соединим рёбрами вершины i и i' для всех i. Из построения ясно, что граф будет регулярным со степенью на 1 большей, чем в G_{k-1}. Более того, в нём будет такая же максимальная кратность рёбер, а хроматическое число будет совпадать со степенью регулярности построенного графа G_k. Из построения легко видеть, что мультиграф G_k нам подойдёт. Пример такого графа G_k для $r = 5$, $k = 2$, $\mu(G) = 3$ можно увидеть на рисунке 2.

В дальнейшем было бы интересно исследовать нижнюю оценку на эту сумму, отказавшись от условия r-регулярности графа G.

Вопрос. *Пусть G – связный мультиграф с минимальной и максимальной степенями вершин $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ соответственно, $\mu(G)$ – максимальная кратность рёбер в G. Всегда ли верно неравенство $\kappa'(G) + \chi'(G) \geqslant \delta(G) + \Delta(G)$?*

Следующей целью работы будет нахождение точной верхней оценки для рассматриваемой в работе суммы. Здесь мы будем всюду считать, что G – связный r-регулярный граф с максимальной кратностью рёбер μ. Более точно задача формулируется в следующем виде:

Задача. *Нужно найти функцию $f(x, y) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любых натуральных $r, \mu : r \geqslant \mu$ и любого графа G рассматриваемого вида верно неравенство $\kappa'(G) + \chi'(G) \leqslant f(r, \mu)$. Кроме* *того, дополнительно требуется, чтобы для всех r, μ существовал граф G, для которого $\kappa'(G) + \chi'(G) = f(r, \mu)$.*

5 Первые оценки сверху на $\kappa'(G) + \chi'(G)$

Везде мы будем рассматривать только связные r-регулярные графы G. Сформулируем и докажем несколько простых, но важных утверждений.

Утверждение 2. *$\kappa'(G)+\chi'(G) \leqslant 2r+\mu(G)-1$, причём при $\mu(G) > 1$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $\chi'(G) = r + \mu(G)$ и $\kappa'(G) = r - 1$.*

Доказательство. Из теоремы 1 легко следует, что $\kappa'(G) + \chi'(G) \leqslant 2r + \mu(G)$. Если $\kappa'(G) \leqslant r - 1$, то по той же теореме 1 получается нужная оценка, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\chi'(G) = r + \mu(G)$. Если же $\kappa'(G) = r$, то по утверждению 1 получается, что $\chi'(G) = r$ и, значит, $\kappa'(G) + \chi'(G) = 2r \leqslant 2r + \mu(G) - 1$. Если $\mu(G) > 1$, то последнее неравенство – строгое. □

Замечание. *Как будет видно ниже, оценка достигается только при $\mu(G) \leqslant 2$. Основной целью дальнейшей работы будет улучшить оценку из утверждения 2.*

Утверждение 3. *Если $\mu = 1$, то, исходя из теоремы 2 и утверждения 2, легко видеть, что $\kappa'(G) + \chi'(G) = 2r$.*

Дальше везде будем предполагать, что $\mu(G) > 1$. Для простоты обозначений пусть $\mu := \mu(G)$.

Утверждение 4. *1. Если $r = \mu$, то $f(r, \mu) = 2r$.*
2. Если $r = \mu + 1$, то $\chi'(G) \leqslant r + \mu - 1$.
3. Если $r = \mu + 1$, то $f(r, \mu) \leqslant r + \mu - 2$.

Доказательство. 1. Если $r = \mu(G)$, то утверждение очевидно, так как любой связный регулярный граф с таким условием – это пара вершин, соединённых между собой r рёбрами. Для таких графов $\chi'(G) = \kappa'(G) = r$, откуда и следует утверждение.

2. Предположим теперь, что $r = \mu+1$. Рассмотрим все пары вершин, которые соединены между собой μ рёбрами и удалим в каждой такой паре по ребру. Поскольку $r = \mu+1 < 2\mu$, удалённые ребра будут образовывать паросочетание, то есть не будут иметь общих концов. В получившемся графе G' степень каждой вершины по-прежнему не превосходит r, а $\mu(G') \leqslant \mu - 1$.

По теореме Визинга $\chi'(G') \leqslant r+\mu(G') \leqslant r+\mu-1$. Покрасим рёбра графа G' правильно в $r + \mu - 1$ цветов и попробуем расширить эту раскраску до правильной раскраски в графе G в те же цвета. Раз удалённые рёбра образовывали паросочетание, то их можно красить независимо. Поскольку мы удаляли только рёбра, которые вместе с $\mu - 1$ другими рёбрами соединяют какие-то 2 вершины, то на цвет для каждого удалённого ребра накладывается всего не более, чем $(\mu - 1) + 1 + 1 = \mu + 1 < r + \mu - 1$ запретов, так как $1 < \mu(G) = r - 1$. Таким образом, и граф G можно покрасить в $r + \mu - 1$ цветов, что и требовалось доказать.

3. Следует из уже проверенного пункта 2 утверждения 4 и утверждения 2.

□

Утверждение 5. *Пусть $g(x, y) = 2x + [\frac{y}{2}]$ и $r(\mu) = 2\mu$. Тогда существует $r(\mu)$-регулярный граф G, что $\kappa'(G) + \chi'(G) = g(r(\mu), \mu)$.*

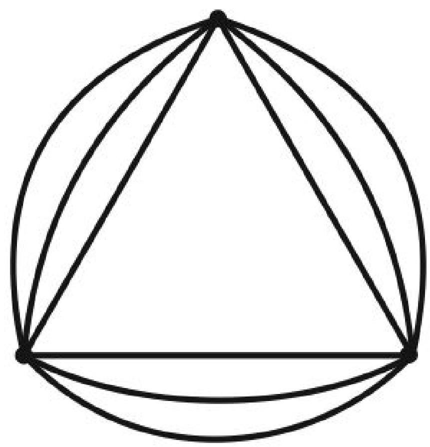

Рис. 3: 3-кратный треугольник.

Доказательство. Граф имеет 3 вершины и любые 2 вершины соединены μ рёбрами. На рисунке 3 изображен такой граф, если $\mu = 3$:

Легко видеть, что:

1. $r = 2\mu$.

2. В любой правильной раскраске все рёбра покрашены в разные цвета (поскольку любые 2 ребра инцидентны). Значит $\chi'(G) = 3\mu$.

3. Проверим, что $\kappa'(G) = [\frac{3\mu}{2}]$. Ясно, что $\kappa'(G) \leqslant [\frac{3\mu}{2}]$, потому что всего рёбер в графе – 3μ и в любой покрывающей раскраске рёбер каждого цвета хотя бы 2.

Далее, разобьём все рёбра на группы, состоящие из двойных треугольников и, возможно, ещё одного треугольника (в случае, если μ – нечётное число). Для каждой группы-двойного треугольника выберем по 3 цвета (каждый раз выбирая при этом разные цвета) и будем красить все двойные треугольники в 3 цвета, покрывая все вершины в 3 цвета. Легко видеть, что так сделать можно, разбив рёбра двойного треугольника на 3 простых пути длины 2. Если при этом есть группа-простой треугольник, то покрасим все её рёбра в ещё 1 цвет (отличный от использованных ранее). Легко видеть, что получается покрывающая раскраска рёбер в $[\frac{3\mu}{2}]$ цветов.

Таким образом, $\kappa'(G) + \chi'(G) = 3\mu + [\frac{3\mu}{2}] = 4\mu + [\frac{\mu}{2}] = 2r + [\frac{\mu}{2}]$, что и требовалось. $\square$

Следствие 2. $f(2x, x) \geqslant 2x + [x/2]$.

Как будет показано ниже, $f(r, \mu) \leqslant g(r, \mu)$ и, исходя из следствия 2, можно сделать вывод, что $g(r, \mu)$ – хорошая оценка.

6 Случай $\mu(G) = 2$

По утверждению 4 ясно, что $f(2, 2) = 4$, а $f(3, 2) \leqslant 6$. Кроме того, по теореме 2 также имеем $f(3, 2) \geqslant 6$. Значит $f(3, 2) = 6$.

Дальше мы будем работать только с $r > 3$.

Теорема 3. $f(2k, 2) = 4k + 1$ *для любого натурального* $k > 1$.

Доказательство. По утверждению 2 знаем, что $f(r, 2) \leqslant 2r+1$ для любого $r \geqslant 2$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $\chi'(G) = r + \mu$, а $\kappa'(G) = r - 1$.

Для завершения доказательства построим серию примеров для любого $k > 1$, которая бы удовлетворяла последним требованиям.

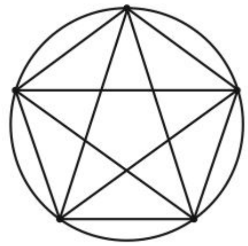

Рис. 4а

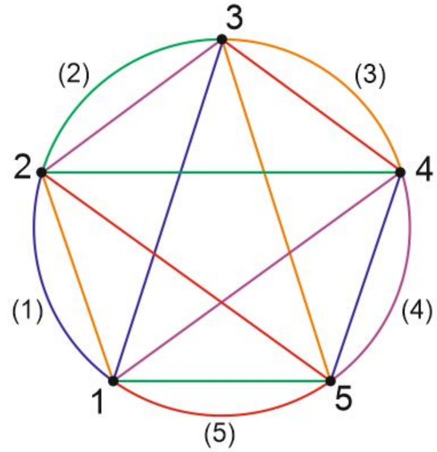

Рис. 4б

Рис. 4: Пример графа для $r = 6$, $k = 3$. На рисунке 4б "(i)" для $i = 1, ..., 5$– добавленные рёбра. Цветам $1, 2, 3, 4, 5$ соответствуют цвета красный, синий, зелёный, оранжевый, фиолетовый (именно в таком порядке).

Рассмотрим полный граф на $2k - 1$ вершинах (без кратных рёбер) и пронумеруем в нём все вершины от 1 до $2k - 1$. Добавим ещё по одному ребру вдоль цикла $1 - 2 - 3 - ... - (2k - 1) - 1$. Утверждается, что получившийся граф G (см. рис. 4а) подходит.

Ясно, что $r = (2k - 2) + 1 + 1 = 2k$, а $\mu(G) = 2$.

Проверим, что $\chi'(G) = 2k + 2 = r + \mu(G)$. Для этого посмотрим на количество рёбер в графе G. С одной стороны, в силу регулярности мультиграфа G оно равно $\frac{r(2k-1)}{2} = k(2k-1)$.

С другой стороны, ясно, что в любой правильной раскраске одноцветные рёбра образуют паросочетания. Отсюда сразу следует, что рёбер каждого цвета не больше, чем $[\frac{2k-1}{2}] = k - 1$. Отсюда получаем:

$$k(2k - 1) \leqslant (k - 1)\chi'(G).$$

Предположим, что $\chi'(G) \leqslant 2k + 1$. Тогда

$$k(2k - 1) \leqslant (k - 1)(2k + 1) \iff 2k^2 - k \leqslant 2k^2 - k - 1.$$

Но последнее равенство, очевидно, не может быть правдой. Таким образом, $\chi'(G) \geqslant 2k+2 = r + \mu$, что и утверждалось.

Осталось показать, что $\kappa'(G) = 2k - 1$. Из утверждения 1 ясно, что $\kappa'(G) \leqslant 2k - 1$. Таким образом, достаточно для каждого $k > 1$ предъявить покрывающую раскраску рёбер в $2k - 1$ цвет.

Будем считать, что нам надо покрасить рёбра в цвета $1, ..., (2k - 1)$, (i, j) – рёбра из исходного полного графа (без добавленных рёбер), соединяющие i и j-ые вершины, а (i) - добавленные рёбра, соединяющие i и $(i + 1)$-ые вершины (суммирование индексов берётся по модулю $2k - 1$). Построим раскраску ρ на рёбрах графа (см. рис. 4б).

Для начала для каждого цвета i $(1 \leqslant i \leqslant (2k - 1))$ положим:

$$\rho((i - 1, i)) = \rho((i - 1, i + 1)) = ... = \rho((i - (k - 2), i + (k - 2))) = \rho((i - (k - 1))) = i.$$

Покажем, что раскраска задана корректно и каждое из рёбер красится не более, чем в 1 цвет.

Для каждого цвета i паросочетания $(i-1, i+1), ..., (i-(k-2), i+(k-2)), (i-(k-1))$ покрывают все вершины, кроме i-ой, а ребро $(i-1, i)$ покрывает вершину i. Тогда легко видеть, что раскраска задана корректно, и рёбра любого цвета покрывают все вершины, то есть раскраска – покрывающая.

Таким образом, полученные графы удовлетворяют всем требованиям, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 4. *Не существует 5-регулярного графа G с $\mu(G) = 2$ и $\chi'(G) = 7$.*

Как следствие, получаем, что $10 \leqslant f(5,2) < 11$, то есть $f(5,2) = 10 = 2r$.

Утверждение было доказано, например, в [2]. Здесь мы приведём короткое обоснование, используя гипотезу Голдберга-Сеймура.

Доказательство. Пусть не так, то есть $\chi'(G) = 7 = 5 + \mu(G)$ для некоторого 5-регулярного графа G. Поскольку $\chi'(G) > r+1$, по гипотезе Голдберга-Сеймура существует подмножество вершин W, в котором хотя бы 3 вершины, их нечётное число (обозначим его через m) и для которого верно неравенство:

$$\frac{|E(W)|}{\frac{m-1}{2}} > r + \mu(G) - 1 = 6.$$

Это значит, что $|E(W)| > \frac{6(m-1)}{2}$. Но с другой стороны, так как G – 5-регулярный граф, а m – нечётное число, получаем, что

$$|E(W)| \leqslant [\frac{5m}{2}] = \frac{5m-1}{2}.$$

Значит

$$\frac{6(m-1)}{2} < \frac{5m-1}{2} \iff 6m - 6 < 5m - 1 \iff m < 5.$$

Следовательно, так как m – нечётное число, большее 1, получаем, что $m = 3$. Далее, поскольку $\mu(G) = 2$, а W состоит из трёх вершин, $|E(W)| \leqslant 2 \cdot 3 = 6$. Но по предположению $|E(W)| > \frac{6(m-1)}{2} = 6$. Получили противоречие.

Таким образом, для любого 5-регулярного графа с $\mu(G) = 2$ всегда $\chi'(G) \leqslant 6$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 5. $f(r,2) = 2r + 1$ *для любого натурального $k > 1$, $r = 2k + 3$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3 достаточно построить пример r-регулярного графа с $\chi'(G) = r + 2$ и $\kappa'(G) = r - 1$.

Построим для начала простой граф G'' следующим образом: рассмотрим цикл размера $2k+1$, добавим к нему отсутствующее паросочетание γ размера k. Вершину v, не попавшую в паросочетание, будем называть **особой**. В полученном графе все вершины, кроме v имеют степень 3, а v имеет степень 2, в нём всего $2k + 1$ вершин. Теперь добавим к этому графу по одному ребру для каждой неупорядоченной пары вершин. В построенном графе G' (см. рис. 5) все вершины кроме v имеют степень $2k + 3 = r$, v имеет степень $2k + 2$, а $\mu(G') = 2$.

Заметим, что $\chi'(G') = r + \mu(G') = (2k + 3) + 2 = 2k + 5$. Действительно, оценим двумя способами количество рёбер графа G'.

С одной стороны, количество рёбер G' равно

$$\frac{2k(2k+3) + (2k+2)}{2} = k(2k+3) + k + 1.$$

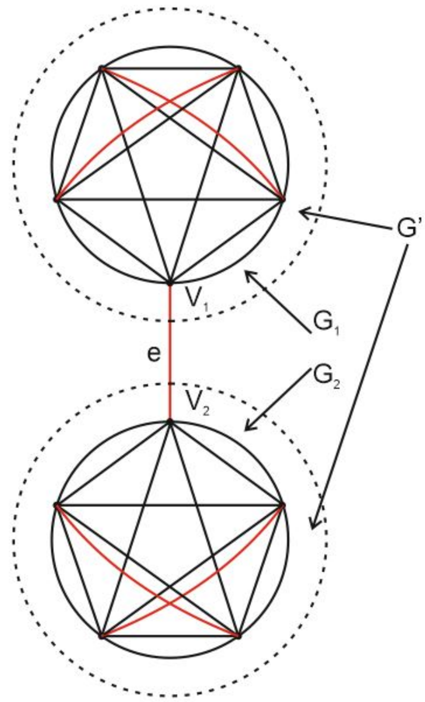

Рис. 5: Пример графа для G с $r = 7$, $\mu = 2$. Красным рёбрам соответствуют покрашенные в цвет 1.

С другой стороны, в любой правильной раскраске никакие 2 одноцветных ребра не имеют общих вершин и, следовательно, в графе может быть не более, чем $\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = k$ рёбер каждого цвета.

Отсюда следует, что

$$2k^2 + 4k + 1 \leqslant \chi'(G)k.$$

Предположим, что $\chi'(G') \leqslant 2k + 4$. Тогда

$$2k^2 + 4k + 1 \leqslant \chi'(G')k \leqslant k(2k + 4) = 2k^2 + 4k.$$

Последнее неравенство не может быть правдой. Значит $\chi'(G') \geqslant 2k + 5 = r + 2$ и по теореме Визинга $\chi'(G') \leqslant r + 2$, то есть $\chi'(G') = r + 2$.

Теперь построим граф G, взяв 2 копии G_1 и G_2 графа G' с особыми вершинами v_1 и v_2, и соединим полученные 2 вершины ребром e (см. рис. 5).

Легко видеть, что степень всех вершин графа G равны r, так как степени всех неособых вершин графов G_1 и G_2 не изменились, а степени особых вершин увеличились на 1 (в графе G_i они были равны $r - 1$, а стали $r - 1 + 1 = r$).

Кроме того, ясно, что $\chi'(G) = r + 2$, так как

$$r + 2 = \chi'(G_1) \leqslant \chi'(G) \leqslant r + 2,$$

что означает, что все неравенства обращаются в равенства.

По утверждению 1 получаем, что $\kappa'(G) \leqslant r - 1$. Таким образом, достаточно построить покрывающую раскраску рёбер графа G в $r - 1 = 2k + 2$ цвет.

Рассмотрим паросочетание γ', которое получается из паросочетаний γ_1 и γ_2, соответствующих вспомогательному паросочетанию γ размера k графа G', в графах G_1 и G_2, и ребра e, соединяющего особые вершины v_1 и v_2. Легко видеть, что полученное паросочетание γ' является совершенным. Покрасим рёбра γ' в цвет 1 и удалим из графа G рёбра этого паросочетания (см. рис. 5). Получившийся граф G_0 состоит из двух одинаковых копий $G_{0,1}$ и $G_{0,2}$, которые, как нетрудно видеть, совпадают с примером графа, построенном в доказательстве теоремы 3 для $r' = (2k+3)-1 = 2k+2$. Значит $\kappa'(G_{0,1}) = \kappa'(G_{0,2}) = r-2$.

Тогда покрасим в графе G эти 2 копии в оставшиеся $r-2$ цвета так, чтобы рёбра каждого цвета покрывали все вершины. Как легко видеть, полученная раскраска в $(r-2)+1 = r-1$ цвета графа G будет покрывающей, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Таким образом, можно подвести итог, сформулировав обобщающее следствие:

Следствие 3. *Пусть $r \geqslant 2$ – натуральное число. Тогда*

$$f(r,2) = \begin{cases} 2r, \text{ если } r = 2, 3 \text{ или } 5; \\ 2r+1 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

7 Основная верхняя оценка на сумму $\kappa'(G) + \chi'(G)$ для графов с $\mu(G) \geqslant 3$ и следствия из неё

В этом пункте мы установим верхнюю оценку на $\kappa'(G)+\chi'(G)$ для произвольного r-регулярного графа с $\mu(G) \geqslant 3$, которая, как будет показано ниже, точна для любых μ и $r = h(\mu)$, где h – некоторая функция (на самом деле, подойдёт, например, функция $h(\mu) = 2\mu$). Как уже было сказано выше, доказательство верхней оценки будет использовать гипотезу Голдберга-Сеймура (см. [1]).

Теорема 6. *Пусть $\mu(G) \geqslant 3$. Тогда $\lceil \Gamma(G) \rceil + \kappa'(G) \leqslant 2r + \lfloor \frac{\mu(G)}{2} \rfloor$.*

Следствие 4. (*Основная верхняя оценка*) $\chi'(G) + \kappa'(G) \leqslant 2r + \lfloor \frac{\mu(G)}{2} \rfloor$.

Докажем теорему, из неё будет легко вытекать следствие. Действительно, случаи $\mu(G) = 1$ и $\mu(G) = 2$ были разобраны выше. При $\chi'(G) \geqslant r+2$ можно использовать гипотезу Голдберга-Сеймура, а при $\chi'(G) \leqslant r+1$ из следствия 1 и утверждения 1 верно, что $\kappa'(G) + \chi'(G) = 2r \leqslant 2r + \lfloor \frac{\mu(G)}{2} \rfloor$.

Также отметим, что $\Gamma(G) \geqslant r$. Действительно, если в графе G нечётное число вершин, то возьмём $W := V(G)$ и получим, что

$$\frac{|E(G)|}{\frac{|V(G)|-1}{2}} = \frac{\frac{r|V(G)|}{2}}{\frac{|V(G)|-1}{2}} = \frac{r|V(G)|}{|V(G)|-1} > r.$$

Если же $|V(G)|$ – чётное, то рассмотрим множество W, получающееся из $V(G)$ удалением любой вершины. Тогда:

$$\frac{|E(W)|}{\frac{|W|-1}{2}} = \frac{\frac{r(|W|+1)}{2} - r}{\frac{|W|-1}{2}} = \frac{r|W|-r}{|W|-1} = r.$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 6.

Доказательство. Будем считать, что $\kappa'(G) = r-k$ и $\lceil \Gamma(G) \rceil = r+l$, причём $k, l \in \{0, ..., \mu(G)\}$. Действительно, здесь мы пользуемся теоремой Гупты, а также цепочкой неравенств:

$$r + \mu(G) \geqslant \chi'(G) \geqslant \Gamma(G) \geqslant r.$$

Значит существует такое подмножество вершин W размера m, что:
1. $m \geqslant 3$ – нечётное число,
2. $\frac{E(W)}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} > r + l - 1$.
Из условия 2 получаем неравенство:

$$|E(W)| > (r + l - 1)\frac{m-1}{2}.$$

Поскольку слева и справа – целые числа, получаем, что

$$|E(W)| \geqslant (r + l - 1)\frac{m-1}{2} + 1.$$

Домножая обе части на 2 и раскрывая скобки, получаем:

$$2|E(W)| \geqslant rm + lm - m - r - l + 3.$$

Теперь получим оценку сверху на $2|E(W)|$, воспользовавшись условием $\kappa'(G) = r - k$.

Для этого рассмотрим множество A всех рёбер, смежных хотя бы с одной вершиной из W, и оценим мощность этого множества. С одной стороны, заметим, что сумма степеней всех вершин из множества W равна rm в силу регулярности графа G. Эта же сумма равна сумме $2|E(W)| + |E(W, G - W)|$, где $E(W)$ – множество всех рёбер графа, индуцированного на W, а $E(W, G - W)$ – множество рёбер, соединяющих вершины из W с вершинами из $G - W$. Действительно, каждое из рёбер $E(W, G - W)$ учитывается при подсчёте суммы степеней вершин один раз, а рёбра из $E(W)$ – дважды. Следовательно,

$$rm = 2|E(W)| + |E(W, G - W)| = |A| + |E(W)| \iff |A| = rm - |E(W)|$$

С другой стороны, воспользуемся тем, что $\kappa'(G) = r - k$. Рассмотрим покрывающую раскраску рёбер в $r - k$ цвет. Легко видеть, что все вершины из W могут быть покрыты только рёбрами из A. Кроме того, $m = |W|$ нечётно, значит среди рёбер из A есть как минимум $\frac{m+1}{2}$ рёбер каждого цвета.

Следовательно,

$$|A| \geqslant \frac{m+1}{2}(r - k).$$

Значит

$$rm - |E(W)| \geqslant \frac{m+1}{2}(r - k) \iff 2rm - 2|E(W)| \geqslant mr + r - mk - k.$$

Отсюда легко получаем оценку:

$$2|E(W)| \leqslant mr + mk + k - r.$$

В сочетании с полученной выше нижней оценкой на $2|E(W)|$ легко выводим следующее неравенство:

$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant mr + mk + k - r.$$

Оно, в свою очередь, равносильно неравенству:

$$(*)\ m(l - k) \leqslant k + l + m - 3.$$

Предположим, что $l-k > \lfloor\frac{\mu(G)}{2}\rfloor$ (иначе $\lceil\Gamma(G)\rceil + \kappa'(G) = 2r + l - k \leqslant 2r + \lfloor\frac{\mu(G)}{2}\rfloor$ и теорема, очевидно, доказана).

Значит $l-k > \frac{\mu(G)}{2}$. Кроме того, можно считать, что $k < \mu(G)$ (иначе $\kappa'(G) = r - \mu(G)$, тогда по пункту 2 следствия 1 получаем, что $2r = \chi'(G) + \kappa'(G) \geqslant \lceil\Gamma(G)\rceil + \kappa'(G)$ и утверждение верно).

Используя эти оценки, получаем:

$$m(l-k) \leqslant (k+l) + m - 3.$$

$$\iff m(l-k) \leqslant (l-k+2k) + m - 3.$$

$$\iff (m-1)(l-k) \leqslant 2k + m - 3.$$

$$\Rightarrow \frac{(m-1)}{2}\mu(G) < 2(\mu(G)-1) + m - 3.$$

Поскольку m нечётно, обе части в последнем неравенстве целые и, следовательно,

$$\frac{(m-1)}{2}\mu(G) \leqslant 2(\mu(G)-1) + m - 4 = 2\mu(G) + m - 6.$$

Отсюда следует, что

$$(m-1)\mu(G) \leqslant 4\mu(G) + 2m - 12.$$

После раскрытия скобок легко получаем, что

$$(m-5)\mu(G) \leqslant 2(m-5) - 2 \iff (m-5)(\mu(G)-2) \leqslant -2.$$

Последнее неравенство может быть правдой только при $m = 3$, поскольку $\mu(G) > 2$. Таким образом, можно считать, что $m = 3$. Тогда неравенство $(*)$ принимает вид:

$$3(l-k) \leqslant k + l \iff l \leqslant 2k.$$

Тогда имеем цепочку неравенств:

$$\frac{\mu(G)}{2} < l - k = l - 2k + k \leqslant k.$$

Следовательно, $k > \frac{\mu(G)}{2}$. Но тогда

$$l - k < \mu(G) - \frac{\mu(G)}{2} = \frac{\mu(G)}{2}.$$

Это противоречит предположению. Получается, что $l - k \leqslant \lfloor\frac{\mu(G)}{2}\rfloor$, что и требовалось доказать. □

Нашей дальнейшей целью будет исследование мультиграфов, для которых оценка из следствия 4 обращается в равенство. Как было отмечено выше, если $\chi'(G) \leqslant r+1$, то $\kappa'(G) + \chi'(G) = 2r$ – такой случай нам не интересен. Таким образом, в дальнейшем, если это специально не оговорено, будем предполагать, что $\chi'(G) > r+1$ и тогда можно использовать гипотезу Голдберга-Сеймура.

Отметим, что при доказательстве оценки были выведены полезные неравенства, которые могут помочь получать другие важные результаты. Ниже они будут сформулированы в виде следствия.

Следствие 5. *Пусть G – r-регулярный связный граф с максимальной кратностью рёбер $\mu(G)$, $\chi'(G) = r + l$ и $\kappa'(G) = r - k$, где $0 \leqslant k \leqslant \mu(G)$, $2 \leqslant l \leqslant \mu(G)$ (требование $l \geqslant 2$ накладывается, чтобы можно было использовать гипотезу Голдберга-Сеймура). Тогда существует подмножество вершин W, такое, что $m = |W| \geqslant 3$ – нечётное число и верна следующая цепочка неравенств:*

$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant 2|E(W)| \leqslant mr + mk + k - r.$$

Отсюда, в частности, верно неравенство:

$$m(l - k) \leqslant k + l + m - 3.$$

Более того, если последнее неравенство обращается в равенство, то и вся цепочка неравенств выше обращается в цепочку равенств.

Помимо этого, можно воспользоваться тем, что граф G является r-регулярным с максимальной кратностью $\mu(G)$ и получить ещё 2 полезных неравенства, которые также в дальнейшем будут использоваться. Обозначения в формулировке будут взяты из следствия 5.

Следствие 6. *Верны следующие неравенства:*

$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant 2|E(W)| \leqslant mr.$$

В частности,

$$ml - m - r - l + 3 \leqslant 0.$$

При этом неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда оба неравенства в верхней цепочке обращаются в равенство.

Кроме того,

$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant 2|E(W)| \leqslant m(m-1)\mu(G).$$

Доказательство. Левые части всех неравенств – в точности как в следствии 5. Оценим двумя способами $2|E(W)|$ сверху.

С одной стороны, так как G – r-регулярный граф, $2|E(W)| \leqslant rm$, что доказывает правое верхнее неравенство.

С другой стороны, так как $\mu(G)$ – максимальная кратность рёбер в G,

$$2|E(W)| \leqslant 2\mu(G)\binom{m}{2} = \mu(G)m(m-1),$$

что завершает доказательство нижней цепочки неравенств. □

Последнее следствие позволяет нам получить очень интересный результат.

Следствие 7. *Пусть G – r-регулярный связный граф с максимальной кратностью рёбер $\mu(G) > 1$. Дополнительно предположим, что $r = 2\mu(G)$ и $\chi'(G) = r + \mu(G) = 3\mu(G)$.*

Тогда G – это кратный треугольник, то есть граф на 3 вершинах, любые 2 из которых соединены $\mu(G)$ рёбрами.

Доказательство. Воспользуемся следствием 6, подставив $l = \mu(G)$:

$$\mu(G)m - m - 2\mu(G) - \mu(G) + 3 \leqslant 0.$$

$$\iff m(\mu(G) - 1) - 3(\mu(G) - 1) \leqslant 0 \iff (m-3)(\mu(G) - 1) \leqslant 0.$$

Последнее неравенство может быть правдой только при $m = 3$, так как $\mu(G) > 1$. В этом случае

$$mr + ml - m - r - l + 3 = 2|E(W)| = mr.$$

Но последнее равенство может быть верным только если $G = W$, иначе G был бы несвязным. Более того, поскольку $r = 2\mu(G)$, в графе G может быть не более $3\mu(G) = \frac{6\mu(G)}{2} = \frac{rm}{2}$ и равенство бывает только в случае $\mu(G)$-кратного треугольника, что и требовалось доказать. $\square$

Замечания. *В следствии 7 условие $\mu(G) > 1$ очень важно. Для $\mu(G) = 1$ это утверждение неверно. Как легко видеть, любой 2-регулярный простой связный граф с $\chi'(G) = 3$ – это простой цикл нечётной длины (и все они подходят).*

Следствие 8. *Пусть граф G удовлетворяет условиям из следствия 5 и предположим, что на графе G достигается равенство в оценке из следствия 4. Тогда:*

1. Если $\mu(G)$ – чётное число, то $\chi'(G) = r + \mu(G)$, а $\kappa'(G) = r - \frac{\mu(G)}{2}$.

2. Если $\mu(G)$ – нечётное число, то $\chi'(G) \geqslant r + \mu(G) - 1$.

Доказательство. 1. Пусть $\mu(G)$ делится на 2, то есть существует натуральное s, что $\mu(G) = 2s$. Поскольку для графа G неравенство из следствия 4 обращается в равенство,

$$2r + (l - k) = 2r + s \iff l - k = s.$$

Значит, по следствию 5, существует множество W с m вершинами такое, что:

$$ms \leqslant l + k + m - 3.$$

Предположим противное и $l < 2s$. Значит $l \leqslant 2s - 1$ и $k = l - (l - k) \leqslant s - 1$.

Отсюда получаем цепочку неравенств:

$$ms \leqslant 3s - 2 + m - 3 = 3s + m - 5.$$

$$\iff m(s-1) \leqslant 3(s-1) - 2.$$

$$\iff (m-3)(s-1) \leqslant -2.$$

Но последнее неравенство не может быть верно, так как $m \geqslant 3$ и $s \geqslant 1$, противоречие. Следовательно, $\chi'(G) = r + \mu(G)$ и, очевидно, $\kappa'(G) = r - \frac{\mu(G)}{2}$, что и требовалось доказать.

2. Предположим теперь, что $\mu(G) = 2s + 1$ для некоторого неотрицательного целого s. Заметим, что случай $\mu(G) = 1$ ясен, так как требуемое неравенство верно всегда, так что можно считать, что $s \geqslant 1$. Будем действовать аналогично первому случаю.

Допустим, что $\chi'(G) < r + \mu(G) - 1$, то есть $l \leqslant \mu(G) - 2 = 2s - 1$. Так как G – экстремальный граф для оценки из следствия 4, $l - k = [\frac{\mu(G)}{2}] = s$ и, следовательно, $k \leqslant s - 1$.

Дальше абсолютно так же, как в первом случае, приходим к противоречию. $\square$

Замечания. *Отметим, что оценка на $\chi'(G)$ во втором пункте следствия 8 бывает точной, это будет позже видно.*

При каких $r, \mu(G)$ верхняя оценка из следствия 4 является точной? Как видно из следствия 8, случаи чётного и нечётного $\mu(G)$ имеют существенные различия, поэтому в следующих двух пунктах мы будем отдельно разбирать эти 2 случая.

8 Точность основной верхней оценки при чётном $\mu(G)$

Случай $\mu(G) = 2$ уже был разобран выше и в этом случае получается, что верхняя оценка достигается при всех $r \geqslant 6$ и $r = 4$.

Оказывается, при всех чётных $\mu(G) > 2$ оценка достигается для единственного графа – $\mu(G)$-кратного треугольника! Докажем это в следующих двух утверждениях.

Утверждение 6. (*Единственность экстремального графа для* $r = 2\mu(G)$ *в случае чётного* $\mu(G)$)

Пусть $r = 2\mu(G)$, *где* G *– граф, на котором достигается равенство в следствии* 4, *а* $\mu(G)$ *– чётное. Тогда* G *– это треугольник, в котором любые 2 вершины соединены* $\mu(G)$ *рёбрами.*

Доказательство. Так как G – экстремальный граф в следствии 4, по следствию 8 знаем, что $\chi'(G) = r + \mu(G)$. Но тогда по следствию 7 получается, что G – это $\mu(G)$-кратный треугольник, что и требовалось доказать. □

Замечание. *По следствию* 2 *легко видеть, что* $\mu(G)$ *– кратный треугольник всегда является экстремальным графом в следствие* 4, *так что граф, описанный в условии утверждения* 6, *всегда существует при* $r = 2\mu(G)$ *и в случае чётных* $\mu(G) > 2$ *– единственный.*

Далее в этом пункте и ниже мы для простоты будем называть r-регулярные связные графы, на которых достигается равенство в основной оценке, **экстремальными**. Как и везде выше через $\mu(G)$ мы обозначаем максимальную кратность рёбер в графе G.

Теорема 7. *Пусть* G *– экстремальный граф,* $\mu(G) = 2s$ *для некоторого натурального* $s > 1$. *Тогда* $r = 2\mu(G)$.

Из утверждения 6 и теоремы 7 сразу вытекает следствие:

Следствие 9. *Единственный экстремальный граф для чётного* $\mu(G) > 2$ *– это* $\mu(G)$*-кратный треугольник.*

Докажем теорему 7.

Доказательство. Как обычно, все обозначения будут иметь тот же смысл, что и в формулировке следствия 5.

С одной стороны, заметим, что так как G – экстремальный граф, то по следствию 8 $\chi'(G) = r + \mu(G) = r + l \Rightarrow l = \mu(G) = 2s$, а $k = \frac{\mu(G)}{2} = s$.

Тогда по следствию 5 имеем неравенство:

$$m(l-k) \leqslant k + l + m - 3 \iff ms \leqslant s + 2s + m - 3 = 3s + m - 3.$$
$$\iff (m-3)s \leqslant (m-3) \cdot 1 \iff (m-3)(s-1) \leqslant 0.$$

Отметим, что $s > 1$, значит $m - 3 \leqslant 0$, то есть $m = 3$ и в этом случае все неравенства обращаются в равенства.

Тогда снова по следствию 5 получаем цепочку равенств:

$$mr + ml - m - r - l + 3 = 2|E(W)| = mr + mk + k - r.$$

Так как $m = 3$, можно сделать вывод, что

$$2|E(W)| = 3r + 3k + k - r = 2r + 4k = 2r + 2\mu(G).$$

По следствию 6
$$2|E(W)| \leqslant \mu(G)m(m-1) = 6\mu(G).$$
Следовательно,
$$2r + 2\mu(G) \leqslant 6\mu(G) \iff r \leqslant 2\mu(G).$$
С другой стороны, по тому же следствию 6 верно другое неравенство:
$$ml - m - r - l + 3 \leqslant 0.$$
Так как $m = 3, l = \mu(G)$, получаем, что
$$3\mu(G) - 3 - r - \mu(G) + 3 \leqslant 0 \iff 2\mu(G) - r \leqslant 0 \iff 2\mu(G) \leqslant r.$$
Получается, что $r \leqslant 2\mu(G)$ и $r \geqslant 2\mu(G)$, то есть, $r = 2\mu(G)$, что и требовалось доказать. □

Полученное следствие 9 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 8. *Пусть G – r-регулярный связный граф с максимальной кратностью рёбер $\mu(G)$. Тогда если $\mu(G)$ – чётное и $\mu(G) > 2$, то либо G – это $\mu(G)$-кратный треугольник, либо основную верхнюю оценку можно улучшить:*
$$\chi'(G) + \kappa'(G) \leqslant 2r + \frac{\mu(G)}{2} - 1.$$

К сожалению, для нечётных $\mu(G)$ нет настолько хорошего описания экстремальных графов. Тем не менее, в следующем пункте мы опишем все пары $(r, \mu(G))$, для которых достигается равенство в основной верхней оценке.

9 Точность основной верхней оценки при нечётном $\mu(G)$

Случай $\mu(G) = 1$ очевиден, потому что, как было показано выше, в этом случае $\kappa'(G) + \chi'(G) = 2r = 2r + \lfloor \frac{\mu(G)}{2} \rfloor$ для любого простого графа G, то есть любой простой r-регулярный связный граф является экстремальным.

Таким образом, в дальнейшем можно считать, что $\mu(G) = 2s + 1$ для некоторого натурального s.

Оказывается, множество экстремальных графов при таких $\mu(G)$ имеет более богатую структуру по сравнению со случаем чётного $\mu(G)$, что будет отражено в следующей теореме.

Как и везде выше, обозначения, включая изначальные предположения на мультиграф G, имеют прежний смысл.

Теорема 9. *Пусть $\mu(G) = 2s + 1$, $s \in \mathbb{N}$, r – степень регулярности экстремального графа G. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1. $r \in \{2\mu(G) - 1, 2\mu(G), 2\mu(G) + 1\}$. Более того, если при этом $\chi'(G) = r + \mu(G)$, то $r = 2\mu(G)$ и, следовательно, G – $\mu(G)$-кратный треугольник.

2. $\mu(G) = 5$, $r \in \{18, 19, 20\}$, $\chi'(G) = r + \mu(G)$.

3. $\mu(G) = 3$, $r \geqslant 10$, $\chi'(G) = r + \mu(G)$.

4. $\mu(G) = 3$, $r \geqslant 6$, $\chi'(G) = r + \mu(G) - 1$.

Доказательство. Так как G – экстремальный граф, $l - k = \lfloor \frac{\mu(G)}{2} \rfloor = s$. По следствию 8 $\chi'(G) = r + l = r + \mu(G)$ или $\chi'(G) = r + \mu(G) - 1$. Разберём 2 случая.

Случай 1: $l = \mu(G) = 2s + 1$.

Тогда $k = s + 1$. По следствию 5 имеем:

$$ms \leqslant k + l + m - 3 = (2s+1) + (s+1) + m - 3 = 3s + m - 1$$
$$\iff (m-3)s \leqslant (m-3) + 2 \iff (m-3)(s-1) \leqslant 2.$$

Когда такое неравенство может быть возможно? Когда верно одно из следующих условий:

1. $m = 3$, s – любое натуральное число;
2. $m > 3$, $s = 1$;
3. $m = 5$, $s = 2$.

Действительно, при $s > 1, m > 3$ получаем, что $m - 3 \geqslant 2, s - 1 \geqslant 1$ и, если хотя бы одно из этих неравенств – строгое, то исходное неравенство не выполняется.

Таким образом, нам достаточно разобрать 3 подслучая:

Случай 1.1: $m = 3$.

Воспользуемся неравенствами из следствия 6.

Во-первых,
$$ml - m - r - l + 3 \leqslant 0.$$

То есть,
$$3\mu(G) - 3 - r - \mu(G) + 3 \leqslant 0 \iff 2\mu(G) \leqslant r.$$

Во-вторых, по тому же следствию 6
$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant m(m-1)\mu(G).$$

В нашем случае это означает, что
$$3r + 3\mu(G) - 3 - r - \mu(G) + 3 = 2r + 2\mu(G) \leqslant 6\mu(G) \iff 2r \leqslant 4\mu(G) \iff r \leqslant 2\mu(G).$$

Таким образом, $r \leqslant 2\mu(G)$ и $r \geqslant 2\mu(G)$, то есть $r = 2\mu(G)$ и по следствию 7 получаем, что G – $\mu(G)$-кратный треугольник. В этом случае имеет место первое утверждение теоремы 9.

Случай 1.2: $m \geqslant 5$, $s = 1$.

Тогда $\mu(G) = 3$, $l = 3$, $k = 2$.

По следствию 6:
$$3m - m - r - 3 + 3 \leqslant 0.$$

Следовательно, $r \geqslant 2m \geqslant 10$, имеет место утверждение 3 теоремы 9.

Случай 1.3: $m = 5, s = 2$.

В этом случае $\mu(G) = 2s + 1 = 5$, $l = 5$, $k = 3$.

По следствию 6 получаем, что
$$5 \cdot 5 - 5 - r - 5 + 3 \leqslant 0 \iff 18 \leqslant r.$$

Далее, по другому неравенству из следствия 6:
$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant m(m-1)\mu(G).$$

В нашем случае, получаем:
$$5r + 5 \cdot 5 - 5 - r - 5 + 3 \leqslant 5 \cdot 4 \cdot 5.$$

То есть,
$$4r + 18 \leqslant 100 \iff 4r \leqslant 82 \Rightarrow r \leqslant 20.$$

Таким образом, получаем второе утверждение теоремы 9.

Случай 2: $l = \mu(G) - 1 = 2s + 1 - 1 = 2s$.
Тогда $k = s$.
Неравенство из следствия 5 переписывается в следующем виде:

$$ms \leqslant s + 2s + m - 3 \iff ms - 3s \leqslant m - 3 \iff (m-3)(s-1) \leqslant 0.$$

Тогда либо $m = 3$, либо $s = 1$.
Случай 2.1: $m = 3$. Как обычно, по следствию 6,

$$ml - m - r - l + 3 \leqslant 0.$$

В нашем случае это означает, что

$$6s - 3 - r - 2s + 3 = 4s - r = 2(\mu(G) - 1) - r \leqslant 0 \iff r \geqslant 2\mu(G) - 2.$$

Допустим, что $r = 2\mu(G) - 2$. Тогда последнее неравенство следствия 5 обращается в равенство и, как было отмечено выше, это означает, что верна цепочка равенств:

$$mr + ml - m - r - l + 3 = 2|E(W)| = mr.$$

В силу того, что G – r-регулярный связный граф, правое равенство означает, что $G = G(W)$, то есть $V(G) = W$. Пусть $V(G) = \{A, B, C\}$, не умаляя общности можно считать, что между A и B – ровно $\mu(G)$ рёбер. Тогда, так как $deg_G(A) = deg_G(B) = 2(\mu(G)-1)$, между парами (A, C) и (B, C) – ровно по $\mu(G)-2$ ребра, но тогда $deg_G(C) = 2(\mu(G)-2) < 2\mu(G)-2$ – противоречие с r-регулярностью графа G.
Таким образом, $r \geqslant 2\mu(G) - 1$.
Неравенство $r \leqslant 2\mu(G) + 1$ докажем аналогично случаю 1.1.
По следствию 6,

$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant m(m-1)\mu(G).$$

Подставим наши значения:

$$3r + 3(\mu(G) - 1) - 3 - r - (\mu(G) - 1) + 3 = 2r + 2\mu(G) - 2 \leqslant m(m-1)\mu(G) = 6\mu(G),$$

откуда $r \leqslant 2\mu(G) + 1$. Таким образом, $2\mu(G) - 1 \leqslant r \leqslant 2\mu(G) + 1$ и верно утверждение 1 теоремы 9.
Случай 2.2: $s = 1, m \geqslant 5$.
Следовательно, $l = 2$ и

$$2m - m - r - 2 + 3 = m - r + 1 \leqslant 0 \iff m + 1 \leqslant r.$$

Но так как $m \geqslant 5$, получаем, что $r \geqslant 6$ – выполнено утверждение 4 теоремы 9.
Все случаи разобраны и теорема доказана. □

Таким образом, чтобы полностью изучить множество всех пар (r, μ), для которых существует экстремальный граф нам необходимо рассмотреть отдельно случаи $\mu(G) = 5$ и $\mu(G) = 3$. Однако, для начала изучим случай $\mu(G) \geqslant 7$.
Тогда по теореме 9 только для пар $(2\mu-1, \mu), (2\mu, \mu)$ и $(2\mu+1, \mu)$, возможно, существуют экстремальные графы и, как мы сейчас убедимся, каждый случай реализуется.

Утверждение 7. *Пусть $\mu > 1$ – нечётное число и $r \in \{2\mu-1, 2\mu, 2\mu+1\}$. Тогда существует r-регулярный связный экстремальный граф с $\mu(G) = \mu$.*

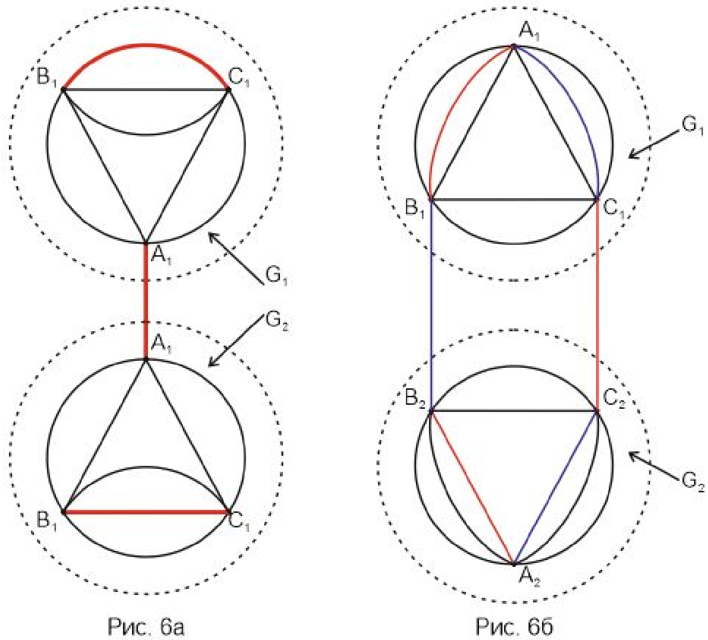

Рис. 6: На рисунке 6а изображён пример экстремального графа с $r = 5$, $\mu = 3$. На рисунке 6б – пример экстремального графа G с $r = 6$, $\mu = 3$, $\chi'(G) < r + \mu$. Цвету 1 соответствует красный, цвету 2 соответствует синий.

Доказательство. Достаточно предъявить примеры, на которых достигается равенство в основной верхней оценке. Для случая $r = 2\mu$ подойдёт μ-кратный треугольник, но, чтобы было интереснее, мы приведём другой пример, в котором $\chi'(G) = r + \mu(G) - 1$. Рассмотрим три случая.

Случай 1: $r = 2\mu - 1$.

Тогда рассмотрим μ-кратный треугольник, удалим из него по одному ребру между парами (A, B) и (A, C) и получившийся граф обозначим за G_1 (вершины A, B, C переобозначим в A_1, B_1, C_1 соответственно). Далее, возьмём его копию G_2 на вершинах A_2, B_2, C_2 (вершины A_1 и A_2 соответствуют друг другу) и соединим A_1 и A_2 одним ребром (пример можно увидеть на рис. 6а). Легко видеть, что получившийся граф G – r-регулярный: для B_i, C_i это совсем ясно, а $deg_G(A_2) = deg_G(A_1) = 2(\mu - 1) + 1 = 2\mu - 1$.

Кроме того, так как граф G содержит подграф G_1, понятно, что

$$\chi'(G) \geqslant \chi'(G_1) = \mu + (\mu - 1) + (\mu - 1) = r + \mu(G) - 1.$$

Покажем, что $\kappa'(G) \geqslant r - k = r - s$, где $\mu = 2s + 1$. Тогда ясно, что G – экстремальный граф.

Для этого найдём покрывающую рёберную раскраску в $r - s$ цвет. Покрасим единственное ребро A_1A_2, а также по одному ребру B_iC_i для $i = 1, 2$ в цвет 1, после чего удалим эти 3 ребра (см. рис. 6а, удаляем красные рёбра). После этого граф распадётся на две копии $(\mu - 1) = 2s$-кратных треугольника, которые, как видно из доказательства утверждения 5, легко можно по отдельности покрасить в $2\mu - 2 - \frac{\mu - 1}{2} = 3s = (2(2s+1) - 1) - s - 1 = r - s - 1$ цветов, чтобы в итоге все вершины графа G были покрыты рёбрами каждого цвета. Таким образом, существует покрывающая раскраска рёбер в $(r - s - 1) + 1 = r - s$ цветов. Этот случай разобран.

Далее, в случаях 2 и 3 пары вершин (A_1, A_2), (B_1, B_2) и (C_1, C_2) будут соответствовать друг другу (см. ниже).

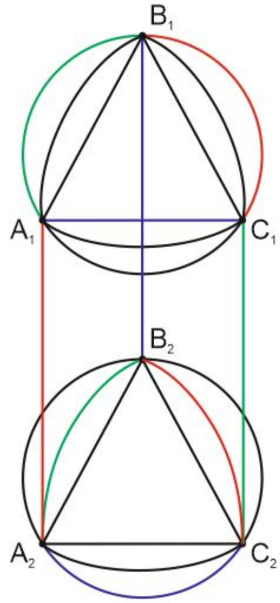

Рис. 7: Пример экстремального графа G с $r = 7$, $\mu = 3$. Цвету 1 соответствует красный, цвету 2 соответствует синий, третьему цвету – зелёный.

Случай 2: $r = 2\mu$.

Тогда рассмотрим μ-кратный треугольник с вершинами A_1, B_1 и C_1, в котором удалим одно из рёбер между B_1 и C_1. Далее, рассмотрим его копию G_2 и соединим одним ребром пары (B_1, B_2) и (C_1, C_2), см. рис. 6б. Легко видеть, что полученный граф G – r-регулярный и $\chi'(G) \geqslant 3\mu(G) - 1 = r + \mu(G) - 1$. Покажем, что $\kappa'(G) \geqslant r - s$, где $\mu(G) = 2s + 1$.

Для этого покрасим по одному ребру A_iB_i для $i = 1, 2$ и C_1C_2 в цвет 1, по одному ребру A_iC_i для $i = 1, 2$ и B_1B_2 в цвет 2, после чего удалим эти 6 рёбер (см. рис. 6б). Для оставшихся двух копий $\mu - 1 = 2s$-кратных треугольников, как уже было отмечено выше, можно легко построить покрывающую раскраску в $3s = 2(2s + 1) - 2 - s = r - s - 2$ цвета. Тогда, вернув обратно 6 покрашенных рёбер, получим покрывающую раскраску в $r - s$ цветов, что и нужно было.

Случай 3: $r = 2\mu + 1$.

Тогда рассмотрим два μ-кратных треугольника с вершинами (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) и соединим одним ребром 3 пары соответствующих вершин (см. рис. 7).

Легко видеть, что $\chi'(G) = 3\mu(G) = r - 1 + \mu(G)$.

Далее, покрасим по одному ребру между парами (A_1, A_2), (B_1, C_1) и (B_2, C_2) в цвет 1, в цвет 2 – рёбра (B_1, B_2), (A_1, C_1) и (A_2, C_2) и рёбра (C_1, C_2), (A_1, B_1) и (A_2, B_2) – в цвет 3, см. рис. 7.

Удалим покрашенные 9 рёбер и у нас останутся, как обычно, $2(\mu - 1)$-кратных треугольника, для которых есть раскраска в $3s = (2(2s + 1) + 1) - s - 3 = r - s - 3$ цветов. Тогда вернём обратно удалённые 9 покрашенных рёбер и получим покрывающую раскраску в $r - s$ цветов. Таким образом, построенный граф – экстремальный.

Теперь все случаи разобраны, и утверждение доказано. □

Таким образом, нам осталось разобрать случаи $\mu(G) = 5$ и $\mu(G) = 3$, что мы и сделаем в следующих двух подпунктах.

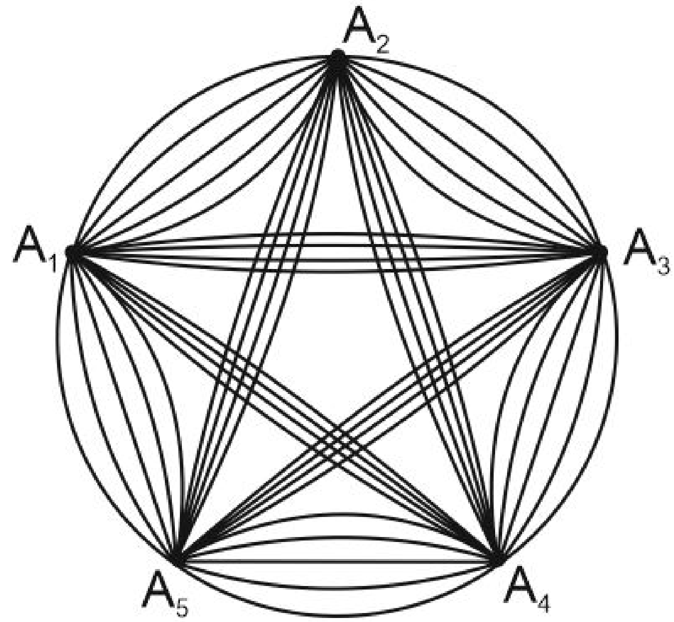

Рис. 8: Граф G_{18} ($r = 18, \mu = 5$).

9.1 Экстремальные графы с $\mu(G) = 5$

По теореме 9 в случае, когда $\mu(G) = 5$ существуют экстремальные графы только при условии, что $r \in \{9, 10, 11, 18, 19, 20\}$.

Как уже было показано выше, существуют экстремальные графы при всех r, таких, что $9 \leqslant r \leqslant 11$.

Существуют ли экстремальные графы с $\mu(G) = 5$ и $18 \leqslant r \leqslant 20$? Оказывается, что ответ положительный!

Утверждение 8. *Пусть $r \in \{18, 19, 20\}$. Тогда существует r-регулярный связный экстремальный граф с $\mu(G) = 5$. Более того, у любого такого графа $\chi'(G) = r + \mu(G)$ (см. теорему 9).*

Доказательство. Разберём 3 случая и построим 3 графа, которые будут удовлетворять вышеперечисленным условиям.

Случай 1: $r = 18$.

Тогда подойдёт 5-кратный полный граф на вершинах A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, из которого удалили рёбра цикла $A_1 - A_3 - A_5 - A_2 - A_4 - A_1$, назовём его G_{18} (см. рис. 8). Как легко видеть, в нём $5 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} - 5 = 45$ рёбер. Ясно, что в любой правильной раскраске рёбер каждого цвета не больше 2 (иначе какие-то 2 одноцветных ребра были бы смежны, что невозможно). Следовательно,

$$45 \leqslant 2\chi'(G_{18}) \Rightarrow 23 = r + \mu(G_{18}) \leqslant \chi'(G_{18}).$$

То есть $\chi'(G_{18}) = r + \mu(G_{18})$. Осталось показать, что

$$\kappa'(G_{18}) \geqslant 2r + \lfloor \frac{\mu(G_{18})}{2} \rfloor - \chi'(G_{18}) = 2r + 2 - r - 5 = r - 3.$$

То есть нам необходимо показать, что существует покрывающая раскраска в $r - 3 = 15$ цветов. Для этого разобьём рёбра графа на 4 простых полных графа на 5 вершинах

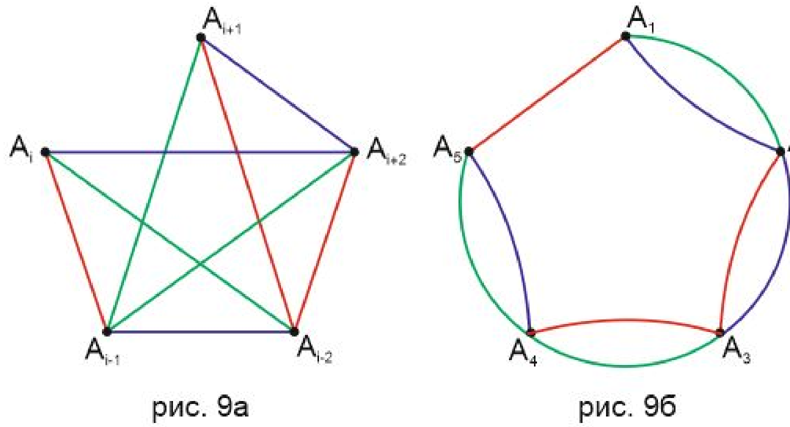

Рис. 9: Суммирование индексов по модулю 5. На рисунке 9а – пример покрывающей раскраски полного графа на 5 вершинах без ребра A_iA_{i+1} в 3 цвета, на рисунке 9б изображён пример покрывающей раскраски двойного цикла без одного ребра A_1A_5 в 3 цвета.

без ребра A_iA_{i+1} для i-го полного графа $i = 1, 2, 3, 4$ и то, что останется (двойной цикл $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_1$ без одного ребра A_1A_5). Тогда легко видеть, что каждый из этих 5 наборов рёбер можно покрасить в 3 цвета, чтобы все вершины были покрыты рёбрами всех цветов (см. рис. 9а и 9б). Что и требовалось доказать.

Случай 2: $r = 19$.

Как и в первом случае, берём 5-кратный полный граф на 5 вершинах A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, но на этот раз удалим только по одну ребру A_1A_3, A_1A_4 и A_2A_5. Обозначим полученный граф G_A и рассмотрим его копию G_B, в которой вершины A_i будут соответствовать вершинам B_i. Наконец, соединим одним ребром A_1 и B_1 и построенный граф обозначим через G_{19} (см. рис. 10а).

Легко видеть, что G_{19} – 19-регулярный граф. Для каждого цвета в правильной раскраске не больше двух рёбер. Следовательно,

$$\chi'(G_{19}) \geqslant \chi'(G_A) \geqslant \lceil \frac{|E(G_A)|}{2} \rceil = \lceil \frac{50-3}{2} \rceil = 24 = r + \mu(G_{19}).$$

Значит $\chi'(G_{19}) = r + \chi'(G_{19}) = 24$.

Осталось проверить, что $\kappa'(G_{19}) \geqslant r - 3 = 16$, то есть, что существует покрывающая раскраска в 16 цветов. Для этого покрасим в цвет 1 по одному ребру из пар (A_1, B_1), (A_2, A_4), (A_3, A_5), (B_2, B_4) и (B_3, B_5) и удалим все эти рёбра (см. рис. 10а). Тогда граф G_{19} распадётся на 2 копии графа G_{18}, у которого, как было показано в случае 1, существует покрывающая раскраска в 15 цветов. Значит у G_{19} есть покрывающая раскраска в 16 цветов, что и требовалось доказать.

Случай 3: $r = 20$.

Рассмотрим полный 5-кратный граф на вершинах A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 без одного ребра (A_1, A_4). Как и в случае 2, обозначим получившийся граф за G_A, после чего рассмотрим его копию G_B с вершинами B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 так, что по-прежнему вершина A_i будет соответствовать вершине B_i. После этого соединим пары вершин (A_1, B_1) и (A_4, B_4) и полученный граф обозначим за G_{20} (см. рис. 10б). Покажем, что он подходит.

Ясно, что G_{20} – 20-регулярный, а в G_A всего $(50 - 1) = 49$ рёбер. Как и в случае 2, легко устанавливаем, что $\chi'(G_{20}) \geqslant \frac{49}{2}$, то есть $\chi'(G_{20}) = 25 = r + \mu(G_{20})$.

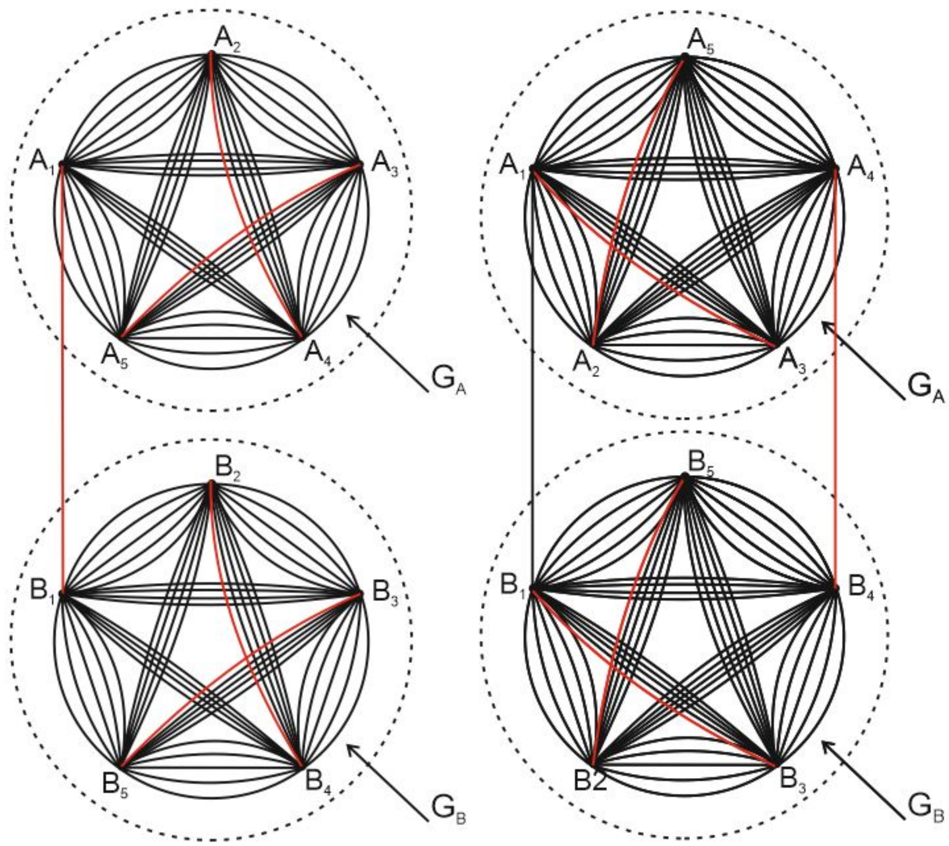

Рис. 10а Рис. 10б

Рис. 10: На рисунке 10а изображён граф G_{19}, $r = 19, \mu = 5$. На рисунке 10б – граф G_{20}, $r = 20, \mu = 5$ на обоих рисунках удалённым рёбрам соответствуют красные рёбра.

Осталось показать, что для G_{20} существует покрывающая раскраска в $r-3=17$ цветов.

Для этого покрасим по одному ребру из пар $(A_4, B_4), (A_1, A_3)$, $(A_2, A_5), (B_1, B_3)$ и (B_2, B_5) в цвет 1, после чего удалим эти рёбра (см. рис. 10б). Тогда останется граф G_{19}, который по случаю 2 можно покрасить желаемым способом в 16 цветов. Значит, добавив обратно 5 рёбер, заключаем, что $\kappa'(G_{20}) \geqslant 17$, что и требовалось доказать.

Таким образом, во всех случаях существует экстремальный граф, и утверждение доказано. $\square$

9.2 Случай $\mu(G) = 3$

Исследуем верхнюю оценку на сумму $\chi'(G)+\kappa'(G)$. По теореме 2 она всегда не меньше, чем $2r$. С другой стороны, по основной верхней оценке

$$\chi'(G)+\kappa'(G) \leqslant 2r + \lfloor\frac{\mu(G)}{2}\rfloor = 2r+1.$$

В частности, это означает, что

$$f(r,3) \in \{2r, 2r+1\}.$$

По теореме 9, если G – r-регулярный связный экстремальный граф с $\mu(G)=3$, то $r \geqslant 5$. Следовательно, $f(3,3)=2r$ и $f(4,3)=2r$.

Как будет показано ниже, для любого $r \geqslant 5$ выполнено $f(r,3)=2r+1$.

По утверждению 7 мы имеем $f(r,3)=2r+1$ при всех $r \in \{5,6,7\}$ Таким образом, в дальнейшем можно считать, что $r \geqslant 8$.

Теорема 10. *Существует r-регулярный связный экстремальный граф с $\mu(G)=3$ при любом $r \geqslant 8$.*

Доказательство. Разберём 7 случаев. По техническим причинам случаи, когда $r \in \{8,9,13\}$ будем разбирать отдельно.

Случай 1: $r=8$.

Рассмотрим граф на вершинах A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, в котором все соседние пары в цикле $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_1$ соединены тремя рёбрами, а оставшиеся 5 пар – одним ребром. Теперь, удалим из этого графа единственное ребро A_1A_3 и получившийся граф обозначим за G_A. Теперь рассмотрим его копию G_B и соединим одним ребром пары (A_1, B_1) и (A_3, B_3) (как обычно, A_i и B_i соответствуют друг другу для всех i, как и в случаях 2 и 3), см. рис. 11а. Покажем, что получившийся в итоге граф G_8 – экстремальный.

Ясно, что G_8 – 8-регулярный граф, а в G_A – $5\cdot 3+5-1=19$ рёбер. Значит, так как в G_A всего 5 вершин, получаем, что всего рёбер каждого цвета не более 2 и

$$\chi'(G_8) \geqslant \chi'(G_A) \geqslant \lceil\frac{19}{2}\rceil = 10 = r+\mu(G_8)-1.$$

Чтобы завершить доказательство достаточно показать, что $\kappa'(G_8) \geqslant r - \lfloor\frac{\mu(G_8)}{2}\rfloor = r-1$.

Построим покрывающую раскраску рёбер в $r-1=7$ цветов.

Для этого покрасим в цвет 6 по одному ребру из пар вершин $(A_1, B_1), (A_2, A_4), (A_3, A_5)$, (B_2, B_4), (B_3, B_5), по одному ребру из пар $(A_3, B_3), (A_2, A_5), (A_1, A_4), (B_2, B_5)$ и (B_1, B_4) – в цвет 7, после чего удалим эти 10 рёбер (см. рис. 13). Оставшийся граф разбивается на два 3-кратных цикла $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_1$ и $B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 - B_1$. Покажем как покрасить нужным способом в 5 цветов цикл, соответствующий графу G_A (второй цикл красим симметрично). Для этого будем красить в цвет i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ по одному ребру из пар $(A_{i-1}, A_i), (A_i, A_{i+1})$ и (A_{i-2}, A_{i+2}) (все индексы берутся по модулю 5). Легко видеть, что

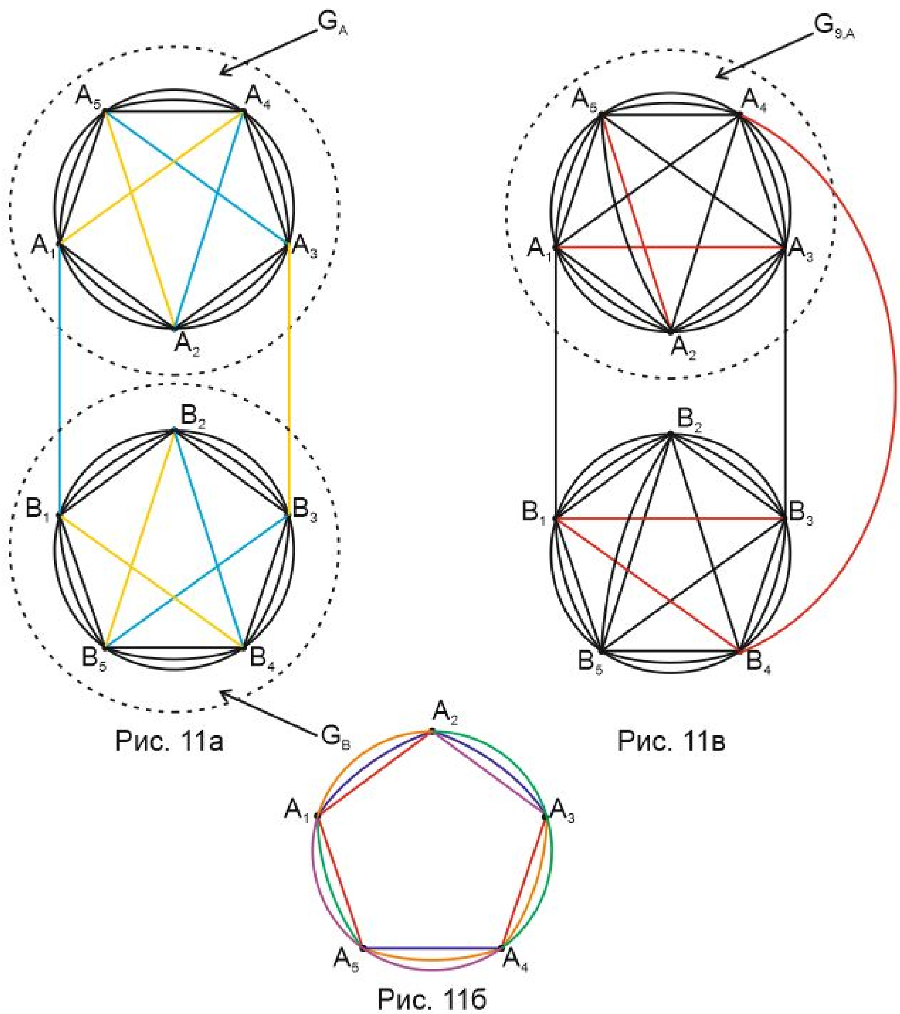

Рис. 11: Рисунок 11а: граф G_8, $r = 8$, $\mu = 3$. На рисунке 11б предъявлен пример покрывающей раскраски тройного цикла на 5 вершинах в 5 цветов. На рисунке 11в изображён граф G_9 при $r = 9, \mu = 3$. На всех трёх рисунках цвета $1, 2, ..., 7$ соответствуют следующим цветам (в том же порядке): красный, синий, зелёный, оранжевый, фиолетовый, голубой, жёлтый.

можно так покрасить граф G_A, чтобы каждое ребро было покрашено ровно в 1 цвет и, как видно из построения, каждая вершины была бы покрыта всеми цветами $1, 2, 3, 4, 5$ (см. рис. 11б). Вернув обратно покрашенные в цвета $6, 7$ десять удалённых рёбер, получим покрывающую раскраску G_8 в 7 цветов. Значит G_8 – экстремальный граф и случай 1 разобран.

Случай 2: $r = 9$.

Рассмотрим граф G_8 из случая 1 (используем здесь те же обозначения). Добавим к нему новых рёбер между парами $(A_4, B_4), (A_2, A_5), (A_1, A_3), (B_2, B_5)$ и (B_1, B_3). Полученный граф обозначим через G_9 (см. рис. 11в). Легко видеть, что G_9 – 9-регулярный граф с

$$\kappa'(G_9) \geqslant \kappa'(G_8) + 1 = r - 1 = 8.$$

Действительно, добавленные 5 рёбер красим в цвет 1, удаляем их и, как обычно, дополняем покрывающую раскраску графа G_8 до раскраски рёбер графа G_9 (см. рис. 11в). Покажем, что $\chi'(G_9) \geqslant r + 2 = 11$. Рассмотрим граф $G_{9,A}$, индуцированный на вершинах A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и покажем, что $\chi'(G_{9,A}) \geqslant r + 2$. Но это следует из того, что

$$\chi'(G_{9,A}) \geqslant \frac{|E(G_{9,A})|}{2} = \frac{19 + 2}{2} > 10.$$

Таким образом G_9 – искомый граф.

Случай 3: $r = 13$.

Рассмотрим 3-кратный полный граф на вершинах A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, в котором удалено одно из рёбер между A_1 и A_3. Полученный граф обозначим за G_A, после чего, как и раньше, рассматриваем его копию G_B и соединяем пары вершин $(A_2, B_2), (A_4, B_4), (A_5, B_5)$ одним ребром, а пары (A_1, B_1) и (A_3, B_3) – двумя рёбрами (см. рис. 12). Легко видеть, что в полученном графе G_{13} степени всех вершин равны 13 и в G_A – $3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} - 1 = 29$ рёбер. Отсюда, как и выше, легко следует, что

$$\chi'(G_{13}) \geqslant \lceil \frac{29}{2} \rceil = 15 = r + \mu(G_{13}) - 1.$$

Покажем, что $\kappa'(G_{13}) \geqslant \kappa'(G_A) \geqslant r - 1 = 12$. Для этого удалим 4 пятёрки разных рёбер:

$$\{(A_1, B_1), (A_2, A_4), (A_3, A_5), (B_2, B_4), (B_3, B_5)\};$$
$$\{(A_2, B_2), (A_1, A_4), (A_3, A_5), (B_1, B_4), (B_3, B_5)\};$$
$$\{(A_3, B_3), (A_1, A_4), (A_2, A_5), (B_1, B_4), (B_2, B_5)\};$$
$$\{(A_5, B_5), (A_2, A_4), (A_1, A_3), (B_2, B_4), (B_1, B_3)\}.$$

Нетрудно убедиться, что после удаления этих 20 рёбер получится граф G_9. Тогда легко видеть, что

$$\kappa'(G_{13}) \geqslant \kappa'(G_9) + 4 = 9 - 1 + 4 = 12.$$

Действительно, дополним покрывающую раскраску графа G_9 в 8 цветов до нужной раскраски графа G_{13}, покрасив все рёбра каждой удалённой пятёрки в один из четырёх новых цветов (см. рис. 12).

Таким образом, G_{13} – экстремальный связный 13-регулярный граф с $\mu(G_{13}) = 3$.

В оставшихся четырёх случаях будет использована конструкция, предложенная в статье [3] для изучения мультиграфов с максимальным хроматическим числом. Именно поэтому первые 3 случая пришлось разбирать отдельно (для $r = 8, 9, 13$ эта конструкция перестаёт работать). В нечётном случае, однако, её нужно будет немного модифицировать. Мы опишем здесь нужные графы и покажем, что они являются экстремальными.

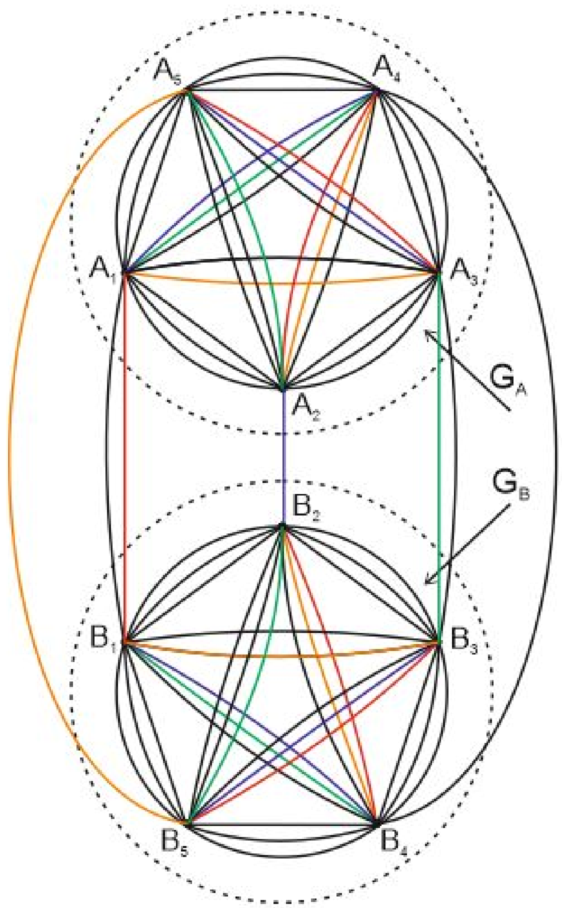

Рис. 12: G_{13}, $r = 13, \mu = 3$, одноцветные рёбра соответствуют четырём группам удалённых рёбер.

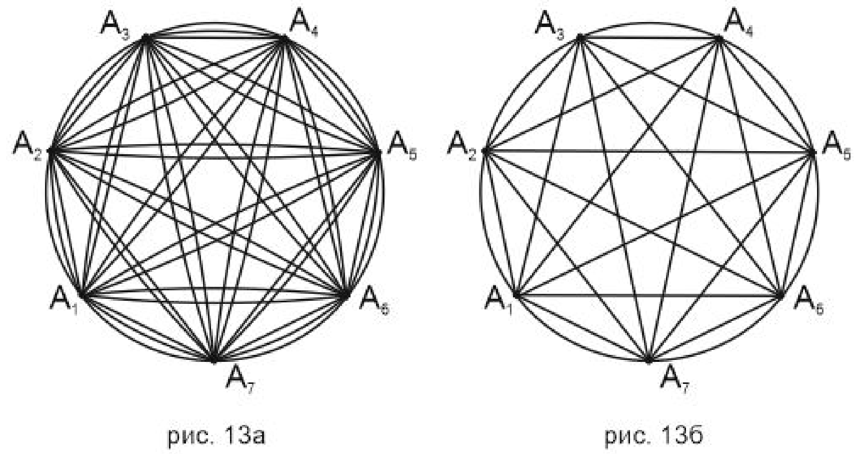

Рис. 13: Рисунок 13а: пример графа H_2 для $r = 14, \mu = 3$, $k = 3$. Рисунок 13б: L_7, $k = 3$.

Случай 4: $r = 4k + 2$, $k \geqslant 2$.

Рассмотрим 2-кратный полный граф на $2k+1$ вершинах $A_1, ..., A_{2k+1}$, в котором добавили ещё дополнительно ребра цикла $A_1 - A_2 - ... - A_{2k+1} - A_1$. Получился $2k \cdot 2 + 2 = (4k+2)$-регулярный граф H_2 с $\mu(H_2) = 3$ (см. рис. 13а). Так как в любой правильной раскраске одноцветные рёбра образуют паросочетание, их не больше, чем $\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = k$. Отсюда ясно, что

$$\chi'(H_2) \geqslant \frac{|E(H_2)|}{k}.$$

Так как H_2 – $(4k+2)$-регулярный граф на $2k+1$ вершине, получаем, что

$$|E(H_2)| = \frac{(4k+2)(2k+1)}{2} = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Значит

$$\chi'(H_2) \geqslant \frac{4k^2 + 4k + 1}{k} = 4k + 4 + \frac{1}{k}.$$

То есть $\chi'(H_2) \geqslant 4k + 5 = r + \mu(H_2)$.

Для завершения разбора этого случая необходимо показать, что

$$\kappa'(H_2) \geqslant r - 2 = 4k.$$

Из теоремы Гупты для простых графов легко видеть, что простой полный граф на $2k+1$ вершинах имеет покрывающую раскраску в $2k-1$ цвет. Удалим теперь рёбра такого графа из H_2. Тогда нетрудно видеть, что останется граф, который уже изучался при доказательстве теоремы 3 (см. пункт "Случай $\mu(G) = 2$"). Обозначим такой граф через L_{2k+1} (см. рис. 13б).

Мы знаем, что $\kappa'(L_{2k+1}) = 2k + 1$.

Тогда из вышесказанного следует, что

$$\kappa'(H_2) \geqslant \kappa'(L_{2k+1}) + 2k - 1 = 2k + 1 + 2k - 1 = 4k = r - 2.$$

Таким образом, H_2 – экстремальный $(4k+2)$-регулярный связный граф с $\mu(H_2) = 3$.

Случай 5: $r = 4k + 3$, $k \geqslant 2$.

Будем сводить к случаю 4.

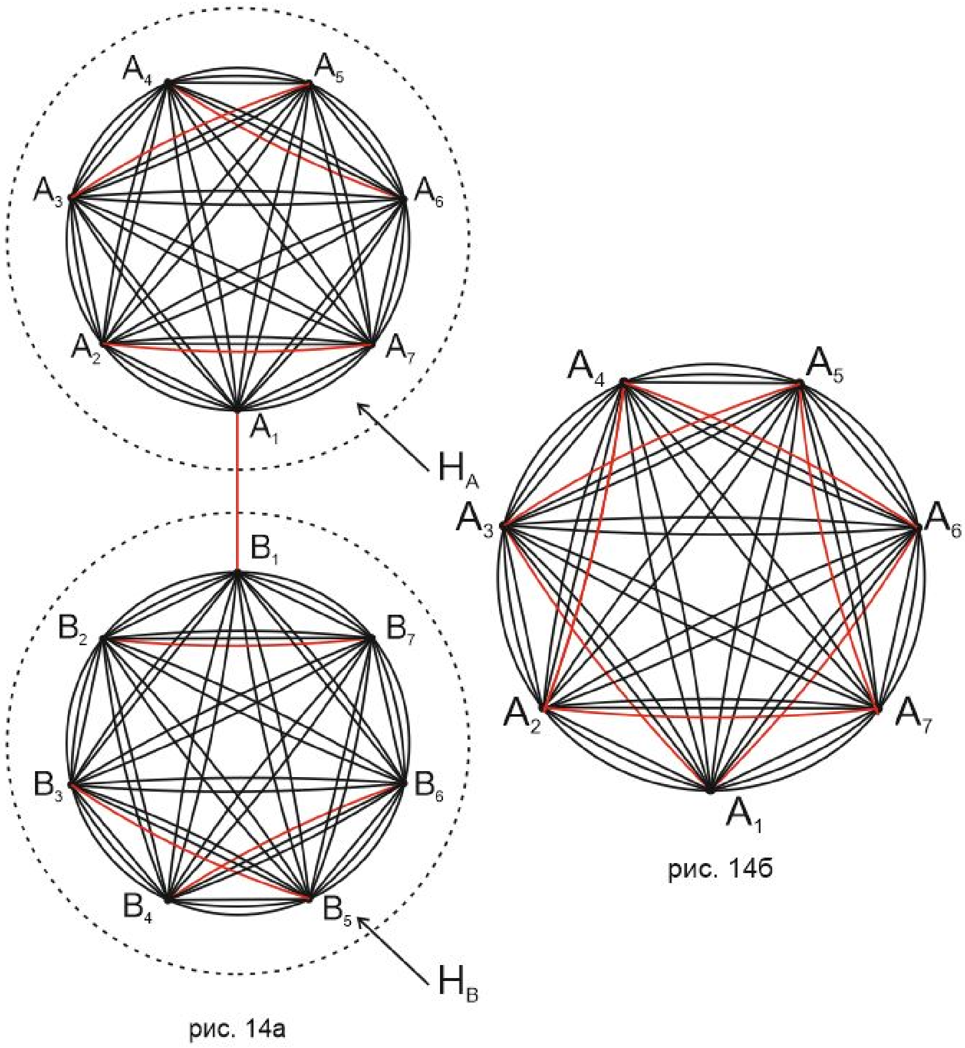

Рис. 14: Рисунок 14а: пример графа H_3 для $r = 15, \mu = 3, k = 3$, красным цветов обозначены рёбра цвета 1. Рисунок 14б: пример графа H_4 для $r = 16, \mu = 3$, красным цветом обозначены рёбра добавленного цикла.

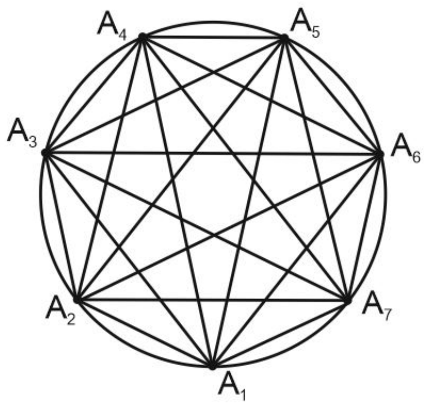

рис. 15а

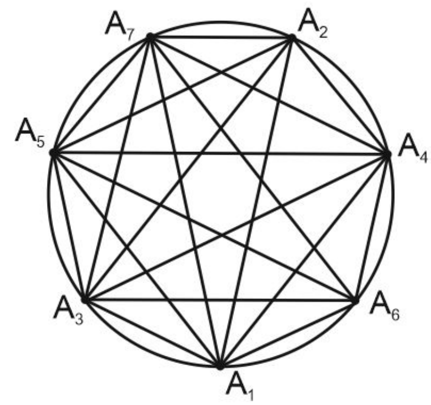

рис. 15б

Рис. 15: Две группы, изоморфные L_{2k+1}, на правой картинке вершины идут в другом порядке!

Рассмотрим 2-кратный полный граф на $2k+1$ вершине $A_1, ..., A_{2k+1}$ и добавим к нему по ребру цикла $A_1 - A_2 - ... - A_{2k+1} - A_1$, а также рёбра паросочетания γ_A размера k, не покрывающего вершину A_1, которого нет в этом цикле (например, можно рассмотреть путь $A_3 - A_5 - ... - A_{2k+1} - A_2 - A_4 - A_6 - ... - A_{2k-2} - A_{2k}$ длины $2k-1$ и в качестве паросочетания взять нечётные ребра в этом пути).

Обозначим полученный граф через H_A и, как и раньше, рассмотрим его копию H_B на вершинах $B_1, ..., B_{2k+1}$, в которой вершины A_i и B_i соответствуют друг другу, после чего соединим вершины A_1 и B_1 одним ребром. Полученный граф H_3 – это $4k+2+1 = (4k+3)$-регулярный связный граф (см. рис. 14а).

Далее, в G_A на k рёбер больше, чем в H_2, поэтому, пользуясь вычислениями из случая 4, получаем, что:

$$\chi'(H_3) \geqslant \chi'(H_A) \geqslant \frac{(2k+1)^2 + k}{k} = 4k + 5 + \frac{1}{k}.$$

Значит $\chi'(H_3) \geqslant 4k + 6 = r + 3 = r + \mu(H_3)$.

Осталось проверить, что $\kappa'(H_3) \geqslant r - 2$.

Для этого удалим покрасим в цвет 1 по одному ребру в парах (A_1, B_1) и паросочетаниях γ_A и γ_B размера k в графах H_A и H_B. После удаления этих $2k+1$ ребра получаем две копии графа H_2 (см. рис. 14а). Тогда ясно, что

$$\kappa'(H_3) \geqslant \kappa'(H_2) + 1 = ((r-1) - 2) + 1 = r - 2.$$

Значит H_3 нам подходит.

Случай 6: $r = 4k + 4$, $k \geqslant 2$.

Используя те же обозначения, что и в случае 4, рассмотрим граф H_2 и добавим к нему дополнительно по ребру вдоль цикла $A_1 - A_3 - A_5 - ... - A_{2k+1} - A_2 - A_4 - ... - A_{2k} - A_1$ (так как $k \geqslant 2$, так сделать можно с сохранением условия $\mu(G) = 3$). Полученный граф обозначим через H_4 (см. рис. 14б) и покажем, что он подходит. Легко видеть, что он $(4k+2)+2 = (4k+4)$-регулярен и связен.

Далее, как и в предыдущих случаях имеем:

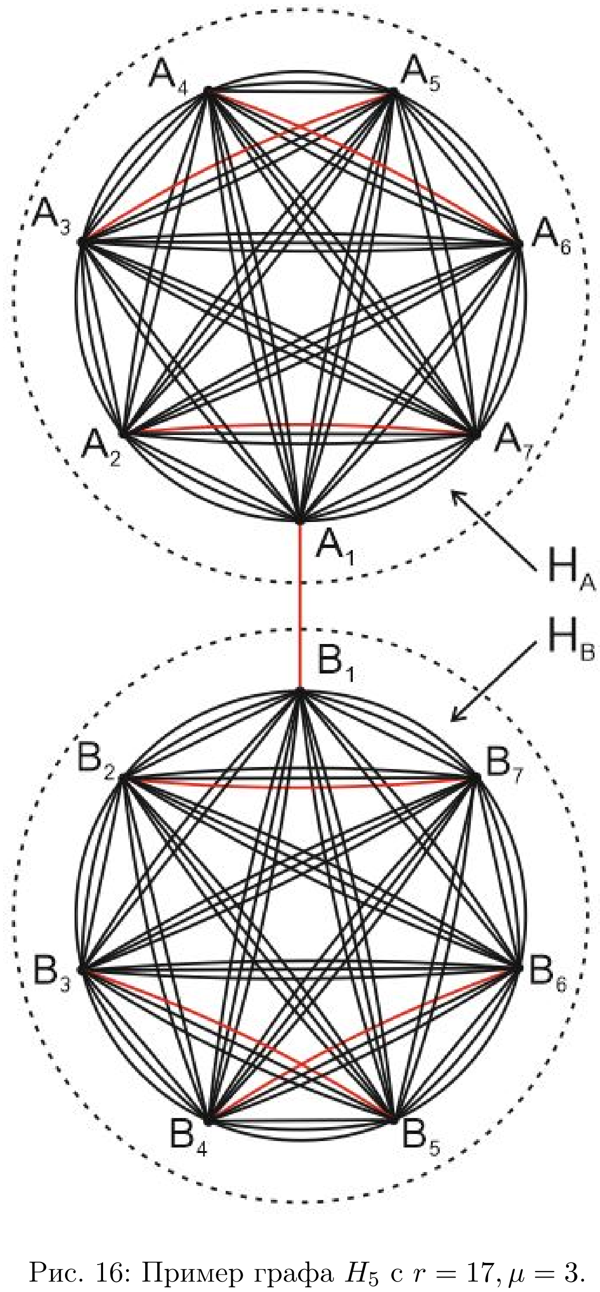

Рис. 16: Пример графа H_5 с $r = 17, \mu = 3$.

$$\chi'(H_4) \geqslant \frac{|E(H_4)|}{k} = \frac{|E(H_2)| + 2k + 1}{k} = 4k + 4 + \frac{1}{k} + 2 + \frac{1}{k} = 4k + 6 + \frac{2}{k}.$$

Значит $\chi'(H_4) \geqslant 4k + 7 = r + 3$.

Покажем, что $\kappa'(H_4) \geqslant r - 2 = 4k + 4 - 2 = 2 \cdot (2k + 1)$.

Для этого разобьём рёбра графа на 2 группы следующим образом:

1. В первой группе будет по одному ребру между любыми парами вершин и по одному дополнительному ребру вдоль цикла $A_1 - A_2 - ... - A_{2k+1} - A_1$.

2. Во вторую группу попадут все рёбра не из первой группы, то есть по одному ребру между любыми парами вершин и ещё по одному ребру вдоль цикла $A_1 - A_3 - A_5 - ... - A_{2k+1} - A_2 - A_4 - ... - A_{2k} - A_1$.

Легко видеть, что графы на рёбрах из первой группы и из второй, изоморфны графу L_{2k+1} (см. рис. 15а и 15б).

Но тогда ясно, что $\kappa'(H_4) \geqslant 2\kappa'(L_{2k+1}) = 2 \cdot (2k + 1)$ – то, что нужно.

Случай 7: $r = 4k + 5$, $k \geqslant 3$.

Рассмотрим граф H_3 из случая 5 (с теми же обозначениями), добавим к нему дополнительно по одному ребру вдоль циклов $A_1 - A_5 - A_9 - ... - A_i - A_{i+4} - ... - A_{2k-2} - A_1$ и $B_1 - B_5 - B_9 - ... - B_i - B_{i+4} - ... - B_{2k-2} - B_1$ (суммирование индексов берётся по модулю $2k + 1$) и обозначим получившийся граф через H_5 (см. рис. 16). Так как $(2k + 1, 4) = 1$ эти добавленные циклы будут простыми гамильтоновыми циклами в компонентах связности на вершинах $A_1, ..., A_{2k+1}$ и $B_1, ..., B_{2k+1}$. В построении этого графа мы воспользовались тем, что $2k+1$ – нечётное число и в графах H_A и H_B (см. случай 5) $2k+1 \geqslant 2 \cdot 3+1 = 7$ вершин (иначе были бы "лишние" кратные рёбра).

Нетрудно видеть, что в полученном графе все вершины имеют степень $4k + 5 = (4k + 3) + 2$ и граф, очевидно, связен.

Далее, используя подсчёты из случая 5, аналогично случаю 6 устанавливаем, что

$$\chi'(H_5) \geqslant \frac{|E(H_5)|}{k} = \frac{|E(H_3)| + 2k + 1}{k} = 4k + 5 + \frac{1}{k} + 2 + \frac{1}{k} = 4k + 7 + \frac{2}{k}.$$

Следовательно, $\chi'(H_5) = r + 3$.

Далее, как и в случае 5, покрасим ребро (A_1, B_1) и рёбра паросочетаний γ_A и γ_B в цвет 1, после чего удалим их (см. рис. 16). Тогда оставшийся граф распадается на 2 компоненты связности, изоморфные некоторому графу G_0. Аналогично случаю 6 устанавливаем, что $\kappa'(G_0) \geqslant 4k + 2$. Для этого разобьём рёбра G_0 на две группы:

1. В одной группе будет из всех рёбер простого полного графа на $2k + 1$ вершине и по дополнительному ребру цикла $A_1 - A_2 - ... - A_{2k+1} - A_1$ (точно так же, как в случае 6).

2. Другая группа будет состоять из остальных рёбер, то есть из рёбер $(2k + 1)$-полного простого графа и ещё рёбер простого цикла $A_1 - A_5 - A_9 - ... - A_1$.

Это разбиение хорошо проиллюстрировано на рисунках 17а и 17б. Как и в случае $r = 4k + 4$ замечаем, что рёбра каждой из групп образуют граф, изоморфный L_{2k+1} и, следовательно, можно тогда заключить, что

$$\kappa'(H_5) \geqslant \kappa'(G_0) + 1 = 4k + 2 + 1 = r - 2.$$

Значит H_5 – экстремальный связный $(4k + 5)$-регулярный граф с $\mu(H_5) = 3$ – то, что нужно. $\square$

Таким образом, можно подытожить вышесказанное следующим следствием:

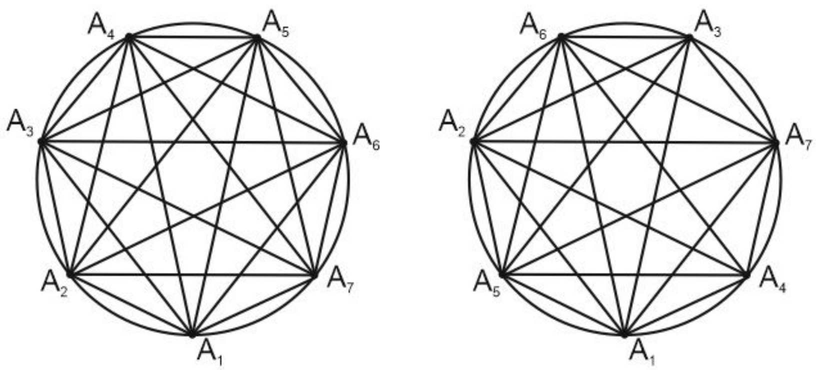

рис. 17а рис. 17б

Рис. 17: "Разбиение графа G_0".

Следствие 10. *Пусть $r \geqslant 3$. Тогда*

$$f(r,3) = \begin{cases} 2r, \text{ если } r = 3,4; \\ 2r+1, \text{ если } r \geqslant 5. \end{cases}$$

10 Основная верхняя оценка при $r \geqslant 4\mu(G)^2$

Можно ли улучшить основную верхнюю оценку на $\kappa'(G) + \chi'(G)$, предположив, что r – достаточно большое число? Оказывается, что да и это будет видно из следующей теоремы!

Теорема 11. *Пусть G – r-регулярный связный граф с кратностью рёбер $\mu(G) = \mu$, причём $r \geqslant 4\mu^2$. Тогда*

$$\kappa'(G) + \chi'(G) \leqslant 2r + 1.$$

Доказательство. Заметим, что при $\chi'(G) \leqslant r+1$, как уже отмечалось выше, $\kappa'(G)+\chi'(G) = 2r$, что нам подходит.

Таким образом, можно считать, что $\chi'(G) = r + l$, где $l \geqslant 2$, а $\kappa'(G) = r - k$, где $0 \leqslant k \leqslant \mu$. В этом случаем применима гипотеза Голдберга-Сеймура и, в частности, имеет место неравенство из следствия 5:

$$m(l-k) \leqslant k + l + m - 3 \iff m(l-k) \leqslant 2l - (l-k) + m - 3.$$

Но тогда:

$$(m+1)(l-k) \leqslant 2l + (m+1) - 4 \iff (m+1)(l-k-1) \leqslant 2l - 4.$$

Нам необходимо показать, что $l - k \leqslant 1$ в предположении, что $r \geqslant 4\mu^2$.

Для начала отметим, что при $\mu = 1$ и $\mu = 2$ утверждение уже доказано: для $\mu = 1$ – это очевидно, а для $\mu = 2$ утверждение превращается в уже проверенную основную верхнюю оценку. Таким образом, можно считать, что $\mu \geqslant 3$.

Предположим противное: $l - k \geqslant 2 \iff l \geqslant k + 2$. По утверждению 1 мы знаем, что $k = 0 \iff l = 0$. Тогда, так как $l \geqslant 2$, получаем, что $k \geqslant 1$ и, следовательно, $l = (l-k) + k \geqslant 2 + 1 = 3$.

Следовательно, так как $l - k - 1 \geqslant 1$, и имеет место цепочка неравенств:

$$m + 1 \leqslant (m+1)(l-k-1) \leqslant 2l - 4.$$

То есть
$$m \leqslant 2l - 5.$$

По следствию 6 верно следующее неравенство:

$$mr + ml - m - r - l + 3 \leqslant m(m-1)\mu \iff \mu m^2 - (r + l + \mu - 1)m + (r + l - 3) \geqslant 0.$$

Нетрудно видеть, что, так как $m \geqslant 3 > 1$, левая часть в последнем неравенстве увеличивается при уменьшении r (при условии, что остальные параметры зафиксированы). Таким образом, последнее неравенство должно быть заведомо верно при $r = 4\mu^2$, то есть

$$\mu m^2 - (4\mu^2 + l + \mu - 1)m + (4\mu^2 + l - 3) \geqslant 0.$$

Получили квадратичное (по m) неравенство, причём у соответствующей неравенству параболы рога направлены вверх. Значит, предполагая, что неравенство верно хотя бы для одного $m \in [3, 2l-5]$, получаем, что это неравенство должно быть выполнено также при $m = 3$ или $m = 2l - 5$.

Предположим для начала, что неравенство верно при $m = 3$. Тогда последнее неравенство преобразуется следующим образом:

$$9\mu - 3(4\mu^2 + l + \mu - 1) + (4\mu^2 + l - 3) \geqslant 0.$$

$$\iff 6\mu - 8\mu^2 - 2l \geqslant 0 \iff 3\mu - 4\mu^2 - l \geqslant 0.$$

Так как $l \geqslant 3$, имеет место неравенство:

$$3\mu - 4\mu^2 - 3 \geqslant 0.$$

Но $\mu \geqslant 1$ и, следовательно, $3\mu - 4\mu^2 - 3 \leqslant 3\mu - 4\mu - 3 < 0$, противоречие.

Итак, неравенство $\mu m^2 - (4\mu^2 + l + \mu - 1)m + (4\mu^2 + l - 3) \geqslant 0$ должно быть верно для $m = 2l - 5$.

Тогда получаем, что

$$\mu(2l-5)^2 - (4\mu^2 + l + \mu - 1)(2l - 5) + (4\mu^2 + l - 3) \geqslant 0.$$

Раскроем в последнем неравенстве скобки и преобразуем подобные члены:

$$4l^2\mu - 20l\mu + 25\mu - 8\mu^2 l - 2l^2 - 2l\mu + 2l + 20\mu^2 + 5l + 5\mu - 5 + 4\mu^2 + l - 3 \geqslant 0.$$

Упростим теперь левую часть и перепишем её в виде квадратичного неравенства по переменной l:

$$(4\mu - 2)l^2 - (8\mu^2 + 22\mu - 8)l + (24\mu^2 + 30\mu - 8) \geqslant 0.$$

Опять получаем квадратичное неравенство по l, и соответствующая парабола снова направлена рогами вверх. Поскольку $l \in [3, \mu]$ получаем, что неравенство должно быть верно при $l = 3$ или $l = \mu$. Проверим, что это не так, разобрав 2 случая.

Случай 1: $l = 3$.

Тогда
$$9(4\mu - 2) - 3(8\mu^2 + 22\mu - 8) + (24\mu^2 + 30\mu - 8) \geqslant 0.$$

После раскрытия скобок получаем, что $-2 \geqslant 0$, что, разумеется, неправда.

Случай 2: $l = \mu$.

Получаем в этом случае, что

$$(4\mu - 2)\mu^2 - (8\mu^2 + 22\mu - 8)\mu + (24\mu^2 + 30\mu - 8) \geqslant 0.$$

Далее, неравенство упрощается:

$$4\mu^3 - 2\mu^2 - 8\mu^3 - 22\mu^2 + 8\mu + 24\mu^2 + 30\mu - 8 \geqslant 0.$$

И, после приведения подобных членов, легко видеть, что

$$-4\mu^3 + 38\mu - 8 \geqslant 0 \iff -2\mu^3 + 19\mu - 4 \geqslant 0.$$

Исследуем функцию $\varphi(\mu) = -2\mu^3 + 19\mu - 4$ на возрастание и убывание, посчитав её производную:

$$\varphi'(\mu) = -6\mu^2 + 19.$$

Легко видеть, что при $\mu \geqslant 3$ функция $\varphi(\mu)$ монотонно убывает и, следовательно, если квадратичное неравенство верно при некотором $\mu \geqslant 3$, то оно должно быть заведомо верно и при $\mu = 3$:

$$-2 \cdot 3^3 + 19 \cdot 3 - 4 = -54 + 57 - 4 \geqslant 0 \iff -1 \geqslant 0.$$

Вновь пришли к противоречию. Значит наше предположение, что $l - k \geqslant 2$ было неверно и требуемая оценка верна, что и требовалось доказать. $\square$

11 Заключение

В качестве заключения, сформулируем в виде одной большой теоремы основные результаты данной работы:

Теорема 12. *Пусть G – r-регулярный связный граф с максимальной кратностью рёбер $\mu(G) = \mu$. Тогда верны следующие утверждения:*

1. $\kappa'(G) + \chi'(G) \geqslant 2r$ и, более того, для всех пар (r, μ), $r \geqslant \mu$, существует граф указанного выше вида, на котором в оценке достигается равенство.

2. $\kappa'(G) + \chi'(G) \leqslant 2r + \lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor$.

3. Равенство в оценке из утверждения 2 достигается для пары (r, μ) в случаях (и только в них), если:

3.1. $\mu = 1 \Rightarrow \kappa'(G) + \chi'(G) = 2r$ и оценка всегда достигается;

3.2. $\mu = 2$, $r \geqslant 4$, $r \neq 5$;

3.3. $\mu = 3$, $r \geqslant 5$;

3.4. μ – чётное число, $\mu > 2 \Rightarrow$ равенство достигается для μ-кратного треугольника и только дня него. В этом случае $r = 2\mu$.

3.5. $\mu = 5$ и $r \in \{9, 10, 11, 18, 19, 20\}$.

3.6. Если $\mu > 5$ – нечётное число, то оценка верна в точности в случаях $r \in \{2\mu - 1, 2\mu, 2\mu + 1\}$.

4. Дополнительно предполагая, что $r \geqslant 4\mu^2$, оценку сверху можно существенно улучшить:

$$\kappa'(G) + \chi'(G) \leqslant 2r + 1.$$

Таким образом, в работе найдены оценки с двух сторон на сумму $\kappa'(G) + \chi'(G)$, которые для каждого $\mu(G)$ достигаются на некоторых r-регулярных графах, а нижняя оценка достигается для любых $(r, \mu(G))$.

Однако, основную верхнюю оценку, как было показано в работе, можно в отдельных случаях даже улучшить. В дальнейшем планируется уточнение оценки в зависимости от пары (r, μ), то есть нахождение оптимальной функции $f(r, \mu)$.

Более того, задачу можно обобщать, рассматривая не только r-регулярные графы G, но и произвольные графы, фиксируя 3 параметра: максимальную степень вершины графа $\Delta(G)$, минимальную степень вершины графа $\delta(G)$ и максимальную кратность рёбер $\mu(G)$.

Помимо этого, стоит отметить, что в работе использовалась гипотеза Голдберга-Сеймура. Было бы интересно попытаться получить те же результаты, не используя это мощное утверждение.

12 Список литературы

Список цитированной в работе литературы:

[1]. Proof of the Goldberg-Seymour Conjecture on Edge-Colorings of Multigraphs Guantao Chena Guangming Jinga Wenan Zangb† a Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University Atlanta, GA 30303, USA b Department of Mathematics, The University of Hong Kong Hong Kong, China

[2]. V.G. Vizing The chromatic class of a multigraph Kibernetika (Kiev), 3 (1965), pp. 29-39 (in Russian). English translation in Cybernetics 1 32–41

[3]. Diego Scheide, Michael Stiebitz, Discrete Mathematics Volume 309, Issue 15, 6 August 2009, Pages 4920-4925

[4]. Nishizeki T., Kashiwagi K. On the 1.1 edge-coloring of multigraphs // SIAM J. Discrete Math. 1990. V. 3, N 3. P. 391-410.