

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на выпускную квалификационную работу обучающегося СПбГУ
Хомколова Александра Владимировича по теме “Устойчивость и хаотические колебания в динамических системах дробного порядка”

Несмотря на то, что дробные дифференциальные уравнения давно известны как большая и красивая теория, зародившаяся в переписке Г.Ф. Лопиталья с Г.В. Лейбницем в 1695 году, и далее развивавшаяся в работах Н.Х. Абеля, Ж. Лиувилля и О. Хевисайда, в настоящее время наблюдается всплеск ее применения в математическом моделировании и прикладных задачах. Причинами такого интереса является, во-первых, то что во многих моделях механики, физики, электроники, биологии и т.д. дробные производные и уравнения дробных порядков точнее описывают рассматриваемое явление. Например, так как определение дробной производной, в отличие от целой, дается нелокально, как интеграл от предыстории, то оно может быть применено для математического моделирования сред с памятью. Во-вторых, дробными уравнениями можно описывать немарковские процессы, что дает мощный инструмент в статистике. Наконец, уравнения данного типа также нашли свое применение в рамках раздела теории управления, получившего название управление с дробным порядком (Fractional-order control), в котором интегратор дробного порядка является частью инструментария проектирования системы управления, что позволяет улучшить и обобщить хорошо зарекомендовавшие себя методы и стратегии управления.

Магистерская выпускная квалификационная работа Хомколова А.В. является продолжением его бакалаврской работы. Основной целью данной работы являлось теоретическое и численное исследование динамических систем, порожденных дифференциальными и разностными уравнениями дробного порядка, а также оценка ляпуновских показателей посчитанных вдоль траекторий данных систем. Это исследование было, с одной стороны, вдохновлено недавними результатами по данной тематике научной группы известного специалиста в области динамических систем и эволюционных уравнений - проф. Питера Клоедена (Обернский университет, Германия). С другой стороны, на исследование также повлияли результаты совместных статей 2018 года “Matlab Code for Lyapunov Exponents of Fractional-Order Systems” в журнале International Journal of Bifurcation and Chaos и 2021 года “Coupled Discrete Fractional-Order Logistic Maps” в журнале MDPI Mathematics заведующего Кафедрой прикладной кибернетики Н.В. Кузнецова и нашего коллеги из Румынского института науки и технологий проф. М. Данки. В этих работах были предложена реализация метода вычисления показателей Ляпунова, основанного на алгоритме Бенеттина, для дифференциальных уравнений дробного порядка, а также рассмотрены разностные уравнения дробного порядка. При этом, во-первых, в тени остались вопросы, связанные с тем, в каких случаях такие дифференциальные уравнения действительно порождают динамические системы, и, соответственно, математически корректны исследования предельной динамики (аттракторов) и численная оценка предельных величин (показателей Ляпунова). Во-вторых, хорошо известно, что метод Бенеттина для расчета показателей Ляпунова не подходит для оценки ляпуновской размерности аттракторов. В качестве развития результатов статей проф. Клоедена, а также проф. Кузнецова и проф. Данки, перед Хомколовым А.В. были поставлены следующие задачи:

- 1) Исследовать вопрос порождаемости динамической системы для уравнений дробного порядка в заданных дифференциальными уравнениями (случай непрерывного времени), а

также разностными уравнениями (случай дискретного времени). Следуя идеям, изложенным в работах проф. П. Клоедена для непрерывного случая, построить эволюционный оператор динамической системы, порожденный разностными уравнениями дробного порядка.

- 2) Разработать эффективный численный алгоритм расчета траекторий системы дробного порядка для случая дискретного времени.
- 3) Следуя идеям, изложенным в работах проф. Кузнецова и проф. Данки, реализовать алгоритм расчета ляпуновских показателей, основанный на SVD разложении фундаментальной матрицы, для временных рядов, полученных из траекторий динамических систем дробного порядка в дискретном и непрерывном случаях.
- 4) Применить разработанные и реализованные алгоритмы для систем дробного порядка в дискретном и непрерывном случаях на примере систем Лоренца, Эно и логистического отображения.

Как научный руководитель, могу с радостью констатировать, что все поставленные перед Хомколовым А.В. задачи были успешно выполнены. В дальнейшем планируется исследовать вопрос диссипативности в полученных динамических системах, а также обобщить аналитический подход Г.А. Леонова к оценке ляпуновской размерности аттракторов на случай систем дробного порядка.

Работая над выпускной квалификационной работой, Хомколов А.В. проявил себя как ответственный, добросовестный, профессионально заинтересованный студент. Хочу также отметить, что результаты выпускной квалификационной работы были представлены Хомколовым А.В. на Международной студенческой конференции «Science and Progress 2021» (9-11 ноября 2021 г.), и Всероссийской научной конференции по проблемам информатики «СПИСОК-2022» (27-29 апреля 2022 г.). По итогам доклада готовится публикация.

Подытоживая все вышесказанное, считаю, что работа Хомколова А.В. удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к магистерским ВКР, и заслуживает оценки "отлично". Также мне, как научному руководителю, хотелось бы рекомендовать Хомколова А.В. к поступлению в аспирантуру (научные специальности 1.1.2. "Дифференциальные уравнения и математическая физика"; 1.2.1. "Искусственный интеллект и машинное обучение"; 1.2.2. "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ") и надеяться на продолжение совместной научной работы уже в рамках аспирантуры.

д.ф.-м.н., проф. Мокаев Т.Н.

20 мая 2022 г.