

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМ

Ахмадеев Артур Эдуардович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Алгоритмы управления подвеской автомобиля

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Сотникова М.В.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение	3
Глава 1. Постановка задачи демпфирования колебаний автомобильной подвески	5
1.1. Математическое моделирование колебаний подвески	5
1.2. Постановка задачи демпфирования колебаний	9
Глава 2. Разработка законов управления	15
2.1. Пропорциональный и пропорционально- дифференциальный регуляторы	15
2.2. Вопросы построения H_∞ -регулятора	17
2.3. Демпфирование колебаний подвески	19
Глава 3. Программный комплекс	22
3.1. Имитационное моделирование динамики подвески в среде MATLAB/Simulink	22
3.2. Реализация законов управления	23
Выводы	34
Список литературы	35

Введение

В настоящее время предъявляются высокие требования к безопасности и комфортабельности транспорта. Традиционно конструирование автомобильной подвески связано с компромиссом между тремя противоречащими между собой основными критериями: управляемость автомобиля в целом, устойчивость и комфорт пассажиров. Автомобильная подвеска обязана помогать автомобилю, производить поддержку при маневрировании и максимально изолировать пассажиров от влияния дорожных неровностей.

От свойств подвески зависит физиологическое и эмоциональное состояние пассажиров, поскольку вибрации, быстрые и резкие изменения положения тела негативно влияют на человека. Известно, что усталость напрямую зависит от изменений ускорения и частоты колебаний.

Очевидно, что оптимизация подвески для всего диапазона условий эксплуатации автомобиля, является не оптимальной в каждой из конкретных текущих дорожных ситуаций. Например, при движении на более гладкой дороге целесообразнее ездить на жесткой подвеске, хотя на дорожном покрытии преимущественно с неровностями следует требовать мягкости подвески.

Уже давно совершались попытки конструирования подвесок, которые позволяли бы управлять их характеристиками вручную или автоматически. Так, водителю может предлагаться выбор для активации одного из предложенных режимов предстоящей поездки в соответствии с ее планируемыми свойствами. Например, в подвеске “*Hydractive*”, устанавливавшихся на автомобилях *Cytroen XM*, упругость подвески регулировалась пневматическими амортизаторами. Также на автомобилях *Cadillac Catera*, *Mercedes Benz CL500* и *CL600* устанавливались либо активные, либо активно-пассивные подвески.

Активная подвеска нашла себя не только в гражданском транспорте, но

и в военной отрасли. Так, в танке *T-14* на базе *Армата* установлена активная подвеска для увеличения эффективности боевых характеристик при движении.

В настоящей работе рассматривается модель вертикальной динамики автомобиля. Объектом управления является подвеска, которая меняет собственную динамику за счет воздействия на нее актуаторов. Целью управления является демпфирование колебаний автомобильной подвески. С помощью известных подходов в теории управления выполняется синтез нескольких регуляторов. Проводится сравнение результатов моделирования с использованием указанных регуляторов между собой, а также с известными результатами по рассматриваемой тематике.

Глава 1. Постановка задачи демпфирования колебаний автомобильной подвески

Объектом управления в решаемой задаче является автомобильная подвеска. Цель управления состоит в демпфировании колебательных процессов, как в вертикальной плоскости, так и по крену и тангажу. В качестве результата должен быть получен закон управления, обеспечивающий достижение указанной цели, а также устойчивость замкнутой системы.

Рассматривается ряд задач:

- описание математической модели динамики автомобильной подвески;
- выбор функционала, характеризующего качество демпфирования колебаний подвески автомобиля;
- синтез оптимальных регуляторов.

Формально задача построения математической модели динамики автомобиля заключается в поиске системы уравнений следующего вида:

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t), g(t)). \quad (1)$$

Здесь $q(t)$ – вектор состояния, $u(t)$ – вектор силового воздействия актуаторов (управление), $g(t)$ – вектор внешних возмущений.

На формальном уровне синтез законов управления представляет собой поиск зависимости управляющего сигнала $u(t)$ от измеряемых компонент вектора состояния системы $y(t)$, т.е. поиск функции вида:

$$u(t) = u(y(t)). \quad (2)$$

1.1. Математическое моделирование колебаний подвески

Автомобильная подвеска состоит из подвешенной части и неподвешенной. Подвешенная часть характеризует кузов. Неподвешенная

часть состоит из четырех колес z_i с массой m_i , имеющих свою жесткость K_{gi} . Колеса сообщаются с кузовом при помощи амортизаторов с жесткостью K_i , демпферов с жесткостью B_i и актуаторов F_i , где $i = (\overline{1,4})$.

Кузов изображен на рис. 1 прямоугольником $(z_{r1}, z_{r2}, z_{r3}, z_{r4})$. Центр масс кузова располагается в центре прямоугольника.

Точки $z_{r1}, z_{r2}, z_{r3}, z_{r4}$ обозначают колеса, а соответствующие им массы m_1, m_2, m_3, m_4 включают в себя как массу колес, так и массу демпфирующей системы и частей мостов, примыкающих к соответствующим колесам.

Считается, что в кузове установлены акселерометр и гироскоп, которые позволяют измерять скорости вертикального смещения центра масс кузова \dot{z}_s и угловые скорости $\dot{\varphi}_s$ (по крену) и $\dot{\theta}_s$ (по тангажу).

Будем считать, что автомобиль движется прямолинейно с постоянной скоростью, колеса движутся без проскальзывания и потери контакта с дорожным покрытием.

На рис.1 представлено схематичное изображение физической модели.

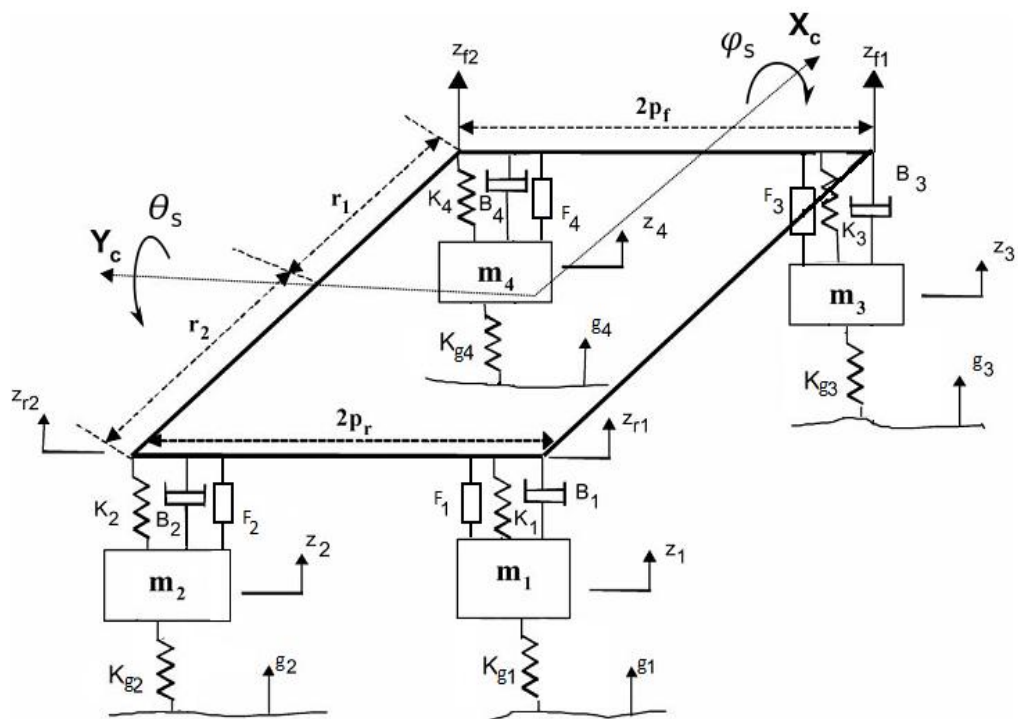


Рис. 1. Модель активной подвески.

Рассмотрим математическую модель, описывающую динамику подвески.

На основе законов теоретической механики, дифференциальные уравнения динамики подвески имеют вид [8]:

$$\begin{aligned}
 J_r \ddot{\varphi}_s &= (-B_1 p_f (\dot{z}_{r1} - \dot{z}_1) + B_2 p_f (\dot{z}_{r2} - \dot{z}_2) - B_3 p_r (\dot{z}_{r3} - \dot{z}_3) + B_4 p_r (\dot{z}_{r4} - \dot{z}_4) - \\
 &\quad - K_1 p_f (z_{r1} - z_1) + K_2 p_f (z_{r2} - z_2) - K_3 p_r (z_{r3} - z_3) + K_4 p_r (z_{r4} - z_4) + \\
 &\quad + p_f u_1 - p_f u_2 + p_r u_3 - p_r u_4) \cos \theta_s \\
 J_p \ddot{\theta}_s &= (-B_1 r_1 (\dot{z}_{r1} - \dot{z}_1) - B_2 r_1 (\dot{z}_{r2} - \dot{z}_2) + B_3 r_2 (\dot{z}_{r3} - \dot{z}_3) + B_4 r_2 (\dot{z}_{r4} - \dot{z}_4) - \\
 &\quad - K_1 r_1 (z_{r1} - z_1) - K_2 r_1 (z_{r2} - z_2) + K_3 r_2 (z_{r3} - z_3) + K_4 r_2 (z_{r4} - z_4) + \\
 &\quad + r_1 u_1 + r_1 u_2 - r_2 u_3 - r_2 u_4) \cos \varphi_s
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

На основе второго закона Ньютона динамика подвески по вертикальному смещению для каждого из колес представляется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{z}_1 &= B_1 (\dot{z}_{r1} - \dot{z}_1) + K_1 (z_{r1} - z_1) - K_{g1} (z_1 - g_1) - u_1 \\
 m_2 \ddot{z}_2 &= B_2 (\dot{z}_{r2} - \dot{z}_2) + K_2 (z_{r2} - z_2) - K_{g2} (z_2 - g_2) - u_2 \\
 m_3 \ddot{z}_3 &= B_3 (\dot{z}_{r3} - \dot{z}_3) + K_3 (z_{r3} - z_3) - K_{g3} (z_3 - g_3) - u_3 \\
 m_4 \ddot{z}_4 &= B_4 (\dot{z}_{r4} - \dot{z}_4) + K_4 (z_{r4} - z_4) - K_{g4} (z_4 - g_4) - u_4
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

То же справедливо для уравнения динамики центра масс автомобиля:

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{z}_s &= -B_1 (\dot{z}_{r1} - \dot{z}_1) - B_2 (\dot{z}_{r2} - \dot{z}_2) - B_3 (\dot{z}_{r3} - \dot{z}_3) - B_4 (\dot{z}_{r4} - \dot{z}_4) - \\
 &\quad - K_1 (z_{r1} - z_1) - K_2 (z_{r2} - z_2) - K_3 (z_{r3} - z_3) - K_4 (z_{r4} - z_4) + \\
 &\quad + u_1 + u_2 + u_3 + u_4
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Полученные дифференциальные уравнения (1.1), (1.2), (1.3) не являются замкнутыми относительно введенных переменных $\varphi_s, \theta_s, z_1, z_2, z_3, z_4, z_s$. Для того, чтобы уравнения стали замкнутыми, необходимо избавиться от переменных $z_{ri}, \dot{z}_{ri}, (i = \overline{1,4})$.

Имеют место соотношения, которые связывают переменные $\dot{z}_{ri}, z_{ri}, (i = \overline{1,4})$ и $\dot{z}_s, z_s, \dot{\varphi}_s, \varphi_s, \dot{\theta}_s, \theta_s$ (1.4). Поскольку точки $\dot{z}_{ri}, z_{ri}, (i = \overline{1,4})$ лежат в одной плоскости (рис. 1), то, зная параметры ориентации плоскости в

заданной системе координат, можно вычислить координаты для любой выбранной точки этой плоскости по формулам:

$$\begin{aligned} z_{r1} &= p_f \sin \varphi_s + r_1 \sin \theta_s + z_s, \\ z_{r2} &= -p_f \sin \varphi_s + r_1 \sin \theta_s + z_s, \\ z_{r3} &= p_r \sin \varphi_s - r_2 \sin \theta_s + z_s, \\ z_{r4} &= -p_r \sin \varphi_s - r_2 \sin \theta_s + z_s, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r1} &= p_f \dot{\varphi}_s \cos \varphi_s + r_1 \dot{\theta}_s \cos \theta_s + \dot{z}_s, \\ \dot{z}_{r2} &= -p_f \dot{\varphi}_s \cos \varphi_s + r_1 \dot{\theta}_s \cos \theta_s + \dot{z}_s, \\ \dot{z}_{r3} &= p_r \dot{\varphi}_s \cos \varphi_s - r_2 \dot{\theta}_s \cos \theta_s + \dot{z}_s, \\ \dot{z}_{r4} &= -p_r \dot{\varphi}_s \cos \varphi_s - r_2 \dot{\theta}_s \cos \theta_s + \dot{z}_s. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вводя вектор состояния \mathbf{q} , управления \mathbf{u} , внешнего возмущения \mathbf{g} можно сгруппировать однородные величины в векторы:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_s \\ \varphi_s \\ \theta_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

После подстановки (1.4), (1.5) в (1.1), (1.2) и (1.3) и тривиальных преобразований, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно введенных векторов (1.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\varphi_s, \theta_s)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\varphi_s, \theta_s)\mathbf{q} + \mathbf{\Phi}(\varphi_s, \theta_s)\sin \varphi_s + \\ + \mathbf{\Theta}(\varphi_s, \theta_s)\sin \theta_s + \mathbf{Q}(\varphi_s, \theta_s)\mathbf{u} + \mathbf{P}(\varphi_s, \theta_s)\mathbf{g} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Модель продольного профиля дороги представляет собой кусочно-заданную функцию, зависящую от натурального параметра s и характеризующую положение автомобиля на дороге. Данная функция возвращает продольное смещение в метрах относительно заданного начала

координат.

Для задания плавности профиля используются полиномы и/или тригонометрические функции.

1.2. Постановка задачи демпфирования колебаний

При $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ в системе (1.7), то есть когда управление отсутствует, подвеска является пассивной или просто неуправляемой.

В ходе воздействия на систему двух кочек высотой 0.05м (рис. 2) при скорости движения автомобиля в 30км/ч, в результате моделирования получаются процессы, представленные на рис. 3.

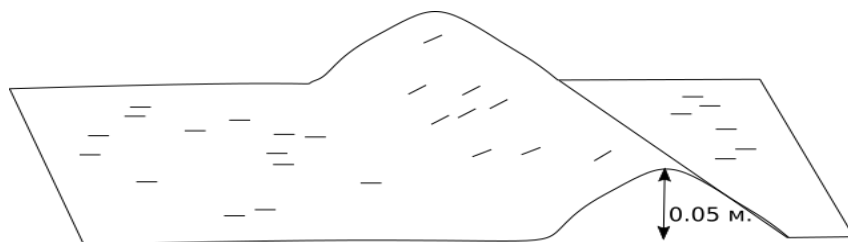


Рис. 2. Схематичное представление дорожного покрытия.

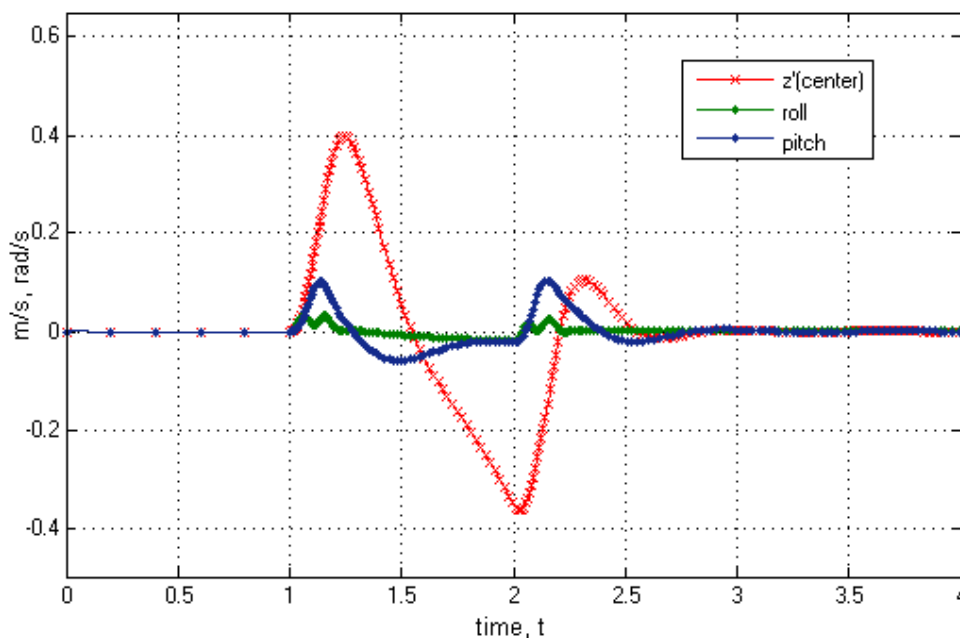


Рис. 3. Динамика пассивной подвески.

На рис. 3 на интервале времени [1,2.3] секунды происходит наезд на препятствие (рис. 2). Поскольку система возвращается в положение

равновесия, в оставшееся время процессы затухают. Как будет далее установлено, система является асимптотически устойчивой. Заметим, что дорожное покрытие не является идеально гладким, поэтому возмущающее воздействие влияет на автомобиль на всем протяжении поездки. Отсюда логично требовать синтеза такого закона управления, которое бы как можно больше стремилось демпфировать колебания замкнутой системы.

Зададимся целью демпфирования колебаний кузова автомобиля по скоростям описывающих ее компонент. Этими компонентами, согласно принятой модели, являются $\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s$. Демпфирование по переменным z_1, z_2, z_3, z_4 не имеет смысла, поскольку подвеска – необитаемая человеком часть автомобиля, и как ведет себя подвеска интереса не представляет.

Для постановки задачи демпфирования, необходимо прибегнуть к линеаризации системы. После тривиальных преобразований исходная нелинейная система (1.7) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{P}\mathbf{g} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} \end{cases} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{E}_3 \quad \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Вектор \mathbf{y} , как было оговорено выше, представлен в виде

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{z}_s \\ \dot{\phi}_s \\ \dot{\theta}_s \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

В дальнейшем, как для синтеза, так и для общего анализа необходимо построить передаточную функцию системы.

Согласно определению, передаточная матрица для линеаризованной

динамической системы имеет вид:

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B}; \mathbf{G}), \quad (1.11)$$

то есть, выполняется соотношение:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}.$$

А если представить передаточную матрицу $\mathbf{T}(s)$ в виде блочной структуры, блоки которой соответствуют управлению и внешнему возмущению соответственно, то имеет место следующая структура:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{T}_1(s); \mathbf{T}_2(s)) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Зная передаточную матрицу динамической системы, возможно изучить свойства модели. Как известно, диаграмма Бode отражает частотные свойства системы от входа к выходу в логарифмическом масштабе. Если взять первый вход от возмущения (переменная g_1) и выход по вертикальной скорости (переменная \dot{z}_s), то получится график, который представлен на рис. 4. Иными словами, на графике представлены частотные свойства системы от возмущения, подаваемого на одно из колес, к скорости вертикального смещения кузова.

Из графика видно, что в ограниченном диапазоне частот происходит усиление поступающего входного сигнала. Рассматриваемый диапазон является эксплуатируемой областью для автомобиля, поэтому необходимо это усиление устранить при помощи управления с обратной связью.

Пусть управление, согласно сказанному выше в (2), ищется в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{K}(s)$ – передаточная матрица, которая, вообще говоря, является функцией от s , но в частности $\mathbf{K}(s)$ может быть и постоянной.

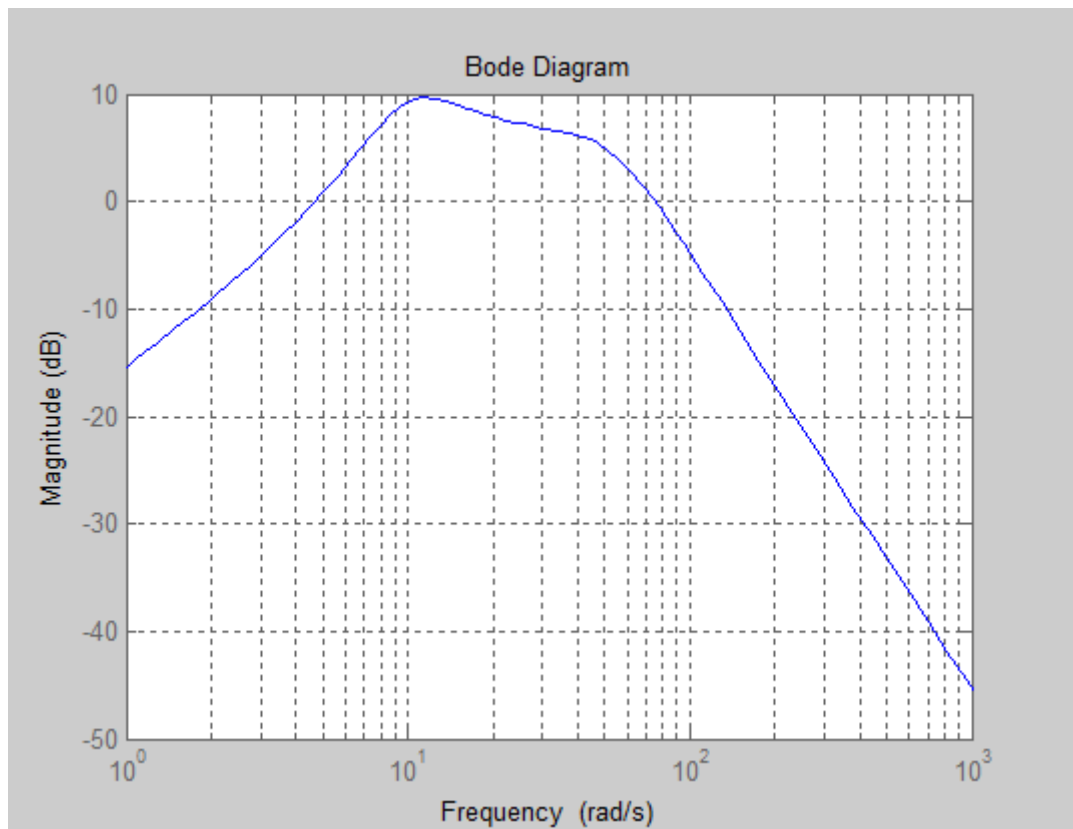


Рис. 4. Диаграмма Бode неуправляемой модели.

Если подставить (1.13) в (1.12), избавившись от переменной \mathbf{u} , то получится передаточная матрица замкнутой системы:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{T}_1(s)\mathbf{K}(s))^{-1}\mathbf{T}_2(s)\mathbf{g}. \quad (1.14.1)$$

Формула (1.14.1) определяет передаточную матрицу системы (1.8) от возмущающего воздействия к вектору измерений. Если обозначить полученную передаточную матрицу через $\mathbf{H}(s, \mathbf{K}(s))$, то (1.14.1) преобразуется к виду:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(s, \mathbf{K}(s))\mathbf{g}. \quad (1.14.2)$$

Понятно, что автомобильная подвеска эксплуатируется в фиксированном диапазоне частот по входу \mathbf{g} . Поэтому для этого диапазона частот можно требовать, например, уменьшения пика амплитудно-частотной характеристики передаточной матрицы $\mathbf{H}(s, \mathbf{K}(s))$.

Структура управления \mathbf{u} была определена в (1.13). Для синтеза законов

управления необходимо найти передаточную матрицу регулятора $\mathbf{K}(s)$. Для оценки качества демпфирования колебаний необходимо ввести некоторый функционал J .

Теперь можно формально поставить задачу демпфирования.

Необходимо произвести демпфирование колебаний автомобильного кузова по скоростям, описывающих его компонент, то есть обеспечить выполнение условий

$$\dot{\phi}_s(t) \rightarrow 0, \dot{\theta}_s(t) \rightarrow 0, \dot{z}_s(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (1.15)$$

при заданной структуре управления:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y},$$

с учетом ограничений на управление:

$$u^i = \begin{cases} u_c, & \text{если } u^i \geq u_c; \\ u^i, & \text{если } |u^i| \leq u_c; \\ -u_c, & \text{если } u^i \leq -u_c, \end{cases} \quad i = (\overline{1,4}). \quad (1.16)$$

и при заданном функционале качества $J(\mathbf{H}(s, \mathbf{K}(s)))$.

Для поиска требуемого регулятора поставим задачу минимизации:

$$J(\mathbf{H}(s, \mathbf{K}(s))) \rightarrow \min_{\mathbf{K} \in \Omega}, \quad (1.17)$$

где Ω – допустимое множество передаточных матриц регуляторов, обеспечивающих устойчивость замкнутой динамической системы.

В силу конструктивных свойств актуаторов, последние имеют ограничения вида (1.16) на величину генерируемых силовых воздействий. Поэтому во множество Ω должны входить регуляторы, удовлетворяющие данному ограничению.

Для достижения поставленных задач, необходимо:

- построить регулятор, переводящий систему в положение равновесия (1.15), отвечающий заданному ограничению (1.16) и являющийся решением задачи минимизации (1.17);

- реализовать структуру и логику требуемого управления (1.13).

Как было сказано выше, рассматриваемая задача решалась коммерческими организациями, поэтому полное решение найти не представляется возможным.

Подавляющее большинство доступных материалов по данной тематике – это рассмотрение автомобильной подвески в случае одного колеса. Так, в [2] рассматривается синтез LQR-регулятора для модели подвески одного колеса.

В статье [4] рассматривается синтез H_2, H_∞ - регуляторов для модели подвески, основанной на двух колесах. Передаточная матрица находится путем идентификации математической модели.

Работа [6] посвящена синтезу управления в форме LQR-, H_∞ - регуляторов для полной подвески автомобиля. Однако в работе представлены лишь результаты относительно LQR-регулятора, а проверка работоспособности для остальных регуляторов отсутствует. Вследствие этого далее будет предпринята попытка сравнить результаты из [6] с представленными в данной работе.

Глава 2. Разработка законов управления

В данной главе рассматриваются несколько способов приближенного решения задачи (1.17). В первом параграфе формируется пропорциональный и пропорционально-дифференциальный регулятор. Второй параграф посвящен построению регулятора на основе теории H_∞ , а в третьем параграфе рассматривается задача оптимального демпфирования колебаний подвески.

2.1. Пропорциональный и пропорционально-дифференциальный регуляторы

Пропорциональный регулятор (P-регулятор). Поставим целью построение P-регулятора, который переводит систему в нулевое положение равновесия по углам φ_s и θ_s , т.е. демпфирует колебания кузова по крену и тангажу.

Для выравнивания кузова при наезде на препятствия будем формировать закон управления вида

$$u_1 = \begin{pmatrix} K_1(g_m - g_1) \\ K_2(g_m - g_2) \\ K_3(g_m - g_3) \\ K_4(g_m - g_4) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $K_i, i = \overline{1,4}$ – настраиваемые коэффициенты, $g_m = \max(g_i), i = \overline{1,4}$.

Для перевода системы в положение равновесия по углам φ_s и θ_s построим следующее управление:

$$u_0 = K_p \begin{pmatrix} z_1 - g_m \\ z_2 - g_m \\ z_3 - g_m \\ z_4 - g_m \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где K_p – искомая диагональная матрица регулятора, а z_i – координата, описывающая точку на кузове (рис. 1).

Тогда результирующее управление имеет вид:

$$u = u_0 + u_1.$$

Матрицу коэффициентов K_p целесообразно искать в виде:

$$K_p = \arg \min_{K \in Q} u_{\max},$$

где $u_{\max} = \max(u^i), i = (\overline{1,4})$, u^i – i -ая компонента вектора u , а допустимое множество Q задается исходя из требуемого поведения исходной системы:

$$Q = \{K \mid |\dot{\phi}_s| < a_\phi, |\dot{\theta}_s| < a_\theta\}. \quad (2.3)$$

Поиск диагональной матрицы K_p будем осуществлять методом перебора по конечной сетке. При этом результирующее управление с учетом ограничений имеет вид:

$$u_i' = \begin{cases} u_i^0, & \text{если } u_i > u_i^0, \\ u_i, & \text{если } |u_i| \leq u_i^0, \\ -u_i^0, & \text{если } u_i < -u_i^0 \end{cases}, i = (\overline{1,4}). \quad (2.4)$$

Пропорционально-дифференциальный регулятор (PD-регулятор). В предыдущем пункте был рассмотрен синтез управления лишь для демпфирования по углам крена и тангажа. Однако остался нерешенным вопрос демпфирования вертикальных отклонений кузова автомобиля. Рассмотрим процедуру настройки PD-регулятора для решения этой задачи.

Пусть целью является стабилизация скорости частей кузова, соответствующих каждому из колес. Как было обозначено выше (рис. 1), эти части соответствуют компонентам $\dot{z}_{ri}, i = (\overline{1,4})$. Формально требуется обеспечить выполнение условия

$$\dot{z}_{ri}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad i = (\overline{1,4}).$$

Если перейти к уже определенным компонентам системы, то имеют место равенства (1.5). Сформируем закон управления в форме PD-регулятора следующего вида:

$$u = K_{reg} \begin{pmatrix} \dot{z}_{r1} \\ \dot{z}_{r2} \\ \dot{z}_{r3} \\ \dot{z}_{r4} \end{pmatrix} + D_{reg} \begin{pmatrix} \ddot{z}_{r1} \\ \ddot{z}_{r2} \\ \ddot{z}_{r3} \\ \ddot{z}_{r4} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Здесь диагональные матрицы коэффициентов K_{reg} и D_{reg} будем искать экспериментально методом поиска по конечной сетке.

2.2. Вопросы построения H_∞ -регулятора

Основная предпосылка использования H_∞ -регулятора состоит в том, чтобы минимизировать максимум амплитудно-частотной характеристики замкнутой динамической системы. То есть требуется построить такой регулятор, который являлся бы решением задачи минимизации:

$$\|\mathbf{H}(s, \mathbf{K})\|_\infty \rightarrow \min_{\mathbf{K} \in \Omega}. \quad (2.6)$$

Здесь $\mathbf{K}(s)$ – передаточная матрица регулятора (1.13), Ω – допустимое множество передаточных матриц регуляторов, обеспечивающих устойчивость замкнутой динамической системы.

Представим систему (1.8) как линейную систему с блочной матрицей:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где \mathbf{A} – матрица при векторе состояний, \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 – матрицы при векторе возмущения и управления соответственно; матрицы $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{21}, \mathbf{D}_{22}$ – нулевые.

Как было показано в [4], для того, чтобы построить H_∞ -контроллер

необходимо, чтобы пара $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ являлась стабилизируемой, а пара (\mathbf{C}, \mathbf{A}) – детектируемой. Чтобы выяснить, является ли система стабилизируемой и детектируемой, перейдем к канонической форме как описано в [10].

Поскольку $\text{rank}(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = k < n$, выберем k линейно-независимых векторов. После этого дополним систему до совокупности n линейно-независимых векторов. Тем самым получим матрицу преобразования \mathbf{T} .

Для системы (1.8) выполним преобразование координат

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (2.8)$$

После подстановки (2.8) в (1.8) получится система следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{g} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.9)$$

Как известно из теории управления, можно расписать структуру получившихся матриц:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 & \tilde{\mathbf{A}}_3 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\tilde{\mathbf{C}}_1 \quad \tilde{\mathbf{C}}_2],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_1 \in R^k \times R^k, \tilde{\mathbf{A}}_3 \in R^k \times R^{n-k}, \tilde{\mathbf{A}}_2 \in R^{n-k} \times R^{n-k}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_1 \in R^k \times R^m, \tilde{\mathbf{G}}_1 \in R^k \times R^m, \tilde{\mathbf{C}}_1 \in R^l \times R^k, \tilde{\mathbf{C}}_2 \in R^l \times R^{n-k}; \end{aligned}$$

в рассматриваемом случае $n=14$, $k=11$, $m=4$, $l=3$.

Система является также не полностью наблюдаемой. Ненаблюдаемой переменной является z_s . Но так как ненаблюдаемая переменная уже содержится в неуправляемой части вектора состояния, то второе разбиение можно не проводить.

Полученные пары $(\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{B}}_1)$ и $(\tilde{\mathbf{C}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_1)$ являются полностью управляемой и полностью наблюдаемой соответственно.

Система после преобразования примет окончательный вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}^{(1)} + \tilde{\mathbf{A}}_3 \mathbf{x}^{(2)} + [\tilde{\mathbf{B}}_1 & \tilde{\mathbf{G}}_1] \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{A}}_2 \mathbf{x}^{(2)}, \\ \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{C}}_1 \mathbf{x}^{(1)} + \tilde{\mathbf{C}}_2 \mathbf{x}^{(2)} + \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{g}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Поскольку матрица $\tilde{\mathbf{A}}_2$ – гурвицева, то неуправляемая часть системы (2.10) является асимптотически устойчивой. Отсюда следует, что возможно подобрать стабилизирующее управление [5]. В результате, на основе уравнений (2.10), было установлено, что неуправляемыми, но стабилизируемыми компонентами являются z_s, φ_s, θ_s .

В [4] было рассмотрено построение H_∞ -контроллера. В данной работе синтез H_∞ -регулятора выполняется с использованием стандартных методов пакета MATLAB.

2.3. Демпфирование колебаний подвески

Пусть задана управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Gg} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (2.11)$$

Пусть задана начальная точка \mathbf{x}^0 и момент времени t_0 . Тогда каждому управлению $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ отвечает движение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{u}, \mathbf{g}, \mathbf{x}^0, t^0), \quad (2.12)$$

проходящее через точку \mathbf{x}^0 при $t = t_0$. Пусть S – некоторая поверхность в пространстве переменных t, x_1, \dots, x_n задаваемая уравнением

$$S(t, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Задача управления состоит в наискорейшем достижении поверхности S .

Пусть задана функция $V(t, x_1, \dots, x_n)$, характеризующая расстояние от движущейся точки до желаемого конечного состояния на поверхности S .

Целью управления является уменьшение этого расстояния.

Необходимо вычислить значение функции V на движении (2.12) и найти полную производную по t от полученной функции. Получается

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s = W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.13)$$

Поскольку демпфирование проводится по переменным $\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s$, то будем формировать функцию V в следующем виде $V = V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)$.

Пусть функцией V является евклидова норма:

$$V = \sqrt{a_1 \dot{z}_s^2 + a_2 \dot{\phi}_s^2 + a_3 \dot{\theta}_s^2} \quad (2.14)$$

где числовые параметры a_1, a_2, a_3 – это неотрицательные весовые коэффициенты при переменных $\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s$

Поскольку функция (2.14) характеризует степень близости компонент $\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s$ к нулю, то введем некоторую малую окрестность нулевого положения равновесия по указанным компонентам. Это нужно для того, чтобы можно было отключить управление при выполнении ограничения

$$\sqrt{a_1 \dot{z}_s^2 + a_2 \dot{\phi}_s^2 + a_3 \dot{\theta}_s^2} < \varepsilon \quad (2.15)$$

Далее, необходимо найти управление \mathbf{u}^c , которое минимизирует (2.13). Для этого следует выписать функцию $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ в явном виде:

$$W = \frac{a_1 \dot{z}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} (A_{\dot{z}_s} z + B_{\dot{z}_s} u + G_{\dot{z}_s} g) + \frac{a_2 \dot{\phi}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} * \\ * (A_{\dot{\phi}_s} z + B_{\dot{\phi}_s} u + G_{\dot{\phi}_s} g) + \frac{a_3 \dot{\theta}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} (A_{\dot{\theta}_s} z + B_{\dot{\theta}_s} u + G_{\dot{\theta}_s} g) \quad (2.16)$$

От управления в (2.16) зависят только строки матрицы \mathbf{B} из (1.9), соответствующие компонентам $\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s$. Поэтому остальные слагаемые можно опустить, поскольку они не будут влиять на искомое решение.

После тривиальных преобразований, получим:

$$W \propto \sum_{i=1}^4 u_i \left(\frac{a_1 \dot{z}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} B_{\dot{z}_s}^i + \frac{a_2 \dot{\phi}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} B_{\dot{\phi}_s}^i + \frac{a_3 \dot{\theta}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} B_{\dot{\theta}_s}^i \right). \quad (2.17)$$

Индексы в $B_{\dot{z}_s}^i, B_{\dot{\phi}_s}^i, B_{\dot{\theta}_s}^i$ обозначают i -ую компоненту рассматриваемых строк.

Тогда, искомый закон управления, с учетом ограничений (2.3) и с учетом структуры (2.17), имеет вид:

$$u_i^c = -\text{sign} \left(\frac{a_1 \dot{z}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} B_{\dot{z}_s}^i + \frac{a_2 \dot{\phi}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} B_{\dot{\phi}_s}^i + \frac{a_3 \dot{\theta}_s}{V(\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s)} B_{\dot{\theta}_s}^i \right) u^0, \quad (2.18)$$

$$i = (\overline{1,4})$$

Глава 3. Программный комплекс

3.1. Имитационное моделирование подвески в среде MATLAB/Simulink

Модель в системе Simulink состоит из набора связанных между собой блоков. В данной модели присутствует блок («Suspension model»), который описывает модель подвески (1.7), а также содержится блок, производящий генерацию дорожного профиля («Disturbances»). На рис. 5 представлена модель пассивной подвески автомобиля.

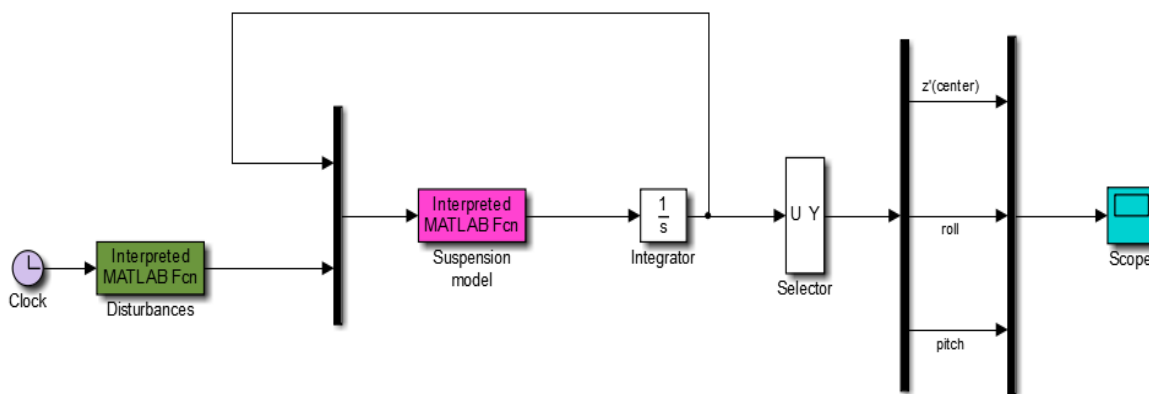


Рис. 5. Модель пассивной подвески автомобиля.

Также будет рассматриваться Simulink-модель, соответствующая управляемой системе. На рис. 6 представлены управляемая («Active model») и неуправляемая модели («Passive model»). Структура данной модели будет одинаковой для всех видов законов управления. Изменения могут происходить в блоке, соответствующему конкретному закону управления.

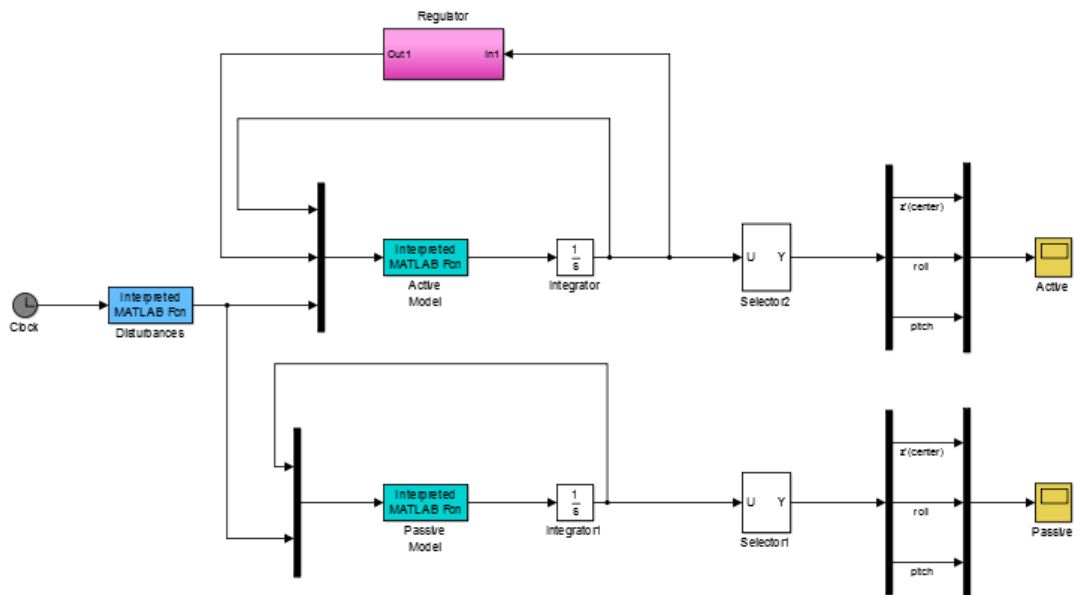


Рис. 6. Модели активной и пассивной подвесок.

3.2. Реализация законов управления

Пропорциональный регулятор. Как было установлено в (2.1), для устойчивости кузова целесообразно в качестве K_i выбирать значения жесткостей пружин.

Оптимальный коэффициент K_p из (2.2) был установлен как $K_p = 1000$.

На рис. 7 и 8 представлены траектории компонент $\dot{z}_s, \dot{\phi}_s, \dot{\theta}_s$.

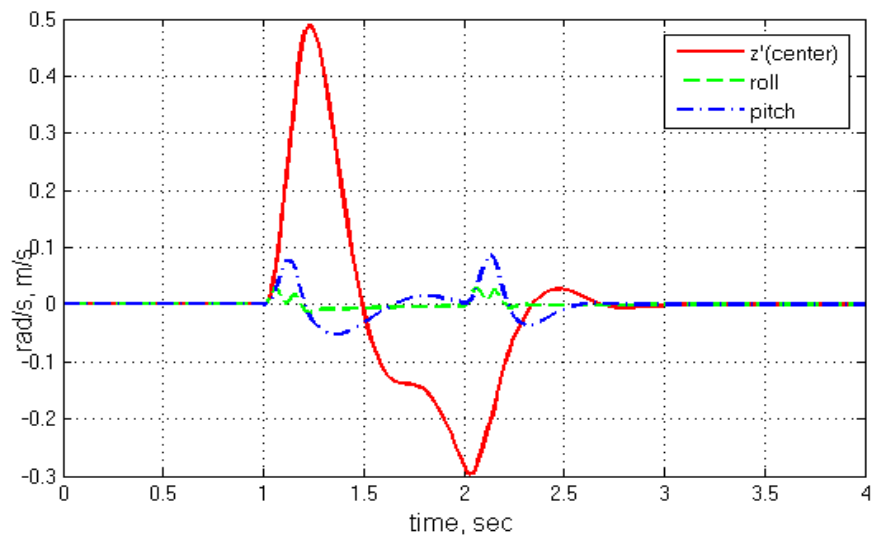


Рис. 7. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели.

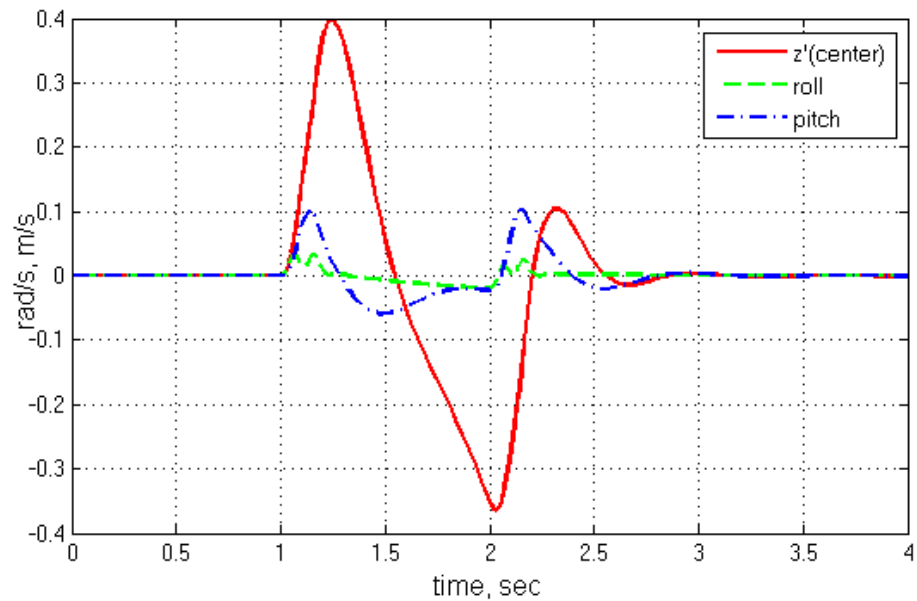


Рис. 8. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

Из рисунков видно, что для обоих случаев корпус автомобиля резко отвечает на наезжаемые препятствия, однако для угловых скоростей в управляемой модели картина выглядит лучше: демпфирование по крену и тангажу улучшилось. Уменьшился также процесс демпфирования движения по времени, по сравнению с неуправляемым случаем.

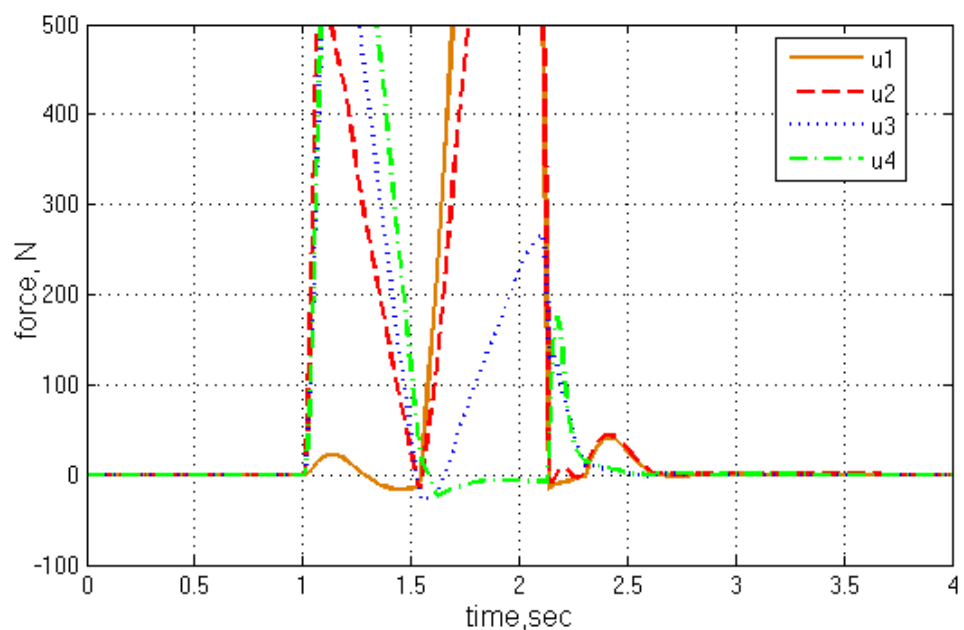


Рисунок 9. График величин сигналов управления при использовании пропорционального регулятора.

PD-регулятор. Основной момент – это нахождение K_{reg} и D_{reg} из (2.5).

При варьировании коэффициентов по конечной сетке в диапазоне параметров $[-10^6, 10^6]$, было установлено оптимальное значение коэффициентов. Они равны соответственно

$$K_{reg} = \begin{pmatrix} -10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10^5 \end{pmatrix}, \quad D_{reg} = \begin{pmatrix} -10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10^2 \end{pmatrix}.$$

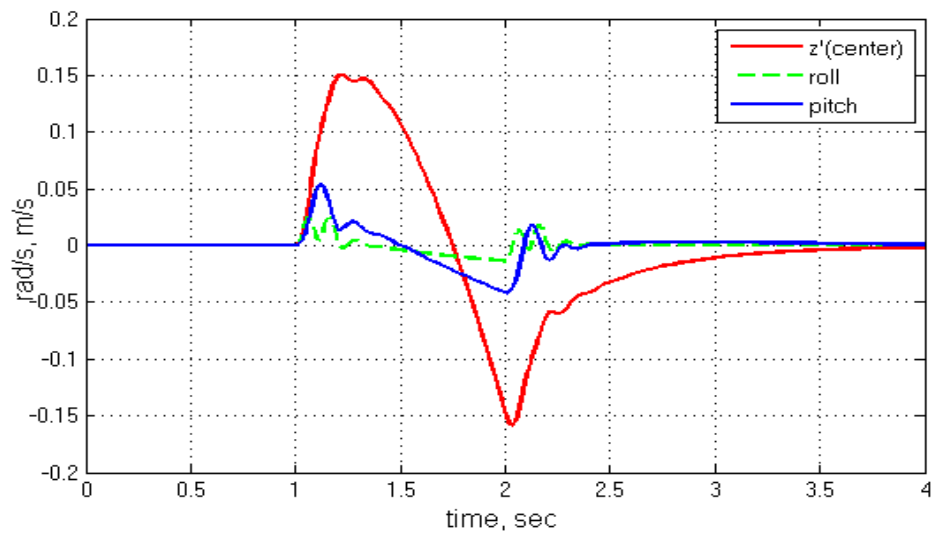


Рис. 10. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели.

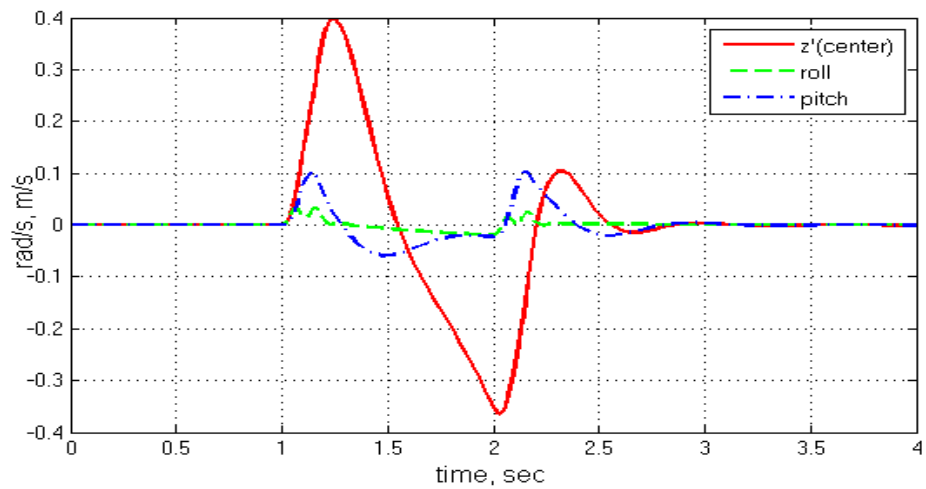


Рис. 11. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

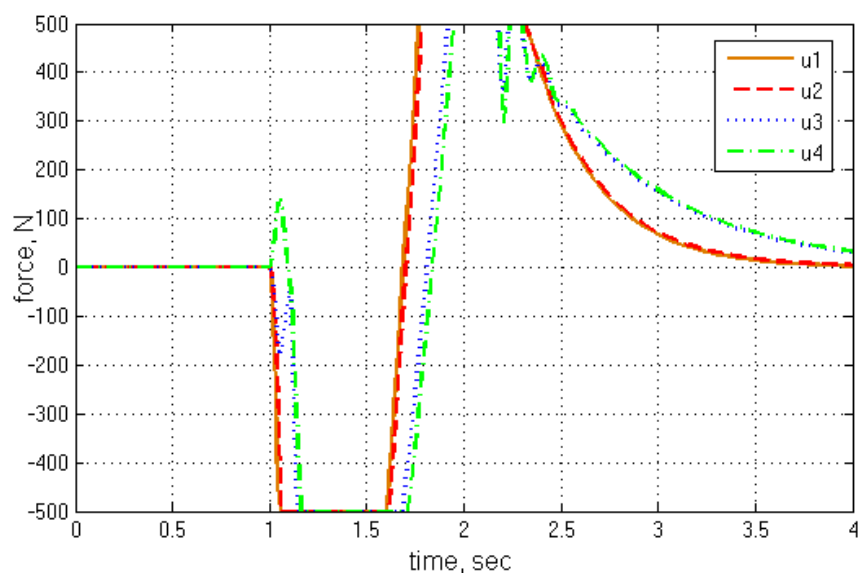


Рис. 12. График величин сигналов управления при использовании пропорционально-дифференциального регулятора.

При использовании данного регулятора улучшились показания как по вертикальной скорости смещения, так и по крену и тангажу. Можно заметить, что демпфирование по углам в управляемой модели уменьшилась на полсекунды, но пришлось пожертвовать демпфированием по скорости вертикального смещения. Но это выглядит не так плохо, поскольку в момент $t = 2$ секунды стремится малыми колебаниями к нулю, однако в неуправляемой модели наблюдается перерегулирование.

H_{∞} -регулятор. Как было сказано ранее, благодаря [4], имеется возможность построения H_{∞} -контроллера, решающего задачу (2.6).

Если сравнивать H_{∞} -регулятор с P- и PD-регуляторами, то можно заметить некоторые различия. H_{∞} -регулятор демпфирует одновременно по всем требуемым переменным, когда в двух последних регуляторах порой происходит усиление одного(нескольких) из сигналов за счет уменьшения сигнала других(другого).

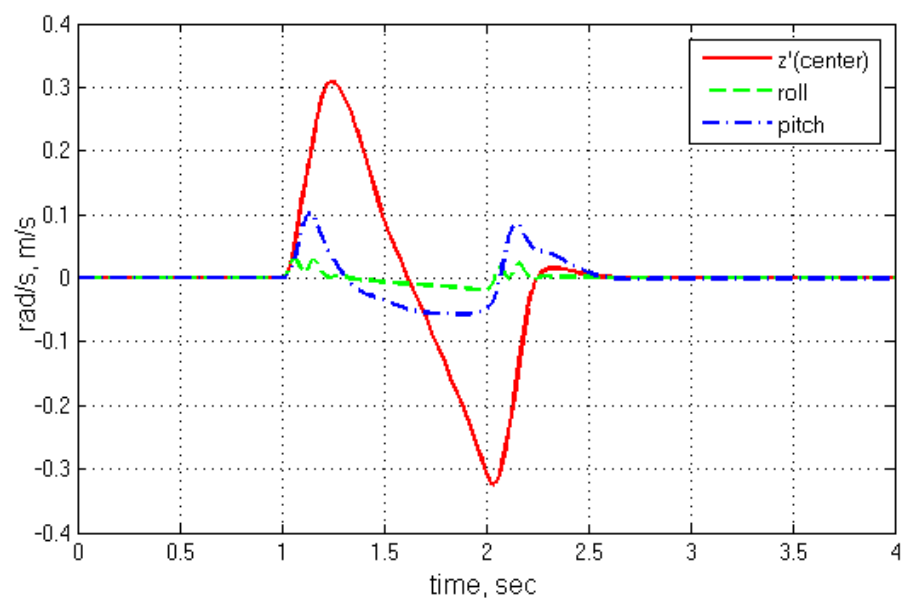


Рис. 13. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели.

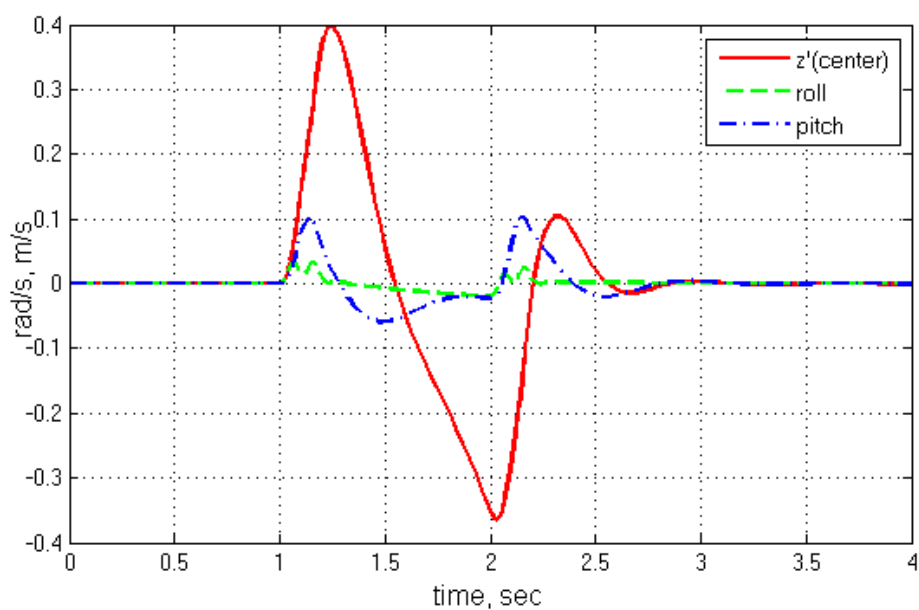


Рис. 14. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

В моделировании управления на базе используемого регулятора было учтено ограничение по управлению. Можно увидеть на рис. 15, что в интервале времени $[1, 1.5]$ секунды происходит наезд на препятствия. В этот промежуток подвеска смягчается. В интервале $[1.5, 2]$ секунды происходит съезд с препятствий, а соответствующее этому временному промежутку

управление делает подвеску жестче, чтобы наискорейшим образом демпфировать кузов.

Отработка актуаторов изображена на рис. 15.

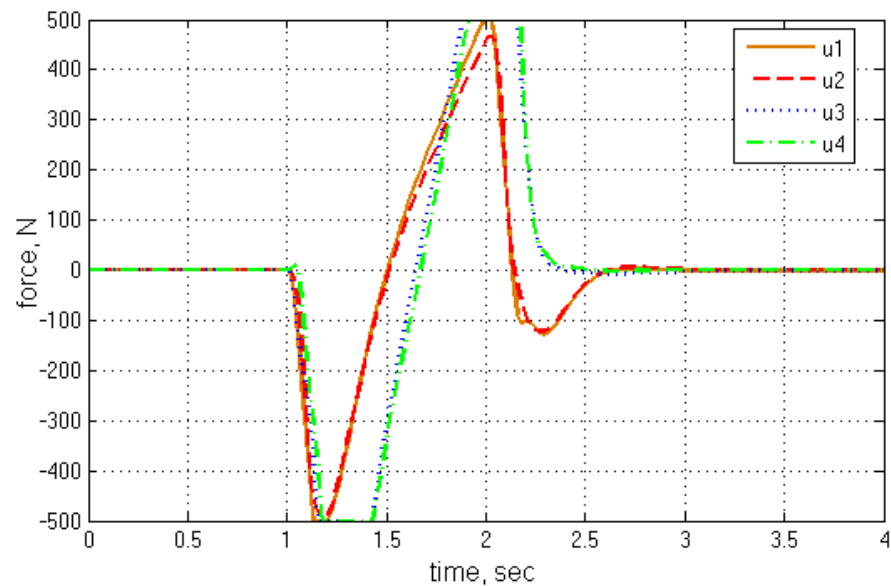


Рис. 15. График величин сигналов управления при использовании H_∞ -регулятора.

Демпфирование колебаний кузова. Из структуры формулы (2.18) видно, что управление может принимать только три значения.

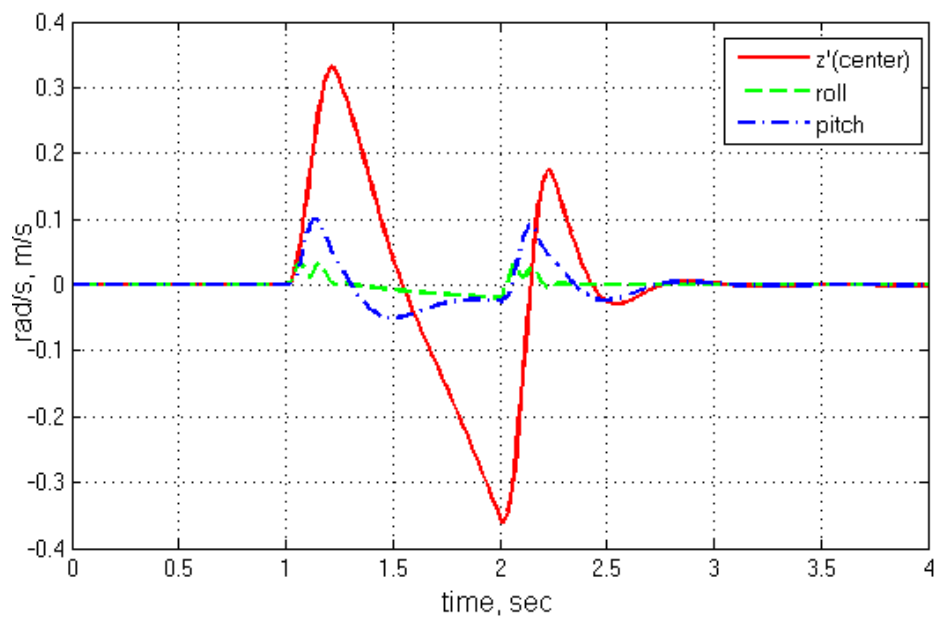


Рис. 16. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели.

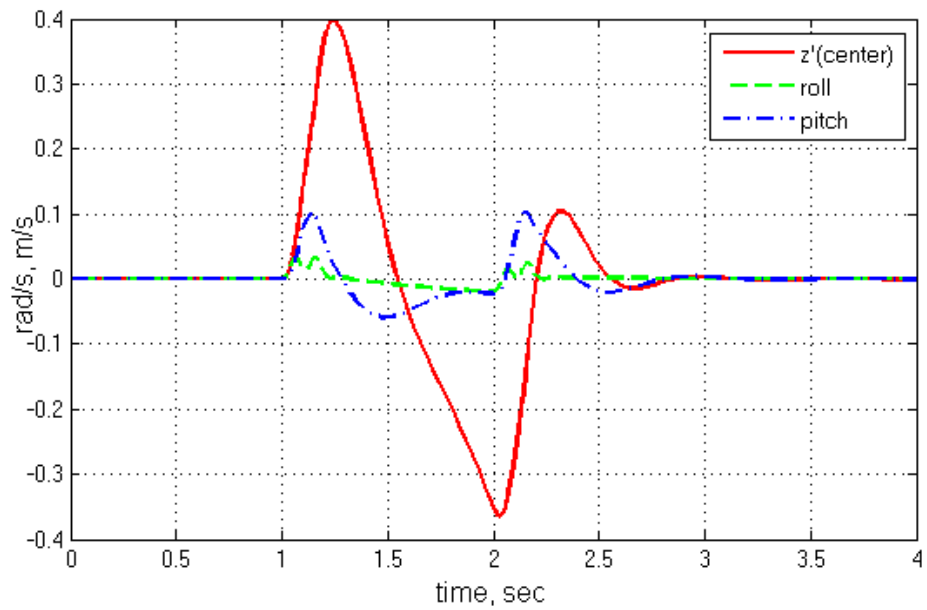


Рис. 17. График изменения вертикальной скорости центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

Значение ε из (2.15) было взято в качестве $\varepsilon = 0,015$.

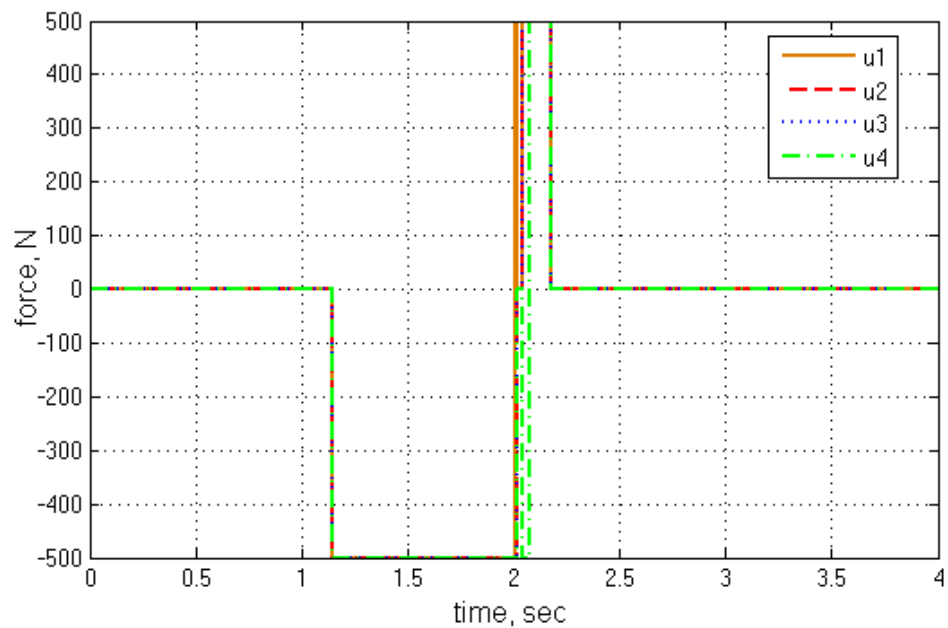


Рис. 18. График величин сигналов управления.

Управление (2.18) является импульсным. Для актуаторов этот аспект несет разрушительный характер - за короткий промежуток времени им придется менять состояние в широком диапазоне значений. Другой аспект –

это произвольность подбора функции расстояния V .

В работе [6] были представлены результаты моделирования при использовании LQR-регулятора. Функция внешних возмущений в работе представлена в виде (3.1).

$$g(t) = \begin{cases} a(1 - \cos 8\pi t) & 0.5 \leq t \leq 0.75 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (3.1)$$

При использовании пропорционального регулятора получаются следующие траектории движения кузова (рис. 19) и (рис. 20).

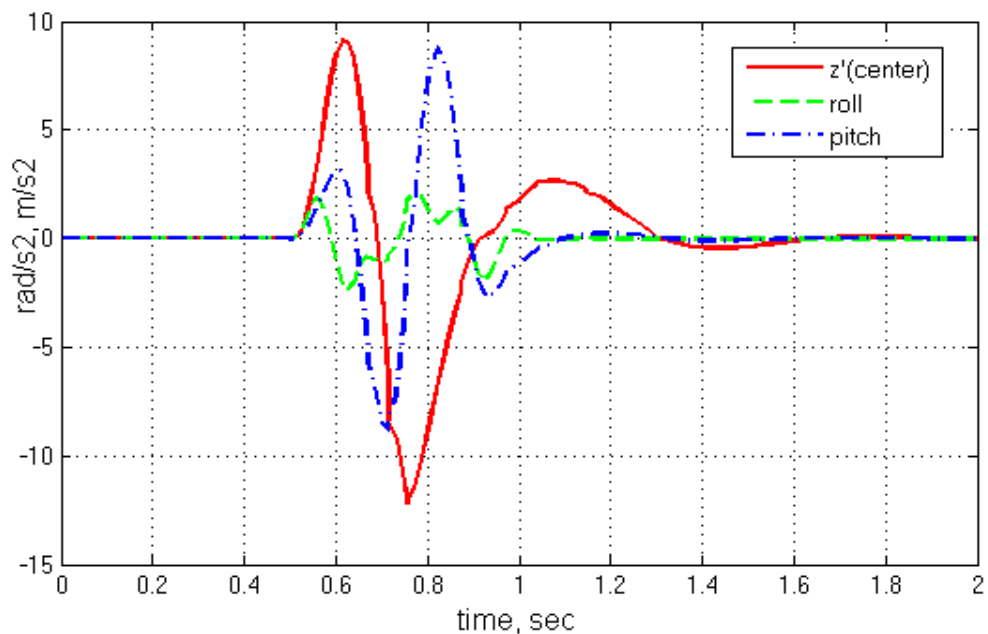


Рис. 19. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели.

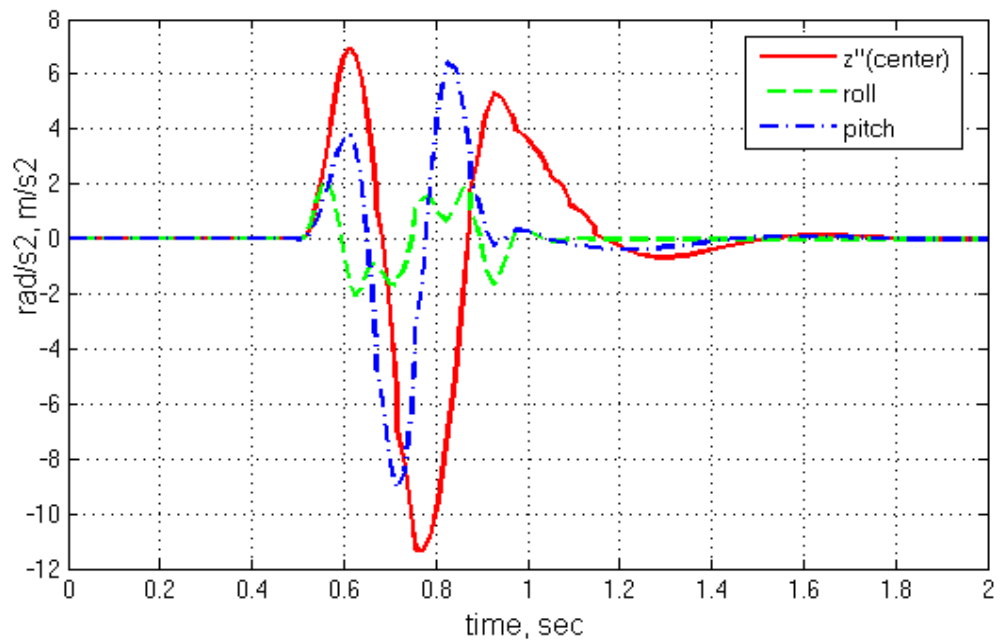


Рис. 20. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

Использование пропорционально-дифференциального регулятора. Моделирование автомобильной подвески при использовании данного регулятора показывает хорошее демпфирование по всем трем рассматриваемым компонентам.

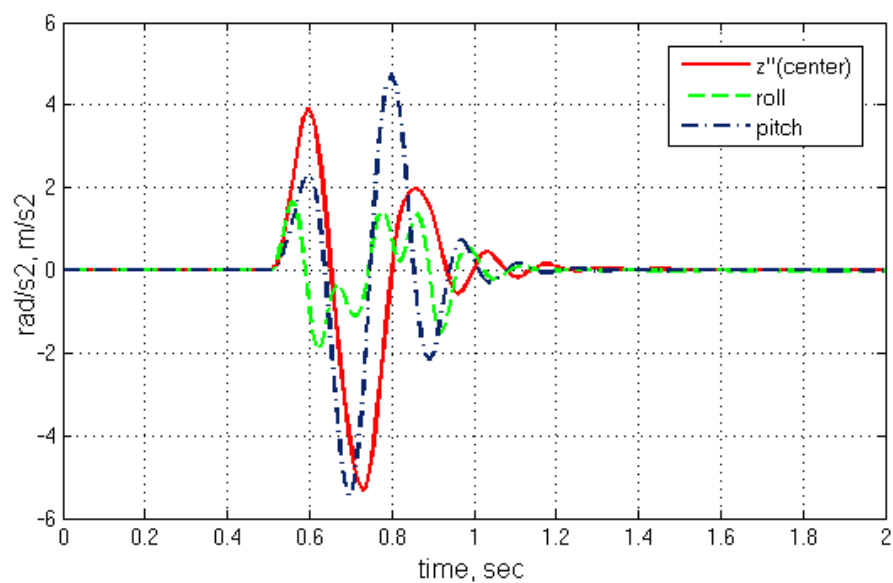


Рис. 21. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели при использовании пропорционального регулятора. Сходимость к положению равновесия по сравнению с неуправляемой

моделью происходит заметно быстрее (рис. 21 и рис.22).

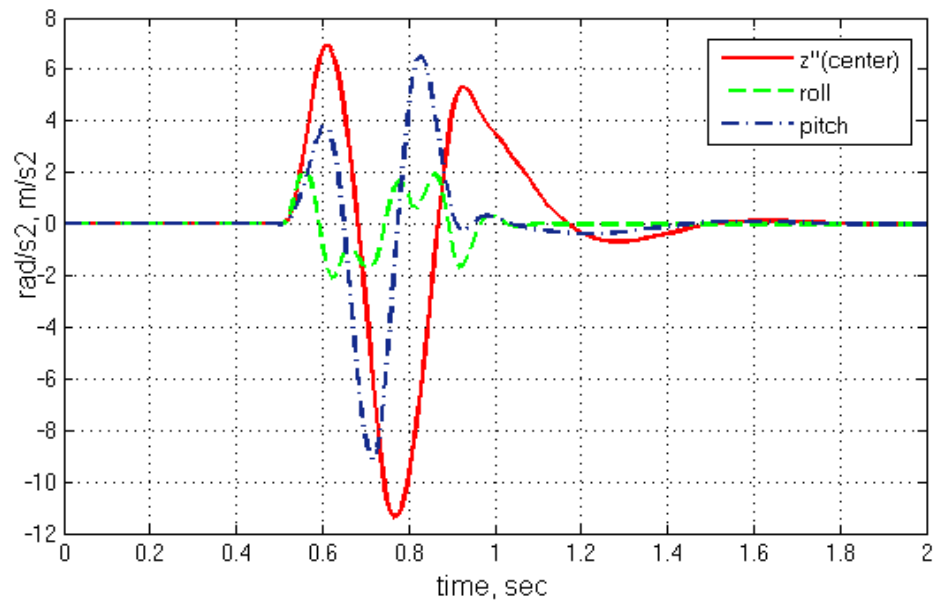


Рис. 22. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

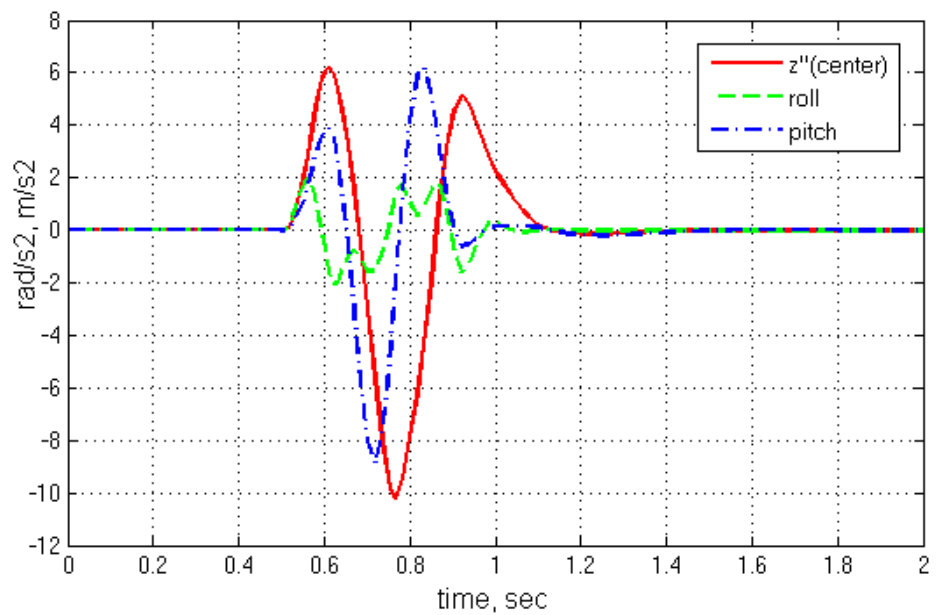


Рис. 23. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели при использовании пропорционально-дифференциального регулятора.

Использование H_∞ -регулятора. В результате моделирования было замечено демпфирование по всем трем переменным, но в меньшей степени

по сравнению с пропорционально-дифференциальным регулятором.

Замечено, что демпфирование по тангажу лучше в неуправляемом случае (рис. 23 и рис. 24).

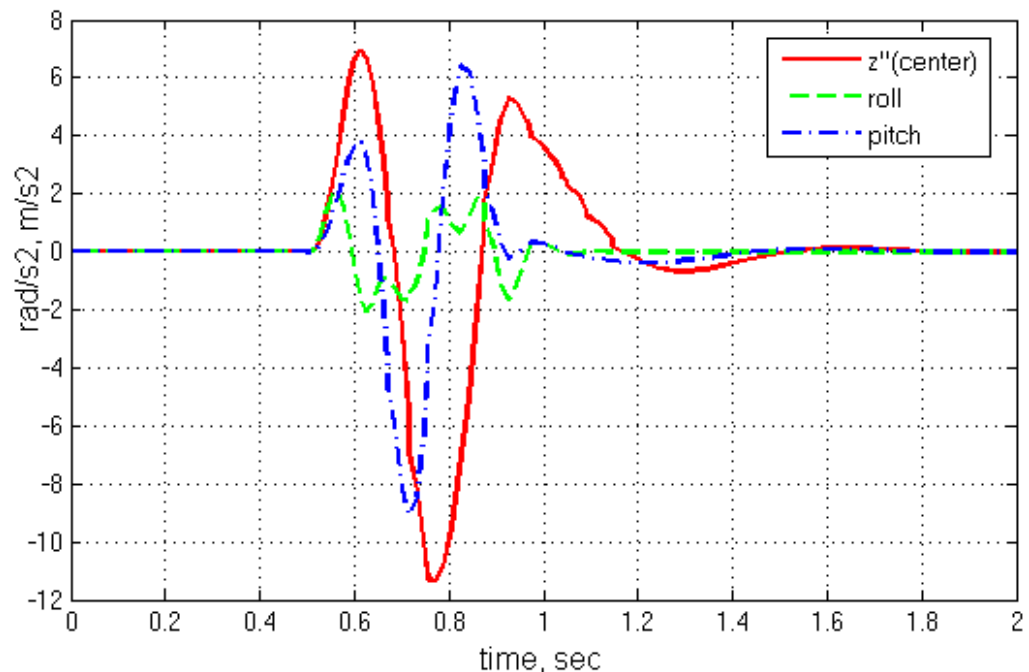


Рисунок 24. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

Использование регулятора, реализующего демпфирование кузова автомобиля. Как оказалось, худший результат выявлен при моделировании с использованием регулятора, реализующего демпфирование кузова (рис. 25). Модель при использовании регулятора ведет себя очень резко на наезжаемые неровности: наблюдается усиление входного сигнала. Поскольку возмущения имеют широкий спектр значений, необходимо функцию $V(x)$ (2.14) и значение ε (2.15) настраивать под ограниченный диапазон значений возмущения.

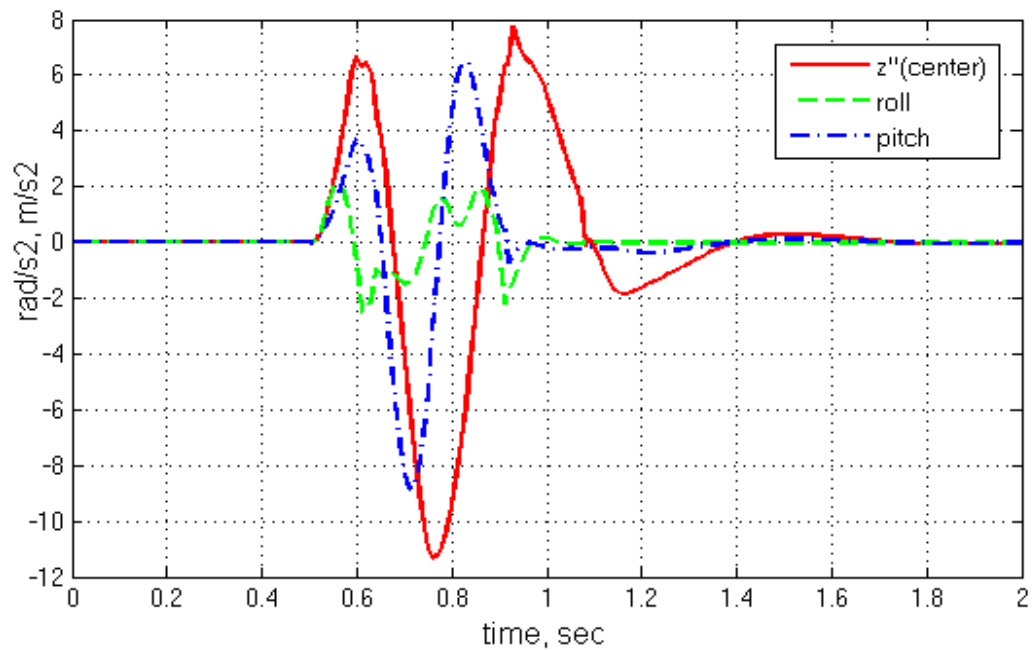


Рис. 25. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае управляемой модели при использовании регулятора, реализующего демпфирование колебаний кузова.

Как видно из двух серий экспериментов, лучший результат показал пропорционально-дифференциальный регулятор. После него можно отметить H_∞ -регулятор, а последнюю позицию делят между собой пропорциональный регулятор и регулятор, реализующий демпфирование кузова.

В целом, сравнивая полученные результаты с представленными в работе [6], можно заметить, что разработанные пропорционально-дифференциальный регулятор и H_∞ -регулятор обладают более лучшими демпфирующими свойствами относительно LQR-регулятора.

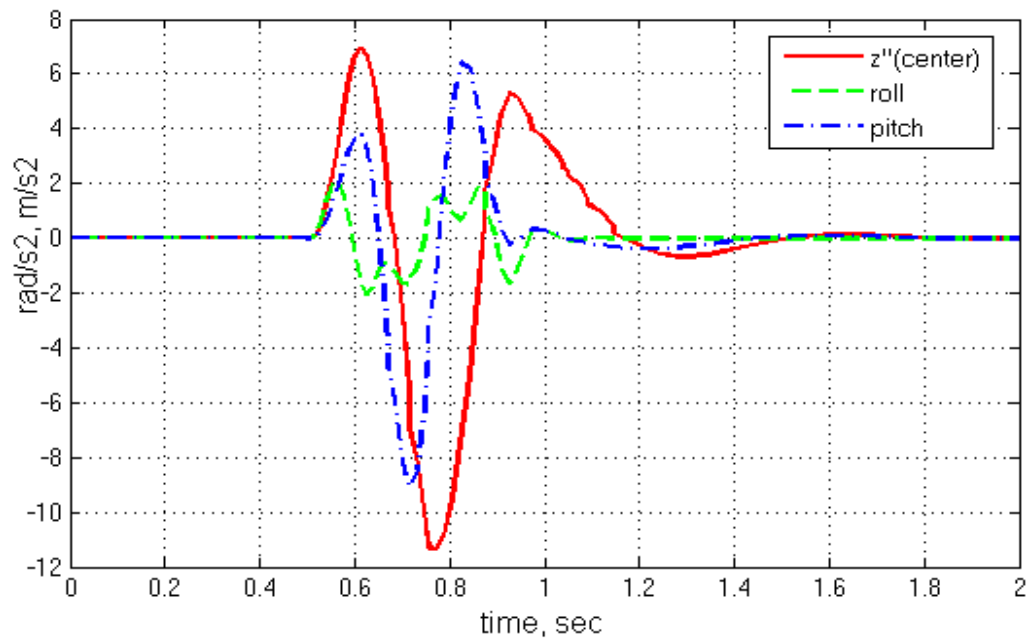


Рис. 26. График изменения вертикального ускорения центра масс, крена и тангажа кузова в случае неуправляемой модели.

Пропорционально-дифференциальный и H_∞ -регулятор являются более универсальными. Два оставшихся регулятора качественно демпфируют при небольших частотах по входному возмущению.

Выводы

При выполнении работы были получены следующие результаты:

1. разработана математическая модель продольной динамики автомобильной подвески;
2. синтезированы пропорциональный и пропорционально-дифференциальный регуляторы;
3. построен регулятор, демпфирующий колебания кузова;
4. рассмотрен вопрос о построении H_∞ -регулятора;
5. проведено сравнение результатов имитационного моделирования при использовании регуляторов, построенных в данной работе, с иными результатами, имеющимися по данной тематике;

В будущем предполагается рассмотреть модель в более детальном виде: отрыв колеса от поверхности, учет изменения скорости движения и учет физики поворота.

Список литературы

1. H. Imine, Y. Delanne, N.K. M'Sirdi. Road profile input estimation in vehicle dynamics simulation // Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility, 2006, 44:4, P. 285-303.
2. Sam Y.M., Ghani M.R.A and Ahmad, N. LQR Controller for Active Car Suspension // IEEE Control System. 2000. P. 1441-1444
3. Shariati A., Taghirad H.D. & Fatehi A. Decentralized Robust H_∞ Controller Design for a Full Car Active Suspension System Control. University of Bath, United Kingdom. 2004, ID-216, P. 1-5.
4. John C. Doyle, Keith Glover, Pramod P. Khargonekar, Bruce A. Francis. State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems.// IEEE Transactions on automatic control, vol. 34. No 8. August 1989, P. 831-847.
5. Anantha Karthikeyan and Michael G. Safonov. Simplified Matrix Pencil All-Solutions H_∞ Controller Formulae.// SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, Vol. 1, No. 2, March 2008, P. 1-6.
6. Rosheila Binti Darus. Modeling and control of active suspension for a full car model. A project report submitted in partial fulfillment of the requirements for the award of the degree of Master of Engineering (Electrical – Mechatronics and Automatic Control). 2008.
7. В.И. Зубов. Лекции по теории управления. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1975, стр. 127-130.
8. Н.Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики (часть первая). Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1972, 486 стр.
9. MATLAB function “hinfsv”.
<http://mathworks.com/help/robust/ref/hinfsv.html>
10. P.E. Moraal, J.W. Grizzle. Asymptotic Observers for Detectable and Poorly Observable Systems. //Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control New Orleans, LA - December 1995, P. 1-7.