

Санкт–Петербургский государственный университет

*ДАНИЛОВА Марина Юрьевна*

Выпускная квалификационная работа  
*Математическая модель биоразнообразия при  
антропогенном давлении*

Уровень образования: Магистратура

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа ВМ.5754

«Математические методы цифровизации экономики»

Научный руководитель:

профессор, кафедра вычислительных методов механики  
деформируемого тела, д.ф. - м.н. Колпак Евгений Петрович

Рецензент:

доцент, ЛИТМО, к.ф.-м.н. Иванов Сергей Евгеньевич

Санкт-Петербург

2022 г.

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Цель работы</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Обзор проблемы экологического ущерба</b> . . . . .	5
1.1. Типы воздействия на окружающую среду горного производства . . . . .	5
1.2. Критерии оценки экологической обстановки территории .	7
1.3. Аккумуляции тяжёлых металлов в организме моллюсков .	9
1.4. Загрязнение атмосферы Карабаша . . . . .	10
1.5. Загрязнение территории . . . . .	12
1.6. Оценка затрат на восстановление территории . . . . .	14
1.7. Решение проблемы . . . . .	16
<b>Глава 2. Математические модели</b> . . . . .	17
2.1. Модель хищник-жертва . . . . .	17
2.2. Модель хищник-жертва на линейном ареале . . . . .	20
2.2.1 Численное решение . . . . .	20
2.3. Модель антропогенного давления . . . . .	22
<b>Выводы</b> . . . . .	26
<b>Список литературы</b> . . . . .	28

## Введение

Благодаря технологическому прогрессу человечество приобрело невероятные умения, но, к сожалению, не научилось ими грамотно распоряжаться, из-за чего социальные, экологические проблемы стали глобальными, а изменение окружающей среды - жестокой реальностью. Если продолжать игнорировать экологический кризис, то в конечном итоге мир получит глобальную катастрофу, поэтому критически важно объединить усилия всем странам для предотвращения этой трагедии. В Челябинской области находится небольшой (население 10 756 человек), но печально известный город - Карабаш. Возник он в начале XIX в. на месте пос. Саймоновский как центр добычи россыпного золота. Некоторое время спустя, после открытия медноколчеданных руд, здесь основали медеплавильное производство и до 1989 года оно безостановочно расширялось. Были периоды, когда карабашская медь составляла половину всей российской добычи. Начиная с XX в. на производстве освоили новые технологии по переработке полиметаллических руд, извлекая из них драгметаллы, свинец и цинк. Эти новшества повлекли за собой сильное увеличение объемов переработки. Горно-металлургический комбинат с начала основания и на протяжении почти двух столетий развивался и расширялся, при этом не акцентируя внимания на защите и сохранении окружающей среды, что в конце XX века обернулось экологической катастрофой для нашей страны. Градообразующим предприятием вплоть до 1998 г. было ОАО «Карабашский медеплавильный комбинат», на котором к моменту 1995 г. заняты 1 084 человека, здесь изготовлялось до 2,31 тысяч тонн сплавов меди, до 1,77 тысяч тонн медного штейна и не менее 14 млн тонн гранулированного шлака. На сегодня главным загрязнителем природы является медеплавильный комбинат ЗАО «Карабашмедь», с момента выпуска черновой меди на базе бывшего Карабашского медеплавильного комбината (1998 г). Из-за выбросов, сбросов этого предприятия изменения настигли все природные среды и твердые отходы создали новую техноприродную среду, заменившую природные экосистемы.

## Цель работы

- Анализ экологической обстановки в окрестности АО «Карабашмедь»
- Разработка математических моделей взаимодействующих популяций на загрязненной территории
- Оценка возможных вариантов решения проблемы на основе теоретических результатов оценки динамики сегодняшнего ущерба на длительном временном интервале не только на экономику, но и на биоразнообразие.
- Численная оценка возможных распределений жертв и хищников с учетом различных факторов антропогенного давления

# Глава 1. Обзор проблемы экологического ущерба

## 1.1 Типы воздействия на окружающую среду горного производства

### Прямые

- Сокращение полезной площади
- Нарушение почвенного покрова
- Уничтожение растений
- Создание техногенных форм рельефа
- Деформация грунтов и земной коры

### Косвенные

- Изменение режима грунтовых вод
- Загрязнение атмосферы токсикантами
- Загрязнение поверхностных и подземных вод
- Подтопление и заболачивание
- Повышение уровня заболеваний населения

Проведем анализ типов воздействия на окружающую среду. Оно бывает прямым (непосредственно влияющим) и косвенным (как следствие прямых воздействий). Зона прямого воздействия на среду значительно меньше косвенного, так как косвенные направлены не только на экосистему (которая попадает под прямое влияние), а также и на другие составляющие. В следствие работы горных производств быстро появляются отвалы пород и отходов, которые представляют из себя бесплодные пространства, плохо влияющие на окружающую природу. В атмосферу попадают пылегазовые выбросы и выделения от горных отвалов, отработок, а также отходов с цехов и фабрик по переработке. Медные предприятия влекут за собой большое количество выбросов диоксида серы ( $SO_2$ ), частиц тяжелых металлов

в окружающую среду. SO<sub>2</sub> занимает одно из лидирующих мест в списке загрязняющих веществ по отрицательному влиянию на атмосферу. Аэрозоли, газ, пыль - в таком виде тяжелые металлы попадают в воздух. Размеры аэрозолей цинка, меди, свинца, кадмия сравнимы с частицами диаметром 0,5–1 мкм, а кобальта и никеля - 1 мкм и более. Крупные частицы (более 2 мкм) оседают на растения, воду и почву. Соединения тяжелых металлов сохраняют свои вредоносные свойства всегда, не смотря на формы. Любые, даже самые маленькие частицы тяжелых металлов губительно влияют на здоровье людей. В директиве ЕС 2004/107 до сих пор не установлен нижний порог содержания металлов в воздухе, не представляющий вреда человеку и природе. Поэтому любое загрязнение атмосферы тяжелыми металлами является колоссальной угрозой для экосистемы.

## 1.2 Критерии оценки экологической обстановки территории

**Атмосферный воздух.** Когда объемы производства Карабашского медеплавильного комбината были максимальны (до 1989 года) в воздух каждый год выбрасывалось около 170 тысяч тонн пыли и газа, 90% - диоксид серы. Также в выбросах был свинец - 1,25 т., медь - 1,4 т., цинк - 2,5 т., мышьяк - 1 т. По приблизительным оценкам за время существования завода в атмосферу попало до 12 млн тонн вредоносных вещества. Учитывая особый ветровой режим тех районов, практически все выбросы так или иначе осели на ближайших территориях.

**Почва и растительность.** Отрицательными факторами воздействия в г. Карабаш и близлежащих районах являются: чрезмерная вырубка лесов, осаждение частиц твердых металлов, накопление твердых отходов производства. В местах скопления отходов комбината (в отвалах и хранилищах) находится около 27 млн тонн дисперсных минеральных веществ - шлаков. В окрестностях р. Сак-Элга находится большой объем (площадь - около 2,5 км) пиритсодержащих хвостов, которые появились в следствие горного производства. В этой колчеданной залежи сосредоточено множество тяжелых металлов и химических элементов: цинк, мышьяк, таллий, германий, осмий, селен, теллур, сурьма, барий, кадмий, скандий, индий, галлий, ртуть, осмий. Данные скопления хранятся без специальной подготовки поверхности, что влечет за собой загрязнение подстилающих грунтов, грунтовых вод, уничтожение растительности. Площади, заполненные твердыми отходами являются косвенными источниками загрязнения подстилающих массивов и превратились в токсичные пустыри. Все губительные факторы, описанные выше, стали фатальными для окружающей среды в городе Карабаш и его окрестностях. Прекратилось природное восстановление всей растительности и произошла гибель некоторых видов. После исчезновения дерновой защиты, на почвы обрушилась сильная эрозия, так на г. Золотой в некоторых местах почва отсутствует вовсе. Почвы, оставшиеся в окрестностях комбината приравниваются к «экологическому бедствию» по содержанию тяжелых металлов. В зону бедствия производства входят не только

близлежащие леса, но и жилые массивы. Так загрязнение затронуло и домашние угодья, используемые людьми под огороды для выращивания собственных продуктов питания. В общей сложности до 2500 га территории г. Карабаш является токсичной антропогенной пустыней, которая включает в себя зоны деградированных лесов и мертвопокровных березняков.

**Поверхностные воды в городе.** Поверхностные воды в Карабаше по загрязненности оцениваются по меди в 802 ПДК, цинку - 134, железу - 62, такие значения соответствуют экологическому бедствию. Больше всего загрязнений находятся в главных реках города - Сак-Элга и Аткус, связаны они с осадждением и дальнейшим проникновением частиц тяжелых металлов в атмосферу из шлакоотвалов и хранилищ, самоизливом горных выработок. Вода с таким составом не может быть использована где-либо.

**Подземные воды** По показателям ПДК железа, цинка, меди отклоняется от нормы в 3-4 до 100-115, уровень минерализации очень низок, а уровень сульфатов - высок, эти факторы повлияли на то, что использование данных вод как центрального и индивидуального водоснабжения более невозможно, то есть эту воду нельзя не только пить, но и использовать в технических целях. Воды загрязнены главным образом из-за водоотлива из шахт. Невозможность использования подземных источников привело к тому, что вода доставляется из оз. Серебры и Киалимского водохранилища, которые находятся далеко от города Карабаш.

**Состояние здоровья населения.** Была проведена оценка относительно контрольных районов, которая показала наибольшие отклонения среди детей. По оценке, до 69% детского населения города Карабаш относятся к группам здоровья 3 и 4 (наихудшие группы), количество представителей 3 группы выше нормы в 1,7, а 4 группы в 5 раз. Показатели мышьяка, свинца, кадмия в крови детей превышают в 30 раз. Заболевания органов пищеварения, дыхания, врожденные пороки развития встречаются от 2 до 8 раз чаще среди детей города Карабаш, в сравнении с контрольной территорией. По заключению Государственной экологической экспертизы (11.06.1996 года) город был признан зоной экологического бедствия по состоянию окружающей среды и здоровья населения.



### 1.3 Аккумуляции тяжёлых металлов в организме моллюсков

Были изучены специфики аккумуляции тяжёлых металлов в организмах видов *Lymnaea fragilis* и *L. psilia* в районе загрязнения выбросов ЗАО Карабашмедь. Исследование заключалось в избирательном перераспределении металлов среди мягких тканей и раковины. Аккумуляция тяжёлых металлов происходит по трём автономным направлениям: вода - мягкие ткани, вода - раковина и мягкие ткани - раковина. По тому как аккумулируются металлы в системе вода-мягкие ткани-раковина можно сделать выводы о том, насколько загрязнена окружающая природа. Так была оценена реакция прудовиков: в загрязнённых водоемах - концентрация особей резко уменьшалась, а в менее загрязнённых - увеличивалась, это прямое следствие от техногенных выбросов. Важные показатели среди обитания моллюсков - рН воды и концентрация тяжелых металлов, низкое значение первого и высокое второго - привело к абсолютной гибели *Lymnaea fragilis* и *L. psilia*. В мягких тканях этих моллюсков количество меди отклоняется от нормы в 9875 раз, железа - 2418 раз, цинка - 2067 раз, в раковине железа - в 1337, меди - в 5,4, цинка - 4,25. Такие концентрации ведут к гибели моллюсков.

## 1.4 Загрязнение атмосферы Карабаша

На сегодняшний день на всех спутниковых картах можно увидеть «светящийся фонтан» диоксида серы, исходящего с территории комбината. Этот фонтан один из самых крупных промышленных выбросов  $SO_2$  в мире, в России - на втором месте после Норильска. С 2006 выбросы  $SO_2$  стремительно увеличивались (это регистрировал спутник), что прямо соответствует наращиванию мощности производства меди на заводе. На слайде отображена динамика [5]:

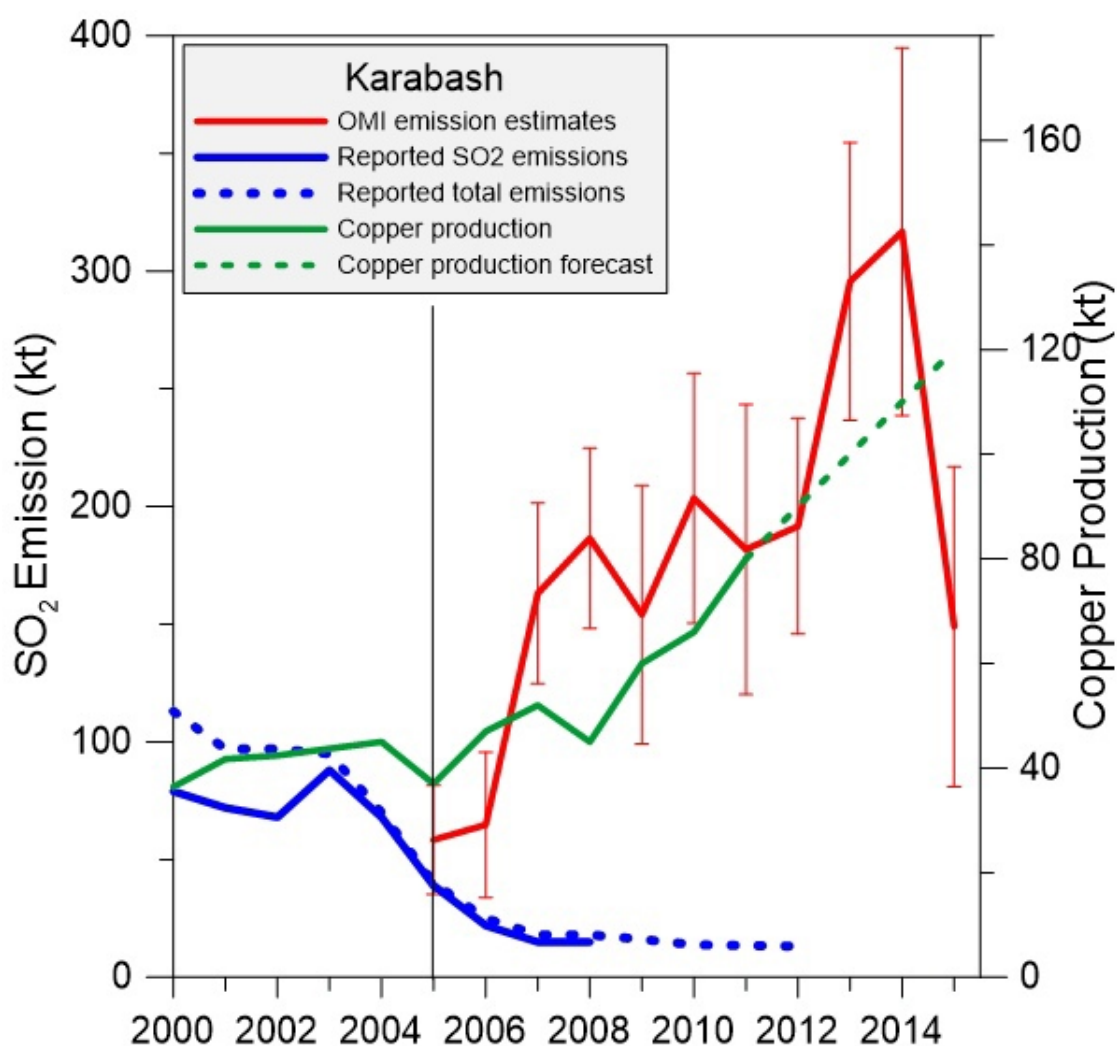


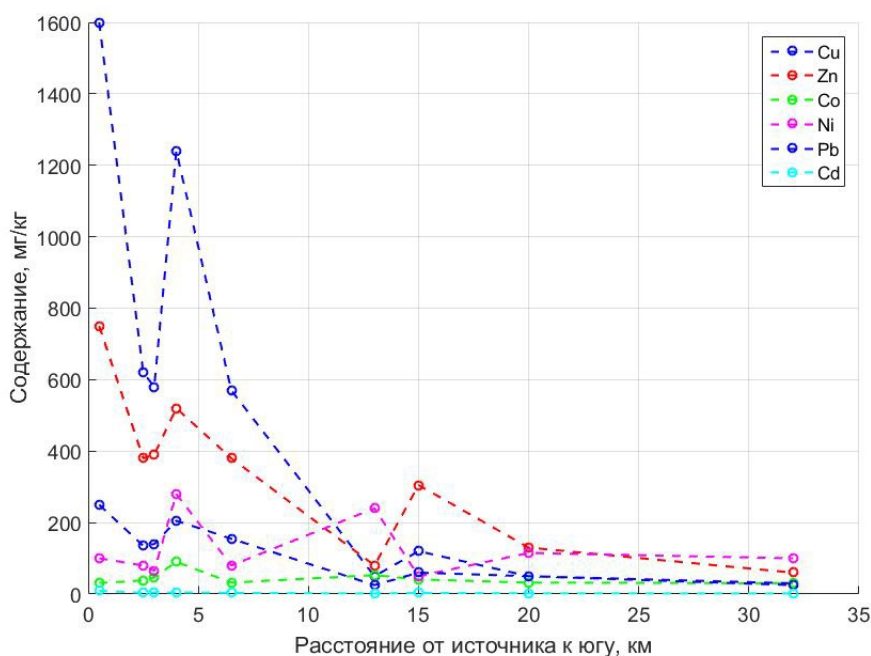
Рис. 1: Выбросы  $SO_2$  над г. Карабаш.

Красная линия соответствует выбросам диоксида серы (прибор измерения - OMI), зеленая - объемы производства карабашской меди по опубликованным данным, синяя - объем атмосферных выбросов из официальных

источников (министерства экологии Челябинской области), пунктирная - общие выбросы, сплошная - диоксид серы. После 2012 года данные о выбросах отсутствуют.

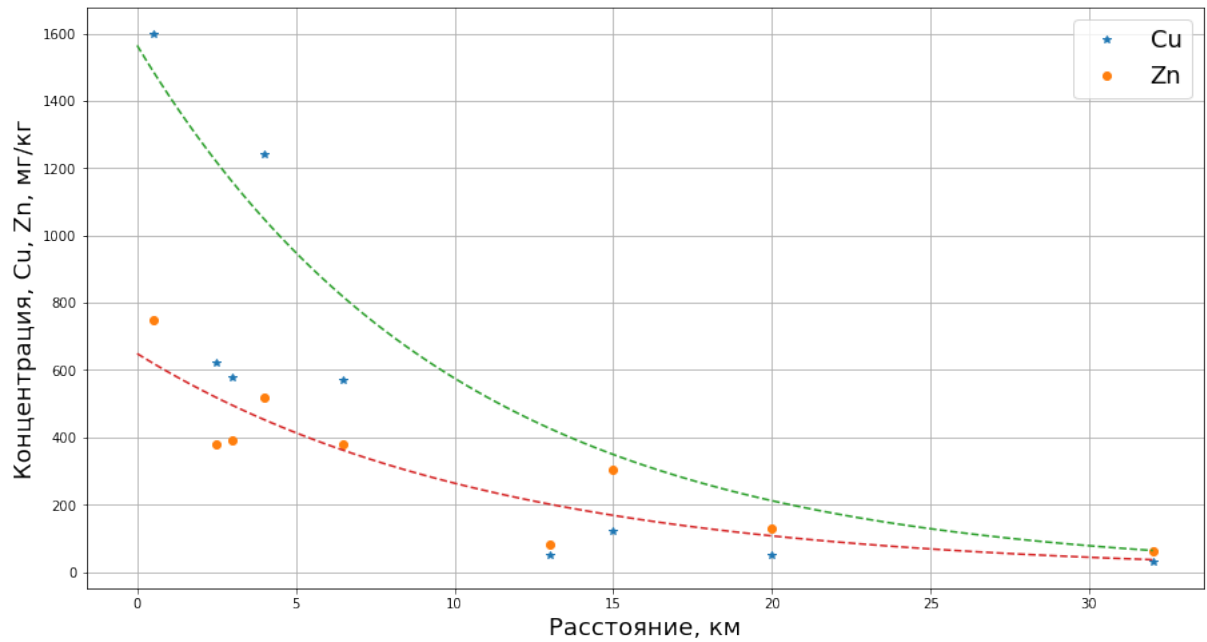
## 1.5 Загрязнение территории

На рис. 2 явно видно резкое уменьшение концентраций по мере отдаления от источника выбросов. Для Cu отчетливо заметен переход от буферной к условно-фоновой зоне. Для Zn область буферной зоны немного расширяется, что возможно связано с химическим составом технологических пылей. Концентрации Cu и Zn существенно увеличиваются в 4 км от труб комбината в южном направлении, что связано с особенностью рельефа в точке наблюдения. А завышенные концентрации этих элементов в 6,5 км от труб завода в южном направлении объяснимы ветровым разносом веществ хвостохранилища. Похожие закономерности заметны в концентрациях Pb и Cd. Резкий рост концентраций Ni и Co в 4 км по южному направлению, может описываться присутствием тут естественной минерализации Ni и Co, чему содействует тип пород данной местности. Схожая картина отмечается в 13 км - д. Сактаево. Вопрос образования фоновых площадок при активном развитии горных производств на Урале много раз был поднят учеными, так как на сегодня, с учетом распределения производств, нереально найти территории нетронутые техногенезом.



**Рис. 2:** Загрязнение территории на разном расстоянии от источника выбросов.

Рассмотрим распределение тяжелых металлов меди и цинка в окрестности медного производства ЗАО «Карабашмедь», на рис. 3 показана зависимость их концентраций на почве с учетом расстояния от завода. На графике отмечены реальные данные с полевых наблюдений. Проведя анализ статистических данных значений Cu и Zn, можно сделать вывод что они аппроксимируются экспоненциальными зависимостями  $f(x) = f_0 e^{-\mu x}$  с показателем  $\mu = 0.1$  для Cu и Zn.



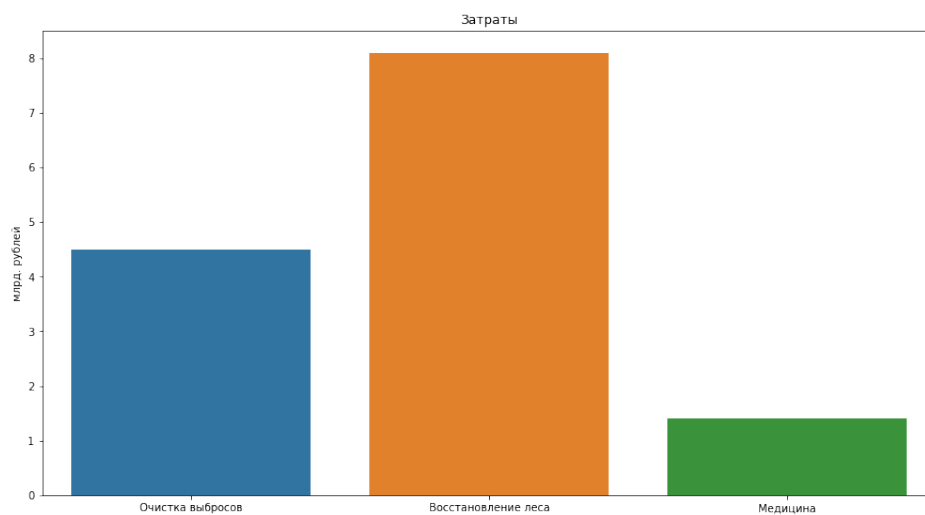
**Рис. 3:** Распределение концентрации цинка и меди в почве в зависимости от расстояния до завода.

## 1.6 Оценка затрат на восстановление территории

По законам химии, в результате плавления тонны меди образовывается 2-3 тонны SO<sub>2</sub>. По опубликованным данным можно увидеть, что комбинат ЗАО «Карабашмедь» выплавляет в год в среднем 120 тысяч тонн меди, несложно оценить, что такой объем сопровождается образованием 300 т. тонн диоксида серы. Примерно такой фонтан диоксида серы был обнаружен спутником НАСА в 2014 году. В мире технологий уже долго существуют системы, способные улавливать подобные ядовитые выбросы, так в 2015 году спутник «Auriga» заметил уменьшение карабашского фонтана, что, очевидно, связано с запуском новейшего цеха по улавливанию SO<sub>2</sub>. По мировым оценкам, стоимость улавливания одной тонны диоксида серы равна не менее 200 долларов. Оценивая объемы Карабашмеди, получаем: для того, чтобы уловить 300 тысяч тонн SO<sub>2</sub> необходимо в год тратить не менее 60 млн долларов, а это 10% стоимости добытой меди (стоимость тонны меди в мире - 5 тысяч долларов, соответственно стоимость объемов комбината равна 600 млн долларов).

Буферная зона - зона между промышленным объектом, добывающим, транспортирующим или перерабатывающим продукцию с сероводородом и любыми жилыми объектами. В нашем исследовании она равна 30 км. Примем, что 80% территории - это леса, 20% - подсобные участки. Леса в окрестностях города Карабаш преимущественно состоят на 77% из березы и 23% из сосны. В среднем для достижения двух метров в высоту этим деревьям необходимо 10 лет. С одного гектара леса выход древесины в среднем оценивается в 270 тыс. рублей. В буферной зоне медеплавильного завода «Карабашмедь» 2400 га леса, следовательно потери составляют 648 млн. рублей. Упущенную прибыль с подсобных хозяйств - 162 млн. рублей. Общая стоимость потерь в год в буферной зоне - 8.1 млрд. рублей.

Состояние здоровья населения города Карабаш значительно хуже, чем в соседних регионах и стране в целом. 10% населения города являются онкобольными, стоимость лечения пациента с таким диагнозом составляет 1.3 млн рублей. По состоянию на 2021 год число больных онкологией - 1076 человек. 1.4 млрд рублей - затраты в год на лечение.



**Рис. 4:** Оценки стоимости затрат (млрд. рублей).

Для наглядности оценку стоимости вынесли на диаграмму. Синий столбец - стоимость очистки выбросов, оранжевый - восстановление леса, зеленый - стоимость лечения.

## 1.7 Решение проблемы

В мире есть не один пример, когда загрязненные территории, которые не пригодны для нормальной жизни, были восстановлены до первоначального вида. Самые успешные проекты по рекультивации: речной парк Padre Renato Pobleteriver park» в Чили, который заменил бывшую свалку отходов от производств и промышленности, скейт-парк «Factoria Joven skate park» в Испании, построенный на бывшей территории металлургического завода. Успешны такие проекты были благодаря выравниванию почв, расчистке от отходов, рекультивации, восстановлению плодородности земель, предотвращению дальнейшей деградации.

Авторами статей по рекультивации земель в Карабаше (Михеев и Залесов) предлагаются достаточно успешные решения для очистки экосистемы в окрестностях ЗАО «Карабашмедь». Террасирование один из лучших вариантов для данной территории, именно такой подход поможет в рекультивации нарушенных земель. На террасах был воссоздан уникальный микроклимат для восстановления растительности, и его удалось сохранить не смотря на сильное влияние выбросов комбината. По рекомендациям авторов рекультивацию методом террасирования стоит применять с воссозданием лесных культур, которые могут расти в загрязненных условиях. По результатам исследования были сделаны выводы, что благодаря террасированию возможно восстановить территории, которые хронически подвергаются воздействиям выбросов от производства меди. Земли же, которые чрезмерно нарушены, стоит оставить для натурального зарастания.



## Глава 2. Математические модели

### 2.1 Модель хищник-жертва

Будем рассматривать модификацию модели Лотки–Вольтерра, в которой отсутствует конкуренция среди хищников за жертву, когда хищник отсутствует - жертва размножается по логистическому закону, по экспоненциальному закону будет описываться смертность хищников.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \frac{K-x}{K} - \frac{bxy}{1+Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1+Ax}. \end{cases} \quad t = \frac{\tau}{a}, \quad x = \frac{c}{d}u, \quad y = \frac{a}{b}v. \quad (1)$$

В системе выше  $x, y$  — численности популяций жертвы и хищника соответственно;  $a, b, c, d$  — положительные постоянные;  $f_1(x) = a \frac{K-x}{K}$  — коэффициент размножения жертв;  $L(x) = \frac{bx}{1+Ax}$  — трофическая функция хищника;  $f_2(x) = -c + \frac{dx}{1+Ax}$  — коэффициент размножения хищников. После замены переменных получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{uv}{1+\alpha u} - \varepsilon u^2, \\ \dot{v} = -\gamma v \left(1 - \frac{u}{1+\alpha u}\right). \end{cases} \quad \alpha = A \frac{c}{d}, \quad \gamma = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{Kd}. \quad (2)$$

Из условия пересечения нуль-изоклин в первом квадранте получены ограничения на параметры.

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \geq 0, \\ \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right) \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha < 1, \\ \alpha + \varepsilon < 1. \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha + \varepsilon < 1. \quad (3)$$

Матрица Якоби правой части системы уравнений (2) имеет вид

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{(1+\alpha u)^2(1-2u\varepsilon) - v}{(1+\alpha u)^2} & -\frac{u}{1+\alpha u} \\ \frac{\gamma v}{(1+\alpha u)^2} & -\gamma \left(\frac{1+\alpha u - u}{1+\alpha u}\right) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Система уравнений (2) имеет три стационарные точки:

$$M_0 = (0; 0), \quad M_1 = \left( \frac{1}{1-\alpha}; \frac{1-\alpha-\varepsilon}{(1-\alpha)^2} \right), \quad M_2 = \left( \frac{1}{\varepsilon}; 0 \right).$$

Якобиан (4) системы и характеристический многочлен в точке  $M_0$  имеют вид.

$$J(0; 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$|J - \lambda E| = (1 - \lambda)(-\gamma - \lambda).$$

Корни характеристического многочлена равны  $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -\gamma$ . Отсюда имеем, данная особая точка имеет тип — «седло». Аналогично исследуем точки  $M_1, M_2$ . Для  $M_2$  получаем следующее.

$$J\left(\frac{1}{\varepsilon}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\varepsilon + \alpha} \\ 0 & -\gamma \left( \frac{\varepsilon + \alpha - 1}{\varepsilon + \alpha} \right) \end{pmatrix},$$

$$|J - \lambda E| = (-1 - \lambda) \left( -\gamma \left( \frac{\varepsilon + \alpha - 1}{\varepsilon + \alpha} \right) - \lambda \right).$$

Корни характеристического многочлена равны  $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -\gamma \left( \frac{\varepsilon + \alpha - 1}{\varepsilon + \alpha} \right)$ . С учетом ранее полученных ограничений на параметры (3) данная особая точка имеет тип — «седло».

Аналогично для точки  $M_1$ .

$$J\left(\frac{1}{1-\alpha}; \frac{1-\alpha-\varepsilon}{(1-\alpha)^2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - \varepsilon - \alpha^2 - \alpha\varepsilon}{1-\alpha} & -1 \\ \gamma - \alpha\gamma - \varepsilon\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

$$|J - \lambda E| = \lambda^2 - \lambda \left( \frac{\alpha - \varepsilon - \alpha^2 - \alpha\varepsilon}{1-\alpha} \right) + \gamma(1 - \alpha - \varepsilon).$$

Корни характеристического многочлена имеют следующий вид.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{\alpha - \varepsilon - \alpha^2 - \alpha\varepsilon}{1 - \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha - \varepsilon - \alpha^2 - \alpha\varepsilon}{1 - \alpha}\right)^2 - 4\gamma(1 - \alpha - \varepsilon)}}{2}.$$

Для того, чтобы понять тип особой точки нам нужно узнать какой знак у вещественной части собственного числа, принимая это во внимания, получилась зависимость между параметрами, приведенная ниже.

$$\alpha - \varepsilon - \alpha^2 - \alpha\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\alpha - \alpha^2}{1 + \alpha},$$

где  $\varepsilon$  — линия нейтральности.

## 2.2 Модель хищник-жертва на линейном ареале

Модель хищник-жертва описана системой дифференциальных уравнений в частных производных для случая взаимодействия между жертвой и хищником на прямой.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \frac{uv}{1 + \alpha u} - \varepsilon u^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \gamma v \left( 1 - \frac{u}{1 + \alpha u} \right) \end{cases}, \quad (5)$$

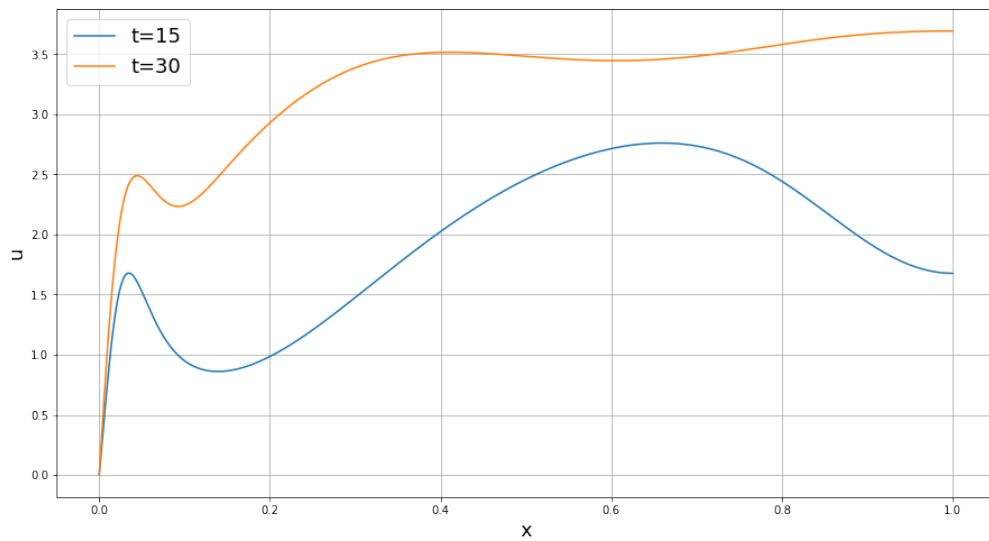
где  $\alpha, \varepsilon, \gamma$  – параметры гибели, скорости размножения жертв и хищников,  $u$  – линейная плотность жертв,  $D_u, D_v$  – коэффициенты подвижности хищников и жертв на линейном ареале.

Слагаемое  $u - \varepsilon u^2$  в первом уравнении системы (5) – скорость роста численности популяции жертв при отсутствии хищника, а слагаемое  $uv/(1 + \alpha u)$  – скорость уничтожения хищниками жертв. Во втором уравнении слагаемое  $\gamma v$  – скорость естественной гибели хищников, слагаемое  $\gamma uv/(1 + \alpha u)$  – скорость роста популяции хищников за счет уничтожения ими жертв.

К системе уравнений (5) добавляются начальные условия при  $t = 0$  :  $u = u_0(0, x), v = v_0(0, x)$  и граничные условия при  $x = 0$  и  $x = l$  :  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Этот вариант подразумевает свободное движение хищника и жертвы вдоль отрезка.

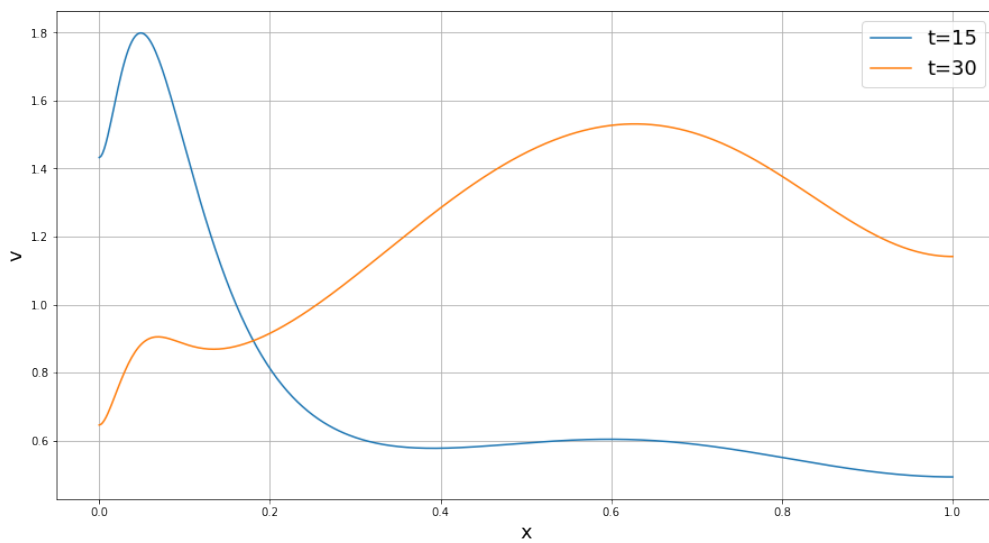
### 2.2.1 Численное решение

Построение численного решения системы уравнений (5) с граничными условиями при  $x = 0$  :  $u = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , при  $x = l$  :  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$  был реализовано с использованием конечно-разностного метода. На рис.(5) отражено решение в виде зависимостей  $u = u(t, x)$  в моменты времени  $t=15$  и  $t=30$ . На рис.(6) при тех же значениях  $t$ , для зависимости  $v = v(t, x)$ . Зависимости приведены при значениях  $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.16, \gamma = 1, D_u = 0.0001, D_v = 0.0001$ . Подвижность хищников ( $D_v$ ) принята значительно большей, чем жертв ( $D_u$ ).



**Рис. 5:** Распределение плотности численности жертвы в моменты времени  $t=15$  и  $t=30$ .

Решение построено на пространственной сетке с 500 отрезками разбиения.



**Рис. 6:** Распределение плотности численности хищника в моменты времени  $t=15$  и  $t=30$ .

## 2.3 Модель антропогенного давления

Во время работы горнообогатительных производств в окружающую среду происходят выбросы веществ от переработки ископаемых, а это губительно влияет на всю живую природу. Какая-то часть растений и животных может погибнуть, какая-то - сохраняется и копит в себе вредные вещества, которые со временем меняют системы внутренних процессов. Изменения в экосистемах влияют на рождаемость, продолжительность жизни, изменения протеканий и развитий заболеваний. Также уменьшается емкость экосистем, что вызывает гибель части трофического ресурса, а площади местообитания сокращаются и распадаются на несколько фрагментов. В приведенной модели уменьшение удельной скорости роста численности популяции жертв принимается как изменение внутреннего метаболизма некоторой части особей, а уменьшение емкости среды - фрагментирование территории.

Токсиканты имеют свойство накапливаться в живых организмах до определенного предела, в модели будем предполагать, что накопление токсикантов не приводит к смерти особей, а лишь влияет на уменьшение рождаемости. Поэтому будет принято, что удельная скорость роста численности жертв будем изменяться на следующую величину

$$\frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P} \quad (a_1 < a_2),$$

а скорость естественной гибели хищников на величину

$$\frac{1 + c_1 P}{1 + c_2 P} \quad (c_2 < c_1).$$

Также предполагаем, что емкость среды будет уменьшаться на величину

$$\frac{1 + b_1 P}{1 + b_2 P} \quad (b_1 < b_2).$$

С учетом всех предположений модель (1) при антропогенном давлении

нии будет приведена к следующему виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P} u - \frac{uv}{1 + \alpha u} - \frac{1 + b_1 P}{1 + b_2 P} \varepsilon u^2, \\ \dot{v} = -\gamma v \left( \frac{1 + c_1 P}{1 + c_2 P} - \frac{u}{1 + \alpha u} \right). \end{cases} \quad (6)$$

При  $P = 0$  система уравнений (6) переходит в систему уравнений (1), а при  $P \rightarrow \infty$  удельная скорость роста численности жертв не может быть меньше величины  $a_1/a_2 < 1$ , удельная скорость смертности хищников не может быть больше величины  $c_1/c_2 > 1$ , емкость среды уменьшится менее величины  $b_1/b_2 < 1$ .

Тривиальная стационарная точка системы уравнений (6)

$$u = 0, v = 0$$

будет неустойчивой, така одно из собственных значений матрицы Якоби правой части уравнений (6)

$$\lambda_1 = \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P}, \quad \lambda_2 = -\gamma \frac{1 + c_1 P}{1 + c_2 P}$$

будет положительным.

В стационарной точке

$$u = \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P} \frac{1 + b_1 P}{1 + b_2 P} \frac{1}{\varepsilon}, \quad v = 0$$

собственными значениям матрицы Якоби будут

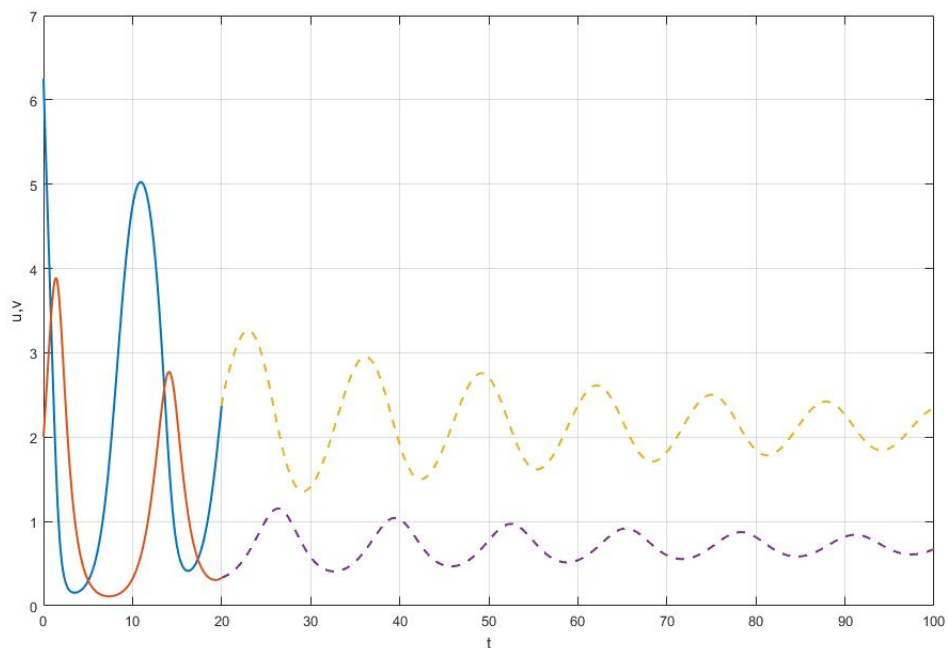
$$\lambda_1 = -\frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P}, \quad \lambda_2 = -\gamma \left( \frac{1 + c_1 P}{1 + c_2 P} - \frac{\frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P}}{\varepsilon \frac{1 + b_1 P}{1 + b_2 P} + \alpha \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P}} \right)$$

Поскольку стационарное значение  $u$  в этой точке лежит в диапазоне

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \leq u \leq 1, \text{ то при выполнении неравенства } \left( \frac{1 + c_1 P}{1 + c_2 P} - \frac{\frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P}}{\varepsilon \frac{1 + b_1 P}{1 + b_2 P} + \alpha \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P}} \right)$$

$> 0$  оба собственных значения будут отрицательными и эта стационарная точка будет устойчивой. Таким образом при больших концентрациях токси-

кантов модель антропогенного давления предсказывает гибель популяции хищника.



**Рис. 7:** Численности хищника и жертвы до и после антропогенного давления.

На рис.(7) отражена зависимость функций  $u(t)$ ,  $v(t)$  и при значениях  $\alpha = 0.4, \varepsilon = 0.16, \gamma = 1$  для случая начальных условий  $u = \frac{1}{\varepsilon}$  и  $v = 2$ . Предполагалось, что антропогенное давление начиналось в момент времени  $t = t_*$  и изменялось во времени по закону  $P = A(1 - e^{(-\mu(t-t_*)})$ , где  $A = 1.2$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $t_* = 20$ .

С учетом изменений концентрации металлов (рис.(3)) будем считать, что накопление тяжелых металлов в организмах будет уменьшаться по экспоненциальной зависимости при удалении от источника выбросов, а емкость среды увеличиваться. Имеем, что при удалении от точки выброса рождаемость жертв увеличивается, а при близком нахождении рождаемость наименьшая. Накопление металлов организмам хищников игнорируется. С учетом предположений выше модель антропогенного давления на



систему хищник-жертва (учитывая (5)) будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left( e^{-\mu_1(l-x)} - \varepsilon u e^{-\mu_2(l-x)} \right) - \frac{uv}{1 + \alpha u}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma \left( -v + \frac{uv}{1 + \alpha u} \right) \end{cases} \quad (7)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  характеризуют изменение рождаемости и емкости среды соответственно.

К системе (7) добавим граничные условия:

$$x = 0 : u = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$x = l : \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

в которых предполагается, что в точке  $x=0$  концентрация загрязнителей достигает максимума и жертва в таких условиях жить не может. Хищник может находиться в любой точке отрезка при поиске жертвы. Примем в качестве начальных условий распределение жертвы по закону синуса:

$$u(t = 0, x) = \sin \left( \frac{\pi x}{2l} \right)$$

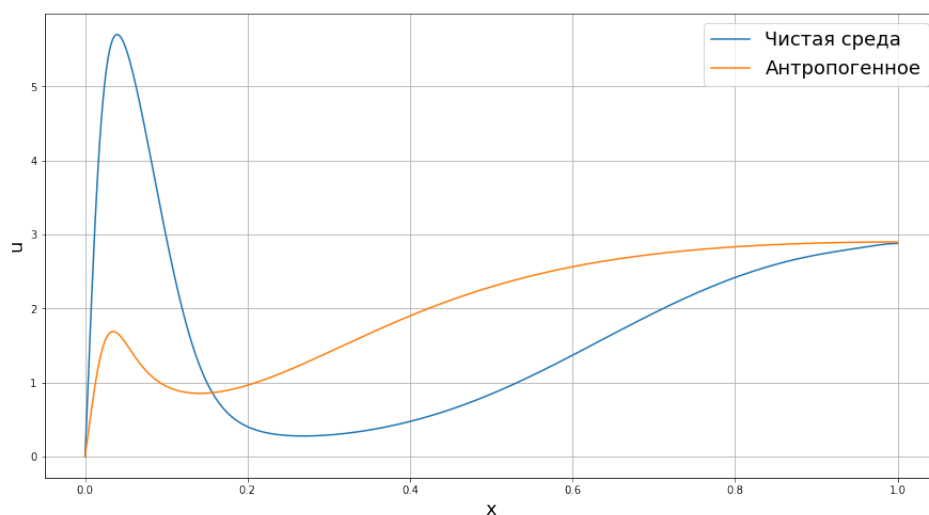
Хищника на местности нет и появляется он в точке  $x=0$ :

$$v(t = 0, x = 0) = 1, v(t = 0, x > 0) = 0$$

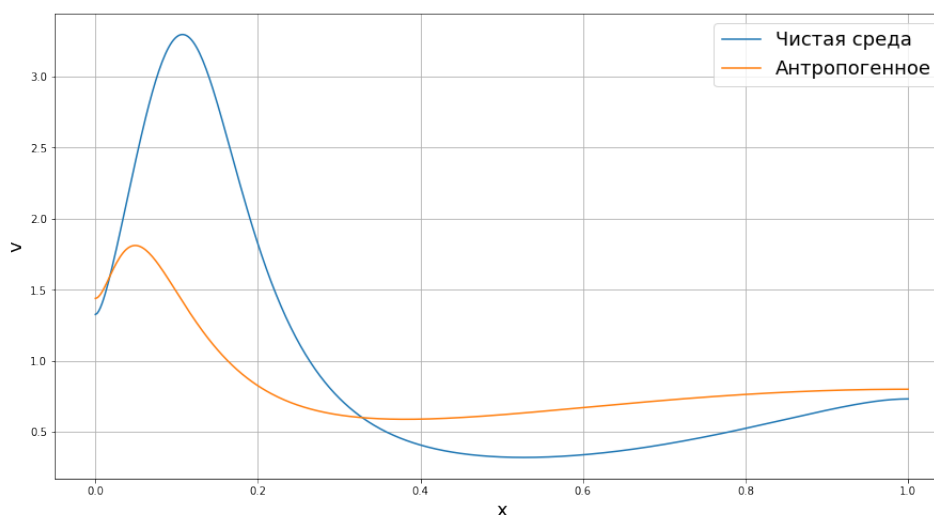
На рис.(8) изображено распределение жертвы на отрезке в момент времени  $t=15$  при значениях параметров  $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.16, \gamma = 1, D_u = 0.0001, D_v = 0.0001, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 1$  (оранжевая линия).

На рис.(9) - распределение хищника (оранжевая линия, "антропогенное давление"). Линии на рисунках (8) и (9), выделенные синим, соответствуют распределению хищника и жертвы при  $\mu_1 = 0$  и  $\mu_2 = 0$  (чистая среда).

При построении численного решения системы (7) применялся метод сеток.



**Рис. 8:** Распределение жертвы в антропогенной зоне (на загрязненной территории) и в чистой среде (на не загрязненной) при  $t=15$ .



**Рис. 9:** Распределение хищника в антропогенной зоне (на загрязненной территории) и в чистой среде (на не загрязненной) при  $t=15$ .

## Выводы

Окрестности ЗАО «Карабашмедь» являются техногенной аномалией, уровень загрязненности территорий достиг заданных значений и именно из-за этого исследователи могут изучать как деградирует и восстанавливается природная среда от изменений степени воздействия промышленной деятельности. Для того чтобы полностью иметь представление об

изменении ситуации нужно проведение широкого экогеохимического обследования окрестностей, постоянный процесс наблюдения за результатами исследования показателей воздушной среды, контроль за изменениями водных источников города. Принимая во внимание исключительность экологии города Карабаш и учитывая известные примеры по рекультивации экосистем, нужно помнить, что при восстановлении земель критически важно сохранять природную местность при помощи устройства зон отдыха населения в общегородской среде и озеленении территорий. Очистка русла главных рек Карабаша (Сак-Элга, Серебрянка), восстановление водоемов, благоустройство береговых линий, развитие природной местности - важные задачи для восстановления экосистемы города Карабаш. Для восстановления загрязненных земель лучше всего подходит террасирование, строительство газоотводящих скважин.

Математическая модель биоразнообразия при антропогенном давлении показала внутреннее изменение метаболизма особей, уменьшение численностей жертв и хищников в окрестностях производства, заключено, что самые большие потери понесет хищник, вплоть до вымирания на территории.

С помощью численных методов получили численную оценку возможных распределений хищников и жертв с учетом факторов влияющих на загрязнение.

## Список литературы

- [1] Дзугаев М. Д. Карабаш город «Экологического бедствия» // Вестник ЧелГУ. 2003. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/karabash-gorod-ekologicheskogo-bedstviya>
- [2] Ульрих Дмитрий Владимирович Экологическая нагрузка на окружающую среду предприятиями по добыче и переработке меди в Южно-Уральском регионе // XXI век. Техносферная безопасность. 2016. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ekologicheskaya-nagruzka-na-okruzhayuschuyu-sredu-predpriyatiyami-po-dobyche-i-pererabotke-medi-v-yuzhno-uralskom-regione>
- [3] Дерягин Владимир Владиславович, Назаренко Назар Николаевич, Девятова Екатерина Викторовна Аккумуляция тяжёлых металлов представителями семейства Lymnaeidae как отклик на критические уровни техногенного загрязнения водоёмов Южного Урала // СНВ. 2019. №3 (28). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/akkumulyatsiya-tyazhyolyh-metallov-predstavatelyami-semeystva-lymnaeidae-kak-otklik-na-kriticheskie-urovni-tehnogennoyego>
- [4] Надымов М. И. Анализ возможных способов рекультивации нарушенных Территорий и экологически безопасного использования земельных ресурсов с точки зрения градостроительства и градостроительной реконструкции (на примере города Карабаш челябинской области российской федерации) URL: <https://eduherald.ru/pdf/2018/3-7/18691.pdf>
- [5] Горькавый Н. Карабашгейт: космическая наука освещает грязные тайны URL: <https://waksoft.susu.ru/2016/11/24/karabashgeyt-kosmicheskaya-nauka-osveshhaet-gryaznyie-taynyi/>
- [6] Таций Ю. Г. Эколого-геохимическая оценка загрязнения Окружающей среды в зоне действия Карабашского медеплавильного Комбината
- [7] Шафигуллина, Г.Т. Геохимические характеристики техногенных почв горнопромышленных ландшафтов Южного Урала / Г.Т. Шафигуллина

на, В.Н. Удачин, П.Г. Аминов, К.А. Филиппова // Вестник академии наук РБ. – 2015. – № 4. – С. 93–101.

- [8] Гашкина, Н.А. Биогеохимическая индикация загрязнения окружающей среды (на примере влияния крупного медеплавильного комбината) / Н.А. Гашкина, Ю.Г. Таций, В.Н. Удачин, П.Г. Аминов // Геохимия. – 2015. – № 3. – С. 264–275.
- [9] Удачин, В.Н. Геохимия горнопромышленного техногенеза Южного Урала / В.Н. Удачин, П.Г. Аминов, К.А. Филиппова. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2014. – 252 с.
- [10] Аминов, П.Г. Геохимия почв Карабашской геотехнической системы (Южный Урал) / П.Г. Аминов, В.Н. Удачин, К.А. Филиппова, Г.Ф. Лонцакова, С.Ю. Кайгородова // Научное обозрение. – 2013. – № 12. – С. 74–79.
- [11] П.Г. Аминов , В.Н. Удачин , К.А. Филиппова / Микроэлементный состав почв карабашской техногенной геохимической аномалии URL: <https://dspace.susu.ru/xmlui/bitstream/handle/0001.74/30783/4.pdf>
- [12] Гончарова А.Б., Данилова М.Ю., Колпак Е.П. Модель хищник-жертва на линейном ареале URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/model-hischnik-zhertva-na-lineynom-areale>
- [13] Гончарова А.Б., Данилова М.Ю., Колпак Е.П. Математическая модель хищник-жертва на загрязненной территории URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-model-hischnik-zhertva-na-zagryaznennoy-territorii>
- [14] Пегов А.С. Антропогенное воздействие на биосферу / А.С. Пегов // Труды ИСА РАН. - 2009. - Т. 42.
- [15] Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

- [16] Михеев А. Н., Залесов С. В., Опыт лесной рекультивации в районе медеплавильного завода ЗАО «Карабашмедь» URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opyt-lesnoy-rekultivatsii-v-rayone-medeplavilnogo-zavoda-zao-karabashmed>