Санкт-Петербургский государственный университет

ОПАНАСЕНКО Михаил Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Задача о честном делении и делении без зависти квадратного торта

Уровень образования:
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2018 «Математика»
Профиль 18.Б01-мкн

Научный руководитель:
Панина Гаянэ Юрьевна, профессор, Факультет математики и компьютерных наук СПбГУ, доктор ф.-м. наук

Рецензент:
Зивальевич Раде, профессор, Математический институт Академии наук Сербии

Санкт-Петербург
2022

Содержание

1 Введение

Классическая *задача справедливого деления торта* формулируется следующим образом. Дан отрезок $[0,1]$ — торт, и k игроков, которые некоторым образом делят этот отрезок на k частей и распределяют между собой. Тогда *разрезанию* торта соответствует набор $x=(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})\in\mathbb{R}^{k-1}$ чисел x_i, таких что

$$0=x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\dots\leqslant x_{k-1}\leqslant x_k=1.$$

Таким образом, каждому разрезанию $(x_1,\dots,x_{k-1})$ соответствуют k отрезков $[x_i,x_{i+1}]$, где $0\leqslant i\leqslant k-1$, которые и раздаются игрокам. Для каждого разрезания известны *предпочтения* игроков — а именно, какие отрезки в данном разрезании лучшие с точки зрения каждого игрока. Спрашивается, можно ли найти такое разрезание торта и распределение кусков, чтобы каждый игрок получил тот кусок, который с его точки зрения не хуже любого другого.

Известно, что ответ на этот вопрос зависит от того, какие накладываются условия на предпочтения. Если предпочтения покрывающие, замкнутые,[1] и каждый игрок предпочитает только *невырожденные* куски (то есть куски ненулевой длины), то деление без зависти существует для любого количества игроков — это теорема Гейла, см. [3]. Условие на невырожденные куски можно ослабить, в этом случае существование деления без зависти будет зависеть от k — см. [1] и [4].

В данной работе в качестве торта выступает не отрезок $[0,1]$, а квадрат $[0,1]^2$, который разрезается $n-1$ вертикальными и $m-1$ горизонтальными разрезами на nm прямоугольных кусков. Эти куски, в свою очередь, раздаются k игрокам. Отметим, что в этой постановке игроки могут получать любое количество кусков (не ровно один как в классической задаче). Спрашивается, при каких условиях на n,m,k и предпочтения игроков существует деление без зависти.

В параграфе 2 формализуется описанная выше задача и описываются условия на предпочтения, которые требуется в доказываемых результатах. В параграфе 3 описывается строение конфигурационных пространств, возникающих в новой задаче. Ключевую роль для последующих доказательств играют теорема 3.1 и её следствие 3.2, а также представление конфигурационных пространств с помощью *числовых таблиц*, следующее из этих теорем. В параграфе 4 приводятся без доказательств основные теоремы дискретной теории Морса, которые используются в параграфах 5, 6 и 7 для изучения топологических свойств конфигурационных пространств.

Наконец, в параграфе 8 формулируются и доказываются основные результаты. А именно, в теореме 8.1 приводится контрпример, показывающий, что при достаточно большом количестве игроков деления без зависти может не существовать, а теорема 8.2 и следующие за ней следствия описывают, в каких случаях деление без зависти существует.

[1] формальные определения будут даны в следующем параграфе

2 Постановка задачи и основные результаты

Напомним, что в классической постановке в качестве торта выступает отрезок $[0,1]$. В новой задаче мы будем рассматривать вместо этого единичный квадрат $[0,1]^2$. Проводится $n-1$ вертикальных и $m-1$ горизонтальных разрезов, то есть каждому разрезанию соответствует пара векторов $(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-1}$, такая что

$$0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = 1,$$
$$0 = y_0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_{m-1} \leqslant y_m = 1.$$

В результате торт делится на nm прямоугольных кусков. Кусок $[x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$ в дальнейшем будет обозначаться через (i,j). Мы хотим раздать эти куски k игрокам, где $k \leqslant nm$, таким образом, чтобы каждый игрок получил удовлетворяющее его множество кусков. Как показывает теорема 8.1, нет смысла ограничиваться случаем, когда $k = nm$ — можно показать, что в этом случае деление без зависти не всегда существует.

Определение. Кусок торта называется *вырожденным*, если он имеет нулевую площадь, и *невырожденным* в противном случае.

Для формализации задачи мы будем использовать терминологию, введённую в статье [4]. А именно, предположим, что у нас есть k коробок, помеченных числами из $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда *функцией размещения* называется функция

$$\alpha\colon [nm] \to [k],$$

помещающая каждый из nm кусков в какую-то из k коробок. Обозначим через $\mathcal{X}$ множество пар (x,α), где $x \in \mathcal{K}_{n,m} = \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$ — разрезание, а $\alpha\colon [nm] \to [k]$ — функция размещения. Тогда можно говорить, что игроки предпочитают не куски, а *коробки*. А именно, *предпочтения* — это матрица $(B_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ подмножеств $\mathcal{X}$, имеющая следующий смысл:

- $(x,\alpha) \in B_{ij}$ тогда и только тогда, когда при разрезании x и размещении α игрок i предпочитает коробку j.

Определение. Пусть $(B_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ — матрица предпочтений. Тогда пара (x,α) называется *делением без зависти* для (B_{ij}), если

$$(x,\alpha) \in \bigcap_{i=1}^{k} B_{i\pi(i)}$$

для некоторой перестановки $\pi \in S_k$.

Для того, чтобы деление без зависти (всегда) существовало, нужно наложить на предпочтения некоторые ограничения. Без следующих условий обойтись точно нельзя:

P_{cov} Предпочтения *покрывающие*, то есть каждый игрок предпочитает какую-нибудь коробку при любом разрезании и функции размещения. Иначе говоря, для каждого $i : 1 \leqslant i \leqslant k$ выполнено

$$\bigcup_{j=1}^{k} B_{ij} = \mathcal{X}.$$

Если это условие не выполнено, то можно, например, рассмотреть «пустые» предпочтения, для которых деления без зависти явно не существует.

P_{cl} Предпочтения *замкнуты*, то есть каждое B_{ij} — замкнутое подмножество топологического пространства $\mathcal{X}$. Иначе говоря, если игрок предпочитает некоторый кусок в сходящейся последовательности разрезаний, то он предпочитает этот кусок и в предельном разрезании.

Уже при $k = 2$ легко построить незамкнутые предпочтения, для которых не существует деления без зависти. А именно, пусть оба игрока хотят получить коробку с самым верхним левым невырожденным куском (и только её). Хотя бы один невырожденный кусок всегда есть, поэтому предпочтения покрывающие, и очевидно, что деления без зависти не существует.

Мы также хотим, чтобы предпочтения игроков зависели от содержимого коробки, а не от её номера, так что будем накладывать на них следующее условие:

P_{eq} Предпочтения *эквивариантны*, а именно, для любой перестановки $\sigma \in S_k$ выполнено

$$(x, \alpha) \in B_{ij} \iff (x, \sigma \circ \alpha) \in B_{i\sigma(j)}.$$

В частности, из этого условия следует, что деление без зависти существует тогда и только тогда, когда выполнено

$$\bigcap_{i=1}^{k} B_{ii} \neq \varnothing.$$

Тем не менее, этих трёх условий всё ещё недостаточно для существования деления без зависти. Пусть $k = 2$, и оба игрока независимо от разрезания хотят получить коробку с куском $(1, 1)$ и только с ним. Такие предпочтения покрывающие, замкнутые и эквивариантные; тем не менее, очевидно, что деления без зависти не существует. Данный пример мотивирует следующие условия:

P_{dte} Предпочтения игроков *не зависят от того, в какие коробки размещаются вырожденные куски*. Иначе говоря, все вырожденные куски одинаковы и равносильны пустоте. В терминах функций размещения это выражается следующим образом:

Определение. Две функции размещения для одного и того же разрезания называются *эквивалентными*, если они отличаются только распределением вырожденных кусков.

P_{ndt} Каждый игрок предпочитает только такие коробки, в которых находится по крайней мере один невырожденный кусок торта.

Мы будем предполагать выполнение первого условия, а второе встретится только в контрпримере в параграфе 8.

Таким образом, в наших задачах предпочтениями будут не подмножества $\mathcal{X}$, а подмножества некоторого фактор-пространства $\mathcal{X}/\sim$, где $\sim$ есть отношение эквивалентности из последнего определения. Как именно устроено это пространство описано в параграфе 3. На функции размещения можно накладывать дополнительные ограничения и таким образом получать новые (более сложные) задачи. Мы рассмотрим следующий класс ограничений:

- *количественное ограничение*: в коробке не может находиться более t кусков торта для некоторого фиксированного t. В частности, при $t = nm$ мы получаем обычную задачу без ограничений.

В параграфе 8 мы докажем, в частности, что:

1. Если $k \geqslant n + m$, то деления без зависти может не существовать (теорема 8.1).
2. Если $k \leqslant n + m - 1$ и k — степень простого числа, то деление без зависти всегда существует (теорема 8.2 и следствие 8.3).
3. Если $k = n + m - 1$ — степень простого числа, то существует такое деление без зависти, что каждый игрок получает не более $2\max(n, m) - 1$ кусков торта (теорема 8.2 и следствие 8.5).

3 Конфигурационные пространства

Рассмотрим конфигурационное пространство всевозможных разрезаний торта и функций размещения. Как мы помним, разрезания торта соответствуют произведению симплексов $\mathcal{K}_{n,m} = \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$, а именно, каждому разрезанию соответствует пара векторов $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-1}$, такая что

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_{m-1} \leqslant 1.$$

Если бы мы не ввели отношение эквивалентности на функциях размещения, то новое конфигурационное пространство было бы просто произведением конечного количества копий $\mathcal{K}_{n,m}$ [какого именно зависит от того, накладываем ли мы ограничения на функции размещения]. Однако в наших условиях они ещё каким-то образом *склеиваются*, и хотелось бы понять, как именно.

Для начала будем считать, что никаких ограничений на функции размещения нет. Обозначим новое конфигурационное пространство через $C_{n,m,k}$. Заметим следующее:

1. Каждая грань $\mathcal{K}_{n,m}$ соответствует вырождению некоторого количества кусков торта. Действительно, в нашей параметризации грани определяются равенствами типа $x_i = x_j$, $x_i = 0$, $x_i = 1$ (аналогично для y_i), каждое из которых означает вырождение. Говоря более точно, по каждой грани можно восстановить номера вырожденных кусков. Например, каждая вершина $\mathcal{K}_{n,m}$ соответствует разрезанию с одним невырожденным куском. Всего, очевидно, есть nm таких разрезаний, и вершин тоже nm.

2. Все копии $\mathcal{K}_{n,m}$ в $C_{n,m,k}$ могут склеиваться только *по одинаковым граням* (то есть по граням, задающихся одними и теми же уравнениями на x_i и y_j). Действительно, две функции размещения равносильны, если они отличаются только размещением вырожденных кусков, а в прошлом пункте мы показали, что каждая грань однозначно задаёт номера вырожденных кусков. Так, например, внутренности $\mathcal{K}_{n,m}$ не склеиваются (они соответствуют разрезаниям, в которых нет вырожденных кусков).

3. Пространство $C_{n,m,k}$ — *регулярный клеточный комплекс*. Это очевидно из предыдущего пункта — изначально уже были выделены вершины, рёбра и скелеты всех размерностей до $n+m-1$, часть из них просто склеилась. Ясно также, что этот комплекс можно описывать комбинаторно, то есть нам осталось понять, когда набор вершин заклеен в $C_{n,m,k}$.

4. Поймём, как устроены вершины $C_{n,m,k}$. Из написанного выше следует, что вершины $C_{n,m,k}$ получаются после склейки каких-то вершин копий $\mathcal{K}_{n,m}$. Так как вершины $\mathcal{K}_{n,m}$ соответствуют разрезаниям с одним невырожденным куском, мы понимаем, что в $C_{n,m,k}$ всего k копий каждой вершины $\mathcal{K}_{n,m}$ — каждая копия соответствует тому, в какую из k коробок размещён единственный невырожденный кусок. Итого, в $C_{n,m,k}$ есть knm вершин. Каждую вершину удобно пометить тройкой (x, y, z), где (x, y) соответствует метке (единственного) невырожденного куска торта, а z — номеру коробки, в которую этот кусок размещается.

5. Итак, пусть
$$V \subset \{(x, y, z) \mid 1 \leqslant x \leqslant n, 1 \leqslant y \leqslant m, 1 \leqslant z \leqslant k\}$$
— некоторый набор вершин комплекса $C_{n,m,k}$. Как понять, заклеено ли V? Заклеенность означает в точности то, что $F = \{(x, y) \mid \exists z : (x, y, z) \in V\}$ — грань в $\mathcal{K}_{n,m}$, и что найдётся функция размещения α, такая что[2]
$$V = \{(x, y, \alpha(x, y)) \mid (x, y) \in F\}.$$
Первое условие можно переформулировать так: если $(x_1, y_1) \in F$ и $(x_2, y_2) \in F$, то $(x_1, y_2) \in F$ и $(x_2, y_1) \in F$. Второе условие означает, что один кусок помещается ровно в одну коробку, то есть не выполняется одновременно $(x, y, z_1) \in V$ и $(x, y, z_2) \in V$, где $z_1 \neq z_2$.

[2]Здесь для ясности мы упростили обозначения; правильнее было бы написать $\alpha(f(x, y))$ вместо $\alpha(x, y)$, где $f\colon [n] \times [m] \to [nm]$ — биекция.

Таким образом, мы доказали следующую теорему, описывающую $C_{n,m,k}$:

Теорема 3.1. Конфигурационное пространство $C_{n,m,k}$ — это регулярный клеточный комплекс. Его вершины можно пометить тройками (x, y, z), где $1 \leqslant x \leqslant n$, $1 \leqslant y \leqslant m$ и $1 \leqslant z \leqslant k$. Он полностью описывается комбинаторно следующим условием. Набор вершин V заклеен в $C_{n,m,k}$, когда выполнены 2 условия:

1. если $(x_1, y_1, z_1) \in V$ и $(x_2, y_2, z_2) \in V$, то найдутся такие t_1 и t_2, что $(x_1, y_2, t_1) \in V$ и $(x_2, y_1, t_2) \in V$;

2. если $(x, y, z_1) \in V$ и $(x, y, z_2) \in V$, то $z_1 = z_2$.

Клетки конфигурационного пространства $C_{n,m,k}$ удобно представлять в виде *числовых таблиц*. А именно, будем рисовать прямоугольную таблицу размера $n \times m$ и расставлять в ней числа (они соответствуют третьим координатам вершин). Условие 2 теоремы 3.1 показывает, что таким образом можно представить все клетки. Например, следующие таблицы представляют клетки для $n = m = 4$ и $k = n + m - 1 = 7$:

1	2	3	
1	1	4	
1	2	3	

		2	2
		2	2
		2	2

7	7	6	7
1	1	1	2
3	4	5	6
7	1	2	3

	2	3	

Следующая же таблица на нашем языке *не будет* называться числовой:

	4		
	2	3	

Действительно, раз тройка стоит в позиции $(1, 3)$, а четвёрка — в позиции $(2, 2)$, по условию условию 1 теоремы 3.1 должно стоять некоторое число в ячейке $(2, 3)$.

Теперь опишем конфигурационное пространство при количественном ограничении на функции размещения. Будем обозначать его через $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$.

Следствие 3.2. Конфигурационное пространство $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$ — это клеточный подкомплекс $C_{n,m,k}$. Подмножество его вершин V заклеено в $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$, когда выполнены 2 условия из теоремы 3.1, а также условие

3. для каждого $z : 1 \leqslant z \leqslant k$ в множестве

$$V \cap \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}, z) \mid 1 \leqslant \widetilde{x} \leqslant n, 1 \leqslant \widetilde{y} \leqslant m\}$$

находится не более t элементов.

На языке числовых таблиц это условие означает, что в таблице не может быть больше t одинаковых чисел. Например, следующие таблицы «лежат» в $\mathcal{D}_{4,4,7,3}$:

1	1	1	
2	2	2	
3	3	3	

		5	5
		2	5
		2	2

1	1	1	2
2	2	3	3
3	4	4	4
5	5	5	6

	7	1	

Стоит также отметить, что при $t \geqslant nm$ имеем $\mathcal{D}_{n,m,k,t} = \mathcal{C}_{n,m,k}$, так как условие, что в таблице не более nm одинаковых чисел, всегда выполняется.

4 Дискретная теория Морса

Для исследования конфигурационных пространств, построенных в предыдущем параграфе, нам понадобится дискретная теория Морса. Напомним ключевые определения и результаты. Подробное описание теории и доказательства можно найти в работе [2].

Определение. Пусть $\mathcal{K}$ — (конечный, регулярный) клеточный комплекс. Его p-клетки мы будем обозначать через $\alpha^{(p)}$ или просто через α; обозначение $\alpha < \beta$ означает, что α — грань β. *Дискретным векторным полем* F на $\mathcal{K}$ называется такой набор пар $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$, что каждая клетка в $\mathcal{K}$ спарена не более одного раза. *Градиентной траекторией* для V называется последовательность клеток

$$\alpha_0^{(p)}, \quad \beta_0^{(p+1)}, \quad \alpha_1^{(p)}, \quad \beta_1^{(p+1)}, \quad \alpha_2^{(p)}, \quad \ldots, \quad \beta_r^{(p+1)}, \quad \alpha_{r+1}^{(p)},$$

такая что $\{\alpha_i < \beta_i\} \in F$ и $\beta_i > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ для всех $i = 0, \ldots, r$. Траектория называется *замкнутой*, если $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$. Дискретное векторное поле без замкнутых траекторий называется *дискретной функцией Морса*. Неспаренные клетки $\mathcal{K}$ называется *критическими*.

Для нас важно следующее утверждение (а точнее, его следствие):

Утверждение 4.1. Пусть на клеточном комплексе $\mathcal{K}$ задана дискретная функция Морса. Тогда этот комплекс гомотопически эквивалентен клеточному комплексу, в котором количество клеток размерности p равно количеству критических клеток $\mathcal{K}$ размерности p.

Следствие 4.2. Пусть на клеточном комплексе $\mathcal{K}$ размерности p задана дискретная функция Морса, спаривающая все клетки, за исключением одной клетки нулевой размерности и какого-то количества клеток размерности p. Тогда этот комплекс гомотопически эквивалентен букету p-сфер, и, в частности, он $(p-1)$-связен.

В следующих параграфах мы будем строить дискретные функции Морса на конфигурационных пространствах $\mathcal{C}_{n,m,k}$ и $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$. Для этого нужно понять, как устроены грани клеток (и наоборот, как построить клетку, гранью которой является данная). Это легко описать с помощью теоремы 3.1 на языке числовых таблиц. А именно, чтобы найти гипергрань, нужно выбрать ровно одну непустую строку (непустой столбец) и вычеркнуть её (его). Например,

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&1&2&3\\\hline 3&4&1&2\\\hline 2&3&4&1\\\hline 1&2&3&4\\\hline\end{array}
\quad\rightsquigarrow\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&1&2&3\\\hline 3&4&1&2\\\hline 2&3&4&1\\\hline &&&\\\hline\end{array}
\ ,\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&1&2&3\\\hline &&&\\\hline 2&3&4&1\\\hline 1&2&3&4\\\hline\end{array}
\quad\text{или}\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&1&&3\\\hline 3&4&&2\\\hline 2&3&&1\\\hline 1&2&&4\\\hline\end{array}
$$

[Всего в примере выше было 8 вариантов выбрать гипергрань.] Аналогично, чтобы найти таблицу, гипергранью которой является данная, нужно выбрать некоторую пустую строку или пустой столбец, и заполнить их числами, соблюдая условия теоремы 3.1. Например,

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline &&1&2\\\hline &&2&1\\\hline &&6&7\\\hline &&&\\\hline\end{array}
\quad\rightsquigarrow\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \cdot&&1&2\\\hline \cdot&&2&1\\\hline \cdot&&6&7\\\hline &&&\\\hline\end{array}
\ ,\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline &\cdot&1&2\\\hline &\cdot&2&1\\\hline &\cdot&6&7\\\hline &&&\\\hline\end{array}
\quad\text{или}\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline &&1&2\\\hline &&2&1\\\hline &&6&7\\\hline &&\cdot&\cdot\\\hline\end{array}
$$

В пространстве $C_{n,m,k}$ здесь на месте точек могут стоять произвольные числа от 1 до k. Если же мы работаем с пространством $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$, то надо учитывать третье условие из теоремы 3.2: после добавления новых чисел каждое из них по-прежнему не должно встречаться больше t раз.

5 Одномерный случай

В этом параграфе мы продемонстрируем, как можно использовать дискретную теорию Морса в одной из простейших версий нашей задачи. А именно, мы изучим конфигурационное пространство $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$ в частном случае $m = 1$, когда проводятся только вертикальные разрезы, и, соответственно, торт можно считать одномерным. Если также добавить условие $t = 1$, то нетрудно видеть, что наше конфигурационное пространство — это в точности *шахматный комплекс*, возникающий, например, в статье [4] при решении одномерной задачи о делении без зависти.

Определение. *Шахматный комплекс* $\Delta_{n,m}$ — это симплициальный комплекс расстановок не атакующих друг друга ладей на шахматной доске размера $n \times m$. Более формально, множество вершин $\Delta_{n,m}$ — это $[n] \times [m]$, и на точки $S \subset [n] \times [m]$ натянут симплекс, если S содержит не более одного элемента в каждой строке и каждом столбце. Таким образом, $\mathcal{D}_{1,m,k,1} = \Delta_{m,k}$ и $\mathcal{D}_{n,1,k,1} = \Delta_{n,k}$.

Мы не будем в дальнейшем использовать терминологию с расстановками ладей. Числовые таблицы в случае $m = 1$ превращаются в *числовые строки*, то есть строки вида

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline &2&1&&3&5&7\\\hline\end{array}
$$

Хорошо известно, что шахматный комплекс $\Delta_{r,2r-1}$ $(r-2)$-связен. Мы докажем этот результат с помощью дискретной теории Морса в немного более общей форме.

Обозначение. В этом параграфе и в последующих мы часто будем сравнивать последовательности. Определим на них *лексикографический* порядок, а именно, будем говорить, что последовательность $(a_1, \ldots, a_n)$ *меньше* последовательности $(b_1, \ldots, b_n)$, если для некоторого $k : 1 \leqslant k \leqslant n$ выполнено

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \ldots, \quad a_{k-1} = b_{k-1}, \quad a_k < b_k.$$

Утверждение 5.1. Пространство $\mathcal{D}_{n,1,k,t}$ $(n-2)$-связно при $kt > 2n-2$. В частности, это выполнено для шахматного комплекса $\mathcal{D}_{n,1,2n-1,1}$ и пространства $\mathcal{D}_{n,1,n,2}$.

Доказательство. Будем обозначать через $t_a = t_a(A)$ количество раз, которое встречается число a в числовой строке A. Построим дискретное векторное поле на нашем конфигурационном пространстве. Будем делать это шагам:

1. Пусть A — числовая строка, в которой первая ячейка пуста. Найдём минимальное число a, такое что $t_a < t$, и спарим A с $A + (1, a)$.

2. Пусть A — неспаренная на первом шаге числовая строка, в которой вторая ячейка пуста. Если $A = \{(1,1)\}$, то ничего делать не нужно — мы не собираемся спаривать эту строку. В противном случае число в первой ячейке можно уменьшить, то есть найдётся такое a_1, что $t_{a_1} < t$, хотя на самом деле в первой ячейке стоит число $b_1 > a_1$. Построим новую последовательность t'_a, где $t'_a = t_a$ для всех $a \neq a_1$, а $t'_{a_1} = t_{a_1} + 1$, и найдём минимальное a_2, такое что $t'_{a_2} < t$. Спарим A с $B = A + (2, a_2)$. Эта строка не была спарена на первом шаге, так как число в первой ячейке по-прежнему можно уменьшить.

i. Пусть A — неспаренная после первых $i-1$ шагов числовая строка с пустой i-ой ячейкой. Тогда либо $A = \{(1,1)\}$, и этот случай мы игнорируем, либо:

   - в первых $i-1$ ячейках A стоят числа;
   - каждое из этих чисел можно уменьшить: точнее, если в j-ой ячейке стоит число b_j, то найдётся такая последовательность $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{i-1}$, что $a_j < b_j$ для каждого $j : 1 \leqslant j \leqslant i-1$, и что после замены всех b_j на a_j строка A останется корректной.

   Теперь для каждого a построим число t'_a — сумму t_a и числа раз, которое a встречается в последовательности $(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Осталось найти минимальное a_i, такое что $t'_{a_i} < t$, и спарить A с $B = A + (i, t_i)$. Строка B не была спарена на предыдущих шагах, так как числа в первых $i-1$ ячейках можно по-прежнему уменьшить.

Остаётся проверить, что каждое построенное a_i действительно существует. Пусть это не так. Тогда на каком-то шаге мы получим, что $t'_a = t$ для всех $a : 1 \leqslant a \leqslant k$, и следовательно

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant k} t'_a = kt.$$

Однако из построения очевидно, что на i-ом шаге

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant k} t'_a = \sum_{1\leqslant a\leqslant k} t_a + (i-1) \leqslant n-1+n-1 = 2n-2.$$

В условиях теоремы $kt > 2n-2$, так что мы приходим к противоречию.

Остаётся доказать отсутствие циклов. Для этого построим *полуинвариант* на числовых строках относительно операций удаления числа и добавления числа по алгоритму выше. Для произвольной числовой строки A рассмотрим последовательность $(a_1,\ldots,a_n)$, где a_i — минимальное число, которое можно поставить в i-ую ячейку после того, как числа в первых $i-1$ ячейках уже были минимизированы. Очевидно, что при удалении числа из A последовательность (a_i) может только уменьшиться: если можно было поставить число a_j до удаления, то можно и после. Если же добавить число в A так, как описано в алгоритме выше, то последовательность *не изменится*: при выполнении i-го шага мы ставим в i-ую ячейку в точности число a_i. Более того, если в A в i-ой ячейке стояло число b_i, то последовательность (a_i) при удалении (i,b_i) не меняется тогда и только тогда, когда $a_i \leqslant b_i$.

Из существования полуинварианта и последнего замечания почти сразу следует, что циклов нет. Действительно, в потенциальном цикле полуинвариант меняться не должен, а тогда поочерёдное добавление/удаление чисел постепенно преобразует нашу строку в подстроку $(a_1,\ldots,a_n)$, после чего ничего удалить уже не получится. ∎

6 Без ограничений на функции размещения

В этом параграфе мы перейдём к простейшей двумерной задаче и изучим конфигурационное пространство $C_{n,m,k}$.

Утверждение 6.1. Пространство $C_{n,m,k}$ $(n+m-3)$-связно для любого $k \geqslant 2$.

Доказательство. Как обычно, начнём с построения дискретного векторного поля. Оно будет строиться в два этапа, сначала *строчный*, потом *столбцовый*, и по шагам. На i-ом шаге строчного (столбцового) этапа будет заполняться единицами i-ая строка (столбец). Более детальное описание процесса:

(i) Пусть A — числовая таблица с пустой i-ой строкой, неспаренная на первых $i-1$ строчных шагах. Обозначим через B таблицу A, в которой i-ая строка заполнена единицами. Если $i=1$, то спарим A и B. Если $i=2$ и в A непуста только первая строка, то спариваем A с B только в том случае, если это можно сделать, то есть когда хотя одно число в первой строке $\neq 1$. Если же $i>2$ и только первая строка A непуста, то не спариваем A. Наконец, если не только первая строка A пуста, спариваем A с B.

[j] Пусть A — числовая таблица с пустым j-ым столбцом, неспаренная на всех строчных шагах и первых $j-1$ столбцовых. Пусть B — таблица A, в которой j-ый столбец заполнен единицами. Спарим A с B. Стоит отметить, что при $j=1$ эта операция спарит все оставшиеся после строчного этапа таблицы, в которых

непуста была только первая строка, и оставит только таблицу с одним числом 1 в ячейке $(1,1)$.

Чтобы построенное спаривание было дискретным векторным полем, нужно доказать его *корректность*, то есть что из условия, что A не было спарено на предыдущих шагах, следует, что и A с добавленными в какую-то строку/столбец единицами не было спарено на этих шагах. Это практически очевидно: неспаренность на $[j]$-ом шаге означает, что все строки и все столбцы до j-ого непусты, и в каждой из этих строк (и столбцов) хотя бы одно число не равно 1. Конечно, заполнение единицами не может испортить это условие.

Остаётся доказать отсутствие циклов. Это тоже ясно: если удаляется строка или столбец, в которых хотя бы одно число было $\neq 1$, то в эту таблицу мы уже никогда не вернёмся, а бесконечно удалять и добавлять заполненные единицами строки и столбцы без получения циклов длины 2 невозможно. ■

7 Количественное ограничение

В этом параграфе мы изучим пространство $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$ и усилим результат предыдущего при условии $k \geqslant n$.

Обозначение. Если A — числовая таблица, то через A_i будет обозначаться её i-ая строка, через A^j — её j-ый столбец, а через A_i^j — число, стоящее в ячейке (i,j) таблицы A. Мы также будем писать выражения типа $A + B_i$ и $A + B^j$, имея ввиду, что в i-ую строку (j-ый столбец) A добавляются элементы из i-ой строки (j-ого столбца) B с сохранением условий теоремы 3.1.

Утверждение 7.1. Пусть $n \geqslant m$. Если k и t удовлетворяют условию

$$(k-n+1)(t-n+1) > m(n-1), \tag{7.1}$$

то пространство $\mathcal{D}_{n,m,k,t}$ является $(n+m-3)$-связным. В частности, $(n+m-3)$-связно пространство $\mathcal{D}_{n,m,n+m-1,2n-1}$, то есть когда $k = n+m-1$ и $t = 2n-1$.

Доказательство. Заполним таблицу $n \times m$ числами от 1 до n таким образом, что в каждой строке и каждом столбце нет повторяющихся чисел [можно, например, в первую строку поставить последовательность $(1,2,\dots,n)$, а в остальные её циклические сдвиги]. Будем через $R(a_1,a_2,\dots,a_n)$ обозначать полученную таблицу, где единицы заменены на a_1, двойки — на a_2, и так далее. Пример для $n = m = 4$:

a_4	a_1	a_2	a_3
a_3	a_4	a_1	a_2
a_2	a_3	a_4	a_1
a_1	a_2	a_3	a_4

Перед тем, как строить спаривание, введём некоторые обозначения. Пусть A — произвольная числовая таблица. Для каждого числа $a : 1 \leqslant a \leqslant k$, мы можем посчитать $t_a = t_a(A)$ — количество раз, которое a встречается в A, и $q_{a,\ell} = q_{a,\ell}(A)$, где

$1 \leqslant \ell \leqslant n$, — количество чисел a, которые стоят на *правильных ℓ-позициях* в A, где правильными ℓ-позициями называются ячейки, в которых стоит число ℓ в таблице $R(1, 2, \ldots, n)$. Последовательность $(a_1, \ldots, a_n)$ мы будем называть *правильной*, если она строго монотонна, то есть $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, и если для всех $\ell : 1 \leqslant \ell \leqslant n$ выполнено условие

$$t_{a_\ell} + (n - q_{a_\ell,\ell}) \leqslant t. \tag{7.2}$$

Теперь мы готовы построить спаривание. Оно будет строиться в два этапа, сначала *строчный*, потом *столбцовый*, и по шагам. На i-ом шаге строчного (столбцового) этапа будет заполняться i-ая строка (столбец). Сам алгоритм нахождения пары для A очень прост: нужно найти *минимальную правильную последовательность* [в дальнейшем — *МПП*] $(a_1, \ldots, a_n)$, добавить в A соответствующую строку или столбец из $R(a_1, \ldots, a_n)$, и спарить это с A. Чуть более детальное описание процесса:

(i) Пусть A — числовая таблица с пустой i-ой строкой, неспаренная на первых $i - 1$ строчных шагах. Найдём МПП $(a_1, \ldots, a_n)$. Если $i = 1$, то спариваем A и $B = A + R_i(a_1, \ldots, a_n)$. Если $i = 2$ и в A непуста только первая строка, то спариваем A с B только в том случае, если это можно сделать, то есть когда первая строка не совпадает с числами из $R_1(1, 2, \ldots, n)$. Если же $i > 2$ и только первая строка A непуста, то не спариваем A. Наконец, если не только первая строка A пуста, спариваем A с B.

[j] Пусть A — числовая таблица с пустым j-ым столбцом, неспаренная на всех строчных шагах и первых $j - 1$ столбцовых. Найдём МПП $(a_1, \ldots, a_n)$ и спарим A с $A + R^j(a_1, \ldots, a_n)$. Стоит отметить, что при $j = 1$ эта операция спарит все оставшиеся после строчного этапа таблицы, в которых непуста была только первая строка, и оставит только таблицу с одним числом 1 в ячейке $(1, 1)$.

Чтобы построенное выше спаривание было дискретным векторным полем, нам нужно доказать следующее:

- *корректность*: из условия, что A не было спарено на всех предыдущих шагах, следует, что и $A + R_i(a_1, \ldots, a_n)$ [или $A + R^j(a_1, \ldots, a_n)$] не было спарено на предыдущих шагах;
- *существование*: МПП $(a_1, \ldots, a_n)$ всегда существует.

Начнём с корректности. Перед тем, как переходить к самому доказательству, заметим некоторые полезные свойства МПП.

1. *При добавлении любой строки или столбца МПП не уменьшается*. Действительно, МПП может уменьшиться только в том случае, когда некоторое число a стало удовлетворять условию (7.2). Это, в свою очередь, может произойти только если $q_{a,\ell}$ увеличилось на большее значение, чем t_a, что, разумеется, невозможно: увеличение $q_{a,\ell}$ на 1 означает, что число a было поставлено (на правильную ℓ-позицию, что в данном случае не имеет значения), а это влечёт увеличение t_a на 1.

2. *При удалении любой строки или столбца МПП не увеличивается.* Очевидно, это утверждение двойственно предыдущему: если мы удалили строку и МПП увеличилась, то можно добавить эту строку обратно и тем самым уменьшить МПП, что невозможно.

3. *При добавлении строки или столбца как в спаривании МПП не меняется.* Мы уже знаем из пункта 1, что уменьшиться МПП не может. С другой стороны, МПП не может увеличиться, так как в алгоритме выше все числа a_ℓ ставятся на ℓ-правильные позиции, то есть условие (7.2) для них сохраняется.

Отметим, что условия 2 и 3 означают, что МПП — *полуинвариант*. Из этого ясно, что в нашем спаривании не может быть циклов: поочерёдное удаление строк/столбцов и их добавление приведёт либо к тому, что полуинвариант уменьшится, либо к тому, что исходная таблица превратится в подтаблицу $R(a_1, \dots, a_n)$.

Вернёмся к доказательству корректности. Пусть A — неспаренная на всех шагах до $[j]$-го таблица с пустым j-ым столбцом, $(a_1, \dots, a_n)$ — МПП, и мы хотим спарить A с $B = A + R^j(a_1, \dots, a_n)$. Мы докажем, что B не была спарена на i-ом строчном шаге для произвольного i. Этого достаточно для корректности — доказательство для двух строчных шагов или двух столбцовых будет в точности таким же. В последующем доказательстве i-ая строка таблицы A называется *минимальной*, если она является подстрокой $R_i(a_1, \dots, a_n)$, где $(a_1, \dots, a_n)$ — МПП для A.[3]

Доказательство корректности. Итак, пусть это неверно, и B была спарена на i-ом строчном шаге. Это значит, что i-ая строка A не была минимальной до добавления j-ого столбца, а после стала минимальной. Перепишем эти условия в другом виде. Обозначим через Z таблицу A с удалённой i-ой строкой (таким образом, $Z < A < B$), а через A' — таблицу B с удалённой i-ой строкой (таким образом, $Z < A' < B$). Пусть $(z_1, \dots, z_n)$ — МПП для Z, а $(a'_1, \dots, a'_n)$ — МПП для A'. По предположению $A_i^p \neq R_i^p(z_1, \dots, z_n)$ для некоторого p, такого что $1 \leqslant p \leqslant n$ и A_i^p определено, но A_i — подстрока $R_i(a'_1, \dots, a'_n)$. В частности, $(a'_1, \dots, a'_n) \neq (z_1, \dots, z_n)$. Меньше первая последовательность быть не может по свойствам МПП, а значит она больше. Найдём такое минимальное p, что $a'_\ell = z_\ell$ для всех $\ell : 1 \leqslant \ell < p$, и $a'_p > z_p$. Таким образом, число z_p не встречается в i-ой строке A.[4]

Теперь посмотрим на последовательность $(a_1, \dots, a_n) \geqslant (z_1, \dots, z_n)$. Напомним, что для всех z_ℓ было выполнено неравенство (7.2) в таблице Z. Условие $a'_\ell = z_\ell$, $1 \leqslant \ell < p$, говорит о том, что неравенство (7.2) будет по-прежнему выполнено для всех $\ell : 1 \leqslant \ell < p$ в таблице A, так как в этом случае все z_ℓ стоят в ℓ-правильных позициях в i-ой строке A. Отсюда, в свою очередь, следует, что $a_\ell = z_\ell$ для всех $\ell : 1 \leqslant \ell < p$.

---

[3] В таблице A могут быть заполнены не все ячейки. Мы говорим, что α — подстрока β, если $\alpha(i) = \beta(i)$ для всех i, для которых $\alpha(i)$ определено.

[4] Это ровно то место, из-за которого мы потребовали монотонность в определении правильной последовательности.

Теперь посмотрим на число z_p. Для него условие (7.2) выполнялось в таблице Z. Кроме того, как было доказано выше, это число не встречается в i-ой строке A. Следовательно, неравенство (7.2) выполняется для z_p и в таблице A. Тогда $a_p = z_p$, то есть число z_p стоит в p-правильной позиции в j-ом столбце. Это невозможно, так как в этом случае (по такому же аргументу, что и в абзаце выше) $a'_p = z_p$. Таким образом, мы пришли к противоречию, и таблица B не была спарена на (i)-ом шаге.

Нам остаётся доказать, что МПП существует для любой таблицы.

Доказательство существования. Ясно, что достаточно доказать существование по крайней мере n чисел, удовлетворяющих условию

$$t_a + n \leqslant t.$$

[Если выполнено это условие, то условие (7.2) тоже выполнено, причём для любого ℓ.] Пусть z чисел не удовлетворяют этому условию, то есть для них выполнено $t_a \geqslant t - n + 1$. Значит, в таблице заполнено хотя бы $z(t - n + 1)$ ячеек. На самом деле в таблице заполнено не более $m(n-1)$ ячеек. [Нам нигде не требуется существование МПП для произвольной полной таблицы; даже в потенциальном цикле у каждой таблицы МПП существует, так как там добавляются минимальные строки и столбцы, а не произвольные.] Таким образом,

$$z(t - n + 1) \leqslant m(n-1).$$

Нам нужно доказать, что $n + z \leqslant k$, то есть что $z \leqslant k - n$. Пусть, от противного, $z \geqslant k - n + 1$. Тогда по неравенству (7.1) получаем

$$z(t - n + 1) \geqslant (k - n + 1)(t - n + 1) > m(n-1).$$

Противоречие. Значит, МПП существует. ■

8 Доказательство основных результатов

Для начала покажем, что при $k \geqslant n + m$ деления без зависти может не существовать, даже если предпочтения удовлетворяют условию $\mathrm{P}_{\mathrm{ndt}}$ (см. параграф 2), и, как будет видно из доказательства, даже если предпочтения всех игроков совпадают.

Теорема 8.1. Пусть квадратный торт делится на nm частей и раздаётся k игрокам, где $k \geqslant n + m$, предпочтения удовлетворяют условиям $\mathrm{P}_{\mathrm{cov}}$, P_{cl}, P_{eq}, $\mathrm{P}_{\mathrm{dte}}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{ndt}}$. Тогда деление без зависти существует не всегда.

Доказательство. Мы будем строить контрпример, удовлетворяющий следующим условиям:

- у всех игроков предпочтения одинаковые;

- каждый игрок предпочитает *куски*, а не множества кусков, а именно, игрок предпочитает коробку тогда и только тогда, когда в ней находится хотя бы один предпочитаемый им кусок;
- игроки не предпочитают вырожденные куски;
- при любом разрезании игрок предпочитает не более $n + m - 1$ кусков.

Ясно, что при выполнении этих условий деления без зависти существовать не может.

Для начала введём некоторые обозначения. Напомним, что каждому разрезанию соответствует пара векторов $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-1}$, такая что

$$
\begin{gathered}
0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = 1,\\
0 = y_0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_{m-1} \leqslant y_m = 1.
\end{gathered}
$$

Вместо x_i и y_j нам будет удобнее работать с *длинами* соответствующих отрезков, а именно, пусть

$$
\begin{aligned}
u_j &:= x_j - x_{j-1}, \qquad && 1 \leqslant j \leqslant n,\\
v_i &:= y_i - y_{i-1}, \qquad && 1 \leqslant i \leqslant m.
\end{aligned}
$$

Таким образом, вырождению j-ого столбца соответствует условие $u_j = 0$, а вырождению i-ой строки — условие $v_i = 0$. Зафиксируем достаточно большие числа M и N_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, где $N_i \neq N_j$ для всех $i \neq j$. Точнее, можно выбрать такие M и N_i, что

$$
\frac{m}{M} < 1, \quad \frac{n}{N_i} < 1.
$$

Идея построения заключается в том, что игроки предпочитают кусок торта в том случае, если он «достаточно большой», а все куски с лексикографически меньшим номером «достаточно маленькие». Поскольку предпочтения должны быть замкнутыми, мы не можем полностью разделить эти случаи; но аккуратно подобрав интервалы, можно ограничить количество предпочитаемых кусков числом $n + m - 1$. Формально, определим предпочтения следующим образом. Игрок предпочитает кусок (i, j), где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, при выполнении следующих условий:

1. $v_i \in [\frac{1}{M}, 1]$ и $u_j \in [\frac{1}{N_i}, 1]$;
2. для всех строк $i' < i$ выполнено $v_{i'} \in [0, \frac{1}{M}]$;
3. для всех столбцов $j' < j$ выполнено $u_{j'} \in [0, \frac{1}{N_i}]$.

Очевидно, что такие предпочтения замкнуты и удовлетворяют $\mathrm{P}_{\mathrm{ndt}}$. Докажем, что при любом разрезании игрок предпочитает не более $n + m - 1$ кусков. Очевидно, достаточно рассмотреть случай

$$
v_1 = v_2 = \cdots = v_{m-1} = \frac{1}{M}, \quad v_m > \frac{1}{M},
$$

— тогда условия на v_i выполнены для всех (i, j), и остаётся разобрать только условия на u_j.

Предположим, что в какой-то строке игрок предпочитает больше одного куска, скажем, (i, j) и (i, j'), где $j < j'$. Тогда с одной стороны $u_j \in [\frac{1}{N_i}, 1]$ по условию 1, а с другой — $u_j \in [0, \frac{1}{N_i}]$ по условию 3, то есть $u_j = \frac{1}{N_i}$. Аналогично, r предпочитаемых кусков в одной строке задают $r-1$ условие на различные u_j. Стоит также отметить, что разные строки не могут задавать одни и те же условия, так как все N_i различны. Поскольку $\frac{n}{N_i} < 1$, условий на u_j может быть не более чем $n-1$. Если же не накладывать дополнительных условий, то в каждой строке может быть не более одного предпочитаемого куска — всего m. Значит, в сумме игрок предпочитает не более $m+n-1$ кусков торта, что и требовалось. ∎

Теперь перейдём к доказательству положительных результатов. Идея доказательства стандартна: мы построим эквивариантное отображение из конфигурационного пространства в $\mathbb{R}^{k-1}$, и по свойствам, доказанным в предыдущих параграфах, сделаем вывод о существовании нуля и деления без зависти. Аналогичные доказательства можно найти в статье [4] (теоремы 3.1 и 4.1). Поскольку задача симметрична относительно n и m, будем для удобства считать, что $n \geqslant m$.

Теорема 8.2. Пусть квадратный торт делится вертикальными и горизонтальными разрезами на nm частей и раздаётся k игрокам, $k \leqslant n+m-1$ — степень простого числа, $n \geqslant m$, и выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

- $t = nm$;
- $m = 1$ и $kt > 2n - 2$;
- $(k-n+1)(t-n+1) > m(n-1)$.

Тогда для любых замкнутых, покрывающих, эквивариантных, не зависящих от размещения вырожденных кусков предпочтений (B_{ij}) существует деление без зависти, такое что каждый игрок получает не более t кусков торта.

Доказательство. Доказываем от противного. Пусть деления без зависти не существует, то есть

$$\bigcap_{i=1}^{k} B_{ii} = \varnothing.$$

Из эквивариантности предпочтений также следует, что пусты пересечения $\bigcap_{i=1}^{k} B_{i\sigma(i)}$ для любой перестановки $\sigma \in S_k$. Заменим замкнутые предпочтения B_{ij} на чуть большие открытые (эквивариантные) предпочтения O_{ij}, такие что

$$\forall \sigma \in S_k \ : \ \bigcap_{j=1}^{k} O_{j\sigma(j)} = \varnothing.$$

Теперь для каждого $i : 1 \leqslant i \leqslant k$ найдём эквивариантное разбиение единицы $\{f_{ij}\}_{j=1}^k$, подчинённое покрытию $\{O_{ij}\}_{j=1}^k$. Поскольку предпочтения эквивариантны, эти функции тоже можно сделать эквивариантными:

$$f_{i\sigma(j)}(\sigma(x,\alpha)) = f_{ij}(x,\alpha).$$

По построению условие $f_{ij}(x,\alpha) > 0$ означает, что $(x,\alpha) \in O_{ij}$. Рассмотрим усреднения $F_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k f_{ij}$. Из них мы можем построить S_k-эквивариантное отображение

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_k) \colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^k,$$

где $\mathcal{K} = \mathcal{D}_{n,m,k,t}$ — конфигурационное пространство. Рассмотрим также проекцию

$$\pi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k/D, \qquad \text{где } D = \{(x,x,\dots,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

— диагональ $\mathbb{R}^k$. Положим $\widehat{F} := \pi \circ F$. Если у $\widehat{F}$ нет нуля, то возникает эквивариантное отображение из пространства $\mathcal{K}$ в $\mathbb{S}^{k-2}$, где $k-2 \leqslant n+m-3$. По утверждениям 5.1, 6.1 и 7.1 пространство $\mathcal{K}$ является $(n+m-3)$-связным, поэтому мы приходим к противоречию с теоремой Воловикова (см. [5]).

Далее остаётся применить рассуждение Гейла из статьи [3]. Мы доказали существование точки $(x,\alpha) \in \mathcal{K}$, такой что матрица $(Cf_{ij}(x,\alpha))$ дважды стохастическая для некоторой константы C. По теореме Биркгофа–фон Неймана она лежит в выпуклой оболочке матриц перестановок. Значит, существует такая перестановка $\sigma \in S_k$, что $f_{i\sigma(i)}(x,\alpha) > 0$, откуда $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k} O_{i\sigma(i)} \neq \varnothing$, противоречие. ∎

Подставляя в доказанную выше теорему конкретные значения k и t, мы получаем следующие следствия. [Далее везде предполагается, что предпочтения удовлетворяют условиям $\mathrm{P_{cov}}$, $\mathrm{P_{cl}}$, $\mathrm{P_{eq}}$ и $\mathrm{P_{dte}}$.]

Следствие 8.3. Пусть квадратный торт делится на nm частей и раздаётся k игрокам, где $k \leqslant n+m-1$ — степень простого числа. Тогда деление без зависти всегда существует.

Следствие 8.4. Если одномерный торт $[0,1]$ делится на n частей и раздаётся n игрокам, где n — степень простого числа, то существует деление без зависти, в котором каждый игрок получает не более 2 кусков торта.

Следствие 8.5. Пусть квадратный торт делится на nm частей и раздаётся k игрокам, где $k = n+m-1$ — степень простого числа. Тогда существует такое деление без зависти, что каждый игрок получает не более $2\max(n,m)-1$ кусков торта.

Список литературы

[1] S. Avvakumov и R. Karasev. *Equipartition of a segment*. 2020. arXiv: 2009.09862.

[2] R. Forman. “A User’s Guide To Discrete Morse Theory”. В: *Sém. Lothar. Combin.* 48 (дек. 2001).

[3] D. Gale. “Equilibrium in a discrete exchange economy with money”. В: *International Journal of Game Theory* 13 (1984), с. 61—64.

[4] G. Panina и R. Živaljević. *Envy-free division via configuration spaces*. 2021. arXiv: 2102.06886.

[5] A. Volovikov. “A theorem of Bourgin–Yang type for $\mathbb{Z}_p^n$-action”. В: *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics* 76 (окт. 2007), с. 361.