

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра небесной механики

Щепалова Анастасия Сергеевна

Выпускная квалификационная работа

Метрика в пространствах кеплеровых орбит и ее использование в задачах астрономии

Допущена к защите.

Зав. кафедрой:

д.ф.-м.н., проф. И.И. Шевченко

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент, В.Б. Титов

Рецензент:

д.ф.-м.н., Э.Д. Кузнецов

Санкт-Петербург

2022

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics & Mechanics Faculty

Chair of Celestial Mechanics

Anastasia Shchepalova

Metric in the space of Keplerian orbits and its use in astronomy problems

Graduation Thesis

Admitted for defence.

Head of the chair:

Ivan Shevchenko, Professor

Scientific supervisor:

Titov Vladimir, Associate professor, PhD

Reviewer:

Eduard Kuznetsov, Head of chair of Astronomy, Doctor of Science

Saint Petersburg

2022

Содержание

1	Введение	4
2	Субметрики	5
2.1	Критерий D_1	5
2.2	Критерий D_2	7
2.3	Критерий D_3	8
3	Современные метрики	10
3.1	Метрика ϱ_2	10
3.2	Метрики в фактор-пространствах	12
3.2.1	Фактор-пространство \mathbb{H}/Ω	12
3.2.2	Фактор-пространство \mathbb{H}/g	13
3.2.3	Фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega, g)$	14
3.3	Модельные примеры для метрик $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$	15
4	Фактор-пространство \mathbb{H}_6	17
4.1	Метрика ϱ_6	17
4.2	Модельные примеры для ϱ_6	18
4.3	Алгоритм вычисления ϱ_6	22
4.4	Неравенство треугольника для ϱ_6	24
5	Расстояния между орбитами	27
5.1	Расстояния между орбитами планет Солнечной системы	27
5.2	Расстояния между орбитами астероидов	31
5.3	Челябинское тело	33
6	Средние Фреше в пространстве кеплеровских орбит	36
6.1	Среднее в метрике ϱ_2	38
6.2	Средние в метриках ϱ_4 и ϱ_5	40
6.3	Среднее в метрике ϱ_3	41
7	Вычисление средних орбит и нахождение расстояний до них	45
7.1	Вычисление средних орбит	45
7.2	Вычисление расстояний с помощью метрики ϱ_6	47
8	Заключение	50
	Список литературы	52

1 Введение

Настоящая дипломная работа посвящена исследованию свойств различных метрик и субметрик, их применению для вычисления расстояний между орбитами тел и нахождению средних орбит для множеств орбит.

Во многих областях астрономии требуется оценить схожесть кеплеровских орбит \mathcal{E}_s как точек в некотором 5-мерном пространстве орбит (положение на орбите мы опускаем, но направление движения по орбите учитываем). Данный критерий может быть полезен для следующего списка задач: нахождение тел на близких орбитах, имеющих общее происхождение, отождествление орбит комет и других объектов, наблюдаемых в разных прохождениях, поиск родительских тел метеорных потоков. Он неоднократно применялся в различных работах [10, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 22, 34, 35, 36, 37, 38]. Этой цели служит введение некоторой функции $\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, задающей меру близости, причем критерием близости выступает неравенство

$$\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) < \varepsilon. \quad (1)$$

Значение ε зависит от рассматриваемой задачи. В идеале ϱ должно представлять собой некоторое расстояние, т.е. удовлетворять трем аксиомам метрического пространства [1, 2]:

1. $\varrho(x_1, x_2) \geq 0$, причем $\varrho(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;
2. $\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_2, x_1)$;
3. $\varrho(x_1, x_3) \leq \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)$ (аксиома треугольника).

С середины прошлого века до недавнего времени были известны только субметрики [3, 4, 5, 6] (см. также обзор [10]), где субрасстояние ϱ удовлетворяет первым двум аксиомам, но не третьей: неравенство треугольника нарушается для некоторых троек орбит [13, 14].

В 2004 году появилась и настоящая метрика [15], действующая в пространстве \mathbb{H}_0 ограниченных орбит (эллиптических и прямолинейно-эллиптических). В приложениях же наибольший интерес представляют околопараболические орбиты. Поэтому вскоре были предложены метрики [16, 13, 14], действующие в пространстве \mathbb{H} непрямолинейных орбит и в пространстве \mathbb{H}^* всех кеплеровых орбит. Соответствующие метрики индуцируются евклидовым расстоянием в пространствах \mathbb{R}^6 и \mathbb{R}^7 , в которые вкладываются 5-мерные пространства \mathbb{H} и \mathbb{H}^* . Эти метрики уже используются в задачах отождествления и поиска генетически связанных семейств небесных тел [14, 17, 19, 20]. В 2010 г. Дж.Маруськин [21] предложил риманову метрику в пространстве \mathbb{H}_0 .

В данной работе исследуются метрики, полученные в [13, 14], с помощью них вычисляются расстояния между различными орбитами тел Солнечной системы. Приводится

метрика в новом фактор-пространстве [22], она применяется для вычисления расстояний между орбитами метеороидных потоков. Кроме этого, в работе метрики применяются для нахождения средних орбит множеств, приводятся вычисления для конкретных примеров.

2 Субметрики

2.1 Критерий D_1

Исторически первые две субметрики были предложены Саутвортом и Хокинзом [3, 10] и названы D -критерием. Если обозначить через a, q, p, e, i, g, Ω большую полуось, перицентрическое расстояние, фокальный параметр, эксцентриситет, наклон, аргумент перицентра и долготу восходящего узла, то для первого субрасстояния Саутворта–Хокинза справедливо

$$D_1^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + 4 \sin^2 \frac{I}{2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2 \frac{\Pi}{2}. \quad (2)$$

Здесь L — масштабный множитель размерности длины. Обычно его опускают, подразумевая равным 1 а.е. Но это неправильно: для транснептуновых объектов, например, более приемлемо $L = 30$ а.е. Далее, I — взаимный наклон, $\Pi = \lambda_1 - \lambda_2$ — разность долгот в орбите для перицентров, считаемых от взаимного узла. Выбор одного из двух таких узлов безразличен, поскольку при смене узлов каждая из долгот меняется на $\pm\pi$, а их разность на 0 или $\pm 2\pi$, что оставляет инвариантным $\sin^2(\Pi/2)$.

Замечание. Обычно под словом «критерий» понимают некий отличительный признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо. В данном случае авторы словом «критерий» назвали саму метрику, хотя критерием близости она является только при условии существования предела, ниже которого орбиты принимаются близкими.

Для вычисления второго и четвертого слагаемого (2) можно воспользоваться формулами [3, 10]

$$\cos I = c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta, \quad \sin^2 \frac{I}{2} = \sin^2 \frac{i_1 - i_2}{2} + s_1 s_2 \sin^2 \frac{\Delta}{2}, \quad (3)$$

где $c = \cos i$, $s = \sin i$, $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$;

$$\Pi = g_1 - g_2 \pm 2 \arcsin \xi, \quad \xi = \cos \frac{i_1 + i_2}{2} \sin \frac{\Delta}{2} \sec \frac{I}{2}. \quad (4)$$

Знак минус отвечает случаю $|\Delta| > \pi$ при соглашении $0 \leq \Omega < 2\pi$ (или $-\pi < \Omega \leq \pi$).

Докажем первую формулу (4) для случая $0 < \Delta < \pi$, $0 < i_1 < i_2 < \pi/2$. На рисунке (1) изображены две орбиты \mathcal{E}_1 (синяя), \mathcal{E}_2 (красная) и основная плоскость (черная) в проекции на небесную сферу, центр которой совпадает с притягивающим центром (Солнцем в случае планет и астероидов).

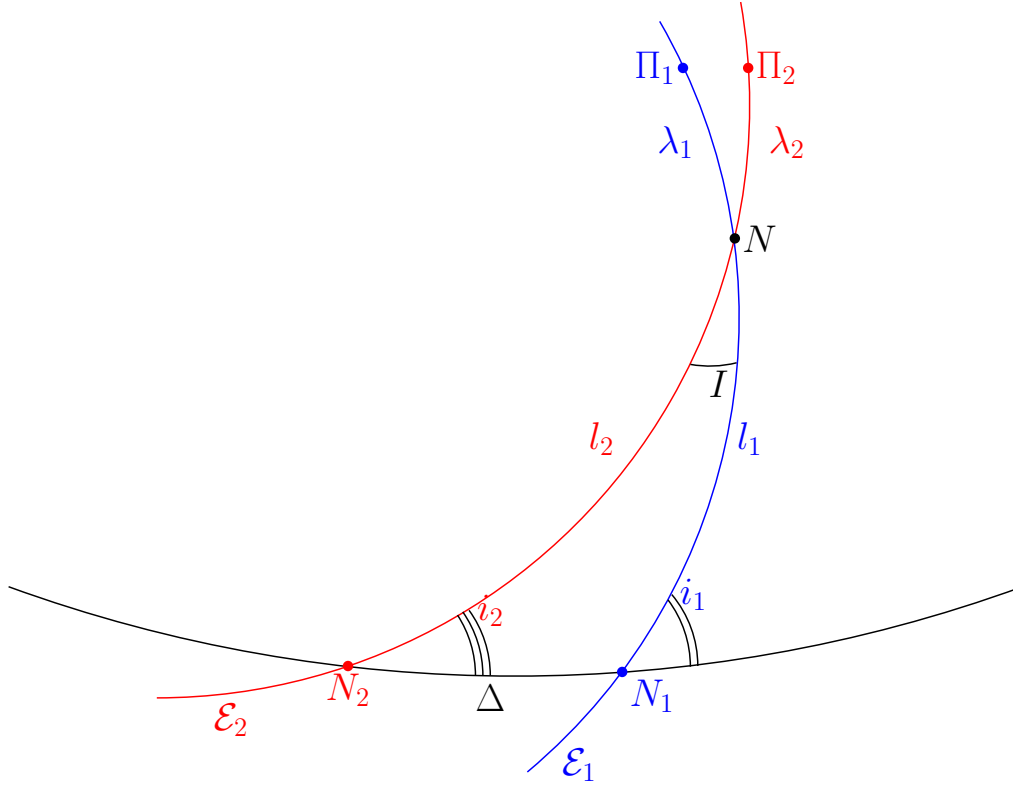


Рис. 1: Положение орбит $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на небесной сфере

Обозначим через Π_s перицентры орбит \mathcal{E}_s , N_s — восходящие узлы, N — взаимный узел. Из рисунка видно, что $N_2N_1 = \Delta = \Omega_1 - \Omega_2$, $N_s\Pi_s = g_s$, $\lambda_s = g_s - l_s$, где $l_s = N_sN$, $\Pi = \lambda_1 - \lambda_2$.

По формуле Деламбра–Гаусса для сферического треугольника N_2N_1N :

$$\cos \frac{I}{2} \sin \frac{l_2 - l_1}{2} = \sin \frac{\Delta}{2} \sin \frac{(\pi - i_1) - i_2}{2} = \sin \frac{\Delta}{2} \cos \frac{i_1 + i_2}{2}, \quad (5)$$

откуда

$$\sin \frac{l_2 - l_1}{2} = \sin \frac{\Delta}{2} \cos \frac{i_1 + i_2}{2} \sec \frac{I}{2} = \xi. \quad (6)$$

В нашем случае $0 < l_s < \pi$, $l_2 > l_1$ (против большего угла лежит большая сторона), $i_1 + i_2 < \pi$, $I < \pi$ (как угол между векторами). Поэтому $0 < l_2 - l_1 < \pi$, $\xi > 0$, так что

$$l_2 - l_1 = 2 \arcsin \xi.$$

Окончательно получаем:

$$\Pi = \lambda_1 - \lambda_2 = g_1 - l_1 - g_2 + l_2 = g_1 - g_2 + l_2 - l_1,$$

$$\Pi = g_1 - g_2 + 2 \arcsin \xi. \quad (7)$$

Формула (4) доказана в указанном случае.

По принципу аналитического продолжения она остается справедливой и при расширении области задания аргументов, пока не встретятся особые точки. Найдем их.

Прежде всего изучим функцию:

$$\Phi = \left(\cos \frac{i_1 + i_2}{2} \sec \frac{I}{2} \right)^2 = \frac{1 + \cos(i_1 + i_2)}{1 + \cos I} = \frac{1 + c_1 c_2 - s_1 s_2}{1 + c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta}.$$

Числитель и знаменатель неотрицательны. Неравенство $\cos \Delta \leq 0$ в силу неотрицательности наклонов влечет $\Phi \leq 1$, т.е. Φ особенностей не имеет.

Рассмотрим еще случай $\xi^2 = 1$, что возможно только при

$$\Phi = 1, \quad \sin \frac{\Delta}{2} = \pm 1. \quad (8)$$

Из второго равенства (8) следует, что $\Delta = \pm\pi$, тогда автоматически выполняется и первое.

Итак, формула (7) верна при $|\Delta| \leq \pi$. При $|\Delta| > \pi$ вместо $\arcsin \xi$ следует взять $\pi - \arcsin \xi$. Поскольку углы определены с точностью до 2π , это равносильно замене $2 \arcsin \xi$ на $-2 \arcsin \xi$. Формула (4) доказана полностью.

2.2 Критерий D_2

При $i_1 = i_2 = 0$, а также при $\Delta = 0$ формула (4) упрощается.

Рассмотрим случай $i_1 = i_2 = 0$.

В формулах (3) $c_1 = c_2 = 1$, $s_1 = s_2 = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos I &= c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta = 1, \\ \cos^2 \frac{I}{2} &= \frac{1 + \cos I}{2} = 1, \quad \cos \frac{I}{2} = \pm 1, \\ \xi &= \frac{\sin \frac{\Delta}{2}}{\cos \frac{I}{2}} = \pm \sin \frac{\Delta}{2}, \\ \Pi &= g_1 - g_2 \pm 2 \left(\pm \frac{\Delta}{2} \right), \\ \Pi &= g_1 - g_2 + \Omega_1 - \Omega_2. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\Pi = (\Omega_1 + g_1) - (\Omega_2 + g_2). \quad (9)$$

Также в этом случае обнуляется второе слагаемое в формуле (2):

$$\sin^2 \frac{I}{2} = \sin^2 \frac{i_1 - i_2}{2} + s_1 s_2 \sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0.$$

Следовательно, формула (2) упрощается:

$$D_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2 \left(\frac{(\Omega_1 + g_1) - (\Omega_2 + g_2)}{2} \right). \quad (10)$$

Теперь рассмотрим случай $\Delta = 0$.

В формулах (3) $\sin \frac{\Delta}{2} = 0$, поэтому

$$\xi = \frac{\cos \frac{i_1+i_2}{2} \sin \frac{\Delta}{2}}{\cos \frac{I}{2}} = 0,$$

$$\arcsin \xi = 0,$$

$$\Pi = g_1 - g_2 \pm 2 \arcsin \xi = g_1 - g_2 = g_1 - g_2 + \Omega_1 - \Omega_2,$$

так как разность $\Omega_1 - \Omega_2 = \Delta = 0$.

В этом случае взаимный узел орбит совпадает с их восходящими узлами $N = N_1 = N_2$. Формула (2) выглядит следующим образом:

$$D_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + 4 \sin^2 \frac{I}{2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2 \left(\frac{g_1 - g_2}{2} \right). \quad (11)$$

Эти обстоятельства побудили авторов [3] ввести второй критерий:

$$D_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + 4 \sin^2 \frac{I}{2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2 \left(\frac{(\Omega_1 + g_1) - (\Omega_2 + g_2)}{2} \right). \quad (12)$$

Он совпадает с D_1 в указанных в начале раздела случаях, но в общем случае эти два критерия различны.

2.3 Критерий D_3

Некоторая модификация функций D_1, D_2 была предложена Драммондом [4, 5]:

$$D_3^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \left(\frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} \right)^2 + \left(\frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} \right)^2 + I^2 + \left(\frac{e_1 + e_2}{2} \right)^2 P^2. \quad (13)$$

Здесь P — угол между векторами Лапласа–Рунге–Ленца, направленными из притягивающего центра в перицентры орбит:

$$\begin{aligned} \cos P = s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2) \cos \Delta + \\ + (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2) \sin \Delta. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку $0 \leq P \leq \pi$, угол P однозначно определяется своим косинусом. Проверим, не является ли D_3 квазиметрикой. Для квазиметрик справедлива ослабленная аксиома треугольника:

$$\varrho(x_1, x_3) \leq A[\varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)] \quad (15)$$

при некоторой постоянной A .

Исследуем подробнее критерий Драммонда (38). Рассмотрим три орбиты с параметрами:

$$q_1 = q_2 = q_3, \quad 0 < e_1 = x, \quad 0 < e_2 = e_3 = y < x, \quad i_1 = i_2 = i_3 = 0,$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \quad g_1 = g_2 = 0, \quad g_3 = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{12} &= 0, & P_{13} &= P_{32} = 1, \\ D_{12}^2 &= \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 P_{12}^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2, \\ D_{23}^2 &= y^2 P_{23}^2 = y^2, \\ D_{13}^2 &= \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 P_{13}^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Предположим, что существует положительная постоянная A , такая, что выполняется (15). Тогда

$$\sqrt{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \leq A \left(\frac{x-y}{x+y} + y\right). \quad (16)$$

При фиксированном y и $x \rightarrow \infty$ левая часть (16) стремится к бесконечности, а правая — к $A(1+y)$. Следовательно функция D_3 не является квазиметрикой, так как не удовлетворяет даже (15).

Легко установить следующие свойства функций $D_s(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, $s = 1, 2, 3$ (см. [13, 14]).

- Функция D_3 зависит лишь от самих орбит, тогда как D_1, D_2 зависят еще и от выбора основной плоскости.
- Введем пространство \mathbb{H} всех непрямолинейных кеплеровских орбит. Функции D_s , $s = 1, 2, 3$, определены лишь на части пространства $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Именно, следует исключить случаи, когда хотя бы одна из двух орбит круговая.
- Для D_s , $s = 1, 2$, следует исключить случай, когда $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ совпадают, но проходятся в противоположных направлениях.
- Функция D_3 почти не различает орбиты при фиксированном q_1 и большими, но разными q_2 , аналогично при фиксированном q_2 , и маленькими, но разными q_1 .
- Ни одна из функций D_s не удовлетворяет аксиоме треугольника и, следовательно, является лишь субрасстоянием.

Перейдем к настоящим метрикам. Удивительно, что их не предложили раньше. Дело, скорее всего, в том, что субметрики применялись только к близким друг к другу орбитам с большими эксцентриситетами, когда указанные недостатки практически не сказываются.

3 Современные метрики

3.1 Метрика ρ_2

В статье [16] показано, что все используемые в астрономии пространства кеплеровских орбит могут быть метризованы без особенностей. В частности, там введены метрики в 5-мерном пространстве \mathbb{H}^* всех кеплеровских орбит и в 5-мерном пространстве \mathbb{H} всех непрямолинейных орбит. Пространство \mathbb{H}^* редко встречается в практике астрономических исследований, метрика там сложнее, поэтому сосредоточим свое внимание на пространстве \mathbb{H} , открытом и локально-компактном. Его главный недостаток (с математической точки зрения) — неполнота, вызванная исключением прямолинейных орбит, но этот факт не влияет на астрономические приложения. Однако предложенная в [16] метрика, как и D_1 , содержит произвольный параметр L . Здесь будет использоваться слегка модифицированная метрика [13, 14], свободная от вышеуказанного недостатка.

Каждая орбита $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$ однозначно определяется двумя ортогональными векторами \mathbf{u}, \mathbf{v} , пропорциональными вектору момента импульса (вектору площадей) и вектору Лапласа–Рунге–Ленца, соответственно. Обратно, каждая пара ортогональных векторов \mathbf{u}, \mathbf{v} при условии $|\mathbf{u}| > 0$ определяет непрямолинейную орбиту $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$. Пусть

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{p}, \quad |\mathbf{v}| = e\sqrt{p}, \quad (17)$$

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0, \quad |\mathbf{u}| > 0. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_x &= \sqrt{p} \sin i \sin \Omega, & v_x &= e\sqrt{p}(\cos g \cos \Omega - \cos i \sin g \sin \Omega), \\ u_y &= -\sqrt{p} \sin i \cos \Omega, & v_y &= e\sqrt{p}(\cos g \sin \Omega + \cos i \sin g \cos \Omega), \\ u_z &= \sqrt{p} \cos i, & v_z &= e\sqrt{p} \sin i \sin g. \end{aligned} \quad (19)$$

Орбита \mathcal{E} взаимно-однозначно определяется набором шести чисел u_x, \dots, v_z , связанных условиями (18). Пять кеплеровских элементов также определяют орбиту однозначно. Обратное верно с необходимыми оговорками. Во-первых, примем $0 \leq i \leq \pi$. Во-вторых, при $i = 0$ или $i = \pi$ считаем $\Omega = 0$. В третьих, если $e = 0$, считаем $g = 0$.

Пространство \mathbb{H} вложено в \mathbb{R}^6 . Согласно (18) \mathbb{H} является частью 5-мерной поверхности второго порядка

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0. \quad (20)$$

Эта поверхность содержит начало координат и вместе с каждой отличной от начала координат точкой $(a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z)$ содержит всю одномерную прямую

$$u_x = a_x t, \quad v_x = b_x t, \quad u_y = a_y t, \quad v_y = b_y t, \quad u_z = a_z t, \quad v_z = b_z t,$$

параметризованную величиной $t \in (-\infty, \infty)$. По определению такая поверхность называется конусом. Из конуса надо исключить 3-мерную плоскость

$$u_x = u_y = v_z = 0. \quad (21)$$

Определим расстояние в пространстве \mathbb{H} как евклидово расстояние в объемлющем пространстве \mathbb{R}^6 :

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}, \quad (22)$$

где $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(\mathcal{E}_k)$, $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(\mathcal{E}_k)$.

Замечание. Здесь сохраняется нумерация метрик из [14]. Индекс 2, отвечающий основному случаю, иногда будем опускать.

Функция (22) определена и не имеет особенностей во всем пространстве \mathbb{H} , включающем все эллиптические, параболические и гиперболические орбиты. Эта метрика превращает \mathbb{H} в неполное, пятимерное, алгебраическое, открытое, локально-компактное, линейно-связное пространство без особых точек. Физическая размерность ϱ — корень из единицы длины. Например,

$$\begin{aligned} (\text{a.e.})^{1/2} &= 153.149\,264\,8 R_{\oplus}^{1/2} = 386.778\,891\,7 (\text{Мм})^{1/2} = \\ &= 12\,231.022\,49 (\text{км})^{1/2} = 386\,778.891\,7 (\text{м})^{1/2}, \quad (23) \end{aligned}$$

где $R_{\oplus} = 6\,378\,164\,222$ мм — экваториальный радиус общего земного эллипсоида [24]. Разумеется, можно предложить метрику, где расстояния измеряются в единицах длины. Достаточно в (43, 18, 19) заменить \sqrt{p} на p . Но мы не будем делать этого ради сохранения физического смысла вектора u — момента импульса с точностью до постоянного нормирующего множителя.

Выведем формулу для вычисления расстояния по известным элементам.

Из формул (19) получаем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 &= p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}(c_1 c_2 + s_1 s_2(\sin \Omega_1 \sin \Omega_2 + \cos \Omega_1 \cos \Omega_2)) = \\ &= p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}(c_1 c_2 + s_1 s_2(\cos(\Omega_1 - \Omega_2))) = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}(c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta), \end{aligned}$$

так что

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos I.$$

Аналогично для вектора $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 &= e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} e_1 e_2 (s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2) \cos \Delta + \\ &+ (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2) \sin \Delta), \end{aligned}$$

поэтому

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} e_1 e_2 \cos P.$$

Так как

$$\varrho_2^2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2,$$

то для ϱ_2 (и всех вводимых ниже расстояний ϱ_s) искомая формула имеет вид

$$\varrho_s^2 = (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\zeta_s\sqrt{p_1p_2}. \quad (24)$$

Для $s = 2$

$$\zeta_2 = \cos I + e_1e_2 \cos P. \quad (25)$$

Здесь I, P — угол между векторами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, соответственно. Вот явные выражения их косинусов:

$$\cos I = c_1c_2 + s_1s_2 \cos \Delta, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \cos P = s_1s_2 \sin g_1 \sin g_2 + (\cos g_1 \cos g_2 + c_1c_2 \sin g_1 \sin g_2) \cos \Delta + \\ + (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2) \sin \Delta, \end{aligned} \quad (27)$$

где $c = \cos i$, $s = \sin i$, $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$.

3.2 Метрики в фактор-пространствах

3.2.1 Фактор-пространство \mathbb{H}/Ω

Часто, хотя и не всегда, узлы орбит имеют большие вековые возмущения, тогда как остальные 4 элемента орбиты меняются незначительно. Полезно поэтому иногда игнорировать узлы, или, что то же, отождествлять орбиты с одинаковыми p, e, i, g вне зависимости от значений Ω . Это достигается введением 4-мерного фактор пространства \mathbb{H}/Ω , элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, g и всевозможными значениями Ω .

Фактор-пространство метрического пространства само является метрическим с хаусдорфовой метрикой [25]. Как показано в [26], последнюю можно представить в простом виде:

$$\varrho_3 = \min_{\Omega_1, \Omega_2} \varrho_2. \quad (28)$$

Наименьшее значение существует в силу компактности тора.

Выразим ϱ_3 (28) через элементы. Соотношение (24) имеет вид

$$\varrho^2 = A_0 + A_1 \cos \Delta + A_2 \sin \Delta, \quad (29)$$

где A_k не зависят от Δ . Приведем выражения для A_k

$$A_0 = (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\sqrt{p_1p_2}(c_1c_2 + e_1e_2s_1s_2 \sin g_1 \sin g_2),$$

$$A_1 = -2\sqrt{p_1p_2}(s_1s_2 + e_1e_2(\cos g_1 \cos g_2 + c_1c_2 \sin g_1 \sin g_2)),$$

$$A_2 = -2\sqrt{p_1p_2}e_1e_2(c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2).$$

Так как $A_1 \cos \Delta + A_2 \sin \Delta = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin \left(\Delta + \arctan \frac{A_2}{A_1} \right)$, то наименьшее по Δ значение правой части (29) равно

$$\varrho_3^2 = A_0 - \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} A_1^2 + A_2^2 &= 4p_1 p_2 \left[e_1^2 e_2^2 (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2)^2 + e_1^2 e_2^2 (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + s_1^2 s_2^2 + 2e_1 e_2 s_1 s_2 (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2) \right] = \\ &= 4p_1 p_2 \left[s_1^2 s_2^2 + e_1^2 e_2^2 (1 - s_2^2 \sin^2 g_2)(1 - s_1^2 \sin^2 g_1) + 2e_1 e_2 s_1 s_2 (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2) \right]. \end{aligned}$$

Мы приходим к (24) при

$$\zeta_3 = c_1 c_2 + e_1 e_2 s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + \sqrt{s_1^2 s_2^2 + A}, \quad (30)$$

где

$$A = e_1^2 e_2^2 (1 - s_1^2 \sin^2 g_1)(1 - s_2^2 \sin^2 g_2) + 2e_1 e_2 s_1 s_2 (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2).$$

3.2.2 Фактор-пространство \mathbb{H}/g

Возможна ситуация, когда быстрее изменяются направления перицентров. Напомним, что перигей орбиты Луны движется существенно быстрее узла. Поэтому разумно ввести фактор-пространство \mathbb{H}/g , элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, Ω и всевозможными значениями g . Как показано в [26], метрика в этом пространстве дается формулой

$$\varrho_4 = \min_{g_1, g_2} \varrho. \quad (31)$$

В соотношении (24) от g_s зависит лишь $\cos P$:

$$\begin{aligned} \cos P &= s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2) \cos \Delta + \\ &\quad + (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2) \sin \Delta. \end{aligned}$$

Придадим ему вид

$$\cos P = B_1 \cos \varphi + B_2 \sin \varphi + B_3 \cos \psi + B_4 \sin \psi, \quad (32)$$

где $\varphi = g_1 - g_2$, $\psi = g_1 + g_2$,

$$2B_1 = s_1 s_2 + (1 + c_1 c_2) \cos \Delta, \quad 2B_2 = -(c_1 + c_2) \sin \Delta,$$

$$2B_3 = -s_1 s_2 + (1 - c_1 c_2) \cos \Delta, \quad 2B_4 = (c_1 - c_2) \sin \Delta.$$

Наибольшее значение правой части (32) равно сумме амплитуд гармоник:

$$\max \cos P = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} + \sqrt{B_3^2 + B_4^2}.$$

Прямые вычисления дают

$$4(B_1^2 + B_2^2) = (1 + c_1c_2 + s_1s_2 \cos \Delta)^2, \quad 4(B_3^2 + B_4^2) = (1 - c_1c_2 - s_1s_2 \cos \Delta)^2.$$

Согласно (3) $c_1c_2 + s_1s_2 \cos \Delta = \cos I$, так что

$$2\sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 1 + \cos I \geq 0, \quad 2\sqrt{B_3^2 + B_4^2} = 1 - \cos I \geq 0.$$

В результате $\sqrt{B_1^2 + B_2^2} + \sqrt{B_3^2 + B_4^2} = 1$. Искомый максимум $\cos P$ равен единице, $P = 0$. Это ясно и без вычислений. От аргументов перицентров зависит лишь второе слагаемое под знаком корня в (22). При постоянных $|\mathbf{v}_s|$ оно минимально при нулевом угле между векторами, что достигается их поворотом в орбитальных плоскостях так, чтобы оба вектора были направлены в один из взаимных узлов.

Окончательно, опять приходим к (24) при

$$\zeta_4 = e_1e_2 + \cos I. \quad (33)$$

3.2.3 Фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega, g)$

Можно идти и дальше, игнорируя и узлы, и перицентры. Достаточно ввести трехмерное фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega, g)$ с метрикой

$$\varrho_5^2 = \min_{\Omega_1, \Omega_2, g_1, g_2} \varrho^2. \quad (34)$$

Легко проверяется, что наименьшее значение ϱ (наибольшее значение косинусов I и P) достигается при одинаковых значениях узлов и перицентров:

$$\Omega_1 - \Omega_2 = 0, \quad g_1 = g_2 = 0. \quad (35)$$

Проверим:

$$\max \cos I = \max(c_1c_2 + s_1s_2 \cos \Delta) = c_1c_2 + s_1s_2 = \cos(i_1 - i_2),$$

максимум $\cos I$ достигается при $\cos \Delta = 1$, следовательно, при $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2 = 0$. Далее, $\cos P$ при условиях (35) равен единице, т.е. наибольшему возможному значению.

В результате опять приходим к (24) при

$$\zeta_5 = e_1e_2 + \cos(i_1 - i_2). \quad (36)$$

Метрики ϱ_2, ϱ_4 инвариантны относительно выбора основной плоскости. Напротив, ϱ_3, ϱ_5 зависят от ее выбора, но инвариантны относительно начала отсчета долгот.

3.3 Модельные примеры для метрик $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$

Приведем несколько примеров в простейших случаях.

1. Если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, то $\varrho = 0$ и обратно.
2. Пусть \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 представляют собой одно и то же коническое сечение, проходящее в противоположных направлениях.

Тогда $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, и $i_2 = \pi - i_1$, $\Omega_2 = \pi + \Omega_1$, $g_2 = \pi - g_1$, $I = \pi$, $P = 0$, следовательно $\cos I = -1$, $\cos P = 1$, $c_1 c_2 = -c^2$, $s_1 s_2 = s^2$, $\cos g_1 \cos g_2 = -\cos^2 g$, $\sin g_1 \sin g_2 = \sin^2 g$.

Мы опускаем индексы у величин $p, e, |c|, s, \sin g, |\cos g|$, общих у обеих орбит. Подставляя эти значения в формулы (25,33,36), получаем

$$\zeta_2 = \zeta_4 = e^2 - 1,$$

$$\zeta_5 = e^2 + \cos(i_1 - i_2) = e^2 + \cos(i_1 - \pi + i_1) = e^2 - \cos(2i) = e^2 + 1 - 2c^2.$$

Без труда находим

$$\varrho_s^2 = 2p(1 + e^2) - 2p(e^2 - 1) = 4p, \quad s = 2, 4,$$

$$\varrho_5^2 = 2p(1 + e^2) - 2p(e^2 + 1 - 2c^2) = 4pc^2.$$

Окончательно

$$\varrho_2 = \varrho_4 = 2\sqrt{p}, \quad \varrho_5 = 2|c|\sqrt{p}.$$

Ситуация с ϱ_3 сложнее. Согласно (24, 30)

$$A = e^4(1 - s^2 \sin^2 g)^2 - 2e^2 s^2 (\cos^2 g + c^2 \sin^2 g) = e^4(1 - s^2 \sin^2 g)^2 - 2e^2 s^2 (1 - s^2 \sin^2 g),$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 &= -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g + \sqrt{s^4 + e^4(1 - s^2 \sin^2 g)^2 - 2e^2 s^2 (1 - s^2 \sin^2 g)} \\ &= -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g + |s^2 - e^2(1 - s^2 \sin^2 g)|, \end{aligned}$$

$$\varrho_3^2 = 2p(1 + e^2 - \zeta_3).$$

При $s^2 \leq e^2(1 - s^2 \sin^2 g)$ получаем

$$\zeta_3 = -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g - s^2 + e^2(1 - s^2 \sin^2 g) = e^2 - 1, \quad \varrho_3^2 = 4p,$$

а при $s^2 > e^2(1 - s^2 \sin^2 g)$

$$\zeta_3 = -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g + s^2 - e^2(1 - s^2 \sin^2 g) = 2e^2 s^2 \sin^2 g + s^2 - c^2 - e^2,$$

$$\varrho_3^2 = 2p(1 + e^2 - 2e^2 s^2 \sin^2 g + s^2 - c^2 - e^2) = 4p(e^2(1 - s^2 \sin^2 g) + c^2).$$

Итак, формула выглядит следующим образом

$$\varrho_3 = \begin{cases} 2\sqrt{p}, & \text{если } s^2 \leq e^2(1 - s^2 \sin^2 g), \\ 2\sqrt{p[1 + e^2(1 - s^2 \sin^2 g) - s^2]}, & \text{если } s^2 > e^2(1 - s^2 \sin^2 g). \end{cases}$$

Исходя из полученных выкладок, можно сделать вывод, что

$$\varrho_5 \leq \varrho_3 \leq \varrho_2.$$

Обратим внимание, что $\varrho_4 = \varrho_2$, так что никакие повороты линий апсид в орбитальной плоскости не могут сделать орбиты ближе друг к другу. Не меняющие наклона повороты орбитальных плоскостей могут сблизить орбиты лишь при $s^2 \leq e^2(1 - s^2 \sin^2 g)$. Наконец, комбинация указанных поворотов сближает орбиты (как точки в пятимерном метрическом пространстве) всегда, исключая случай $\sin i = 0$.

3. Пусть \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 лежат в одной ориентированной плоскости, так что $i_1 = i_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$ $\Delta = 0$, $\cos I = 1$, $\cos P = \cos(g_1 - g_2)$.

Тогда в формулах (30,33,36,25),

$$\zeta_2 = \zeta_3 = 1 + e_1 e_2 \cos(g_1 - g_2), \quad \zeta_4 = \zeta_5 = 1 + e_1 e_2. \quad (37)$$

Естественно, наименьшее при фиксированных p_k, e_k расстояние достигается при $g_1 = g_2$, а наибольшее — при $g_1 = g_2 + \pi$ и не зависит от ориентации векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} . Метрики в таком случае во всех фактор-пространствах равны.

4. В примере 3 считаем орбиту \mathcal{E}_2 круговой, $e_2 = 0$. Тогда

$$\varrho^2 = (1 + e_1^2)p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2},$$

$$\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = \varrho.$$

В частности, если обе орбиты — круговые, то

$$\varrho = |\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}|.$$

5. Пусть орбиты \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — круговые с произвольной ориентацией ($e_1 = e_2 = 0$). Тогда

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = 0.$$

Следовательно, из формулы (22) получаем

$$\varrho = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos I}.$$

Аналогично

$$\varrho_3 = \varrho_5 = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos(i_1 - i_2)},$$

$$\varrho_4 = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos I}.$$

При $I = 0$ мы получаем случай 4:

$$\varrho = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}} = |\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}|,$$

а при $I = \pi$ и $p_1 = p_2$ — случай 2 для круговых орбит:

$$\varrho = 2\sqrt{p} = \varrho_3 = \varrho_4, \quad \varrho_5 = 2|c|\sqrt{p}.$$

4 Фактор-пространство \mathbb{H}_6

Для полноты картины следует ввести еще одно фактор-пространство \mathbb{H}_6 как в [20], отождествляя орбиты с одинаковыми $p, e, i, \varpi := \Omega + g$. Фиксируется долгота перицентра ϖ , но не Ω, g по отдельности.

4.1 Метрика ϱ_6

Следуя построениям [13, 14], введем в \mathbb{H}_6 играющую роль расстояния функцию

$$\varrho_6 = \min \varrho_2, \quad (38)$$

где наименьшее значение ищется по всем углам $\Omega_k g_k$ при условиях $\Omega_k + g_k = \varpi_k$, где ϖ_k фиксированы.

Аналогичную задачу на минимум для $\varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$ удалось решить в [13, 14], получив для них явные выражения через элементарные функции, которые были приведены выше в формулах (24,30,33,36). Задача для ϱ_6 оказалась сложнее. Ниже она сведена к решению тригонометрического уравнения третьей степени.

Согласно (24) достаточно найти наибольшее значение ζ_2 при указанных условиях:

$$\varrho_6^2 = (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\zeta_6\sqrt{p_1 p_2}, \quad \zeta_6 = \max \zeta_2. \quad (39)$$

Представим ζ_2 в виде многочлена Фурье, используя (26, 27):

$$\begin{aligned} \zeta_2 = & A_0 + A_1 \cos \Delta + A_2 \cos(g_1 - g_2) - A_2 \cos(g_1 + g_2) + \\ & + B_1 \cos(\Delta - g_1 - g_2) + B_2 \cos(\Delta - g_1 + g_2) + B_3 \cos(\Delta + g_1 - g_2) + B_4 \cos(\Delta + g_1 + g_2), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$A_0 = c_1 c_2, \quad A_1 = s_1 s_2, \quad 2A_2 = e_1 e_2 s_1 s_2,$$

$$4B_1 = e_1 e_2 (1 - c_1)(1 + c_2),$$

$$4B_2 = e_1 e_2 (1 - c_1)(1 - c_2),$$

$$4B_3 = e_1 e_2 (1 + c_1)(1 + c_2),$$

$$4B_4 = e_1 e_2 (1 + c_1)(1 - c_2).$$

Подстановка

$$g_1 + g_2 = x, \quad g_1 - g_2 = y, \quad \Delta = \varpi - y$$

переводит (40) в

$$\begin{aligned} \zeta_2(x, y) = & A_0 + A_1 \cos(\varpi - y) + A_2 \cos y - A_2 \cos x + \\ & + B_1 \cos(\varpi - x - y) + B_2 \cos(\varpi - 2y) + B_3 \cos \varpi + B_4 \cos(\varpi + x - y). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$.

Наша задача — найти наибольшее значение $\zeta_2(x, y)$ по всем углам x, y при фиксированных ϖ и коэффициентах A_k, B_k .

4.2 Модельные примеры для ϱ_6

Одна из орбит — круговая. Если хоть один из эксцентриситетов равен нулю, то (41) вырождается в

$$\zeta_2 = c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos(\varpi - y). \quad (42)$$

Наибольшее значение

$$\zeta_6 = c_1 c_2 + s_1 s_2 = \cos(i_1 - i_2) \quad (43)$$

принимается при $y = \varpi$ и произвольном x .

Одна из орбит лежит в основной плоскости. Пусть для определенности $s_2 = 0$. Рассмотрим два случая.

1. $i_2 = 0, s_2 = 0, c_2 = 1$. Тогда

$$\zeta_2 = c_1 + \frac{1}{2}(1 - c_1)e_1 e_2 \cos(\varpi - x - y) + \frac{1}{2}(1 + c_1)e_1 e_2 \cos \varpi. \quad (44)$$

Наибольшее значение

$$\zeta_6 = c_1 + \frac{1}{2}(1 - c_1)e_1 e_2 + \frac{1}{2}(1 + c_1)e_1 e_2 \cos \varpi \quad (45)$$

принимается при $x + y = \varpi$.

2. $i_2 = \pi, s_2 = 0, c_2 = -1$. Тогда

$$\zeta_2 = -c_1 + \frac{1}{2}(1 - c_1)e_1 e_2 \cos(\varpi - 2y) + \frac{1}{2}(1 + c_1)e_1 e_2 \cos(\varpi + x - y). \quad (46)$$

Наибольшее значение

$$\zeta_6 = -c_1 + e_1 e_2 \quad (47)$$

принимается при $x = -\varpi/2, y = \varpi/2$.

Обе орбиты — некруговые и ни одна из них не лежит в основной плоскости.

Вычислим производные

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = A_2 \sin x + B_1 \sin(\varpi - x - y) - B_4 \sin(\varpi + x - y), \quad (48)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = A_1 \sin(\varpi - y) - A_2 \sin y + B_1 \sin(\varpi - x - y) + 2B_2 \sin(\varpi - 2y) + B_4 \sin(\varpi + x - y). \quad (49)$$

Приравняем правую часть (48) к нулю. После элементарных преобразований получим

$$[A_2 - (B_4 + B_1) \cos(\varpi - y)] \sin x - [(B_4 - B_1) \sin(\varpi - y)] \cos x = 0.$$

Подставляя выражения коэффициентов через элементы орбит и сокращая на $e_1 e_2$, перепишем последнее уравнение в виде

$$[s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2) \cos(y - \varpi)] \sin x = [(c_2 - c_1) \sin(y - \varpi)] \cos x. \quad (50)$$

Нам повезло: сумма квадратов коэффициентов при синусе и косинусе x в (50) оказалась полным квадратом D^2 , где

$$D = (1 - c_1 c_2) - s_1 s_2 \cos(y - \varpi). \quad (51)$$

Очевидно, $D \geq 0$. Оставляя пока в стороне вырожденный случай $D = 0$, считаем $D > 0$.

Тогда не только тангенс

$$\operatorname{tg} x = \frac{(c_2 - c_1) \sin(y - \varpi)}{s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2) \cos(y - \varpi)}, \quad (52)$$

но и косинус и синус — дробно-линейные функции от $\cos(y - \varpi)$, $\sin(y - \varpi)$:

$$\cos x = \mu \frac{s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2) \cos(y - \varpi)}{D}, \quad \sin x = \mu \frac{(c_2 - c_1) \sin(y - \varpi)}{D}, \quad \mu = \pm 1. \quad (53)$$

Запишем равную нулю правую часть (49) в виде

$$\begin{aligned} & -A_2 \sin y - A_1 \sin(y - \varpi) - 2B_2 \sin(2y - \varpi) - \\ & - (B_4 + B_1) \sin(y - \varpi) \cos x + (B_4 - B_1) \cos(y - \varpi) \sin x = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Умножая на $4D$ и используя (53), представим (54) в форме

$$\begin{aligned} & 4[-(1 - c_1 c_2) + s_1 s_2 \cos(y - \varpi)][A_1 \sin(y - \varpi) + A_2 \sin y + 2B_2 \sin(2y - \varpi)] - \\ & - 4\mu(B_4 + B_1) \sin(y - \varpi)[s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2) \cos(y - \varpi)] + 4\mu(B_4 - B_1) \cos(y - \varpi)(c_2 - c_1) \sin(y - \varpi) = 0, \end{aligned}$$

что равносильно

$$a_0 + a_1 \sin y + a_2 \sin(y - \varpi) + a_3 \sin(2y - \varpi) + a_4 \sin(2y - 2\varpi) + a_5 \sin(3y - 2\varpi) = 0. \quad (55)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2s_1s_2A_2 \sin \varpi, \\
a_1 &= -4(1 - c_1c_2)A_2 + 4s_1s_2B_2, \\
a_2 &= -4(1 - c_1c_2)A_1 - 4\mu s_1s_2(B_4 + B_1), \\
a_3 &= -8(1 - c_1c_2)B_2 + 2s_1s_2A_2, \\
a_4 &= 2s_1s_2A_1 + 2\mu[(1 - c_1c_2)(B_4 + B_1) + 2\mu(c_2 - c_1)(B_4 - B_1)], \\
a_5 &= 4s_1s_2B_2.
\end{aligned}$$

Подставляя значения A_k, B_k , получим

$$\begin{aligned}
a_0 &= e_1e_2s_1^2s_2^2 \sin \varpi, \\
a_1 &= -e_1e_2s_1s_2(1 + c_1 + c_2 - 3c_1c_2), \\
a_2 &= -2s_1s_2(1 - c_1c_2)(2 + \mu e_1e_2), \\
a_3 &= -e_1e_2(1 - c_1)(1 - c_2)(1 - c_1 - c_2 - 3c_1c_2), \\
a_4 &= s_1^2s_2^2(2 + \mu e_1e_2), \\
a_5 &= e_1e_2s_1s_2(1 - c_1)(1 - c_2).
\end{aligned}$$

Левую часть (55) можно записать в стандартной форме многочлена Фурье третьего порядка

$$b_0 + b_1 \cos y + b_2 \sin y + b_3 \cos 2y + b_4 \sin 2y + b_5 \cos 3y + b_6 \sin 3y = 0. \quad (56)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0, \\
b_1 &= -a_2 \sin \varpi, \\
b_2 &= a_1 + a_2 \cos \varpi, \\
b_3 &= -a_3 \sin \varpi - a_4 \sin 2\varpi, \\
b_4 &= a_3 \cos \varpi + a_4 \cos 2\varpi, \\
b_5 &= -a_5 \sin 2\varpi, \\
b_6 &= a_5 \cos 2\varpi,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
b_0 &= e_1 e_2 s_1^2 s_2^2 \sin \varpi, \\
b_1 &= 2s_1 s_2 (1 - c_1 c_2) (2 + \mu e_1 e_2) \sin \varpi, \\
b_2 &= -s_1 s_2 [e_1 e_2 (1 + c_1 + c_2 - 3c_1 c_2) + 2(1 - c_1 c_2) (2 + \mu e_1 e_2) \cos \varpi], \\
b_3 &= (1 - c_1) (1 - c_2) [e_1 e_2 (1 - c_1 - c_2 - 3c_1 c_2) \sin \varpi - (1 + c_1) (1 + c_2) (2 + \mu e_1 e_2) \sin 2\varpi], \\
b_4 &= (1 - c_1) (1 - c_2) [-e_1 e_2 (1 - c_1 - c_2 - 3c_1 c_2) \cos \varpi + (1 + c_1) (1 + c_2) (2 + \mu e_1 e_2) \cos 2\varpi], \\
b_5 &= -e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1) (1 - c_2) \sin 2\varpi, \\
b_6 &= e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1) (1 - c_2) \cos 2\varpi.
\end{aligned}$$

Случай $D = 0$. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$, $D = 0$. Последнее соотношение равносильно $\cos(y - \varpi) = 1$, $\cos(i_1 - i_2) = 1$, т.е.

$$i_2 = i_1, \quad y = \varpi. \quad (57)$$

Условие $D = 0$ означает, что $\partial \zeta_2 / \partial x = 0$ при любом x . Осталось приравнять нулю правую часть (49) с учетом (57):

$$(B_4 - B_1) \sin x = (A_2 + 2B_2) \sin \varpi,$$

или

$$(1 - c_1) \sin \varpi = 0. \quad (58)$$

Условие $s_1 > 0$ влечет $c_1 < 1$, так что (58) удовлетворяется лишь при $\sin \varpi = 0$.

Итак, случай $D = 0$ возможен лишь при

$$i_1 = i_2, \quad \sin \varpi = 0, \quad (59)$$

причем переменная y должна равняться ϖ . Подставляя (59) в левую часть (54), убеждаемся в справедливости (54) при любом x . Таким образом, при выполнении равенств (59) точка (x, ϖ) тора x, y при любом x стационарна. Соответствующее значение ζ_2 согласно (41) равно ζ_2^* , где

$$\zeta_2^* = (A_0 + A_1) + (A_2 + B_2 + B_3) \cos \varpi + (-A_2 + B_1 + B_4) \cos x = 1 + e_1 e_2 \cos \varpi. \quad (60)$$

Найдем другие стационарные точки $\zeta_2(x, y)$ при условиях (59). Теперь (51, 53) принимают вид $D = s_1^2 - s_1^2 \cos(y - \varpi)$,

$$\cos x = \mu, \quad \sin x = 0. \quad (61)$$

Значения (61) следует подставить в правую часть (49) и получить

$$A_1 \sin(\varpi - y) - A_2 \sin y + \mu B_1 \sin(\varpi - y) + 2B_2 \sin(\varpi - 2y) + \mu B_4 \sin(\varpi - y) = 0,$$

что равносильно

$$(1 + c_1)(2 + \mu e_1 e_2) \sin(\varpi - y) - e_1 e_2(1 + c_1) \sin y + e_1 e_2(1 - c_1) \sin(\varpi - 2y) = 0.$$

Поскольку $\sin \varpi = 0$ согласно (59), получаем окончательно

$$[(1 + c_1)(2 + \mu e_1 e_2) \cos \varpi + e_1 e_2(1 + c_1) + 2e_1 e_2(1 - c_1) \cos \varpi \cos y] \sin y = 0. \quad (62)$$

Уравнение (62) имеет тривиальный корень $y = \varpi$. Поэтому случай $D = 0$ можно не рассматривать отдельно.

4.3 Алгоритм вычисления ϱ_6 .

Опишем алгоритм вычисления ϱ_6 . Он сводится к определению ζ_6 , после чего ϱ_6 дается формулой (39).

1. Если хотя бы одна из орбит — круговая, то ζ_6 определяется формулой (43).
2. Пусть хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости и описывает прямое движение, так что $s_2 = 0$, $c_2 = 1$. Тогда ζ_6 определяется формулой (45).
3. Пусть хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости и описывает обратное движение, так что $s_2 = 0$, $c_2 = -1$. Тогда ζ_6 определяется формулой (47).
4. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$,

$$i_1 = i_2, \quad \sin \varpi = 0. \quad (63)$$

- (а) При $\mu = 1$ и $\mu = -1$ находим все вещественные корни $y_n(\mu)$ уравнения (62) при $-\pi < y \leq \pi$. Два из них $y = 0$ и $y = \pi$ тривиальны и не зависят от μ . Всего получаем не более 6 различных чисел $y_n(\mu)$.
 - (б) По формуле (41) находим $\zeta_2(x(\mu), y_n(\mu))$, где $x(\mu)$ дается соотношениями (61).
 - (в) Искомая величина ζ_6 равна наибольшему из чисел $\zeta_2(x(\mu), y_n(\mu))$.
5. Пусть $e_1 e_2 s_1 s_2 \neq 0$, и хотя бы одно из условий (63) нарушено (случай общего положения).
 - (а) При $\mu = 1$ и $\mu = -1$ находим все вещественные корни $y_n(\mu)$ уравнения (55) или (56) при $-\pi < y \leq \pi$. При каждом μ их не более 6.
 - (б) Каждому корню $y_n(\mu)$ отвечает ровно одно значение $x_n(\mu)$, вычисляемое по формулам (53). Получаем несколько (не более 12) точек вида $(x_n(\mu), y_n(\mu))$.
 - (в) Для каждой пары $(x_n(\mu), y_n(\mu))$ определяем ζ_2 по формуле (41).

(d) Искомая величина ζ_6 равна наибольшему из чисел $\zeta_2(x_n(\mu), y_n(\mu))$.

Замечание. Метрики ϱ_k при $k = 1, \dots, 5$, инвариантны относительно начала отсчета долгот. То же верно и для ϱ_6 . Действительно, правая часть (41) зависит лишь от разности долгот перицентров ϖ .

Алгоритм вычисления расстояния в метрике ϱ_6 реализован в виде программы, которую можно скачать по ссылке:

<https://drive.google.com/drive/folders/1cGCTHqxqatGfReK3jXRrhhLEc8pdzJwk?usp=sharing>

Описание работы программы.

Программа написана на языке C++. Для численного решения уравнения была использована библиотека `distlink` из статьи [27]. На вход программе подается количество орбит и элементы для каждой орбиты, она рассчитывает расстояние между выбранным числом орбит (считая расстояния между каждой орбитой со всеми остальными).

Данная программа выполняет вычисление расстояний между двумя и более орбитами в метрике ϱ_6 .

В данной программе для численного решения уравнений используется библиотека `distlink`, написанная Р.В. Балухевым и Д.В. Микрюковым.

Расчет расстояний между двумя орбитами А и В выполняет функция `distances`, исходный код которой находится в файле `distances.cpp`.

Описание файлов программы:

`glavn.cpp` - Основной файл программы, в котором происходит чтение входных данных, вызов функции вычисления расстояния и запись результатов выполнения программы в файл `output`.

`distances.cpp` - Файл, в котором находится функция `distances` - функция вычисления расстояния между орбитами. Аргументы функции: `long double elements1[5]` — элементы орбиты А: $g_1, \Omega_1, i_1, e_1, a_1$ (аргумент перицентра, долгота восходящего узла, наклонение, эксцентриситет, большая полуось первой орбиты), `long double elements2[5]` — элементы орбиты В: $g_2, \Omega_2, i_2, e_2, a_2$ (аргумент перицентра, долгота восходящего узла, наклонение, эксцентриситет, большая полуось второй орбиты) Функция возвращает значение (`long double`) расстояния ϱ_6 между орбитами А и В.

`distances.h` - Заголовочный файл.

`distlink.cpp` - Файл библиотеки `distlink`. Используется для численного решения уравнения с высокой точностью.

`distlink.h` - Заголовочный файл.

`input` - файл с входными данными в формате: первое число = количеству орбит, для расчета. Не больше чем орбит в файле. Далее список элементов орбит в виде g, Ω, i, e, a (аргумент перицентра, долгота восходящего узла, наклонение, эксцентриситет, большая

полуось). Углы (аргумент перицентра, долгота восходящего узла, наклонение) в градусах. Элементы каждой орбиты в новой строке. Для неэллиптических орбит значение a (большой полуоси) должно быть отрицательным.

Output - Файл вывода. Выводятся элементы двух орбит и расстояние между ними. Считаются расстояния между всеми орбитами в файле. Каждая орбита со всеми остальными.

Для компиляции программы в консоли выполнить команду: `g++ glavn.cpp distlink.cpp distances.cpp -o main.prg` Для запуска программы в консоли нужно выполнить команду: `./main.prg`.

4.4 Неравенство треугольника для ϱ_6

Первые две аксиомы метрического пространства для $\varrho_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ выполняются так же как и для $\varrho_2 - \varrho_5$, остается проверить выполнение аксиомы треугольника [35].

Перейдем к свойствам функции ϱ_6 .

А. Функция ϱ_6 не удовлетворяет даже ослабленной аксиоме треугольника $3a$. Это следует из нижеприведенного примера.

Представим орбиту \mathcal{E} из \mathbb{H}_2 вектором $F(\mathcal{E})$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$:

$$F(\mathcal{E}) = \sqrt{p} \begin{pmatrix} c \\ -i s \exp i(\varpi - \omega) \\ \frac{e}{2} ((c + 1) \exp i\varpi + (1 - c) \exp i(\varpi - 2\omega)) \\ s e \sin \omega \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Здесь, как и прежде, p, e, ω, ϖ — фокальный параметр, эксцентриситет, аргумент перицентра и долгота перицентра орбиты, c и s — косинус и синус наклонения, а i — мнимая единица.

Первые две координаты $F(\mathcal{E})$ соответствуют высоте и проекции на базовую плоскость вектора \mathbf{u} , пропорционального моменту импульса (74). Третья и четвертая — проекции и высоте вектора \mathbf{v} , пропорционального вектору Лапласа–Рунге–Ленца. При изменении аргумента перицентра ω от 0 до 2π вектор \mathbf{u} движется по окружности с центром на оси z , а \mathbf{v} описывает восьмерку на сфере радиуса $e\sqrt{p}$ с узлом в точке $\omega = 0$.

При этом

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = |F(\mathcal{E}_1) - F(\mathcal{E}_2)|, \quad \varrho_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \min_{\omega_1, \omega_2} |F(\mathcal{E}_1) - F(\mathcal{E}_2)|,$$

где модуль вектора s комплексными координатами (b_1, b_2, b_3, b_4) обозначает величину $(|b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2 + |b_4|^2)^{1/2}$.

При изменении ω_1 и ω_2 от 0 до 2π , третьи компоненты векторов $F(\mathcal{E}_1)$ и $F(\mathcal{E}_2)$ описывают окружности с центрами $e_j \sqrt{p_j} (1 + c_j) \exp i\varpi_j / 2$ и радиусами $e_j \sqrt{p_j} (1 - c_j) / 2$,

$j = 1, 2$. Расстояние между $F(\mathcal{E}_1)$ и $F(\mathcal{E}_2)$ не меньше расстояния между ближайшими точками этих окружностей, что влечет неравенство

$$2\varrho_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq |e_1\sqrt{p_1}(1+c_1)\exp i\varpi_1 - e_2\sqrt{p_2}(1+c_2)\exp i\varpi_2| - [e_1\sqrt{p_1}(1-c_1) + e_2\sqrt{p_2}(1-c_2)] \quad (65)$$

для любых $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{H}_2$.

Обозначим для краткости три орбиты, необходимые нам для примера, через x, y, z . Их элементы приведем в таблице

Элемент	x	y	z
p	1	1	1
e	e	e	e
i	i	i	i
ϖ	β	$-\beta$	0

Свяжем элементы соотношениями

$$e > 0, \quad 7 - 4\sqrt{3} = 0.071797 < c < 1, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1-c}{1+c}, \quad (66)$$

обеспечивающими касание окружностей, задаваемых третьей координатой вектора (64) у пар орбит x, z и y, z .

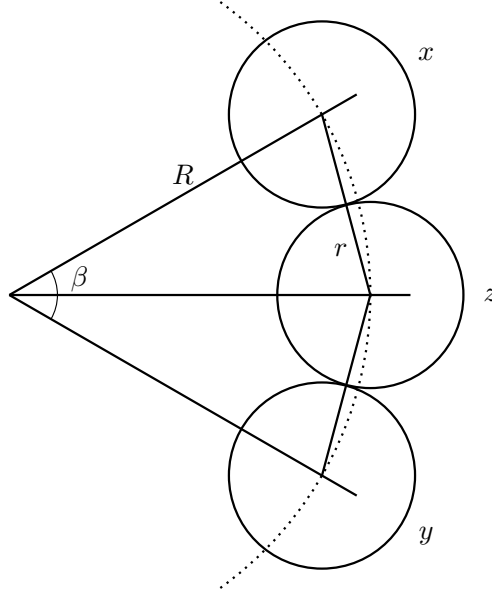


Рис. 2: Проекции векторов \mathbf{v} орбит из классов x, y и z на базовую плоскость. $R = e(1+c)/2$, $r = e(1-c)/2$

Используя (65,66), оценим

$$\begin{aligned} \varrho_6(x, y) &\geq \frac{e}{2} [(1+c)|\exp i\beta - \exp(-i\beta)| - 2(1-c)] = e[(1+c)\sin \beta - (1-c)] = \\ &= e(1-c) \left[2\sqrt{1 - \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2} - 1 \right] = e(1-c) \left(\frac{4\sqrt{c}}{1+c} - 1 \right), \quad (67) \end{aligned}$$

что положительно в силу первых соотношений (66). Функцию $\varrho_6(x, z)$ оценим сверху расстоянием ϱ_2 между следующими представителями $x(\omega_1)$ и $z(\omega_2)$ классов x и z :

$$\omega_1 = \frac{\pi + \beta}{4}, \quad \omega_2 = \frac{3\pi - \beta}{4}.$$

Прямым вычислением, учитывая (66), можно убедиться, что векторы \mathbf{v}_x и \mathbf{v}_z этих представителей совпадают:

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_z = \frac{e}{2} \left((1+c) \cos^2 \frac{\beta}{2}, (1-c) \cos \frac{\beta}{2}, 2s \sin \frac{\pi + \beta}{4} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varrho_6^2(x, z) &\leq \varrho_2^2(x, z) \leq s^2 |\exp i(\beta - \omega_1) - \exp(-i\omega_2)|^2 = \\ &= s^2 |\exp i(\beta - (\omega_1 - \omega_2)) - 1|^2 = 2s^2 \left(1 + \sin \frac{\beta}{2} \right) = \frac{4s^2}{1+c} = 4(1-c). \end{aligned} \quad (68)$$

Пара орбит y, z получается из пары z, x сдвигом на $-\beta$ по координате ϖ . Из формулы (64) видно, что такой сдвиг не меняет расстояний ϱ_2 и ϱ_6 . Следовательно $\varrho_6(y, z) = \varrho_6(x, z)$. Из (65,68) следует

$$\frac{\varrho_6(x, y)}{\varrho_6(x, z) + \varrho_6(y, z)} \geq \frac{e}{4} \sqrt{1-c} \left[\frac{4\sqrt{c}}{1+c} - 1 \right]. \quad (69)$$

Правая часть (69) положительна и неограниченно возрастает с ростом e . Таким образом, универсальной постоянной M , обеспечивающей неравенство 3а, не существует.

Однако наш контр-пример требует нереально большого эксцентриситета. Прямой расчет дает для правой части (69) наибольшее значение $0.1576949e$ при $c = 0.4512257$. Таким образом, неравенство треугольника может гарантированно нарушаться для тройки x, y, z только при $e > 6.341360$.

Возможно, для негиперболических орбит ϱ_6 все же удовлетворяет аксиоме треугольника 3, в его пользу говорят нижеследующие свойства.

Б. Пусть орбита x круговая, а y и z произвольны. Обозначим соответствующие орбитам пары векторов, определенные равенством (74) $(\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x)$, $(\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y)$ и $(\mathbf{u}_z, \mathbf{v}_z)$. По определению,

$$\varrho_6(y, z) = \min_{R, S} \|R\mathbf{u}_y - S\mathbf{u}_z, \bar{R}\mathbf{v}_y - \bar{S}\mathbf{v}_z\| = \|R_0\mathbf{u}_y - S_0\mathbf{u}_z, \bar{R}_0\mathbf{v}_y - \bar{S}_0\mathbf{v}_z\|. \quad (70)$$

Запятые между парами трехмерных векторов в (70) соединяют их в векторы шестимерные, для которых вычисляется евклидова норма. Минимум берется по всем поворотам R и S трехмерного пространства вокруг оси аппликат. Каждое из этих преобразований соответствует одному значению долготы восходящего узла; \bar{R} и \bar{S} обозначают преобразования векторов \mathbf{v}_y \mathbf{v}_z такие, что $(R\mathbf{u}_y, \bar{R}\mathbf{v}_y) \sim (\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y)$ и $(S\mathbf{u}_z, \bar{S}\mathbf{v}_z) \sim (\mathbf{u}_z, \mathbf{v}_z)$. Индексом 0 отмечена та пара преобразований, на которой достигается минимум.

Пусть P и Q — такие повороты вокруг оси z , что векторы \mathbf{u}_x , $P\mathbf{u}_y$ и $Q\mathbf{u}_z$ лежат в одной плоскости вместе с ортом \mathbf{k} , по одну сторону от последнего. Тогда

$$\begin{aligned}\varrho_6(y, z) &\geq \|P\mathbf{u}_y - Q\mathbf{u}_z, \bar{R}_0\mathbf{v}_y - \bar{S}_0\mathbf{v}_z\|, \\ \varrho_6(x, y) &= \|P\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x, \mathbf{v}_y\| = \|P\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x, \bar{R}_0\mathbf{v}_y\|, \\ \varrho_6(x, z) &= \|Q\mathbf{u}_z - \mathbf{u}_x, \mathbf{v}_z\| = \|Q\mathbf{u}_z - \mathbf{u}_x, \bar{S}_0\mathbf{v}_z\|.\end{aligned}\tag{71}$$

Поскольку три шестимерных вектора под знаками нормы в (71) образуют треугольник, выполнено неравенство

$$\varrho_6(x, y) \leq \varrho_6(y, z) + \varrho_6(x, z).$$

По той же причине, оценки

$$\begin{aligned}\varrho_6(y, z) &\leq \|P\mathbf{u}_y - Q\mathbf{u}_z, \bar{P}\mathbf{v}_y - \bar{Q}\mathbf{v}_z\|, \\ \varrho_6(x, y) &= \|P\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x, \bar{P}\mathbf{v}_y\|, \\ \varrho_6(x, z) &= \|\mathbf{u}_x - Q\mathbf{u}_z, -\bar{Q}\mathbf{v}_z\|,\end{aligned}$$

влекут неравенство

$$\varrho_6(y, z) \leq \varrho_6(x, y) + \varrho_6(x, z).$$

Таким образом, если среди трех орбит есть круговая, то найдется треугольник с длинами сторон, равными расстояниям между орбитами. Отметим, что эксцентриситет двух других орбит может быть любым.

В. Введем подмножество $\mathbb{H}_6(\varpi) \subset \mathbb{H}_6$, состоящее из орбит с фиксированной долготой перицентра ϖ . Для пары орбит из этого подпространства минимальное расстояние между представителями классов эквивалентности достигается при значениях аргументов перицентра, равных 0 или π . Фиксируя соответствующего представителя в каждом классе, мы получим изометричное вложение $(\mathbb{H}_6(\varpi), \varrho_6)$ в $(\mathbb{H}_2, \varrho_2)$. Учитывая, что векторы Лапласа–Рунге–Ленца всех выбранных нами представителей сонаправлены, а векторы момента импульса лежат в одной полуплоскости, нетрудно заключить, что $(\mathbb{H}_6(\varpi), \varrho_6)$ изометрично прямому произведению полуплоскости и луча с евклидовой метрикой.

Таким образом, пространство $(\mathbb{H}_6(\varpi), \varrho_6)$ — метрическое, и аксиома треугольника 3 справедлива.

5 Расстояния между орбитами

5.1 Расстояния между орбитами планет Солнечной системы

Вычислим взаимные расстояния между орбитами всех планет Солнечной системы и Плутона в различных метриках и субметриках. Обратим внимание, что физическая размерность используемых расстояний принята равной корню из а.е. Субрасстояние D_3

безразмерно. Субрасстояния D_1, D_2 безразмерны; входящий в их определение параметр L принят равным 1 а.е.

В качестве входных данных использовались элементы орбит планет Солнечной системы и Плутона на эпоху 2000.0 [28]. Работа программы протестирована на модельных примерах предыдущего раздела.

Результаты приведены в таблицах 1 и 2.

Здесь и далее знаками $\text{☿}, \text{♀}, \text{♁}, \text{♂}, \text{♃}, \text{♄}, \text{♅}, \text{♆}, \text{♁}$ обозначены планеты Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон, соответственно.

Таблица 1: Расстояния $\varrho(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$ между орбитами планет на эпоху 2000.0

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆	♁
♀	0.2772 0.2476 0.1246								
♁	0.4261 0.4024 0.1400	0.1598 0.1591 0.0155							
♂	0.6515 0.6249 0.1842	0.3987 0.3801 0.1206	0.2617 0.2319 0.1213						
♃	1.6749 1.6747 0.0278	1.4335 1.4292 0.1118	1.2855 1.2792 0.1273	1.0627 1.0505 0.1605					
♄	2.4942 2.4866 0.1951	2.2475 2.2410 0.1701	2.0993 2.0923 0.1714	1.8861 1.8635 0.2906	0.8399 0.8142 0.2062				
♅	3.7816 3.7710 0.2826	3.5318 3.5263 0.1981	3.3812 3.3760 0.1891	3.1615 3.1470 0.3022	2.1166 2.0974 0.2842	1.2972 1.2910 0.1267			
♆	4.8762 4.8750 0.1060	4.6299 4.6295 0.0567	4.4800 4.4795 0.0650	4.2547 4.2512 0.1737	3.2024 3.2007 0.1047	2.3921 2.3891 0.1204	1.1251 1.1107 0.1796		
♁	5.7157 5.4880 1.5974	5.4608 5.2541 1.4880	5.3348 5.1266 1.4758	5.1076 4.9062 1.4198	4.2349 3.9315 1.5739	3.5603 3.1816 1.5981	2.7068 2.2548 1.4975	2.2689 1.6686 1.5375	

В таблице 1 первое число в каждой ячейке — расстояние $\varrho(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$ между орбитами соответствующих планет; второе и третье — значения векторов $|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_n|$ и $|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_n|$, соответственно. Эти три величины связаны соотношением (22):

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}.$$

Для каждой пары приводим три величины, чтобы можно было оценить вклад в ϱ от размеров орбит и ориентации их плоскостей, с одной стороны (вектор \mathbf{u}), и вклад от эксцентриситеты и ориентации линий апсид, с другой стороны (вектор \mathbf{v}).

Проанализируем таблицу 1.

У всех пар орбит бóльший вклад в расстояние вносят их размеры и ориентации плоскостей, вклад эксцентриситеты мал, поскольку орбиты планет близки к круговым.

Примерно на порядок или в несколько раз первое число больше второго, редко на 2 порядка: пары Нептун — Венера и Нептун — Земля. Только у планет Плутон — Нептун эти числа примерно равны. У Плутона в парах со всеми планетами сравнимый вклад вносят обе величины, максимум в 5 раз находится различие. Расстояние ρ увеличивается с удалением планет друг от друга, что вполне логично.

На диагонали таблицы находятся расстояния между соседними орбитами. Можно заметить, что чем больше орбиты (планеты дальше от Солнца), тем ρ больше, даже между соседями.

Рассмотрим расстояния в фактор пространствах для орбит планет (Таблица 2).

Таблица 2: Расстояния $\rho, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ между орбитами планет на эпоху 2000.0

	♀	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆	♁
♀	0.277202 0.274249 0.274936 0.273299								
♁	0.426080 0.416841 0.416807 0.416806	0.159823 0.159445 0.159446 0.159444							
♂	0.651522 0.630364 0.625026 0.625025	0.398733 0.397972 0.395411 0.394855	0.261693 0.251778 0.251777 0.251776						
♃	1.674937 1.674929 1.674763 1.673874	1.433547 1.433522 1.433080 1.432925	1.285510 1.282691 1.282690 1.282690	1.062666 1.050152 1.050486 1.049761					
♄	2.494206 2.484854 2.487081 2.484750	2.247485 2.246976 2.247484 2.246880	2.099290 2.098327 2.098326 2.098326	1.886059 1.866663 1.864531 1.862925	0.839940 0.821692 0.816776 0.816553				
♅	3.781606 3.772855 3.771830 3.771716	3.531812 3.531803 3.531754 3.531753	3.381164 3.380996 3.380996 3.380996	3.161505 3.149659 3.148259 3.148193	2.116550 2.101958 2.099375 2.099221	1.297177 1.294090 1.291257 1.289844			
♆	4.876201 4.873283 4.875460 4.873177	4.629855 4.629123 4.629848 4.629061	4.479977 4.479734 4.479734 4.479734	4.254743 4.250844 4.251527 4.250162	3.202434 3.200947 3.201106 3.200708	2.392088 2.392024 2.391775 2.391303	1.125083 1.124871 1.119566 1.115389		
♁	5.715736 5.680060 5.653889 5.641416	5.460799 5.457127 5.458362 5.455603	5.334757 5.332745 5.332646 5.332646	5.107574 5.104126 5.093944 5.086813	4.234888 4.204576 4.164526 4.164204	3.560362 3.525956 3.440328 3.440206	2.706807 2.600972 2.593808 2.585879	2.268931 2.264444 2.192937 2.183259	

Для всех планет расстояния в фактор-пространствах примерно равны расстоянию в основном пространстве и между собой. Расхождения чаще всего начинаются в третьем – четвертом знаках (иногда в пятом - шестом). Но есть пары, различающиеся уже во втором знаке. Например, все пары с Плутоном, кроме Земли, и еще несколько: Марс —

Меркурий, Марс — Земля, Юпитер — Сатурн, Юпитер — Уран. Еще 2 пары: Земля — Меркурий, Земля — Марс имеют различие с основным расстоянием, но все расстояния в фактор-пространствах почти идентичны. Как видно из таблицы 2, рассматривать расстояния в фактор-пространствах для планет Солнечной системы не имеет смысла, наклоны близки к нулю, эксцентриситеты тоже сравнительно малы. Только Плутон (и в меньшей степени Меркурий) немного выбивается из общего ряда, но и для них отличия расстояний не столь значительны.

Приведем для сравнения таблицу 3 субрасстояний D_1, D_2, D_3 . Первое число в графе равно D_1 , второе — D_2 , третье — D_3 .

Таблица 3: Субрасстояния D_1, D_2, D_3

	♁	♂	♃	♄	♅	♆	♇	♁
♁	0.465200 0.483506 1.02238							
♃	0.732336 0.744039 1.02392	0.272372 0.271886 0.456437						
♄	1.10824 1.10739 0.790449	0.676777 0.676777 0.934342	0.416369 0.416369 0.724837					
♅	4.65127 4.64641 1.11131	4.23219 4.23205 1.06614	3.96735 3.96735 0.834523	3.56904 3.57044 0.645347				
♆	8.73378 8.73463 1.10458	8.32044 8.32034 1.16214	8.05561 8.05561 0.973583	7.65776 7.65897 0.778044	4.08907 4.08938 0.308144			
♇	17.9921 17.9929 1.16961	17.5797 17.5797 1.18850	17.3148 17.3148 1.01369	16.9174 16.9174 0.946168	13.3484 13.3484 0.584540	9.25965 9.25965 0.357114		
♁	29.3758 29.3755 1.34893	28.9635 28.9635 0.986667	28.6987 28.6987 0.956507	28.3008 28.3010 1.20295	24.7320 24.7321 0.949061	20.6434 20.6434 0.856166	11.3841 11.3840 0.659266	
♁	29.3351 29.3368 1.07109	28.9237 28.9244 1.37219	28.6593 28.6593 1.32006	28.2624 28.2608 1.16248	17.7370 17.7369 1.04865	20.6055 20.6055 0.921595	11.3473 11.3491 0.778680	0.436356 0.436325 1.00673

Проанализировав таблицу значений D_s , можно сделать следующие выводы.

1) При расчетах с помощью D_1 получаются значения, отличающиеся от ρ примерно на порядок. Отчасти это связано с разной размерностью D_s и ρ . Расстояния возрастают с удалением планет друг от друга, что вполне естественно.

2) Субрасстояния D_2 близки к D_1 , как и предсказывает теория. Почти у всех пар они различаются только во втором и далее знаке после запятой. Это связано с тем, что наклоны орбит большинства планет близки друг к другу и малы. Для Плутона, наклон которого больше, чем у остальных (хотя вообще является тоже малым), отличие также не превышает нескольких тысячных, что связано со схожей долготой его восходящего узла с другими планетами. Почти для всех пар орбит Земля — планета различия вплоть

до 9-го знака после запятой незаметны. Данная картина наблюдается из-за практически нулевого наклона орбиты Земли.

3) Значения D_3 малы как для близких, так и для далеких планет, не наблюдается какой-либо закономерности. Это связано с тем, что в формуле (38) первое слагаемое стремится к 1 при $q_1 \rightarrow \infty$ и фиксированном q_2 . В таком случае расстояния получатся одинаковыми при одном q_2 и при больших, но разных q_1 (аналогичная ситуация будет при фиксированном q_1 и при $q_2 \rightarrow 0$). Кроме того, для круговых орбит D_3 ведет себя плохо: при $e_1 = 0, e_2 \neq 0$ четвертое слагаемое правой части (38) не определено (для круговой орбиты вектор P , направленный из притягивающего центра в перицентр орбиты, не определен), а второе равно единице, что противоречит здравому смыслу. Все это приводит к значениям субрасстояний, заключенным между 0 и 1.4. Недостаток этой субметрики еще и в том, что расстояния не увеличиваются при удалении планет друг от друга, а имеют скачки, поэтому ее затруднительно использовать при сравнении орбит.

5.2 Расстояния между орбитами астероидов

В задаче отождествления родительских тел астероидно-метеороидных комплексов центральную роль играют метрики в пространстве кеплеровских орбит и в трех важнейших фактор-пространствах, полученных игнорированием долгот узлов, аргументов перицентров, или обоих этих углов.

В данной работе были найдены четыре типа расстояний с помощью метрик $\varrho_2 - \varrho_5$ между орбитами $N = 606\,994$ астероидов и комет, всего $N(N - 1)/2 = 184\,220\,554\,521$ пар. Параметры орбит взяты из [49].

Величины ϱ_s имеют размерность квадратного корня из длины. Мы приводим их в системе, в которой за единицу длины принята астрономическая единица. Переход к другим единицам содержится в (23). Введенное соглашение будет использоваться для всех последующих разделов данной работы. Нас интересуют малые расстояния. Были отобраны пары астероидов, для которых расстояния между их орбитами и фактор-орбитами не превосходят $10^{-4} (\text{a.e.})^{1/2} = 0.0153 R_{\oplus}^{1/2} = 1.22 (\text{км})^{1/2}$. Наименьшие найденные расстояния приведены в табл. 4.

Наименьшее расстояние, равное $2,31 \cdot 10^{-5}$, принадлежит паре № 63440 и № 331933. Элементы орбит данных астероидов представлены в таблице 5. Можно увидеть, что они различаются лишь в пятом или шестом знаке. Напрашивается предварительный вывод: эти астероиды являются осколками одного, либо это вообще один и тот же астероид. Отдельно были рассмотрены метрики в трех фактор-пространствах. Наименьшие расстояния $\varrho_4 = 1.58 \cdot 10^{-5}$ (минимум по аргументам перицентра) и $\varrho_5 = 1.4 \cdot 10^{-5}$ (минимум по узлам и аргументам перицентра) принадлежат вышеуказанной паре. Однако наименьшее расстояние $\varrho_3 = 3,21 \cdot 10^{-5}$ (минимум по узлам) принадлежит паре астеро-

Таблица 4: Наименьшие расстояния между орбитами астероидов

№; Абс. зв. величина		№; Абс. зв. величина		Расстояние
63440 (2001 MD30);	15.2	331933 (2004 TV14);	17.6	$\varrho = 2.31 \cdot 10^{-5}$ (также малые ϱ_4, ϱ_5)
229401 (2005 SU152);	16.56	525939 (2005 UY97);	17.3	$\varrho = 8.46 \cdot 10^{-5}$ (также малые ϱ_4, ϱ_5)
355258 (2007 LY4);	18.81	404118 (2013 AF40);	17.97	$\varrho_4 = 7.50 \cdot 10^{-5}$ (также малое ϱ_4)
180906 (2005 KB6);	17.55	217266 (2003 YR67);	17.50	$\varrho_4 = 9.45 \cdot 10^{-5}$ (также малые ϱ_3, ϱ_5)
383031 (2005 NS125);	17.1	524757 (2003 UT306);	17.76	$\varrho_3 = 3.21 \cdot 10^{-5}$
383608 (2007 JX17);	16.54	519757 (2013 DD17);	17.66	$\varrho_3 = 4.45 \cdot 10^{-5}$
543652 (2014 OU183);	18.04	547202 (2010 EP188);	16.90	$\varrho_5 = 2.42 \cdot 10^{-5}$
381309 (2007 VH56);	16.00	566242 (2017 RW14);	18.73	$\varrho_5 = 4.05 \cdot 10^{-5}$

Таблица 5: Элементы орбит астероидов с наименьшими расстояниями между орбитами

астероид	a , а.е.	e	i , °	g , °	Ω , °
63440	1.9382180	0.0883696	19.98118	205.88836	229.43125
331933	1.9382002	0.0883606	19.98119	205.89711	229.43037
229401	2.6406090	0.3185595	12.52118	298.11468	53.99017
525939	2.6406590	0.3185152	12.52149	298.12073	53.98990

идов № 383031 и № 524757, их орбиты в пространстве орбит таковыми не являются.

Для более детального анализа в табл. 4 приведены абсолютные звездные величины этих астероидов.

Большинство найденных минимальных расстояний между орбитами принадлежит астероидам с различными абсолютными звездными величинами, следовательно, можно предположить, что это осколки более крупного разрушенного астероида.

Из нескольких рассмотренных пар с достаточно малыми расстояниями между их орбитами были найдены пары, абсолютные звездные величины которых приблизительно одинаковы (табл. 6).

Таблица 6: Расстояния между орбитами астероидов с приблизительно равными звездными величинами

№ (Абс. зв. величина)	№ (Абс. зв. величина)	Расстояние
180906 (17.6)	217266 (17.4)	$\varrho = 2.393 \cdot 10^{-4} (= 2.92\sqrt{km})$
100509 (15.1)	108692 (15.2)	$\varrho_3 = 1.076 \cdot 10^{-4} (= 1.32\sqrt{km})$
383031 (17.1)	524757 (17.76)	$\varrho_3 = 3.215 \cdot 10^{-5} (= 0.39\sqrt{km})$

Рассмотрим элементы орбит данных астероидов (табл. 7).

Таблица 7: Элементы орбит астероидов с приблизительно равными звездными величинами

астероид	a , а.е.	e	i , $^{\circ}$	g , $^{\circ}$	Ω , $^{\circ}$	M , $^{\circ}$
180906	2.2359939	0.1156480	3.84085	197.19561	87.15577	204.45023
217266	2.2361541	0.1154993	3.84073	197.17917	87.14644	179.71038
100509	2.3502669	0.2238601	22.28812	93.47054	110.66002	200.34721
108692	2.4186526	0.1966817	21.11578	88.26485	327.08985	15.98486
383031	2.3940791	0.2399779	22.42041	247.96967	74.46986	155.50165
524757	2.2926143	0.2142439	22.59440	254.47372	15.70340	184.78082

Элементы первой пары отличаются лишь во втором – третьем знаке. Возможно, они представляют один и тот же объект. У второй и третьей пар элементы отличаются сильнее, поэтому такое для них предположить нельзя.

В заключение раздела приведем вытекающие из определения неравенства между ϱ_s :

$$\varrho_5 \leq \varrho_3 \leq \varrho_2, \quad \varrho_5 \leq \varrho_4 \leq \varrho_2. \quad (72)$$

Что же касается ϱ_3 , ϱ_4 , то встречаются все три логически возможных варианта в проведенных численных расчетах. В разделе **Модельные примеры** показано, что $\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5$ для совпадающих орбит и орбит, лежащих в одной ориентированной плоскости, одна из которых — круговая. Таблица 2 показывает, что среди планет в 8 случаях $\varrho_3 < \varrho_4$, в 26 случаях $\varrho_3 > \varrho_4$, и в 2 случаях $\varrho_3 = \varrho_4$ с принятой точностью. Среди 184 220 554 521 пар астероидов в 46% случаев $\varrho_3 < \varrho_4$, и в 54% случаев $\varrho_3 > \varrho_4$.

5.3 Челябинское тело

15 февраля 2013 года астероид диаметром около 17 метров и массой порядка 10^4 тонн (по расчётам НАСА) вошёл в атмосферу Земли на скорости около 18 км/с. Это был так называемый „Челябинский метеорит“. По данным различных наблюдений сразу были найдены элементы его предварительной орбиты [30]. Приведем их в табл. 8.

Таблица 8: Элементы орбиты Челябинского тела

a , а.е.	e	i , $^{\circ}$	g , $^{\circ}$	Ω , $^{\circ}$
1.26 ± 0.05	0.52	2.984	95.5 ± 2	326.5 ± 0.3

Таблица 9 воспроизводит более точную орбиту с указанием погрешностей [31]. Правда, ошибка Ω не приводится, но из текста ясно, что ее значение — около 0.1° .

Таблица 9: Элементы орбиты Челябинского тела

a , а.е.	e	i , $^{\circ}$	g , $^{\circ}$	Ω , $^{\circ}$
1.67 ± 0.10	0.57 ± 0.03	7.07 ± 0.54	106.28 ± 2.54	326.42 ± 0.10

Воспользовавшись данными табл. 9, вычислим четыре типа расстояний между орбитой челябинского тела и орбитами всех нумерованных астероидов. В таблице 10 для каждого типа приведены значения наименьшего и следующего за ним расстояния и номера соответствующих астероидов.

Таблица 10: Наименьшие расстояния между орбитой Челябинского тела и орбитами астероидов

Метрика	Астероид	Расстояние
ϱ	86039	0.04492
	369057	0.12184
ϱ_3	86039	0.04385
	137126	0.05636
ϱ_4	86039	0.04428
	385605	0.05352
ϱ_5	257744	0.02151
	86039	0.02863

Как видим, все значения ϱ довольно большие. Расстояния в фактор-пространствах меньше, но несущественно.

Приведем более полную таблицу расстояний (таблица 11).

Таблица 11: Наименьшие расстояния между Челябинским астероидом и всеми остальными астероидами.

Метрика	Астероид	Расстояние
<0.10		
ϱ	86039	0.04492
<0.07		
ϱ_3	86039	0.04385
	137126	0.05636
	141614	0.05825
	69230	0.06939
	5011	0.06944
<0.09		
ϱ_4	86039	0.04428
	385605	0.05352
	330809	0.07633
	10145	0.08468
	90416	0.08713
<0.05		
ϱ_5	257744	0.02151
	86039	0.02863
	141614	0.03180
	385605	0.03540
	26379	0.04029
	137126	0.04434

Берем все астероиды, расстояния до которых не превосходят конкретных величин. Для ϱ возьмем границу, равную 0.10, для ϱ_3 — 0.07, для ϱ_4 — 0.09, для ϱ_5 — 0.05. Данные

значения были взяты не случайно, они подбирались так, чтобы в выборку для каждого попало хотя бы 5 астероидов. Для ϱ даже при условии большой границы получается только один астероид, границу больше брать уже совершенно бессмысленно.

Но насколько надежны эти данные? Для ответа на этот вопрос было проделано следующее.

1. Обозначим 5 элементов орбиты \mathcal{E} челябинского тела через ϵ_s , а приведенные в табл. 8 погрешности через $\delta\epsilon_s$, $s = 1, \dots, 5$. Наряду с орбитой \mathcal{E} рассмотрим $3^5 = 243$ орбиты \mathcal{E}_k с элементами $\epsilon_{sk_s} = \epsilon_s + k_s\delta\epsilon_s$, $k_s = -1, 0, 1$, $k = (k_1, \dots, k_5)$. Вычислим 4 типа расстояний между орбитами \mathcal{E}_k и орбитами указанных в табл. 9 астероидов. В табл. 12 приведены наименьшее, наибольшее и среднее из этих величин.

Таблица 12: Расстояния между варьированной орбитой Челябинского тела и орбитами астероидов

Метрика	Астероид	Наименьшее	Среднее	Наибольшее
ϱ	86039	0.03684	0.06337	0.09577
	369057	0.06925	0.12718	0.18284
ϱ_3	86039	0.03047	0.05836	0.09248
	137126	0.03303	0.06857	0.09182
ϱ_4	86039	0.03626	0.05843	0.08982
	385605	0.04896	0.06653	0.08942
ϱ_5	257744	0.01569	0.04336	0.07162
	86039	0.01250	0.04585	0.08325

2. Вычислим 4 типа расстояний между орбитой \mathcal{E} и 243 орбитами \mathcal{E}_k . Наименьшее для каждого типа, естественно, равно нулю. В табл. 13 приведены наибольшее и среднее из этих значений.

Таблица 13: Наибольшее и среднее расстояния между орбитой \mathcal{E} и 243 орбитами \mathcal{E}_k .

Метрика	Среднее	Наибольшее
ϱ	0.04421	0.06664
ϱ_3	0.03827	0.06092
ϱ_4	0.03749	0.06031
ϱ_5	0.03749	0.06031

Приведенные в таблицах 12 и 13 значения сравнимы по порядку величины. У многих пар орбит реальных астероидов расстояния на несколько порядков меньше. Заключаем, что орбита Челябинского тела определена не слишком уверенно для наших целей: можно указать с десятков астероидов, возможно являющихся родительским телом Челябинского метеорита, и выбор между ними невозможен.

Напоследок найдем расстояния между каждым астероидом и 243 вариациями орбиты Челябинского тела. Наименьшие из всех ($\varrho_s < 0.05$) приведены ниже в таблице 14.

Мы, конечно, рассмотрели не все возможные значения расстояний, поскольку использовали только среднее и граничные числа для элементов орбиты Челябинского

Таблица 14: Наименьшие варианты расстояний между орбитами астероидов и варьированной орбитой Челябинского тела

Метрика	Астероид	Расстояние	Метрика	Астероид	Расстояние
ϱ	86039	0.03684	ϱ_5	1862	0.03493
ϱ_3	136849	0.02982		101869	0.03505
	86039	0.03047		9162	0.03520
	137126	0.03303		279744	0.03547
	69230	0.03442		171486	0.03565
	5011	0.03944		407324	0.03566
	141614	0.04583		358471	0.03617
ϱ_4	363790	0.04772		140039	0.03706
	86039	0.03626		5011	0.03938
	385605	0.04896		363071	0.04055
ϱ_5	90416	0.04907		86039	0.01250
	257744	0.01569		369057	0.04372
	141614	0.01638		444584	0.04399
	137126	0.01828		144898	0.04470
	456938	0.02267		363790	0.04493
	26379	0.02269	162116	0.04650	
	136849	0.02614	4450	0.04630	
	385605	0.02618	179806	0.04694	
	414800	0.02678	267729	0.04703	
	69230	0.02720	152770	0.04762	
	159677	0.02926	361689	0.04813	
	87311	0.03192	90416	0.04906	
	330809	0.03259	211871	0.04919	
	301011	0.03292	447755	0.04977	
153267	0.04063				

тела. Но, исходя только из этих данных, видно, что все расстояния велики. Сложно предположить связь Челябинского с каким-либо другим известным телом Солнечной системы.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что Челябинское тело не являлось осколком какого-либо известного астероида. Скорее всего это маленький, не видимый ранее, астероид, либо осколок, отколовшийся давно и успевший сильно изменить свою орбиту, но точно утверждать что-либо нельзя, поскольку орбита метеороида определена плохо.

6 Средние Фреше в пространстве кеплеровских орбит

В задачах выявления метеорных потоков, поиска их родительских тел и отождествления фрагментов этих тел важную роль играет такой объект, как средняя орбита потока. Это кеплеровская орбита, полученная усреднением орбит тел, составляющих изучаемую группу.

Сама операция усреднения не имеет естественного и однозначного определения. Часто для этой цели используется процедура вычисления среднего арифметического эле-

ментов орбит: [39], [3], [40], [41],[37]. Однако, такой метод имеет недостаток: в разных системах элементов средние орбиты одного и того же семейства тел будут, вообще говоря, различны. Причина этого состоит в нелинейности преобразований перехода между системами элементов.

Этот недостаток поэлементного усреднения орбит был отмечен в статье [42]. Там же было предложено вычислять среднюю орбиту как наилучшее среднеквадратическое приближение орбит семейства, параметризованных вектором $(\mathbf{h}, \mathbf{e}, E)$, где \mathbf{h} и \mathbf{e} — векторы углового момента и эксцентриситета, E — полная энергия тела единичной массы на орбите. В работе приведен численный алгоритм решения задачи минимизации, использующий в качестве нулевого приближения средние арифметические величин \mathbf{h} , \mathbf{e} и E . Вопрос о единственности решения не рассматривался.

В данной работе предлагается обобщить этот подход в следующем смысле. Определим среднее, опираясь на численный критерий близости орбит D . Именно, для семейства орбит \mathcal{E}_k , $k = 1 \dots n$ назовем средней орбиту \mathcal{E} , доставляющую глобальный минимум функции

$$S(\mathcal{E}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D^2(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}).$$

Множество точек глобального минимума S известно как среднее Ферше [43] в том случае, когда D — метрика на совокупности всех орбит. Этот тип среднего представляет собой глубоко содержательное обобщение среднего арифметического на абстрактное метрическое пространство. Для среднего Фреше в произвольном пространстве выполняется аналог сильного закона больших чисел [44, 45], а в случае риманового многообразия получены условия единственности [47] и обобщение центральной предельной теоремы [46].

Поэлементная средняя орбита, упомянутая выше, укладывается в рамки определения среднего Фреше, если положить

$$D^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sum_{i=1}^5 (\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2)^2,$$

где $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_5$ — элементы орбиты в выбранной системе. Среднее из [42] соответствует метрике

$$D^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)^2 + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^2 + (E_1 - E_2)^2.$$

В следующих разделах исследуем средние Фреше на пространстве криволинейных кеплеровских орбит \mathbb{H} относительно четырех метрик описанных в пунктах 3.1 и 3.2. Для трех из этих метрик удастся полностью решить вопрос о существовании и единственности среднего и получить точные формулы для его вычисления. Определения и соответствующие результаты изложены в разделах 6.1 и 6.2. Для четвертой, рассмотренной в разделе 6.3 найден способ приближенного вычисления средней орбиты и указана точность приближения.

6.1 Среднее в метрике ϱ_2

Обозначим через \mathbb{H} множество всех непрямолинейных кеплеровских орбит. Метрика ϱ определяет расстояние между орбитами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{H}$ следующим образом:

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}, \quad (73)$$

где $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2$ — отвечающие орбитам \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 пары векторов, сонаправленных с вектором углового момента \mathbf{h} и вектором Лапласа–Рунге–Ленца \mathbf{e} , заданные формулами

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{h}}{\varkappa^2}, \quad \mathbf{v} = e|\mathbf{u}|, \quad (74)$$

где \varkappa^2 — гравитационный параметр. Напомним, что \mathbf{h} и \mathbf{e} — интегралы движения в задаче Кеплера:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\varkappa^2} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

где \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ обозначают радиус-вектор точки и ее скорость в барицентрической системе координат.

Как нетрудно заметить, векторы \mathbf{h}, \mathbf{e} а вместе с ними и \mathbf{u}, \mathbf{v} ортогональны. Кроме того, если орбита не прямолинейна, то она однозначно определяется парой \mathbf{u}, \mathbf{v} , и любая такая пара с $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ отвечает некоторой кеплеровской орбите. Именно поэтому в пространство \mathbb{H} включены лишь криволинейные орбиты:

$$\mathbb{H} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \mathbf{u}\mathbf{v} = 0\}.$$

Связь кеплеровских элементов орбиты с компонентами векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} определяется равенствами

$$\mathbf{u} = \sqrt{p} \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = e\sqrt{p} \begin{pmatrix} \cos g \cos \Omega - \cos i \sin g \sin \Omega \\ \cos g \sin \Omega + \cos i \sin g \cos \Omega \\ \sin i \sin g \end{pmatrix},$$

где e, p, i, g, Ω — эксцентриситет, фокальный параметр, наклонение, аргумент перицентра и долгота восходящего узла орбиты.

Чтобы найти среднее Фреше семейства орбит, заданных векторами $(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$, $k = 1, \dots, n$, нужно минимизировать квадратичную форму

$$S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ((\mathbf{u}_k - \mathbf{u})^2 + (\mathbf{v}_k - \mathbf{v})^2), \quad (75)$$

определенную в \mathbb{R}^6 , при условии

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = 0. \quad (76)$$

Критические точки $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$ функции Лагранжа $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda) = S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda \mathbf{u}\mathbf{v}$ выражаются формулами

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{1 - \mu^2} (\bar{\mathbf{u}} - \mu \bar{\mathbf{v}}), \quad \mathbf{v}_0 = \frac{1}{1 - \mu^2} (\bar{\mathbf{v}} - \mu \bar{\mathbf{u}}), \quad (77)$$

где

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k, \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k,$$

а параметр μ равен нулю, если $\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{v}} = 0$, либо находится из уравнения

$$\mu^2 - \mu\nu + 1 = 0, \quad \nu = \frac{\bar{\mathbf{u}}^2 + \bar{\mathbf{v}}^2}{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{v}}} \quad (78)$$

Второй дифференциал L

$$d^2L = 2((d\mathbf{u})^2 + (d\mathbf{v})^2 + 2\mu d\mathbf{u}d\mathbf{v})$$

преобразованием переменных $d\mathbf{u} = d\mathbf{x} + d\mathbf{y}$, $d\mathbf{v} = d\mathbf{x} - d\mathbf{y}$ приводится к каноническому виду

$$d^2L = 4((1 + \mu)(d\mathbf{x})^2 + (1 - \mu)(d\mathbf{y})^2).$$

Следовательно, минимумы S вычисляются по формулам (77), (78), при условии $|\mu| \leq 1$. Такому ограничению удовлетворяет ровно один корень уравнения (78):

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\nu - \operatorname{sgn} \nu \sqrt{\nu^2 - 4} \right) = \frac{(|\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}| - |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}|)^2}{4\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{v}}}. \quad (79)$$

Формулы (77) не работают в случае $\bar{\mathbf{u}} = k\bar{\mathbf{v}}$ для вещественного k , $|k| \leq 1$. Если $|k| < 1$, то выражения (79) и (77) дают $\mu = k$ и $\mathbf{u}_0 = 0$. Напомним, что прямолинейные орбиты не входят в пространство \mathbb{H} и, следовательно, в этом случае задача не имеет решения.

Если $k = \pm 1$, то и $\mu = \pm 1$ и значения $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$ неопределены. Обозначив $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{u}} = k\bar{\mathbf{v}}$, запишем, пользуясь условием ортогональности (76), функцию $S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ в виде

$$S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{\mathbf{u}}^2 + \bar{\mathbf{v}}^2 - \mathbf{w}^2 + (\mathbf{u} + k\mathbf{v} - \mathbf{w})^2, \quad \bar{\mathbf{u}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k^2, \quad \bar{\mathbf{v}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^2.$$

Любая пара ортогональных векторов \mathbf{u}, \mathbf{v} , удовлетворяющая уравнению $\mathbf{u} + k\mathbf{v} = \mathbf{w}$ минимизирует S в этом случае.

Таким образом, за исключением особых случаев, описанных выше, среднее Фреше в пространстве (\mathbb{H}, ρ_2) существует, единственно и вычисляется по формулам (77). Отметим, что в пространстве выборок размера n множество особых точек замкнуто и нигде не плотно, и поэтому вряд ли осложнит практические расчеты.

Значение функции S на средней орбите естественным образом обобщает понятие среднеквадратического отклонения, характеризуя величину рассеяния орбит семейства. Подставив (77) в (75) и выполнив преобразования, получим

$$S_\rho^2 := S(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \bar{\mathbf{u}}^2 + \bar{\mathbf{v}}^2 - \frac{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{v}}}{\mu} = \bar{\mathbf{u}}^2 + \bar{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{4} (|\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}| + |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}|)^2.$$

Для семейства близких между собой орбит величина $|\nu^{-1}|$ мала. Среди метеорных потоков [48] максимальное ее значение равно 0.028 (поток 164 Northern June Aquilids), медианное — 0.0005. Приближение первого порядка по ν^{-1}

$$\mathbf{u}_0 \approx \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{\nu} \bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v}_0 \approx \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\nu} \bar{\mathbf{u}}$$

дает представление о величине отклонения параметров \mathbf{u}, \mathbf{v} средней орбиты от средних арифметических тех же параметров семейства.

6.2 Средние в метриках ϱ_4 и ϱ_5

При изучении семейств орбит, претерпевших длительную эволюцию, метрика ϱ_2 может оказаться излишне тонким инструментом. Под действием малых возмущений аргумент перицентра и долгота восходящего узла орбиты могут меняться быстро по сравнению с остальными элементами. Три метрики, пренебрегающие различием быстро меняющихся параметров орбит, были определены в пункте 3.2 формулами

$$\varrho_3 = \min_{\Omega_1, \Omega_2} \varrho, \quad \varrho_4 = \min_{g_1, g_2} \varrho, \quad \varrho_5 = \min_{\Omega_1, \Omega_2, g_1, g_2} \varrho \quad (80)$$

Значения этих расстояний между орбитами \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 равны минимальным значениям ϱ между орбитами \mathcal{X} и \mathcal{Y} , все кеплеровские элементы которых, кроме указанных под знаком минимума совпадают с соответствующими элементами \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 .

В работах [14] и [26] показано, что функции, определенные равенствами (80) — псевдометрики на \mathbb{H} : они симметричны и удовлетворяют неравенству треугольника. На множествах классов эквивалентности орбит по отношениям $\mathcal{X} \overset{*}{\sim} \mathcal{Y} \Leftrightarrow \varrho_*(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$, $*$ $\in \{g, \Omega, (\Omega, g)\}$ они становятся метриками.

Далее мы будем обозначать \mathbb{H}/g , \mathbb{H}/Ω и $\mathbb{H}/(\Omega, g)$ три факторпространства \mathbb{H} по отношениям эквивалентности, отождествляющим орбиты, различающиеся лишь: аргументом перицентра (\mathbb{H}/g), долготой восходящего узла (\mathbb{H}/Ω) или обоими параметрами ($\mathbb{H}/(\Omega, g)$).

В терминах векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} , \mathbb{H}/g и \mathbb{H}/Ω определяются как факторпространства по действию группы вращений плоскости. В первом случае преобразование поворачивает вектор \mathbf{v} в плоскости, перпендикулярной \mathbf{u} , а во втором — оба вектора вокруг оси z . Пространство $\mathbb{H}/(\Omega, g)$ — факторпространство по произведению этих двух групп преобразований.

Как показано в [26], пространства \mathbb{H}/g и $\mathbb{H}/(\Omega, g)$ изометрично вкладываются в \mathbb{R}^4 и \mathbb{R}^3 . Образы пространств представляют собой выпуклые множества с разрезами, обусловленными требованием $\mathbf{u} \neq 0$. Такие вложения позволяют свести задачу вычисления средней орбиты к поиску обычного среднего арифметического векторов евклидова пространства. Следующие из этих соображений формулы для вычисления кеплеровских элементов средней орбиты, полученные в [33], приведены ниже.

$$p = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^n p_j + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \sqrt{p_j p_k} \cos I_{jk} \right), \quad (81)$$

$$e = \frac{1}{n\sqrt{p}} \sum_{j=1}^n e_j \sqrt{p_j}, \quad (82)$$

$$\cos i = \frac{1}{n\sqrt{p}} \sum_{j=1}^n \sqrt{p_j} \cos i_j, \quad (83)$$

$$(\sin \Omega, \cos \Omega) = \frac{1}{n\sqrt{p} \sin i} \sum_{j=1}^n \sqrt{p_j} \sin i_j (\sin \Omega_j, \cos \Omega_j), \quad (84)$$

где I_{jk} — взаимный наклон ориентированных орбит. В пространстве $(\mathbb{H}/g, \varrho_4)$ наклон определяется равенством

$$\cos I_{jk} = \cos i_j \cos i_k + \sin i_j \sin i_k \cos (\Omega_j - \Omega_k), \quad (85)$$

а в пространстве $(\mathbb{H}/(\Omega, g), \varrho_5)$ равенством

$$I_{jk} = i_j - i_k. \quad (86)$$

Формулы (81) — (85) дают элементы средней орбиты в пространстве \mathbb{H}/g , а (81) — (83) и (86) — в пространстве $\mathbb{H}/(\Omega, g)$.

Поскольку среднее в рассматриваемых пространствах суть среднее арифметическое в евклидовых пространствах-образах, полученные решения единственны. Иначе обстоит дело с существованием. Для существования среднего относительно метрики ϱ_4 необходимо и достаточно выполнения условия $\sum \mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$. Для метрики ϱ_5 среднее существует, если плоскость хотя бы одной орбиты не совпадает с базовой, либо $\sum \mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$. Оба эти ограничения происходят из требования $\mathbf{u} \neq 0$ для средней орбиты и вряд ли обременительны для практических расчетов.

Величины

$$S_g^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varrho_g^2(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}), \quad S_{\Omega, g}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varrho_{\Omega, g}^2(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}) \quad (87)$$

естественно рассматривать, как аналоги среднеквадратического отклонения семейства орбит \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, n$ от среднего \mathcal{E} . В кеплеровских элементах S_g^2 и $S_{\Omega, g}^2$ выражаются одинаково:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i(1 + e_i^2) - p(1 + e^2), \quad (88)$$

но значения их различны, поскольку элементы p и e по-разному вычисляются в \mathbb{H}/g и $\mathbb{H}/(\Omega, g)$.

6.3 Среднее в метрике ϱ_3

Напомним, что метрика ϱ_3 , определенная равенством (80), "склеивает" орбиты из \mathbb{H} , различающиеся лишь долготой восходящего узла. Соответствующее факторпространство \mathbb{H}/Ω состоит из классов орбит по отношению эквивалентности $\mathcal{X} \stackrel{\Omega}{\sim} \mathcal{Y} \Leftrightarrow \varrho_3(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$.

Ниже мы будем работать с векторными элементами \mathbf{u} и \mathbf{v} , заданными формулами (74). Эквивалентное (80) определение ϱ_3 в этих элементах выглядит так:

$$\varrho_3^2((\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)) = \min_{R_1, R_2} \varrho^2((R_1 \mathbf{u}_1, R_1 \mathbf{v}_1), (R_2 \mathbf{u}_2, R_2 \mathbf{v}_2)),$$

где R_1, R_2 — всевозможные повороты вокруг оси аппликат. Поскольку любой такой поворот — изометрия (\mathbb{H}, ϱ) , формулу можно упростить:

$$\varrho_3^2((\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)) = \min_R \varrho^2((R \mathbf{u}_1, R \mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)). \quad (89)$$

Получить точные формулы для вычисления среднего в пространстве \mathbb{H}/Ω не удалось. Также неизвестны условия единственности среднего в этом пространстве. Однако, с помощью несложных соображений, приведенных ниже, удается получить приближенное решение задачи.

Далее приводится способ вычисления приближенного значения среднего $\mathcal{E}_0 \in \mathbb{H}/\Omega$ и чисел $\tilde{S}_\Omega^2, \bar{\varepsilon}$, таких что истинное среднеквадратическое отклонение S_Ω^2 отличается от \tilde{S}_Ω^2 не более чем на $\bar{\varepsilon}$, а векторы специальным образом подобранных элементов всех истинных средних лежат в шаре с центром \mathcal{E}_0 радиусом $\sqrt{\bar{\varepsilon}}$. Вычисления показывают, что для большинства метеорных потоков погрешность $\bar{\varepsilon}$ не превосходит $0.1\tilde{S}_\Omega^2$.

Мы изложим суть метода оценки среднего в терминах абстрактных метрических пространств, а затем приведем вычисления для метрики ϱ_3 . Пусть x_1, \dots, x_n — точки метрического пространства (M, ϱ) . Для произвольной точки $x \in M$ обозначим

$$S(x) = S(x, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varrho^2(x, x_i).$$

Предположим, что существует отображение f из M в евклидово пространство E , такое, что для любых точек $a, b \in M$

$$\varrho^2(a, b) = (f(a) - f(b))^2 + \varepsilon(a, b), \quad \varepsilon(a, b) \geq 0. \quad (90)$$

Пусть

$$x_M \in \operatorname{argmin}_{x \in M} S(x), \quad y_E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \operatorname{argmin}_{y \in E} S(y, y_1, \dots, y_n)$$

среднее Фреше точек x_1, \dots, x_n и среднее арифметическое их образов $y_i = f(x_i)$.

Утверждение 1. Для любой точки $x \in M$ выполнены неравенства

$$0 \leq S(x_M) - S(y_E) \leq \bar{\varepsilon}(x) + (f(x) - y_E)^2 \quad (91)$$

и

$$|f(x) - f(x_M)| \leq \sqrt{\bar{\varepsilon}(x) + (f(x) - y_E)^2} + |f(x) - y_E|, \quad (92)$$

где

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon(x, x_i).$$

Пусть $x \in M$, $y = f(x)$. В силу (90)

$$S(x) = S(y) + \bar{\varepsilon}(x).$$

Функции S в M и евклидовом пространстве E достигают минимумов в точках x_M и y_E соответственно. Поэтому

$$S(y_E) \leq S(f(x_M)) \leq S(x_M) \leq S(x) = S(y) + \bar{\varepsilon}(x).$$

Отсюда

$$0 \leq S(x_M) - S(y_E) \leq \bar{\varepsilon}(x) + S(y) - S(y_E)$$

Замечая, что

$$S(y) - S(y_E) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((y - y_i)^2 - (y_E - y_i)^2) = y^2 - y_E^2 + 2(y_E - y)y = (y - y_E)^2,$$

убеждаемся в справедливости (91). Неравенство (92) следует из неравенства треугольника

$$|y - f(x_M)| \leq |f(x_M) - y_E| + |y - y_E|$$

и оценки

$$(f(x_M) - y_E)^2 = S(f(x_M)) - S(y_E) \leq \bar{\varepsilon}(x) + S(y) - S(y_E) = \bar{\varepsilon}(x) + (y - y_E)^2$$

Формулы (91) и (92) дают оценки неизвестных дисперсии $S(x_M)$ и образа среднего $f(x_M)$ через величины $f(x)$, $\bar{\varepsilon}(x)$ и y_E , вычисление которых не представляет сложности. Наиболее простой вид оценки принимают в том случае, когда евклидово среднее y_E имеет прообраз в M , который и берется в качестве точки x .

Следствие 1. *Если найдется $x_E \in M$, такое что $f(x_E) = y_E$, то*

$$0 \leq S(x_M) - S(y_E) \leq \bar{\varepsilon}(x_E) \quad (y_E - f(x_M))^2 \leq \bar{\varepsilon}(x_E). \quad (93)$$

Вернемся к метрике ϱ_3 . Наша цель — подобрать функции f и ε таким образом, чтобы представить ϱ_3 в виде (90).

Пусть $\mathcal{E} \in \mathbb{H}/\Omega$, а (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — пара векторов, соответствующих какому-либо представителю класса эквивалентности \mathcal{E} . Введем покоординатные обозначения:

$$\mathbf{u} = (u^x, u^y, u^z), \mathbf{v} = (v^x, v^y, v^z), u^p = \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}, v^p = \sqrt{(v^x)^2 + (v^y)^2} \quad (94)$$

Величины u^p, v^p, u^z, v^z инвариантны относительно вращений вокруг оси z и, следовательно, одинаковы у всех орбит в \mathcal{E} . Обозначим через ψ угол между векторами (u^x, u^y) и (v^x, v^y) . Учитывая ортогональность \mathbf{u} и \mathbf{v} ,

$$\cos \psi = \frac{u^x v^x + u^y v^y}{u^p v^p} = -\frac{u^z v^z}{u^p v^p}. \quad (95)$$

Таким образом, u^p, v^p, u^z, v^z определяют точку факторпространства \mathbb{H}/Ω с точностью до взаимной ориентации проекций векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} на плоскость xy . Определим отображение $f : \mathbb{H}/\Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ по правилу

$$f(\mathcal{E}) = (u^p, v^p, u^z, v^z). \quad (96)$$

Возьмем теперь две точки $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{H}/\Omega$ и зафиксируем в этих классах некоторых представителей $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$. По определению (89) метрики ϱ_3

$$\varrho_3^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \min_R ((R\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (R\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2) = \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 + \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 - 2 \max_R (R\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + R\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2), \quad (97)$$

где экстремумы берутся по всем поворотам R вокруг оси аппликат. В обозначениях аналогичных (94) и (95),

$$\begin{aligned} R\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 + R\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 &= u_1^z u_2^z + v_1^z v_2^z + u_1^p u_2^p \cos \varphi + v_1^p v_2^p \cos(\varphi + \Delta\psi) \\ &= u_1^z u_2^z + v_1^z v_2^z + (u_1^p u_2^p + v_1^p v_2^p \cos \Delta\psi) \cos \varphi - v_1^p v_2^p \sin \Delta\psi \sin \varphi, \end{aligned}$$

где $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$, а φ — угол между проекциями $R\mathbf{u}_1$ и \mathbf{u}_2 на плоскость xy . Максимальное значение этого выражения равно

$$u_1^z u_2^z + v_1^z v_2^z + \sqrt{(u_1^p u_2^p)^2 + (v_1^p v_2^p)^2 + 2u_1^p u_2^p v_1^p v_2^p \cos \Delta\psi}. \quad (98)$$

Подставляя (98) в (97) и учитывая определение (96) отображения f , для ϱ_3 можно записать

$$\varrho_3^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = (f(\mathcal{E}_1) - f(\mathcal{E}_2))^2 + \varepsilon(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \quad (99)$$

где

$$\varepsilon(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{4u_1^p u_2^p v_1^p v_2^p (1 - \cos \Delta\psi)}{u_1^p u_2^p + v_1^p v_2^p + \sqrt{(u_1^p u_2^p)^2 + (v_1^p v_2^p)^2 + 2u_1^p u_2^p v_1^p v_2^p \cos \Delta\psi}}. \quad (100)$$

Выражения (99) и (100) дают возможность воспользоваться утверждением 6.3 для оценки дисперсии и параметров среднего элемента семейства классов орбит $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^n$. В качестве приближенного среднего \mathcal{E}_0 берется прообраз среднего арифметического образов элементов семейства $f(\mathcal{E}_i)$

$$\mathcal{E}_0 = f^{-1}(\bar{u}^p, \bar{v}^p, \bar{u}^z, \bar{v}^z),$$

если он существует, или близкая к среднему точка образа \mathbb{H}/Ω в ином случае. Средне-квадратическое отклонение S_Ω^2 оценивается величиной

$$\tilde{S}_\Omega^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(\mathcal{E}_i) - f(\mathcal{E}_0))^2$$

Неравенства (91) и (93) дают точность такой оценки:

$$0 \leq S_\Omega^2 - \tilde{S}_\Omega^2 \leq \bar{\varepsilon}, \quad (u^p - \bar{u}^p)^2 + (v^p - \bar{v}^p)^2 + (u^z - \bar{u}^z)^2 + (v^z - \bar{v}^z)^2 \leq \bar{\varepsilon},$$

где u^p, v^p, u^z, v^z — элементы любого среднего Фреше семейства орбит $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^n$ в метрике ϱ_3 , а

$$\bar{\varepsilon} = 1/n \sum \varepsilon(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_0). \quad (101)$$

Отметим, что отображение f не инъективно. Пространство \mathbb{H}/Ω представляет собой объединение двух изометричных между собой подпространств: у элементов первого из них проекции векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} на плоскость xy , вместе с осью z образуют правую тройку, а у элементов второго — левую. Образы этих подмножеств в \mathbb{R}^4 при отображении f совпадают. По этой причине прообраз $f^{-1}(\bar{u}^p, \bar{v}^p, \bar{u}^z, \bar{v}^z)$ среднего арифметического состоит,

вообще говоря, из двух точек. Для получения наилучшего приближения, выбирать из этих точек следует ту, в которой величина $\bar{\varepsilon}$ минимальна.

Вычисления показывают, что для всех метеорных потоков, приведенных в [48], приближенное "евклидово" среднее лежит в образе \mathbb{H}/Ω , а $\bar{\varepsilon}$ в большинстве случаев невелико по сравнению с оцениваемой дисперсией. Границы квартилей 372 значений $\bar{\varepsilon}/\tilde{S}_\Omega^2$ таковы: 10^{-4} , 0.015, 0.048, 0.132, 1.475.

7 Вычисление средних орбит и нахождение расстояний до них

7.1 Вычисление средних орбит

Вычислим средние орбиты некоторых метеорных потоков.

С помощью приведенных в предыдущем разделе формул вычислим среднюю орбиту метеорного комплекса δ -Канкриды (код DCA), состоящего из северной (код NCC) и южной (код SCC) ветвей (элементы орбит из каталога SAMS [48]). Результаты приведены в таблице 15 и таблице 16.

Таблица 15: Средняя орбита NCC

Метрика	p	e	i	Ω	g	σ	ϵ/σ
ϱ_2	0.742474	0.804075	2.61415	289.926	286.906	0.123264	0
ϱ_4	0.742474	0.812423	2.61222	289.914		0.071934	0
ϱ_5	0.742652	0.812327	2.75755			0.070695	0
ϱ_3	0.742652	0.812045	2.75755		295.950	0.016593	1.98495
Ср. арифм.	0.745959	0.813093	2.78121	277.921	275.108	1.312051	0

Таблица 16: Средняя орбита SCC

Метрика	p	e	i	Ω	g	σ	ϵ/σ
ϱ_2	0.771819	0.803931	4.91794	109.359	104.839	0.109696	0
ϱ_4	0.771819	0.809623	4.91224	109.342		0.070314	0
ϱ_5	0.771879	0.809591	4.93823			0.069884	0
ϱ_3	0.771879	0.809262	4.93823		106.637	0.095898	0.110384
Ср. арифм.	0.775332	0.810246	4.92130	111.853	107.743	0.320977	0

Здесь σ - среднеквадратичное отклонение, ϵ - погрешность вычислений, найденная по формуле (101).

Как видно, элементы средних орбит, вычисленных при помощи метрик, отличаются от орбиты, вычисленной как среднее арифметическое. Например, g и Ω отличаются на несколько градусов, что может оказаться существенным в решении задач на поиск родительских тел потоков.

Для другого примера возьмем список элементов орбиты кометы Viela и ее фрагментов из [50] и рассчитаем средние орбиты для них в разных метриках. Результаты вычислений

приведены в таблице 17.

Таблица 17: Средняя орбита кометы Viela и ее фрагментов

Метрика	p	e	i	Ω	g	σ	ϵ/σ
ϱ_2	1.564084	0.747383	13.8343	252.709	219.552	0.063690	0
ϱ_4	1.564085	0.747521	13.8247	252.757		0.061113	0
ϱ_5	1.564973	0.747309	13.8906			0.053354	0
ϱ_3	1.564973	0.747299	13.8906		219.496	0.036863	0.618547
Ср. арифм.	1.567751	0.747222	13.8423	251.906	220.345	0.021789	0

Аналогично предыдущим вычислениям, средние орбиты в метриках отличаются от средней орбиты, вычисленной как среднее арифметическое. Но в данном случае отличия менее существенные, так как использовались всего 4 орбиты, тогда как для ветвей SCC и NCC комплекса δ -Канкрид 69 и 74 соответственно.

Вычислим теперь среднюю орбиту потока, который содержит тела на гиперболических орбитах, для примера возьмем поток ρ_1 Hydrids (данные элементов орбит взяты из [48]). Как видно из таблицы 18, средние орбиты, вычисленные с помощью метрик

Таблица 18: Средняя орбита потока 101 ρ_1 Hydrids

Метрика	p	e	i	Ω	g	σ	ϵ/σ
ϱ_2	1.76549	0.991403	160.863	85.8108	344.850	0.783877	0
ϱ_4	1.76553	1.05785	160.789	85.0069		0.611526	0
ϱ_5	1.84675	1.03433	157.416			0.541055	0
ϱ_3	1.84675	1.01862	157.416		348.409	0.070602	13.2274
Ср. арифм.	1.87505	1.01400	157.270	91.7370	209.862	7.794167	0

$\varrho_2 - \varrho_5$ показывают более реалистичные данные, судя по значению среднеквадратического отклонения. Среднее арифметическое орбит в таком случае работает плохо.

Приведем еще один пример расчета средних орбит. На этот раз возьмем поток \omicron Hydrids [48]. В таблице 19 приведены полученные результаты.

Таблица 19: Средняя орбита потока 569 \omicron Hydrids

Метрика	p	e	i	Ω	g	σ	ϵ/σ
ϱ_2	1.23867	0.920729	114.314	127.322	69.9274	0.329059	0
ϱ_4	1.23872	0.935244	114.624	127.197		0.273556	0
ϱ_5	1.28265	0.919086	114.171			0.175772	0
ϱ_3	1.28265	0.914653	114.171		68.6146	0.087215	7.50699
Ср. арифм.	1.29074	0.913890	114.129	128.417	70.4229	0.131723	0

Во всех приведенных примерах видно, что отличия в результатах, полученных с помощью метрик и вычисления средних, есть, иногда эти различия являются существенными. Все результаты были получены с помощью программы, написанной в ходе данного исследования.

Программа для вычисления средних орбит

Программа вычисления средней орбиты для группы орбит выложена в свободный доступ. Скачать программу можно по ссылке: <https://drive.google.com/drive/folders/12oE8WXcvd0WiVkkZe8j3l8JXqaf-5YVI?usp=sharing>

Программа написана на языке javascript и запускается как веб страница. Необходимо скачать папку с программой и запустить файл mean-orbits.htm, откроется страница в браузере. В окошке для ввода нужно ввести элементы всех орбит, требуемых для вычисления средней. Элементы каждой орбиты вводятся с новой строки и должны быть разделены запятыми. Можно выбрать 2 варианта ввода: углы в градусах или в радианах. После ввода данных и нажатия кнопки Calculate произойдет расчет элементов средней орбиты в различных метриках и вывод результатов на экран. Выводятся следующие элементы средних орбит: p - фокальный параметр, e - эксцентриситет, i - наклонение, Ω - долгота восходящего узла, ω - аргумент перицентра, σ - среднеквадратичное отклонение, ε - погрешность вычислений. Результаты выводятся для трех метрик $\varrho_2 - \varrho_5$ и для среднего арифметического.

7.2 Вычисление расстояний с помощью метрики ϱ_6

Для метеороидных потоков чаще всего со временем долгота перицентра ϖ остается почти не изменной, хотя Ω, g могут меняться. Метрика ϱ_6 была построена как раз для таких случаев, поэтому вычислим расстояния между всеми известными объектами Солнечной системы (астероиды, кометы) и средними орбитами двух ветвей потока Канкрид с помощью данной метрики. Элементы орбит для малых тел из [49].

Возьмем для расчетов средние орбиты Канкрид, вычисленные с помощью метрики ϱ_2 и средних арифметических. Берем для вычислений именно ϱ_2 , так как в ней вычислены все нужные средние элементы (g, Ω, i, e, a) .

Наименьшие найденные расстояния приведены в таблице 20.

Как видно из таблицы, наименьшие расстояния для разных средних отличаются. Для потока НСС, например, наименьших расстояния для среднего в метрике ϱ_2 и среднего арифметического найдены с различными астероидами, из 6 наименьших только один общий 2011 YA. Для SCC потока другая ситуация. Орбиты астероидов 1991 AQ, 2010 XC11 и 2012 XR134 являются ближайшими для SCC потока для обоих средних, кроме того орбита 1991 AQ является близкой и для потока НСС в метрике ϱ_2 , что может означать действительное родство потока Канкрид с данным астероидом.

В статье [34] приведены некоторые возможные родительские тела для метеороидного комплекса δ -Канкриды. Вычислим отдельно расстояния между этими объектами и средними орбитами двух ветвей комплекса δ -Канкриды. Полученные результаты приведены в таблице 21.

Таблица 20: Наименьшие расстояния

Поток	средняя орбита	астероид комета	расстояние
SCC	среднее в метрике ϱ_2	2010 XC11	0.0060249151
		2012 XR134	0.0125467722
		1991 AQ	0.0161683460
		2009 BJ58	0.0247455634
		2006 SP134	0.0295910745
		1998 YW5	0.0298544769
SCC	среднее арифметическое	1991 AQ	0.0048645000
		2010 XC11	0.0095284589
		2012 XR134	0.0188198239
		2009 BJ58	0.0241033589
		2011 YA	0.0269110077
		2001 PJ9	0.0358465162
NCC	среднее в метрике ϱ_2	2010 XC11	0.0104778013
		1991 AQ	0.0126061834
		2011 YA	0.0239113749
		2012 XR134	0.0240186853
		1995 YR1	0.0245127415
		1998 YW5	0.0308631399
NCC	среднее арифметическое	2003 WM7	0.0306826613
		2007 VW137	0.0321456904
		2011 YA	0.0406720653
		2006 WP127	0.0410606355
		2002 XR14	0.0440044076
		1999 XL136	0.0441296205

Таблица 21: Расстояния до орбит потенциальных родителских тел

Поток	средняя орбита	астероид	расстояние
SCC	среднее в метрике ϱ_2	2212 Hephaistos	0.0884484364
		2011 SR12	0.0363355245
		2014 RS17	0.0753327687
		2006 BF56	0.0358558183
		2003 RW11	0.0286334505
		2009 BB	0.0710164927
		162825 (2001 BO61)	0.0894385806
		2010 QD2	0.1583583482
		2001 YB5	0.0493661580
		2006 AM8	0.1469317973
		2017 YO4	0.0041940438
		2015 PU228	0.0081807183
		2010 XC11	0.0060938608
		2014 YQ34	0.0211923703
		85182 (1991 AQ)	0.0161683460
		2019 AQ	0.0250979815
		2014 BX2	0.0830500728
2015 PC	0.0338474381		
SCC	среднее арифметическое	2212 Hephaistos	0.0616729440
		2011 SR12	0.0230582169
		2014 RS17	0.0465531375
		2006 BF56	0.0161089029

Таблица 21: Продолжение

		2003 RW11 2009 BB 162825 (2001 BO61) 2010 QD2 2001 YB5 2006 AM8 2017 YO4 2015 PU228 2010 XC11 2014 YQ34 85182 (1991 AQ) 2019 AQ 2014 BX2 2015 PC	0.0136610884 0.0568795551 0.0594270257 0.1165619460 0.0206445742 0.1096264489 0.0066674461 0.0127481828 0.0096352456 0.0450735638 0.0048645000 0.0368182413 0.0498656940 0.0158641136
NCC	среднее в метрике ρ_2	2212 Hephaistos 2011 SR12 2014 RS17 2006 BF56 2003 RW11 2009 BB 162825 (2001 BO61) 2010 QD2 2001 YB5 2006 AM8 2017 YO4 2015 PU228 2010 XC11 2014 YQ34 85182 (1991 AQ) 2019 AQ 2014 BX2 2015 PC	0.0764135208 0.0343274682 0.0562095660 0.0247507686 0.0315006067 0.0739299808 0.0767940849 0.1399077235 0.0180556676 0.1270725356 0.0057505434 0.0189054569 0.0105033521 0.0401002048 0.0126041800 0.0098230975 0.0736875758 0.0335700575
NCC	среднее арифметическое	2212 Hephaistos 2011 SR12 2014 RS17 2006 BF56 2003 RW11 2009 BB 162825 (2001 BO61) 2010 QD2 2001 YB5 2006 AM8 2017 YO4 2015 PU228 2010 XC11 2014 YQ34 85182 (1991 AQ) 2019 AQ 2014 BX2 2015 PC	0.2878578985 0.1825869434 0.2676368784 0.1909368816 0.1750459176 0.2280750717 0.2931846007 0.4096281546 0.1467982558 0.3833364961 0.0872706534 0.0793129133 0.0868602844 0.0160596510 0.1399422400 0.0450373034 0.2866439630 0.1857678830

Наименьшие расстояния для ветви SCC оказались с орбитами астероидов 2015 PU228, 2017 YO4 и 2010 XC11, меньше чем 0.01, причем 2010 XC11 для обоих средних. Для

NCC - 2017 Y04, 2019 AQ, оба найдены с помощью средней орбиты в метрике ϱ_2 . Эти же астероиды попали в нашу таблицу 19 наименьших расстояний, что только подтверждает их близость и возможное родство с потоком δ -Канкрид.

8 Заключение

Существует много различных критериев близости орбит небесных тел. В данной работе были рассмотрены некоторые из них. Так, например, были найдены и указаны недостатки критериев Саутворта–Хоккинза и Драммонда на примере вычислений расстояний между орбитами тел Солнечной системы.

Кроме неудачных критериев были исследованы метрики на пространстве кеплеровских орбит $\varrho_2 — \varrho_5$, которые оказались настоящими метриками, т.е. удовлетворяющими 3 аксиомам метрического пространства. После применения данных метрик к поиску расстояний между орбитами тел Солнечной системы были проверены свойства данных метрик и найдены объекты, с близкими орбитами, возможно являющимися одним объектом.

Был введен также новый критерий близости орбит ϱ_6 . Эта функция логически продолжает ряд $\varrho_2 — \varrho_5$ метрик на пространстве кеплеровских орбит, построенных в предыдущих работах на данную тему. Однако, как показано в разделе 4.4 А, для ϱ_6 не выполняется неравенство треугольника на всем пространстве \mathbb{H}_6 . В то же время, построенный пример нарушения неравенства требует высоких значений эксцентриситетов орбит (более 6.3). Вопрос о том, будет ли ϱ_6 метрикой на множестве негиперболических орбит остается открытым. Кроме того, в разделах 4.4 Б и 4.4 В приведены два частных случая, в которых неравенство справедливо: 1) одна из трех орбит круговая, 2) долготы перицентров всех трех орбит одинаковы. К сожалению, в отличие от метрик $\varrho_2 — \varrho_5$ вычисление значения ϱ_6 по заданным элементам пары орбит требует применения численных методов, поэтому в разделе 4.3 приведено краткое описание алгоритма решения этой задачи и дана ссылка на реализующую его программу, написанную в ходе данного исследования.

Рассмотренные в работе метрики полезны также для нахождения средних орбит метеороидных потоков — кеплеровских орбит, полученных усреднением орбит тел, составляющих изучаемую группу. В разделе 6 приведены формулы для вычисления средних орбит потоков, основанных на метриках ϱ_n . На основе данных формул были вычислены средние орбиты нескольких известных метеороидных комплексов и приведено сравнение их со средними орбитами, вычисленными как средние арифметические элементов. Оказалось, что различия бывают существенными, поэтому лучше все таки не использовать вычисление средних орбит, как среднее арифметическое, так как в разных системах элементов такие средние орбиты одного и того же семейства тел будут, вообще говоря, различны. Причина этого состоит в нелинейности преобразований перехода

между системами элементов. Этому недостатка лишены средние орбиты, вычисленные способом, приведенным в данной работе.

В заключение отметим, что метрики в пространстве кеплеровских орбит оказываются полезны в различных задачах астрономии. Они помогают не только находить наименьшие расстояния между орбитами различных тел и делать выводы об их общем происхождении, но и служат полезным инструментом для получения средних орбит, лишенных недостатков при переходе между различными системами элементов.

Список литературы

- [1] *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. М.: Ижевск: Изд. ИКИ, 2004. 512 с.
- [2] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 831 с.
- [3] *Southworth R., Hawkins G.* Statistics of meteor streams // *Smithson. Contrib. Astrophys.* 1963. Vol. 7. P. 261-285.
- [4] *Drummond J.D.* On meteor/comet orbital discriminant D // *Proc. Southwest Regional Conf. Astron. Astrophys.* (P.F.Gott, P.S.Riherd, Eds.), Little Rock AR. 1979. Vol. 5. P. 83-86.
- [5] *Drummond J.D.* A test of comet and meteor shower associations // *Icarus.* 1981. Vol. 45. P. 545-553.
- [6] *Јопек Т.Ј.* Remarks on the meteor orbital similarity D-criterion // *Icarus.* 1993. Vol. 106, 2. P. 603–607.
- [7] *Klačka, J.* Meteor Stream Membership Criteria // Paper presented at ACM-96. 1996. (arXiv:astro-ph/0005509v1)
- [8] *Јопек, Т.Ј., Froeschlé Cl.* A stream search among 502 TV meteor orbits. An objective approach // *Astron. Astrophys.* 1997. Vol. 320, 2. P. 631-641.
- [9] *Valsecchi G.B., Јопек Т.Ј., Froeschlé Cl.* Meteoroid stream identification: a new approach – I. Theory // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1999. Vol. 304, 4. P. 743-750.
- [10] *Калинин Д.А.* О критериях общности в кометных метеороидных комплексах // *Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.* 2013. Вып. 5. С. 3-9.
- [11] *D.V.Milanov, Yu.V.Milanova, K.V.Kholshevnikov.* Relaxed triangle inequality for the orbital similarity criterion by Southworth and Hawkins and its variants // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. 131:5, No 1. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9884-6>
- [12] *Noll K.S., Weaver H.A., Feldman P.D. (Eds.)* The Collision of Comet P/Shoemaker–Levy 9 and Jupiter // Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 388 p.
- [13] *Холшевников К.В.* О метриках в пространствах кеплеровских орбит // *Физика Космоса: Тр. 45-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург, 1–5 февр. 2016 г.* Екатеринбург: Изд. УрФУ, 2016. С. 168-185.
- [14] *Kholshevnikov K.V., Kokhirova G.I., Babadzhanov P.B., Khamroev U.H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // *MNRAS.* 2016. Vol. 462, 2. P. 2275–2283.

- [15] *Kholshchevnikov K.V., Vassiliev N.N.* Natural metrics in the spaces of elliptic orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2004. Vol. 89, 2. P. 119-125.
- [16] *Kholshchevnikov K.V.* Metric Spaces of Keplerian Orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2008. Vol. 100, 3. P. 169-179.
- [17] *Кузнецов Э.Д., Сафронова В.С.* Приложение метрик пространства кеплеровых орбит для поиска астероидов на близких орбитах // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2017. №4. Вып. 2. С. 86–92.
- [18] *Kuznetsov E., Safronova V.* Application of metrics in the space of orbits to search for asteroids on close orbits // *Planetary and Space Science.* 2018. V. 157. P. 22–27.
- [19] *Kholshchevnikov K.V., Kokhirova G.I., Khamroev U.H.* New approaches to measure the orbital similarity and its application to related objects // *Planetary and Space Science.* 2018 (in press).
- [20] *Холшевников К.В., Щепалова А.С.* О расстояниях между орбитами планет и астероидов // *Вестн. С.Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия.* Т. 5(63). 2018. Вып. 3. С. 509-523
- [21] *Maruskin J.M.* Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2010. Vol. 108, 3. P. 265-274.
- [22] *Холшевников К.В., Щепалова А.С., Джазмат М.С.* Об одном фактор-пространстве кеплеровых орбит // *Вестн. С.Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия.* Т. 7(65). 2020. Вып. 1. С. 165-174
- [23] *Noll K.S., Weaver H.A., Feldman P.D. (Eds.).* The Collision of Comet P/Shoemaker–Levy 9 and Jupiter. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 388 p.
- [24] *Аллен К.У.* Астрофизические величины, М.: Мир, 1977. 25 с.
- [25] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: КомКнига, 2006. 304 с.
- [26] *Milanov D.V.* Metrics in Keplerian orbits quotient spaces // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2018. 130:27. <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9820-1>
- [27] *Valuev R., Mikryukov D.* Fast error–controlling MOID computation for confocal elliptic orbits // *Astronomy and Computing,* 2019, V. 27, P. 11-22.
- [28] *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.

- [29] Железнов Н.Б., Кочетова О.М., Кузнецов В.Б., Медведев Ю.Д., Чернетенко Ю.А., Шор В.А. Эфемериды малых планет на 2017 год. Санкт-Петербург: Изд. ИПА РАН, 2016.
- [30] Емельяненко В.В., Попова О.П., Чугай Н.Н., Шеляков М.А., Пахомов Ю.В., Шустов Б.М., Шувалов В.В., Бирюков Е.Е., Рыбнов Ю.С., Маров М.Я., Рыжлова Л.В., Нароенков С.А., Карташова А.П., Харламов В.А., Трубецкая И.А. Астрономические и физические аспекты челябинского события 15 февраля 2013 г. // *Астрономический вестник*. 2013, Т. 47, вып. 4. С. 262–277.
- [31] Голубаев А.В. Основные характеристики движения метеороида при выпадении Челябинского метеоритного дождя 15 февраля 2013 года // *Астрономический вестник*. 2015, Т. 49, вып. 3. С. 163–175.
- [32] Jenniskens P., Nénon Q., Albers J., Gural P.S., Haberman B., Holman D., Morales R., Grigsby B.J., Samuels D., Johannink C. The established meteor showers as observed by CAMS // *Icarus*. 2016. Vol. 266. P. 331-354.
- [33] Миланов Д. В. О локальной нормируемости пространств кеплеровских орбит // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 505–518. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.314>
- [34] М. В. Сергиенко, М. Г. Соколова, К. В. Холшевников Многофакторная методика поиска малых тел на близких орбитах // *Астрономический журнал*. 2020, Т. 97, № 5. С. 432–330.
- [35] Холшевников К.В., Миланов Д.В., Щепалова А.С. Пространство кеплеровых орбит и семейство его фактор-пространств // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 359–369. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.215>
- [36] Г.И.Кохирова, К.В.Холшевников, П.Б.Бабаджанов, У.Х.Хамроев Об измерении близости орбит небесных тел, имеющих общее происхождение // *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*, 58, 12, 1084-1090, 2015
- [37] Кохирова Г.И., Холшевников К.В., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Миланов Д.В. Поиск небесных тел общего происхождения: метрический подход // *Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества*, № 4, вып. 2, 2017, 67-78.
- [38] Кохирова Г.И., Бабаджанов П.Б., Холшевников К.В., Хамроев У.Х., Миланов Д.В. О родстве астероидов (2101) АДОНИС и 1995CS // *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*, 60, 7-8, 301-307, 2017.

- [39] *Babadjanov P.* Orbital elements of photographic meteors. In: Proceedings of the Symposium on the Astronomy and Physics of Meteors Held at Smithsonian// Astrophysical Observatory Cambridge, Massachusetts 28 August-1 September 1961, Geophysics Research Directorate, Air Force Cambridge Research Laboratories, 75, p 287
- [40] *Lindblad B., Ohtsuka K., Shirakawa K.* The orbit of the eta aquarid meteor stream// Planetary and Space Science. 1994. Vol. 42(2). P. 113-116.
- [41] *Galligan D.* Performance of the D-criteria in recovery of meteoroid stream orbits in a radar data set. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2001. Vol. 327(2). P. 623-628. (2001)
- [42] *Jopek T., Rudawska R., Pretka-Ziomek H.* Calculation of the mean orbit of a meteoroid stream. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006. Vol. 371(3). P. 1367-1372.
- [43] *Frechet M.* Les elements aleatoires de nature quelconque dans un espace distance. In: Annales de l'institut Henri Poincare. 1948. Vol. 10. P. 215-310.
- [44] *Ziezold H.* On expected gures and a strong law of large numbers for random elements in quasi-metric spaces. In: Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the 1974 European Meeting of Statisticians, Springer. 1977. P. 591-602.
- [45] *Molchanov I., Molchanov I. S.* Theory of random sets, Springer. 2005. Vol 19.
- [46] *Bhattacharya R., Patrangenaru V.* Large sample theory of intrinsic and extrinsic sample means on manifolds: Ii. Annals of statistics. 2005. P. 1225-1259.
- [47] *Bhattacharya R., Patrangenaru V., et al* Large sample theory of intrinsic and extrinsic sample means on manifolds. The Annals of Statistics. 2003. Vol. 31(1). P. 1-29.
- [48] *Jenniskens P., Neron Q., Albers J., Gural P., Haberman B., Holman D., Morales R., Grigsby B., Samuels D., Johannink C.* The established meteor showers as observed by CAMS. 2016. Icarus. Vol. 266, P. 331-354.
- [49] Каталог малых тел Института прикладной астрономии РАН на 08.11.2021, доступный по ссылке <https://iaaras.ru/media/lbss/dbfiles/dbfiles-2021oct.zip>, пакет программ <https://iaaras.ru/media/lbss/setup/ample3v072.zip>
- [50] *Wiegert P.A., Brown P.G., Weryk R.J., Wong D.K.* The return of the Andromedids meteor shower // Dept. of Physics and Astronomy, The University of Western Ontario, London Canada N6A3K7. DOI:10.1088/0004-6256/145/3/70