Санкт-Петербургский государственный университет

Абильдаев Темирлан

Выпускная квалификационная работа

Построение аналога локального времени для негауссовских процессов Леви

Уровень образования: магистратура

Направление 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа ВМ.5511.2020 «Физика»

Научный руководитель:
Профессор кафедры высшей математики и
математической физики СПбГУ,
д. ф.-м. н. Н. В. Смородина

Рецензент:
Профессор кафедры математики
СПбГАСУ,
д. ф.-м. н. Я. И. Белопольская

Санкт-Петербург

2022

Оглавление

Введение

Процессы Леви. Устойчивые процессы

Настоящая работа посвящена процессам Леви и, в частности, устойчивым процессам. Приведем необходимые сведения об этих процессах.

Определение 0.1. *Случайный процесс $X(t)$ является процессом Леви, или процессом с независимыми приращениями, если выполнены следующие условия:*

a) $X(0) = 0$ почти наверное (п. н.).

b) Для любого набора $\{t_j\}_{j=1}^n$, $0 \le t_1 < ... < t_n < \infty$, случайные величины $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы.

c) Для любых t и s, $0 \le s < t$, случайные величины $X(t-s)$, $X(t) - X(s)$ имеют одинаковое распределение.

d) Для любых $\varepsilon > 0$ и $t \ge 0$

$$\lim_{h \to 0} P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon) = 0.$$

Существует модификация процесса Леви с п. н. непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями, то есть траекториями из пространства Скорохода (см. [1, стр. 20]).

На практике удобна следующая характеризация процесса Леви (см. [1, стр. 32]).

Теорема 0.1 (формула Леви-Хинчина)**.** *Процесс $X(t)$ является процессом Леви тогда и только тогда, когда для любых t и s, $0 \le s < t$,*

$$\mathbf{E} e^{ip(X(t)-X(s))} = e^{-(t-s)L(p)}, \quad L(p) = -ipa + \frac{\sigma^2 p^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} (e^{ipy} - 1 - ipy\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(y))\, \Pi(dy),$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \ge 0$, а Π – мера Леви, то есть такая σ-конечная мера, что

$$\Pi(\{0\}) = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} \min(1, y^2)\, \Pi(dy) < \infty.$$

Функция $L(p)$ называется *характеристическим показателем*, а набор параметров (a, σ^2, Π) – *тройкой Леви-Хинчина.* Если $a = 0$, то у процесса Леви нет сдвига. Если

$\sigma = 0$, то у процесса Леви отсутствует гауссова компонента. Процессы Леви без сдвига и с нулевой гауссовой компонентой однозначно определяются своей мерой Леви Π.

Важным примером процессов Леви является семейство устойчивых процессов.

Определение 0.2. *Случайный процесс $X(t)$ является устойчивым, или α-устойчивым, процессом, если $X(t)$ есть процесс Леви, и для любых t и s, $0 \le s < t$,*

$$\mathbf{E}e^{ip(X(t)-X(s))} = \exp\Big(- \big(t-s\big)(-ipa + |cp|^{\alpha}\big(1 - i\beta\,\mathrm{sgn}(p)\Phi\big)\big)\Big),$$

где $a \in R$, $c > 0$, $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$,

$$\Phi = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}), & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\log|p|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Замечание. *При $\alpha \in (1, 2)$ характеристический показатель $L(p)$ устойчивого процесса имеет следующий вид.*

$$L(p) = -ipa - \int\limits_{\mathbb{R}} (e^{ipy} - 1 - ipy)\,\Pi(dy),$$

где $a \in \mathbb{R}$, а Π – некоторая мера Леви.

Параметр α называется *показателем устойчивости* процесса. Если $a = 0$, устойчивый процесс является *центрированным*; если $\beta = 0$ – *симметричным*. Будем называть устойчивый процесс *нормированным*, если $c = 1$.

Известными примерами устойчивых процессов являются винеровский процесс и процесс Коши.

Пусть $\alpha \in (1, 2)$. Введем $H(\alpha)$, полагая

$$H(\alpha) = -\frac{1}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(-\alpha)}.$$

Заметим, что для указанных значений параметра $H(\alpha)$ и $H(-\alpha)$ положительны.

Пусть $X(t)$ – нормированный центрированный симметричный устойчивый процесс, то есть

$$L(p) = |p|^{\alpha}.$$

Построив $X(t)$ как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(dy\,ds)$ (см. [2, гл. VI, §4]), $\mathbf{E}\nu(dy\,ds) = \Pi(dy)\,ds$, где $\Pi(dy) = H(\alpha)/|y|^{1+\alpha}\,dy$, можно показать, что

$$L(p) = -\int\limits_{\mathbb{R}} (e^{ipy} - 1 - ipy)\,\Pi(dy).$$

Мера $H(\alpha)/|y|^{1+\alpha}\,dy$ есть мера Леви процесса $X(t)$.

Генератор процесса Леви

Процесс Леви $X(t)$, определяемый тройкой Леви-Хинчина (a, σ^2, Π), задает полугруппу операторов P^t (см. [3, гл. 3, §3]), $t \geq 0$, каждый элемент которой действует по правилу

$$\big(P^t g\big)(x) = \mathbf{E} g(x + \xi(t)).$$

Генератором полугруппы P^t является оператор $\mathcal{A}$:

$$\big(\mathcal{A} g\big)(x) = a g'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 g''(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} \big(g(x+y) - g(x) - y g'(x)\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\big)\, \Pi(dy)\,.$$

Будем называть $\mathcal{A}$ генератором и самого процесса Леви.

Если $X(t)$ – нормированный центрированный симметричный устойчивый процесс с показателем устойчивости α, $\mathcal{A}$ является оператором дробного дифференцирования порядка α и обозначается $\mathcal{D}^\alpha$. При $\alpha \in (1, 2)$

$$\big(\mathcal{D}^\alpha g\big)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(g(x+y) - g(x) - y g'(x)\big) \frac{H(\alpha)}{|y|^{1+\alpha}}\, dy.$$

Нетрудно показать, что оператор $\widehat{\mathcal{D}^\alpha}$, определяемый из равенства

$$\mathcal{F}\mathcal{D}^\alpha = \widehat{\mathcal{D}^\alpha}\mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье, действует как умножение на функцию $-|\cdot|^\alpha$. То есть для подходящей функции g

$$\big(\widehat{\mathcal{D}^\alpha g}\big)(p) = -|p|^\alpha\, \widehat{g}(p). \tag{1}$$

Оператор $\mathcal{D}^\alpha$ является не чем иным, как одномерным лапласианом порядка $\alpha/2$ – $\Delta^{\frac{\alpha}{2}}$ (см. [4]).

Также нетрудно показать, что для подходящей функции g

$$\big(\mathcal{F}(\mathcal{D}^\alpha - \lambda) g\big)(p) = (-|p|^\alpha - \lambda)\big(\mathcal{F} g\big)(p), \tag{2}$$

то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}^\alpha - \lambda}$ действует как умножение на функцию $-|\cdot|^\alpha - \lambda$.

В настоящей работе строится вероятностное представление оператора $(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)^{-1}$ при таких λ, что $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$.

Локальное время

Рассмотрим вещественнозначный процесс $X(t)$ с п. н. измеримыми траекториями. По теореме о замене меры в интеграле справедливо равенство

$$\int\limits_0^t f(X(\tau))\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\mu_t(dy), \tag{3}$$

где случайная мера μ_t такова, что $\mu_t(\Gamma) = \mathrm{mes}\,\{\tau \in [0,t]\,|\,X(\tau) \in \Gamma\}$ для борелевского множества Γ. Случайная мера μ_t имеет смысл времени пребывания процесса $X(\tau)$ в множестве Γ до момента времени t.

В том случае, если μ_t п. н. абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, тождество (3) можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_0^t f(X(\tau))\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,l(t,y)\,dy. \tag{4}$$

Определение 0.3. *Производная Радона-Никодима $l(t,\cdot)$ меры μ_t относительно меры Лебега называется локальным временем процесса X до момента времени t.*

Локальное время может не существовать. Например, для устойчивых процессов при показателе устойчивости $\alpha \in (1,2]$ локальное время существует, а при $\alpha \in (0,1)$ — нет.

Локальное время $l(t,\cdot)$ устойчивого процесса $\xi(t)$ с показателем устойчивости $\alpha \in (1,2]$ может быть выражено формулой

$$l(t,x) = \int_0^t \delta(x-\xi(t))\,dx, \tag{5}$$

где δ – дельта-функция Дирака.

Правую часть равенства (5) следует понимать в смысле обобщенных функций (см. [5, гл. I, §4]), как L_2-предел при $M \to \infty$ выражения

$$\int_0^t D_M(x-\xi(t))\,dx, \quad D_m(u) = \frac{\sin(Mu)}{\pi u}.$$

В настоящей работе аналог локального времени строится для некоторого класса процессов Леви, близких к устойчивым процессам.

Обзор литературы

В работе [6] аналог локального времени был построен для центрированных процессов Леви с конечным вторым моментом, то есть процессов, в определенном смысле близких к винеровскому. Конструкция определялась мерой Леви процесса, и для самого винеровского процесса построенный аналог совпадал с локальным временем винеровского процесса, наследуя и некоторые свойства последнего. Кроме того, в работе [7] было показано, что для последовательности сложных пуассоновских процессов, слабо сходящейся к винеровскому процессу, построенный аналог слабо сходится к локальному времени винеровского процесса.

В работе [8] было определено семейство резольвентных случайных процессов, позволяющее строить вероятностное представление резольвенты оператора $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$. Указанное семейство процессов включало в себя винеровский процесс.

Содержание работы

В введении даются необходимые сведения, включающие определения и утверждения, относящиеся к процессам Леви, устойчивым процессам, полугруппе и генератору процесса Леви, локальному времени.

Первая глава содержит результаты, связанные с построением аналога локального времени для некоторого класса процессов Леви.

Вторая глава содержит результаты, связанные с построением вероятностного представления резольвенты генератора устойчивого процесса.

В заключении подведены итоги работы.

Благодарности

Автор выражает большую благодарность Наталии Васильевне Смородиной за полученные знания, постановку интересных задач и ценные замечания и рекомендации.

Глава 1

Аналог локального времени для некоторого класса процессов Леви

Пусть $\xi(t)$ – процесс Леви без сдвига и с нулевой гауссовой компонентой, определяемый мерой Леви Λ.

Пусть $\alpha \in (1,2)$. Предположим, что Λ обладает следующими свойствами:

1.
$$\Lambda\big([x,\infty)\big) = \frac{C_+}{x^\alpha}\big(1+\gamma(x)\big), \text{ если } x > 1; \tag{1.1}$$
$$\Lambda\big((-\infty,x]\big) = \frac{C_-}{|x|^\alpha}\big(1+\gamma(x)\big), \text{ если } x < -1. \tag{1.2}$$

При этом $\gamma(x)$ измерима и такова, что
$$|\gamma(x)| \le \frac{C_\gamma}{|x|^\beta},$$
где $\beta > 2-\alpha$.

2.
$$\int\limits_{0<|x|\le\delta} x^2\,\Lambda(dx) = O(\delta^{2-\alpha}) \text{ при } \delta \to 0+. \tag{1.3}$$

3.
$$\int\limits_{\varepsilon<|x|\le 1} |x|\,\Lambda(dx) = O(\varepsilon^{1-\alpha}) \text{ при } \varepsilon \to 0+. \tag{1.4}$$

Замечание. *Нетрудно проверить, что мера Леви устойчивого процесса обладает указанными свойствами.*

Свойства 1–3 меры Λ показывают, что процесс $\xi(t)$ в определенном смысле близок к устойчивому процессу.

При фиксированных t и s, $0 \le s < t$, характеристическая функция случайной величины $\xi(t)-\xi(s)$ имеет следующий вид.
$$\mathbf{E}e^{ip(\xi(t)-\xi(s))} = e^{-(t-s)L(p)},$$
где
$$L(p) = -\int\limits_{\mathbb{R}} (e^{ipy} - 1 - ipy)\,\Lambda(dy).$$

Не для всех процессов из рассматриваемого класса существует локальное время. В таких случаях в качестве замены локального времени можно ввести случайную величину

$$m(t,y) = \int_0^t h\big(\xi(\tau) - y\big)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} h(z-y)\, \mu_t(dz),$$

где h — некоторая μ_t-измеримая функция, и рассмотреть сглаженную меру $m(t,y)\, dy$. Обозначим через A_h оператор свертки с h. Аналогом (4) является следующее тождество.

$$\int_0^t \big(A_h f\big)(\xi(\tau))\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, m(t,y)\, dy.$$

Определим сглаживающее ядро h для рассматриваемого класса процессов, полагая

$$h(x) = H(-\alpha) \int_{\mathbb{R}} (|x+y|^{\alpha-1} - |x|^{\alpha-1} - (\alpha-1) y \operatorname{sgn}(x) |x|^{\alpha-2})\, \Lambda(dy).$$

Преобразование Фурье функции h имеет вид

$$\widehat{h}(p) = |p|^{-\alpha} L(-p). \tag{1.5}$$

Для устойчивого процесса $\widehat{h}(p) \equiv 1$, а мера $h(x)\, dx$ является дельта-функцией Дирака δ. Последний факт становится нагляднее, если представить h в виде

$$h = \mathcal{L}\, (H(-\alpha)|\cdot|^{\alpha-1})).$$

Таким образом, h – результат применения генератора $\mathcal{L}$ полугруппы процесса $\xi(t)$ к функции $H(-\alpha)|\cdot|^{\alpha-1}$, которая является фундаментальным решением оператора $\mathcal{D}^\alpha$, то есть

$$\mathcal{D}^\alpha\, (H(-\alpha)|\cdot|^{\alpha-1}) = \delta.$$

Следующая теорема подтверждает корректность выбора h.

Теорема 1.0.1. *Пусть, как и ранее, A_h — оператор свертки с h, а*

$$m(t,y) = \int_0^t h\big(\xi(\tau) - y\big)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} h(z-y)\, \mu_t(dz).$$

Тогда A_h ограничен в $L_2(\mathbb{R})$, $m(t,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R})$ п. н. и для любой $g \in L_2(\mathbb{R})$

$$\int_0^t (A_h g)(\xi(\tau))\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} g(y) m(t,y)\, dy. \tag{1.6}$$

Доказательство. Сначала сформулируем и докажем лемму, играющую основную роль в доказательстве теоремы 1.0.1.

Лемма 1.0.1. *Существует такая положительная константа C, что*

$$|L(p)| \le C|p|^\alpha. \tag{1.7}$$

Доказательство леммы 1.0.1. Имеем

$$|L(p)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}} (e^{ipy} - 1 - ipy)\,\Lambda(dy)\Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy). \tag{1.8}$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле четна по p, а для $|L(-p)|$ справедлива та же оценка. Это позволяет далее считать p положительным.

Из (1.3), (1.4) следует существование констант C_1, C_2, r_1, r_2 таких, что

$$\int\limits_{0<|x|\le\delta} x^2\,\Lambda(dx) \le C_1\delta^{2-\alpha} \text{ для любого } \delta \in (0, r_1], \tag{1.9}$$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|\le 1} |x|\,\Lambda(dx) \le C_2\varepsilon^{1-\alpha} \text{ для любого } \varepsilon \in (0, r_2]. \tag{1.10}$$

Изменяя при необходимости константы C_1 и C_2, можем считать оба неравенства справедливыми на промежутке $(0, 1]$.

а) Пусть сначала $p > 1$. Тогда

$$|L(p)| \le \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy)$$

$$= \int\limits_{0\le|y|\le 1/p} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy) + \int\limits_{1/p<|y|\le 1} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy) \tag{1.11}$$

$$+ \int\limits_{y>1} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy) + \int\limits_{y<-1} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy). \tag{1.12}$$

Обозначим интегралы в (1.11) и (1.12) как I_1, I_2, I_3 и I_4 соответственно.

Оценим I_1, используя (1.9).

$$I_1 = \int\limits_{0\le|y|\le 1/p} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy) \le p^2 \int\limits_{0\le|y|\le 1/p} y^2\,\Lambda(dy) \le C_1\,p^2\left(\frac{1}{p}\right)^{2-\alpha} = C_1\,p^\alpha.$$

Оценим I_2, используя (1.10).

$$I_2 = \int\limits_{1/p<|y|\le 1} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy) \le 2p \int\limits_{1/p<|y|\le 1} |y|\,\Lambda(dy) \le 2C_2\,p\left(\frac{1}{p}\right)^{1-\alpha} = 2C_2\,p^\alpha.$$

Оценим I_3, используя (1.1).

$$I_3 = \int\limits_{y>1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \, \Lambda(dy) \leq 2p \int\limits_{y>1} y \, \Lambda(dy)$$

$$\leq 2p \int\limits_{y>1} y \, \frac{dy}{y^{1+\alpha}} + 2C(\gamma, C_\gamma) \, p \int\limits_{y>1} y \, \frac{dy}{y^{1+\alpha+\beta}} = C(\gamma, C_\gamma, \alpha, \beta) \, p \leq C(\gamma, C_\gamma, \alpha, \beta) \, p^\alpha.$$

Оценка интеграла I_4 основана на (1.2) и аналогична оценке I_3.

b) Пусть теперь $p \in (0, 1)$.

$$|L(p)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{ipy} - 1 - ipy| \, \Lambda(dy)$$

$$= \int\limits_{0 \leq |y| \leq 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \, \Lambda(dy) + \int\limits_{y>1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \, \Lambda(dy) \tag{1.13}$$

$$+ \int\limits_{y<-1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \, \Lambda(dy). \tag{1.14}$$

Обозначим интегралы в (1.13) и (1.14) как I_1, I_2 и I_3 соответственно.

Оценим I_1.

$$I_1 = \int\limits_{0 \leq |y| \leq 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \, \Lambda(dy) \leq \, p^2 \int\limits_{0 \leq |y| \leq 1} y^2 \, \Lambda(dy) \leq C(\Lambda) \, p^\alpha.$$

Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha - 1)$ и оценим I_2, используя (1.1).

$$I_2 = \int\limits_{y>1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \, \Lambda(dy) \leq 2p^{\alpha-\varepsilon} \int\limits_{y>1} y^{\alpha-\varepsilon} \, \Lambda(dy) \leq 2p^\alpha \int\limits_{y>1} y^{\alpha-\varepsilon} \, \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$+ 2C(\gamma, C_\gamma) \, p^\alpha \int\limits_{y>1} y^{\alpha-\varepsilon} \, \frac{dy}{y^{1+\alpha+\beta}} \leq C(\gamma, C_\gamma, \beta, \varepsilon) \, p^\alpha.$$

Оценка интеграла I_3 основана на (1.2) и аналогична оценке I_2.

Лемма 1.0.1 доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1.0.1.

Ограниченность A_h немедленно следует из (1.5) и (1.7):

$$\big\| \big(A_h g\big)(x) \big\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \big| (g * h)(x) \big|^2 \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(p)|^2 \, |\widehat{h}(p)|^2 \, dp$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |p|^{-2\alpha} |\widehat{g}(p)|^2 \, |L(-p)|^2 \, dp \leq C \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(p)|^2 \, dp = C \, \|\widehat{g}(p)\|_2^2 = C \, \|g(x)\|_2^2.$$

Докажем, что $m(t,y)$ с вероятностью 1 принадлежит классу $L_2(\mathbb{R})$. Для этого докажем конечность величины

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} |m(t,y)|^2\,dy.$$

Имеем

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} |m(t,y)|^2\,dy = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{m}(t,p)|^2\,dp = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \Big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,\widehat{h}(-p)\,d\tau\Big|^2 dp$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(-p)|^2\,\mathbf{E}\Big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big|^2 dp =$$

$$\int\limits_{0<|p|\le 1} |\widehat{h}(-p)|^2\,\mathbf{E}\Big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big|^2 dp + \int\limits_{|p|>1} |\widehat{h}(-p)|^2\,\mathbf{E}\Big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big|^2 dp. \tag{1.15}$$

Обозначим интегралы в (1.15) как I_1 и I_2 соответственно.

Оценим I_1, используя (1.5) и (1.7).

$$I_1 = \int\limits_{0<|p|\le 1} |\widehat{h}(-p)|^2\,\mathbf{E}\Big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big|^2 dp \le t^2 \int\limits_{0<|p|\le 1} |\widehat{h}(-p)|^2 dp$$

$$\le Ct^2 \int\limits_{0<|p|\le 1} \left(\frac{|L(p)|}{|p|^\alpha}\right)^2 dp \le C(t) < \infty.$$

Заметим, что $L(p)\neq 0$, если $p\neq 0$. Для того, чтобы оценить I_2, оценим сперва $\mathbf{E}\big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\big|^2$ при $p\neq 0$.

$$\mathbf{E}\Big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big|^2 = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{ip(\xi(\tau)-\xi(s))}\,d\tau ds = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{-(\tau-s)L(p)}\,d\tau ds$$

$$= 2\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{L(p)}\Big(t+\frac{1}{L(p)}\big(e^{-tL(p)}-1\big)\Big)\Big]$$

$$\le 2\left|\frac{1}{L(p)}\Big(t+\frac{1}{L(p)}\big(e^{-tL(p)}-1\big)\Big)\right| \le \frac{2}{|L(p)|}\Big(t+\frac{2}{|L(p)|}\Big). \tag{1.16}$$

Теперь оценим I_2, используя (1.5), (1.7) и (1.16).

$$I_2 = \int\limits_{|p|>1} |\widehat{h}(-p)|^2\,\mathbf{E}\Big|\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big|^2 dp \le 2\int\limits_{|p|>1} \frac{|L(p)|}{|p|^{2\alpha}}\left(t+\frac{2}{|L(p)|}\right) dp$$

$$\le 2C\int\limits_{|p|>1} \frac{1}{|p|^{\alpha}}\left(t+\frac{2}{|L(p)|}\right) dp < \infty.$$

Итак, доказано, что $m(t,\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ с вероятностью 1.

Докажем теперь справедливость формулы (1.6). Пусть $f\in L_2(\mathbb{R})$. При $M>0$ обозначим через f_M функцию

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M} e^{-ipx}\widehat{f}(p)\,dp.$$

Тогда

$$\int\limits_0^t \big(A_h f\big)(\xi(\tau))\,d\tau=\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^t \big(A_h f_M\big)(\xi(\tau))\,d\tau=\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^t (f_M*h)(\xi(\tau))\,d\tau$$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M}\bigg(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(\tau)}\,d\tau\bigg)\widehat{f}(p)\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipy}h(y)\,dy\bigg)\,dp$$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M}\bigg(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(\tau)}\,d\tau\bigg)\widehat{f}(p)\widehat{h}(p)\,dp=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\bigg(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(\tau)}\,d\tau\bigg)\widehat{f}(p)\widehat{h}(p)\,dp. \tag{1.17}$$

В то же время

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)m(t,y)\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\bigg(\int\limits_0^t h\big(\xi(\tau)-y\big)\,d\tau\bigg)\,dy=\int\limits_0^t\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)h\big(\xi(\tau)-y\big)\,dy\bigg)d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\bigg(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(\tau)}\,d\tau\bigg)\widehat{f}(p)\widehat{h}(p)\,dp. \tag{1.18}$$

Из (1.17) и (1.18) следует требуемое. □

Обозначим через $l(t,y)$ локальное время рассматриваемого нами устойчивого процесса. Следующая теорема демонстрирует связь $l(t,y)$ с решением неоднородного дифференциального уравнения, порожденного оператором $-\mathcal{D}^\alpha$.

Теорема 1.0.2. *Положим*

$$u(x)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}(f*l)(t,x),$$

где f такова, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|p|^{-2\alpha}|\widehat{f}(p)|^2\,dp<\infty.$$

Тогда u является единственным решением уравнения

$$-\mathcal{D}^\alpha u=f$$

в классе $L_2(\mathbb{R})$.

Построенную величину $m(t,y)$ можно считать обобщением $l(t,y)$ для процессов, близких к устойчивому. Если процесс $\xi(t)$ устойчив, $m(t,y)$ совпадает с $l(t,y)$, а оператор A_h является тождественным. Более того, оказывается, что для $m(t,y)$ сохраняется утверждение теоремы 1.0.2. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.0.3. *Положим*

$$u(x) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(f * m)(t,x), \tag{1.19}$$

где f такова, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |p|^{-2\alpha} |\widehat{f}(p)|^2 \, dp < \infty. \tag{1.20}$$

Тогда u является единственным решением уравнения

$$-\mathcal{D}^\alpha u = f \tag{1.21}$$

в классе $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Покажем сначала, что если решение существует, то оно единственно. Пусть u_1, u_2 принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяют уравнению (1.21). Из (1) следует, что

$$\widehat{f}(p) = \big(-\widehat{\mathcal{D}^\alpha u_1}\big)(p) = |p|^\alpha \, \widehat{u}_1(p),$$

откуда при $p \neq 0$

$$\widehat{u}_1(p) = |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p).$$

То же верно и для $\widehat{u}_2$. Ввиду линейности и унитарности преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ заключаем, что u_1 и u_2 равны.

Докажем, что решение имеет вид (1.19). Положим $g_x(y) = f(x-y)$. Тогда, используя равенство (1.6), имеем

$$(f * m)(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y) m(t,y) \, dy = \int\limits_0^t (A_h g_x)(\xi(\tau)) \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ip\xi(\tau)} e^{ipx} \widehat{f}(-p) \widehat{h}(p) \, d\tau dp = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)} \, d\tau \Big) e^{-ipx} \widehat{f}(p) \widehat{h}(-p) \, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)} \, d\tau \Big) e^{-ipx} |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p) L(p) \, dp.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}(f*m)(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigg(\int\limits_0^t \mathbf{E}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Bigg)e^{-ipx}|p|^{-\alpha}\widehat{f}(p)L(p)\,dp$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigg(\int\limits_0^t e^{-\tau L(p)}\,d\tau\Bigg)e^{-ipx}|p|^{-\alpha}\widehat{f}(p)L(p)\,dp=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(1-e^{-tL(p)}\right)e^{-ipx}|p|^{-\alpha}\widehat{f}(p)\,dp.$$

Последний интеграл при $t\to\infty$ стремится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}|p|^{-\alpha}\widehat{f}(p)\,dp,$$

конечность которого следует из (1.20). Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}|p|^{-\alpha}\widehat{f}(p)\,dp=-H(-\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}}|y|^{\alpha-1}f(x-y)\,dy=\big(f*(-H(-\alpha)|\cdot|^{\alpha-1})\big)(x).$$

Функция $-H(-\alpha)|\cdot|^{\alpha-1}$ является фундаментальным решением оператора $-\mathcal{D}^\alpha$, и поэтому $f*(-H(-\alpha)|\cdot|^{\alpha-1})$ – решение уравнения (1.21). $\square$

Глава 2

Вероятностное представление резольвенты генератора устойчивого процесса

2.1. Представление в виде функционала от устойчивого процесса

Пусть $\xi(t)$ – нормированный центрированный симметричный устойчивый процесс с показателем устойчивости $\alpha \in (1,2)$. Известно, что

$$L(p) = |p|^\alpha,$$

где L – характеристический показатель процесса $\xi(t)$.

Определим величину $r(\lambda,t,x)$ через ее преобразование Фурье $\widehat{r}(\lambda,t,p)$, положив

$$\widehat{r}(\lambda,t,p) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} e^{ip\xi(t)}\,d\tau.$$

Рассмотрим пространство Соболева $W_2^\delta(\mathbb{R})$ с нормой $\|\cdot\|_{2,\delta}$,

$$\|\varphi\|_{2,\delta}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+|p|^{2\delta}\right)|\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp, \quad \varphi \in W_2^\delta(\mathbb{R}),$$

эквивалентной стандартной (см. [9, гл. I, §1]).

Теорема 2.1.1. *При* $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ *п. н.* $r(\lambda,t,\cdot) \in W_2^\delta(\mathbb{R})$, $\delta \in [0, \frac{\alpha-1}{2})$.

Доказательство. Пусть $\delta \in [0, \frac{\alpha-1}{2})$. Достаточно доказать конечность величины

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+|p|^{2\delta}\right)|\widehat{r}(\lambda,t,p)|^2\,dp.$$

Итак,

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+|p|^{2\delta}\right)|\widehat{r}(\lambda,t,p)|^2\,dp$$

$$= \int\limits_{|p|\le|\operatorname{Re}\lambda|+1} \left(1+|p|^{2\delta}\right)\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\right|^2 dp \tag{2.1}$$

$$+\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\bigg|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\bigg|^2\,dp. \tag{2.2}$$

Обозначим интегралы в (2.1) и (2.2) как I_1 и I_2 соответственно.

Оценим I_1.

$$I_1=\int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\bigg|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\bigg|^2\,dp\le t^2\int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}|p|^{-2\alpha}|L(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,dp$$

$$=t^2\int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,dp\le C(\lambda,t)<\infty. \tag{2.3}$$

Оценим I_2.

$$I_2=\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\bigg|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\bigg|^2\,dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau}\,e^{\overline{\lambda}s}\,e^{ip(\xi(\tau)-\xi(s))}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau}\,e^{\overline{\lambda}s}\,e^{-(\tau-s)L(p)}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\int\limits_0^t\big(e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,\tau}-e^{\tau(\lambda-|p|^\alpha)}\big)\,d\tau\,dp. \tag{2.4}$$

a) Пусть сначала $\mathrm{Re}\,\lambda\ne0$. Тогда выражение в (2.4) есть

$$2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}\big(e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,t}-1\big)-\frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}\big(e^{t(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big)\Big)\,dp$$

$$\le2\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}\big|e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,t}-1\big|-\frac{1}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\big|e^{t(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big|\Big)\,dp$$

$$\le2\Big(2+\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\Big)\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\,dp\le C(\lambda)\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha}\,dp<\infty. \tag{2.5}$$

b) Пусть теперь $\mathrm{Re}\,\lambda=0$. Тогда выражение в (2.4) есть

$$2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\Big(t-\frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}\big(e^{t(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big)\Big)\,dp$$

$$\leq 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^{\alpha}}\Big(t+\frac{2}{|p|^{\alpha}}\Big)\,dp \leq C(\lambda,t) \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^{\alpha}}\Big(t+\frac{2}{|p|^{\alpha}}\Big)\,dp < \infty. \quad (2.6)$$

Объединяя оценки (2.3), (2.5), (2.6), получаем

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}(\lambda,t,p)|^2\,dp < \infty.$$

$\square$

Опишем теперь явный вид $r(\lambda,t,x)$.

Лемма 2.1.1. *Величина $r(\lambda,t,x)$ есть*

$$\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,\delta(x-\xi(\tau))\,d\tau.$$

Доказательство.

$$r(\lambda,t,x) = \frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{[M,M]} e^{-ipx}\,\widehat{r}(\lambda,t,p)\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{[M,M]} e^{-ipx}\Big(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big)\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-M,M]}(p)\,e^{-ipx}\Big(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\Big)\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-M,M]}(p)\,e^{-ipx}e^{ip\xi(\tau)}\,dp\Big)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}D_M(x-\xi(\tau))\,d\tau = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,\delta(x-\xi(\tau))\,d\tau.$$

$\square$

Замечание. *При $\lambda=0$ величина $r(\lambda,t,x)$ есть локальное время устойчивого процесса $\xi(t)$.*

Определим оператор $\mathcal{R}(\lambda,t)$, положив

$$\big(\mathcal{R}(\lambda,t)g\big)(x) = (g*r)(\lambda,t,x).$$

Теорема 2.1.2. *Оператор $\mathcal{R}(\lambda,t)$ п. н. является ограниченным оператором в $W_2^\delta(\mathbb{R})$, $\delta\in[0,\frac{\alpha-1}{2})$.*

Доказательство. Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы (2.1.1).

Пусть $\delta\in[0,\frac{\alpha-1}{2})$ и $g\in W_2^\delta(\mathbb{R})$. Достаточно доказать конечность

$$\mathbf{E}\left\|\big(\mathcal{R}(\lambda,t)g\big)(x)\right\|^2_{2,\delta}.$$

Имеем

$$\mathbf{E}\left\|\big(\mathcal{R}(\lambda,t)g\big)(x)\right\|^2_{2,\delta}=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{r}(\lambda,t,p)|^2\,dp$$

$$=\int\limits_{|p|\le|\operatorname{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\right|^2dp \tag{2.7}$$

$$+\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\right|^2dp. \tag{2.8}$$

Обозначим интегралы в (2.7) и (2.8) как I_1 и I_2 соответственно.

Оценим I_1.

$$I_1=\int\limits_{|p|\le|\operatorname{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\right|^2dp$$

$$\le t^2\int\limits_{|p|\le|\operatorname{Re}\lambda|+1}|p|^{-2\alpha}|L(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,dp$$

$$=t^2\int\limits_{|p|\le|\operatorname{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,dp\le C(t)\|g(x)\|^2_{2,\delta}. \tag{2.9}$$

Оценим I_2.

$$I_2=\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\right|^2dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau}\,e^{\overline{\lambda}s}\,e^{ip(\xi(\tau)-\xi(s))}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau}\,e^{\overline{\lambda}s}\,e^{-(\tau-s)L(p)}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$= 2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2 \int\limits_0^t \big(e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,\tau} - e^{\tau(\lambda-|p|^\alpha)}\big)\,d\tau\,dp. \tag{2.10}$$

a) Пусть сначала $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$. Тогда выражение в (2.10) есть

$$2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha} \Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}(e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,t}-1) - \frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}(e^{t(\lambda-|p|^\alpha)}-1)\Big)\,dp$$

$$\leq 2 \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|} \Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}\big|e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,t}-1\big| - \frac{1}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\big|e^{t(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big|\Big)\,dp$$

$$\leq 2\Big(2+\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\Big) \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\,dp$$

$$\leq 2\Big(2+\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\Big) \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\,dp$$

$$\leq C(\lambda) \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha}\,dp \leq C(\lambda)\|g(x)\|^2_{2,\delta}. \tag{2.11}$$

b) Пусть теперь $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Тогда выражение в (2.10) есть

$$2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha} \Big(t - \frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}(e^{t(\lambda-|p|^\alpha)}-1)\Big)\,dp$$

$$\leq 2 \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha} \Big(t+\frac{2}{|p|^\alpha}\Big)\,dp$$

$$\leq C(\lambda,t) \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha} \Big(t+\frac{2}{|p|^\alpha}\Big)\,dp \leq C(\lambda,t)\|g(x)\|^2_{2,\delta}. \tag{2.12}$$

Объединяя оценки (2.9), (2.11), (2.12), получаем

$$\mathbf{E}\,\big\|\big(\mathcal{R}(\lambda,t)g\big)(x)\big\|^2_{2,\delta} \leq C(\lambda,t)\|g(x)\|^2_{2,\delta} < \infty.$$

$\square$

Следующая теорема демонстрирует связь $r(\lambda,t,x)$ с решением неоднородного дифференциального уравнения

$$(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)u = f. \tag{2.13}$$

Теорема 2.1.3. *Пусть* $Re\,\lambda \le 0$. *Положим*

$$u(\lambda, x) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(f * r)(\lambda, t, x),$$

где f *такова, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big(|p|^\alpha - \lambda\big)^{-2} |\widehat{f}(p)|^2 \, dp < \infty. \tag{2.14}$$

Тогда $u(\lambda, \cdot)$ *является единственным решением уравнения*

$$(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)u = f \tag{2.15}$$

в классе $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Покажем сначала, что если решение существует, то оно единственно. Пусть u_1, u_2 принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяют уравнению (2.15). Из (2) следует, что

$$\widehat{f}(p) = \big(\mathcal{F}(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)u_1\big)(p) = (|p|^\alpha - \lambda)\, \widehat{u}_1(\lambda, p),$$

откуда

$$\widehat{u}_1(\lambda, p) = (|p|^\alpha - \lambda)^{-1} \widehat{f}(p).$$

То же верно и для $\widehat{u}_2$. Ввиду линейности и унитарности преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ заключаем, что u_1 и u_2 равны.

Докажем, что решение имеет вид (2.15). Имеем

$$(f * r)(\lambda, t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y) r(\lambda, t, y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \widehat{f}(p)\, \widehat{r}(\lambda, t, p)\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \widehat{f}(p) \Bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau} e^{ip\xi(\tau)}\, d\tau \Bigg) dp.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}(f * r)(\lambda, t, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \widehat{f}(p) \Bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \mathbf{E} e^{ip\xi(\tau)}\, d\tau \Bigg) dp$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \widehat{f}(p) \Bigg(\int\limits_0^t e^{(\lambda - |p|^\alpha)\tau}\, d\tau \Bigg) dp = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha - \lambda} \big(1 - e^{-(|p|^\alpha - \lambda)t}\big)\, dp.$$

Последний интеграл при $t \to \infty$ стремится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha - \lambda}\, dp,$$

конечность которого следует из (2.14). Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha-\lambda}\,dp = \big(\mathcal{F}^{-1}\,\widehat{(-\mathcal{D}^\alpha-\lambda)^{-1}}\,\mathcal{F}f\big)(\lambda,x) = u(\lambda,x).$$

□

2.2. Представление в виде функционала от сложного пуассоновского процесса

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с симметричным распределением Λ, не имеющим атомов и удовлетворяющим следующим условиям:

1. $$\Lambda\big([x,\infty)\big) = \frac{cH(\alpha)}{x^\alpha}\big(1+\gamma(x)\big),\text{ если } x>1. \tag{2.16}$$

   При этом $\gamma(x)$ четна, измерима и такова, что
   $$|\gamma(x)| \le \frac{C_\gamma}{|x|^\beta}, \tag{2.17}$$
   где $\beta > 2-\alpha$.

2. $$\int\limits_{0<|x|\le\delta} x^2\,\Lambda(dx) = O(\delta^{2-\alpha}) \text{ при } \delta\to 0+. \tag{2.18}$$

3. $$\int\limits_{\varepsilon<|x|\le 1} |x|\,\Lambda(dx) = O(\varepsilon^{1-\alpha}) \text{ при } \varepsilon\to 0+. \tag{2.19}$$

Определим последовательность случайных процессов $\{\psi_n(t)\}$, положив

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j,$$

где $\eta(nt)$ – пуассоновская случайная величина с параметром nt. Процесс $\psi_n(t)$ называется сложным пуассоновским процессом (см. [10, гл. 2, §20]).

Лемма 2.2.1. *Характеристическая функция случайной величины $\psi_n(t)$ имеет следующий вид.*

$$\mathbf{E}e^{ip\psi_n(t)} = e^{-tL_n(p)},$$

где

$$L_n(p) = c|p|^\alpha - cH(\alpha)\,|p|^\alpha\int\limits_0^{|p|/n^{1/\alpha}}\frac{4\sin^2(\frac{u}{2})}{u^{1+\alpha}}\,du\;-\int\limits_{\mathbb{R}}\big(e^{ipy}-1-ipy\big)\,\widetilde{\Lambda}_n(dy),$$

$\widetilde{\Lambda}_n$ *– такой заряд, что*

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipy} - 1 - ipy\right) \widetilde{\Lambda}_n(dy) \Big| \le C \frac{|p|^2}{n^{2/\alpha - 1}}. \tag{2.20}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E} e^{ip\psi_n(t)} = \mathbf{E} \exp\Big(ip \, \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j \Big) = e^{-nt} \Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nt)^m}{m!} \, \mathbf{E} \exp\Big(ip \, \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{m} \xi_j \Big) \Big)$$

$$= e^{-nt} \Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nt)^m}{m!} \Big(\mathbf{E} \exp\Big(ip \, \frac{\xi_1}{n^{1/\alpha}} \Big) \Big)^m \Big) = \exp\Big(nt \, \mathbf{E} \big(e^{ip\xi_1 / n^{1/\alpha}} - 1 \big) \Big),$$

откуда

$$L_n(p) = -n \, \mathbf{E} \big(e^{ip\xi_1/n^{1/\alpha}} - 1 \big) = -n \, \mathbf{E} \Big(e^{ip\xi_1/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ip\xi_1}{n^{1/\alpha}} \Big)$$

$$= -n \int\limits_1^{\infty} \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}} \Big) \frac{cH(\alpha)}{y^{1+\alpha}} \, dy - n \int\limits_{-\infty}^{-1} \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}} \Big) \frac{cH(\alpha)}{(-y)^{1+\alpha}} \, dy \tag{2.21}$$

$$-n \int\limits_1^{\infty} \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}} \Big) \big(\Lambda(dy) - \frac{cH(\alpha)}{y^{1+\alpha}} \, dy \big) \tag{2.22}$$

$$-n \int\limits_{-\infty}^{-1} \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}} \Big) \big(\Lambda(dy) - \frac{cH(\alpha)}{|y|^{1+\alpha}} \, dy \big) - n \int\limits_{|y| \le 1} \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}} \Big) \Lambda(dy). \tag{2.23}$$

Обозначим интегралы в (2.21), (2.22), (2.23) как I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 соответственно. Интегрируя по подходящему контуру в комплексной плоскости и применяя интегральную теорему Коши с леммой Жордана, получаем

$$I_1 + I_2 = -|p|^\alpha \Big(\int\limits_{|p|/n^{1/\alpha}}^{\infty} \big(e^{iu} - 1 - iu \big) \frac{cH(\alpha)}{u^{1+\alpha}} \, du + \int\limits_{-\infty}^{-|p|/n^{1/\alpha}} \big(e^{iu} - 1 - iu \big) \frac{cH(\alpha)}{(-u)^{1+\alpha}} \, du \Big)$$

$$= -|p|^\alpha \Big(\int\limits_0^{\infty} \big(e^{iu} - 1 - iu \big) \frac{cH(\alpha)}{u^{1+\alpha}} \, du + \int\limits_{-\infty}^{0} \big(e^{iu} - 1 - iu \big) \frac{cH(\alpha)}{(-u)^{1+\alpha}} \, du$$

$$- \int\limits_0^{|p|/n^{1/\alpha}} \big(e^{iu} - 1 - iu \big) \frac{cH(\alpha)}{u^{1+\alpha}} \, du - \int\limits_{-|p|/n^{1/\alpha}}^{0} \big(e^{iu} - 1 - iu \big) \frac{cH(\alpha)}{(-u)^{1+\alpha}} \, du \Big)$$

$$= -|p|^\alpha \Big(-c - \int\limits_0^{|p|/n^{1/\alpha}} \big(e^{iu} + e^{-iu} - 2 \big) \frac{cH(\alpha)}{u^{1+\alpha}} \, du \Big) = c|p|^\alpha \Big(1 - H(\alpha) \int\limits_0^{|p|/n^{1/\alpha}} \frac{4 \sin^2(\frac{u}{2})}{u^{1+\alpha}} \, du \Big).$$

Определим заряд $\widetilde{\Lambda}_n$. Пусть

$$\widetilde{\Lambda}_n(dy) = \begin{cases} n\Lambda(n^{1/\alpha}\,dy), & dy \subset [-1/n^{1/\alpha}, 1/n^{1/\alpha}], \\ n\Lambda(n^{1/\alpha}\,dy) - cH(\alpha)\,dy/|y|^{1+\alpha}, & dy \subset \mathbb{R} \setminus [-1/n^{1/\alpha}, 1/n^{1/\alpha}]. \end{cases}$$

Тогда

$$I_3 + I_4 + I_5 = -\int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipy} - 1 - ipy\right) \widetilde{\Lambda}_n(dy).$$

Покажем справедливость оценки (2.20). Оценим I_3, используя неравенство (2.17).

$$\Big| - n\int\limits_1^\infty \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big(\Lambda(dy) - \frac{1}{y^{1+\alpha}}\,dy\Big)\Big| \le C\frac{|p|^2}{n^{2/\alpha-1}} \int\limits_1^\infty y^2\,\frac{1}{y^{1+\alpha+\beta}}\,dy \le C\frac{|p|^2}{n^{2/\alpha-1}}.$$

I_4 оценивается аналогично. Оценим I_5.

$$\Big| - n\int\limits_{0<|y|\le 1} \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}}\Big)\,\Lambda(dy)\Big| \le C\frac{|p|^2}{n^{2/\alpha-1}} \int\limits_{0<|y|\le 1} y^2\,\Lambda(dy) \le C\frac{|p|^2}{n^{2/\alpha-1}}.$$

Из оценок I_3, I_4, I_5 немедленно следует (2.20). □

Следствие. *При фиксированном $t \ge 0$ последовательность $\{\psi_n(t)\}$ слабо сходится к устойчивому процессу $\xi(t)$ с характеристической функцией $e^{-tc|p|^\alpha}$.*

Доказательство. Пусть $p \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\left|cH(\alpha)\,|p|^\alpha \int\limits_0^{|p|/n^{1/\alpha}} \frac{4\sin^2(\frac{u}{2})}{u^{1+\alpha}}\,du\right| \le C|p|^\alpha \int\limits_0^{|p|/n^{1/\alpha}} u^{1-\alpha}\,du = C\frac{|p|^2}{n^{2/\alpha-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

и

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipy} - 1 - ipy\right) \widetilde{\Lambda}_n(dy)\right| \le C\frac{|p|^2}{n^{2/\alpha-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}e^{ip\psi_n(t)} = e^{-tL_n(p)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-tc|p|^\alpha} = \mathbf{E}e^{ip\xi(t)}.$$

□

Лемма 2.2.2. *При любом $n \in \mathbb{N}$ процесс $\psi_n(t)$ является процессом Леви с мерой Леви Λ_n, $\Lambda_n(dy) = n\Lambda(n^{1/\alpha}dy)$. Мера Λ_n удовлетворяет условиям 1-3 из главы 1.*

Доказательство. Мера Λ_n является мерой Леви в силу безатомности Λ и неравенства (2.18). Процесс $\psi_n(t)$ есть сложный пуассоновский процесс, поэтому он является процессом Леви. Как было показано в доказательстве леммы 2.2.1,

$$\mathbf{E}e^{ip\psi_n(t)} = e^{-tL_n(p)}, \quad L_n(p) = -n\,\mathbf{E}\Big(e^{ip\xi_1/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ip\xi_1}{n^{1/\alpha}}\Big).$$

Преобразуем выражение для $L_n(p)$.

$$L_n(p) = -n\,\mathbf{E}\Big(e^{ip\xi_1/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ip\xi_1}{n^{1/\alpha}}\Big) = -n\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{ipy/n^{1/\alpha}} - 1 - \frac{ipy}{n^{1/\alpha}}\Big)\,\Lambda(dy)$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{ipu} - 1 - ipu\Big)\, n\Lambda(n^{1/\alpha}du) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{ipu} - 1 - ipu\Big)\,\Lambda_n(du).$$

Таким образом, Λ_n действительно является мерой Леви процесса $\psi_n(t)$. Покажем, что она удовлетворяет условиям 1-3 из главы 1.

Пусть $x > 1$. Проверим неравенство (1.1), используя (2.16).

$$\Lambda_n([x,\infty)) = n\Lambda([n^{1/\alpha}x,\infty)) = \frac{ncH(\alpha)}{(n^{1/\alpha}x)^\alpha}\big(1+\gamma(n^{1/\alpha}x)\big) = \frac{cH(\alpha)}{x^\alpha}\big(1+\gamma_n(x)\big),$$

где

$$|\gamma_n(x)| = |\gamma(n^{1/\alpha}x)| \le \frac{C_\gamma}{n^{\beta/\alpha}|x|^\beta}, \quad \beta > 2-\alpha.$$

Неравенство (1.2) верно в силу симметричности Λ_n.

Проверим (1.3), используя (2.18).

$$\int\limits_{0<|y|\le\delta} y^2\,\Lambda_n(dy) = n\int\limits_{0<|y|\le\delta} y^2\,\Lambda(n^{1/\alpha}dy) = n^{1-2/\alpha}\int\limits_{0<|y|\le\delta} (n^{1/\alpha}y)^2\,\Lambda(n^{1/\alpha}dy)$$

$$= n^{1-2/\alpha}\int\limits_{0<|u|\le n^{1/\alpha}\delta} u^2\,\Lambda(du) = n^{1-2/\alpha}\,O(n^{2/\alpha-1}\delta^{2-\alpha}) = O(\delta^{2-\alpha}) \text{ при } \delta\to 0+.$$

Наконец, проверим (1.4), используя (2.19).

$$\int\limits_{\varepsilon<|y|\le 1} |y|\,\Lambda_n(dy) = n\int\limits_{\varepsilon<|y|\le 1} |y|\,\Lambda(n^{1/\alpha}dy) = n^{1-1/\alpha}\int\limits_{\varepsilon<|y|\le 1} |n^{1/\alpha}y|\,\Lambda(n^{1/\alpha}dy)$$

$$= n^{1-1/\alpha}\int\limits_{n^{1/\alpha}\varepsilon<|u|\le n^{1/\alpha}} |u|\,\Lambda(du) = n^{1-1/\alpha}\int\limits_{n^{1/\alpha}\varepsilon<|u|\le 1} |u|\,\Lambda(du)$$

$$+\,n^{1-1/\alpha}\int\limits_{1<|u|\le n^{1/\alpha}} |u|\,\Lambda(du) = n^{1-1/\alpha}\,O(n^{1/\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}) + n\,O(1) = O(\varepsilon^{1-\alpha}) \text{ при } \varepsilon\to 0+.$$

$\square$

Следствие. *При любом $n\in\mathbb{N}$ существует такая положительная константа C, что*

$$L_n(p) \le C|p|^\alpha. \tag{2.24}$$

Доказательство. Мера Λ_n удовлетворяет свойствам 1-3 из главы 1, поэтому для $L_n(p)$ верно утверждение леммы 1.0.1. $\square$

Положим

$$h_n(x) = H(-\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}} (|x+y|^{\alpha-1} - |x|^{\alpha-1} - (\alpha-1)y\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{\alpha-2})\,\Lambda_n(dy).$$

Тогда

$$\widehat{h}_n(p) = |p|^{-\alpha}L_n(p).$$

Теперь определим величину $r_n(\lambda,t,x)$ через ее преобразование Фурье $\widehat{r}_n(\lambda,t,p)$, положив

$$\widehat{r}_n(\lambda,t,p) = \widehat{h}_n(p)\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau.$$

Как и прежде, рассмотрим пространство Соболева $W_2^\delta(\mathbb{R})$ с нормой $\|\cdot\|_{2,\delta}$.

Теорема 2.2.1. *При* $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$ *п. н.* $r_n(\lambda,t,\cdot) \in W_2^\delta(\mathbb{R})$, $\delta \in [0, \frac{\alpha-1}{2})$.

Доказательство. Пусть $\delta \in [0, \frac{\alpha-1}{2})$. Достаточно доказать конечность величины

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}_n(\lambda,t,p)|^2\,dp.$$

Итак,

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}_n(\lambda,t,p)|^2\,dp$$

$$= \int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}_n(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2 dp \tag{2.25}$$

$$+ \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}_n(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2 dp. \tag{2.26}$$

Обозначим интегралы в (2.25) и (2.26) как I_1 и I_2 соответственно.

Оценим I_1, используя (2.24).

$$I_1 = \int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}_n(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2 dp$$

$$\le t^2 \int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |p|^{-2\alpha}|L_n(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,dp$$

$$\leq C(t) \int\limits_{|p|\leq|\operatorname{Re}\lambda|+1} \big(1+|p|^{2\delta}\big)\,dp \leq C(\lambda,t) < \infty. \tag{2.27}$$

Оценим I_2.

$$I_2 = \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}_n(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2 dp$$

$$= 2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}_n(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}\,e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}_n(p)}\,e^{ip(\psi_n(\tau)-\psi_n(s))}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$= 2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}_n(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}\,e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}_n(p)}\,e^{-(\tau-s)L_n(p)}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$= 2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}_n(p)|^2\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)}{\overline{\lambda}\,\widehat{h}_n(p)+L_n(p)}\int\limits_0^t \big(e^{2\operatorname{Re}\lambda\,\tau\widehat{h}_n(p)} - e^{\tau(\lambda\widehat{h}_n(p)-L_n(p))}\big)\,d\tau\,dp. \tag{2.28}$$

a) Пусть сначала $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. Тогда выражение в (2.28) есть

$$2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}(e^{2\operatorname{Re}\lambda\,t\widehat{h}_n(p)}-1) - \frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}(e^{t\frac{L_n(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1)\Big)\,dp$$

$$\leq 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha-|\operatorname{Re}\lambda|}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}\big|e^{2\operatorname{Re}\lambda\,t\widehat{h}_n(p)}-1\big| - \frac{1}{|p|^\alpha-|\operatorname{Re}\lambda|}\big|e^{t\frac{L_n(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big|\Big)\,dp$$

$$\leq 2\Big(2+\frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}\Big)\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha-|\operatorname{Re}\lambda|}\,dp \leq C(\lambda)\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha}\,dp < \infty. \tag{2.29}$$

b) Пусть теперь $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Тогда выражение в (2.28) есть

$$2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\Big(t - \frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}(e^{t\frac{L_n(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1)\Big)\,dp$$

$$\leq 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha}\Big(t+\frac{2}{|p|^\alpha}\Big)\,dp \leq C(\lambda,t)\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha}\Big(t+\frac{2}{|p|^\alpha}\Big)\,dp < \infty. \tag{2.30}$$

Объединяя оценки (2.27), (2.29), (2.30), получаем

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}_n(\lambda,t,p)|^2\,dp < \infty.$$

$\square$

Опишем явный вид $r_n(\lambda, t, x)$.

Лемма 2.2.3. *Величина* $r_n(\lambda, t, x)$ *есть*

$$\int_0^t e^{\lambda\tau A_{h_n}}\, h_n(x-\psi_n(\tau))\, d\tau.$$

Доказательство.

$$\mathcal{F}\left(\int_0^t e^{\lambda\tau A_{h_n}}\, h_n(x-\psi_n(\tau))\, d\tau\right) = \mathcal{F}\left(\int_0^t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \big(A_{h_n}\big)^m h_n(x-\psi_n(\tau))\, d\tau\right)$$

$$= \mathcal{F}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \big(A_{h_n}\big)^m \left(\int_0^t \tau^m h_n(x-\psi_n(\tau))\, d\tau\right)\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}\, \mathcal{F}\left(\big(A_{h_n}\big)^m \left(\int_0^t \tau^m h_n(x-\psi_n(\tau))\, d\tau\right)\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \big(\widehat{h}_n(p)\big)^m\, \mathcal{F}\left(\int_0^t \tau^m h_n(x-\psi_n(\tau))\, d\tau\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \big(\widehat{h}_n(p)\big)^m \int_0^t \tau^m \widehat{h}_n(p) e^{ip\psi_n(t)}\, d\tau = \widehat{h}_n(p) \int_0^t e^{\lambda\tau \widehat{h}_n(p)} e^{ip\psi_n(t)}\, d\tau.$$

□

Замечание. *При* $\lambda = 0$ *величина* $r_n(\lambda, t, x)$ *есть обобщенное локальное время сложного пуассоновского процесса* $\psi_n(t)$.

Определим оператор $\mathcal{R}_n(\lambda, t)$, положив

$$\big(\mathcal{R}_n(\lambda, t) g\big)(x) = (g * r_n)(\lambda, t, x).$$

Теорема 2.2.2. *Оператор* $\mathcal{R}_n(\lambda, t)$ *п. н. является ограниченным оператором в* $W_2^\delta(\mathbb{R})$, $\delta \in [0, \frac{\alpha-1}{2})$.

Доказательство. Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы (2.2.1).

Пусть $\delta \in [0, \frac{\alpha-1}{2})$ и $g \in W_2^\delta(\mathbb{R})$. Достаточно доказать конечность

$$\mathbf{E}\, \big\| \big(\mathcal{R}_n(\lambda, t) g\big)(x) \big\|_{2,\delta}^2.$$

Имеем

$$\mathbf{E}\left\|\big(\mathcal{R}_n(\lambda,t)g\big)(x)\right\|_{2,\delta}^2=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}}\big|(g*r_n)(\lambda,t,x)\big|^2\,dx=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{r}_n(\lambda,t,p)|^2\,dp$$

$$=\int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{h}_n(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2dp \tag{2.31}$$

$$+\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{h}_n(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2dp. \tag{2.32}$$

Обозначим интегралы в (2.31) и (2.32) как I_1 и I_2 соответственно.

Оценим I_1, используя (2.24).

$$I_1=\int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{h}_n(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2dp$$

$$\le t^2\int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|p|^{-2\alpha}|L_n(p)|^2\,dp$$

$$\le C(t)\int\limits_{|p|\le|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,dp\le C(t)\|g(x)\|_{2,\delta}^2. \tag{2.33}$$

Оценим I_2.

$$I_2=\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{h}_n(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}e^{ip\psi_n(t)}\,d\tau\right|^2dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{h}_n(p)|^2\,\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}\,e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}_n(p)}\,e^{ip(\psi_n(\tau)-\psi_n(s))}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{h}_n(p)|^2\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}\,e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}_n(p)}\,e^{-(\tau-s)L_n(p)}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{h}_n(p)|^2}{\overline{\lambda}\,\widehat{h}_n(p)+L_n(p)}\int\limits_0^t\Big(e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,\tau\widehat{h}_n(p)}-e^{\tau(\lambda\widehat{h}_n(p)-L_n(p))}\Big)\,d\tau\,dp. \tag{2.34}$$

a) Пусть сначала $\mathrm{Re}\,\lambda\ne0$. Тогда выражение в (2.34) есть

$$2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}\big(e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\,t\widehat{h}_n(p)}-1\big)-\frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}\big(e^{t\frac{L_n(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big)\Big)\,dp$$

$$\le 2 \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha - |\mathrm{Re}\,\lambda|}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Re}\,\lambda}\big|e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\, t\widehat{h}_n(p)}-1\big| - \frac{1}{|p|^\alpha - |\mathrm{Re}\,\lambda|}\big|e^{t\frac{L_n(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big|\Big)\,dp$$

$$\le 2\Big(2+\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\Big)\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha - |\mathrm{Re}\,\lambda|}\,dp$$

$$\le C(\lambda)\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha}\,dp \le C(\lambda)\|g(x)\|^2_{2,\delta}. \tag{2.35}$$

b) Пусть теперь $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Тогда выражение в (2.34) есть

$$2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\Big(t-\frac{1}{\lambda-|p|^\alpha}\big(e^{t\frac{L_n(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big)\Big)\,dp$$

$$\le 2\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha}\Big(t+\frac{2}{|p|^\alpha}\Big)\,dp$$

$$\le C(\lambda,t)\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha}\Big(t+\frac{2}{|p|^\alpha}\Big)\,dp \le C(\lambda,t)\|g(x)\|^2_{2,\delta}. \tag{2.36}$$

Объединяя оценки (2.33), (2.35), (2.36), получаем

$$\mathbf{E}\,\big\|\big(\mathcal{R}_n(\lambda,t)g\big)(x)\big\|^2_{2,\delta} \le C(\lambda,t)\|g(x)\|^2_{2,\delta} < \infty.$$

$\square$

Следующая теорема связывает $r_n(\lambda,t,x)$ с решением уравнения (2.13) так же, как это было в случае с $r(\lambda,t,x)$.

Теорема 2.2.3. *Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$. Положим*

$$u(\lambda,x) = \lim_{t\to\infty}\mathbf{E}(f * r_n)(\lambda,t,x),$$

где f такова, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\big(|p|^\alpha-\lambda\big)^{-2}|\widehat{f}(p)|^2\,dp < \infty. \tag{2.37}$$

Тогда $u(\lambda,\cdot)$ является единственным решением уравнения

$$(-\mathcal{D}^\alpha-\lambda)u = f \tag{2.38}$$

в классе $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Покажем сначала, что если решение существует, то оно единственно. Пусть u_1, u_2 принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяют уравнению (2.38). Из (2) следует, что

$$\widehat{f}(p) = \big(\mathcal{F}(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)u_1\big)(p) = (|p|^\alpha - \lambda)\,\widehat{u}_1(\lambda, p),$$

откуда при $|p|^\alpha \neq \lambda$

$$\widehat{u}_1(\lambda, p) = (|p|^\alpha - \lambda)^{-1}\widehat{f}(p).$$

То же верно и для $\widehat{u}_2$. Ввиду линейности и унитарности преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ заключаем, что u_1 и u_2 равны.

Докажем, что решение имеет вид (2.38). Имеем

$$(f * r_n)(\lambda, t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y) r_n(\lambda, t, y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{f}(p)\,\widehat{r_n}(\lambda, t, p)\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{f}(p)\left(\widehat{h}_n(p)\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)} e^{ip\psi_n(\tau)}\, d\tau\right) dp.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}(f * r_n)(\lambda, t, x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{f}(p)\,\widehat{h}_n(p)\left(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}_n(p)}\,\mathbf{E}e^{ip\psi_n(\tau)}\, d\tau\right) dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{f}(p)\,\widehat{h}_n(p)\left(\int\limits_0^t e^{(\lambda\widehat{h}_n(p) - L_n(p))\tau}\, d\tau\right) dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\frac{\widehat{f}(p)\,\widehat{h}_n(p)}{L_n(p) - \lambda\widehat{h}_n(p)}\big(1 - e^{-(L_n(p) - \lambda\widehat{h}_n(p))t}\big)\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha - \lambda}\big(1 - e^{-(L_n(p) - \lambda\widehat{h}_n(p))t}\big)\, dp.$$

Последний интеграл при $t \to \infty$ стремится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha - \lambda}\, dp,$$

конечность которого следует из (2.37). Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha - \lambda}\, dp = \big(\mathcal{F}^{-1}\,\widehat{(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)^{-1}}\,\mathcal{F}f\big)(\lambda, x) = u(\lambda, x).$$

□

Заключение

В настоящей работе был построен аналог локального времени для специального класса процессов Леви, включающих устойчивые процессы с показателем устойчивости $\alpha \in (1, 2)$. Для последних построенный аналог совпадает с самим локальным временем, что позволяет говорить об обобщенном локальном времени. Была доказана предельная теорема, связывающая обобщенное локальное время с решением неоднородного дифференциального уравнения, порожденного генератором устойчивого процесса. Эти результаты изложены в статье [11].

Также в настоящей работе были построены два семейства процессов, первое из которых позволяет представить резольвенту генератора устойчивого процесса в виде функционала от устойчивого процесса, а второе – в виде функционала от сложного пуассоновского процесса. Изучены свойства данных семейств.

Список литературы

1. Protter Philip E. Stochastic Integration and Differential Equations. — Springer, 2005. — 415 p.
2. И. Гихман И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М. : Наука, 1977. — 567 с.
3. Applebaum D. Lévy Processes and Stochastic Calculus. — Cambridge University Press, 2009. — 460 p.
4. What is the fractional Laplacian? A comparative review with new results / Lischke A., Pang G., Gulian M., Song F., Glusa C., Zheng X., Mao Z., Cai W., Meerschaert M. M., Ainsworth M., and E. Karniadakis G. // Journal of Computational Physics. — 2020. — Vol. 404.
5. Н. Бородин А., Ибрагимов И. А. Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Тр. МИАН СССР. — 1994. — Vol. 195. — P. 3–285.
6. Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Об одном обобщении понятия локального времени // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2019. — Vol. 486. — P. 148–157.
7. Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Об аппроксимации локального времени винеровского процесса функционалами от случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. — 2021. — Vol. 66. — P. 73–93.
8. Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Об одном семействе комплексных стохастических процессов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2021. — Vol. 501. — P. 38–41.
9. Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М. : МЦНМО, 2013. — 379 с.
10. Ито К. Вероятностные процессы. Выпуск 1. — М. : ИИЛ, 1960. — 133 с.
11. Абильдаев Т. Е. Аналог локального времени для некоторого класса процессов Леви // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2021. — Vol. 505. — P. 5–16.