

Санкт-Петербургский Государственный университет

**Методы расчета  
электромеханических систем**

Трофимов Василий Валерьевич

Учебное пособие

2022

## Содержание

Введение.....	2
1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ.....	3
1.1. Линейные цепи. ....	3
1.2. Гармонические колебания электрических сигналов в линейных цепях..	4
1.3. Вращающееся магнитное поле. ....	6
1.4. Трансформация гармонических колебаний.....	8
1.5. Операторный метод расчета электрических цепей. ....	10
2. РАССЧЕТ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ГРАФОВ. ....	14
2.1. Основные понятия теории графов. ....	14
2.2. Дуальные физические системы. ....	18
2.3. Ориентированные графы и законы Кирхгофа.....	19
2.4. Независимые контуры, отсечения и матрицы их уравнений. ....	21
2.5. Вывод уравнений физических систем с помощью графов. ....	25
2.6. Z- и Y-графы. ....	29
3. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ.....	32
3.1. Основные понятия. ....	32
3.2. Построение механических схем. ....	34
3.3. Электрические цепи, эквивалентные механическим системам. ....	37
3.4. Дуальные механические системы. ....	38
Список рекомендованной литературы .....	41

## Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по образовательной программе «Прикладные компьютерные технологии», в качестве дополнительного материала к курсу Общая физика. Часть 3. Электричество и магнетизм, оптика.

# 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ.

## 1.1. Линейные цепи.

Линейными называются цепи, состоящие только из линейных элементов: резисторов, индуктивностей, и емкостей. Эти элементы называются линейными, так как связь между током, действующим в этих элементах, и падением напряжения на них описывается линейным преобразованием.

*Резистивным элементом* называется элемент линейных цепей, для которого падение напряжения прямо пропорционально протекающему через него току:

$$U = RI,$$

где  $R$  – коэффициент пропорциональности, называемый сопротивлением. Так как резистивный элемент не обладает свойством накопления энергии, а только рассеивает ее в виде Джоулевого тепла, то резистивный элемент часто называют активным сопротивлением.

*Индуктивным элементом* называется идеализированный элемент электрической цепи, обладающий только свойством накопления энергии магнитного поля.

Для описания процессов, протекающих в индуктивных элементах, кратко напомним параметры, характеризующие магнитное поле и взаимодействие магнитного поля с электрическим током. Магнитная индукция  $\mathbf{B}$  – это силовая характеристика магнитного поля, вектор которой представляет собой касательную к силовой линии в каждой точке магнитного поля. Механическая сила  $\mathbf{F}$ , действующая на отрезок проводника с током  $I$  и длиной  $l$  в магнитном поле с индукцией  $B$ , равна

$$F = IlB\sin\alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором  $\mathbf{B}$  и проводником. Индукция поля, созданного прямым проводником с током  $I$  на расстоянии  $a$  от него равна

$$B = \mu_0 I / (2\pi a),$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная. Магнитный поток  $\Phi$  является энергетической характеристикой поля и определяется числом магнитных линий, пронизывающих площадку:

$$\Phi = BS,$$

если  $\mathbf{B}$  перпендикулярна площадке площадью  $S$ . Работа по перемещению контура с постоянным током в магнитном поле определяется выражением:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Электродвижущая сила (ЭДС) магнитной индукции в контуре составляет:

$$\varepsilon = -d\Phi/dt.$$

Магнитное потокоцепление  $\Psi$  характеризует суммарный магнитный поток для катушки, представляющей собой совокупность нескольких одинаковых контуров,

$$\Psi = n\Phi,$$

где  $n$  – число витков; если контуры витков различны или различны потоки их пронизывающие, то

$$\Psi = \sum_{k=1}^n \Phi_k.$$

ЭДС, возбуждаемая в катушке,

$$\varepsilon = -d\Psi/dt.$$

При протекании электрического тока в контуре потокоцепление пропорционально току:

$$\Psi = LI,$$

где  $L$  – индуктивность или коэффициент самоиндукции. С изменением силы тока  $I$  изменяется и магнитный поток, сцепленный с контуром, а всякое изменение магнитного потока создает ЭДС:

$$\varepsilon = -d\Psi/dt = -LdI/dt,$$

то есть изменение  $I$  в контуре приводит к возникновению ЭДС индукции в том же самом контуре. Это явление самоиндукции. Коэффициент пропорциональности  $L$  также называется индуктивностью.

Падение напряжения на индуктивности

$$U_L = d\Psi/dt = LdI/dt,$$

то есть если ток является постоянным, то падение напряжения на индуктивности,  $u = 0$  (режим короткого замыкания цепи).

Мощность, развиваемая в индуктивном элементе

$$PL = UI = L \cdot I \cdot dI/dt$$

может быть как положительной, так и отрицательной. Когда  $P_L > 0$  – энергия потребляется индуктивностью, когда  $P_L < 0$  – энергия отдается. Знак определяется по совпадению знаков  $u$  и  $I$ . Энергия, запасенная в  $L$  к моменту времени  $t$  составляет

$$W_L = \int_{-\infty}^t P_L dt = \int_{-\infty}^t LI \frac{dI}{dt} dt = L \frac{I^2}{2}.$$

Емкостным элементом называется идеализированный элемент электрической цепи, обладающий только свойством накапливать энергию электрического поля.

Электрический заряд

$$q = Cu,$$

где  $C$  – электрическая емкость. Ток в емкостном элементе

$$I_C = dq/dt = C du/dt,$$

при постоянном напряжении ток  $I = 0$  – режим разрыва цепи.

Мощность в емкостном элементе

$$P_C = UI = CU dU/dt,$$

то есть может быть как положительной, так и отрицательной. При  $P_C > 0$  – энергия накапливается, при  $P_C < 0$  – энергия отдается емкостным элементом в электрическую цепь. Энергия, запасенная в емкости к моменту времени  $t$ , может быть записана так

$$W_C = \int_{-\infty}^t P_C dt = \int_{-\infty}^t CU \frac{dU}{dt} dt = C \frac{U^2}{2}.$$

## 1.2. Гармонические колебания электрических сигналов в линейных цепях.

Напряжение и ток на элементе могут быть как постоянными, так и переменными. Под переменным током понимается ток, изменяющийся во времени не только по величине, но и по направлению. Характерным примером переменных сигналов

являются сигналы, описываемые гармоническими функциями. Для задания гармонических колебаний используются следующие способы представления: функция времени, векторная диаграмма и функция комплексного переменного.

Ток как функция времени задается выражением

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \phi),$$

где  $I_m$  – амплитуда,  $\omega$  – угловая частота (рад/с),  $\phi$  – начальная фаза тока,  $T = 2\pi/\omega$  – период колебаний,  $f = 1/T$  – круговая частота (Гц). Действующее значение гармонического тока

$$I_\delta = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cong 0,707 I_m.$$

Действующее значение напряжения (среднеквадратичное значение)  $u_\delta \cong 0,707 u_m$ .

Среднее значение гармонического тока за полпериода

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I dt \cong 0,637 I_m,$$

а за период

$$I_{cpT} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = 0.$$

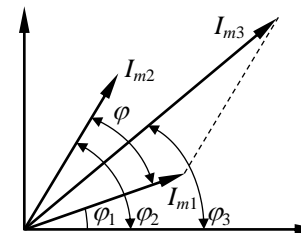


Рис. 1.1. Векторная диаграмма токов и фаз.

Векторное представление задается диаграммами, подобными представленной на рис. 1.1, где

$$I_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \phi_1),$$

$$I_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \phi_2),$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = I_{m3} \sin(\omega t + \phi_3),$$

а  $\varphi$  – фазовый сдвиг между колебаниями  $I_1$  и  $I_2$ . При этом

$$I_{m3} = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\varphi_3 = \arctg\left(\frac{I_{m1} \sin(\varphi_1) + I_{m2} \sin(\varphi_2)}{I_{m1} \cos(\varphi_1) + I_{m2} \cos(\varphi_2)}\right).$$

Операции с векторными диаграммами предполагают, что  $I_1$  и  $I_2$  (и, следовательно,  $I_3$ ) имеют одну и ту же частоту.

Символический метод расчета использует способ представления гармонического колебания в виде функции комплексного переменного. Представим  $I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$  как вектор длиной  $I_m$  с начальной фазой  $\varphi_1$ , вращающийся в положительном направлении (против часовой стрелки) с угловой скоростью  $\omega$  на комплексной плоскости. Тогда в любой момент времени положение вращающегося вектора определится комплексной величиной (комплексным гармоническим колебанием):

$$I(t) = I_m \exp[i(\omega t + \varphi_1)] \\ = I_m \cos(\omega t + \varphi_1) + i I_m \sin(\omega t + \varphi_1),$$

где  $i$  – мнимая единица. Для синусоидального представления тока

$$I = I_m \{I_m \exp[i(\omega t + \varphi_1)]\} = I_m \{\mathbf{I}_m \exp(i\omega t)\}.$$

Для косинусоидального тока

$$I = \operatorname{Re}\{I_m \exp[i(\omega t + \varphi_1)]\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_m \exp(i\omega t)\}.$$

$\mathbf{I}_m = I_m \exp(i\varphi_1)$  – комплексная амплитуда тока.

Другая форма комплексного представления следует из формулы Эйлера:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\exp(i\varphi_1) + \exp(-i\varphi_1)}{2}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{\exp(i\varphi_1) - \exp(-i\varphi_1)}{2i}.$$

Тогда для синусоидального представления тока

$$I = \frac{I_m}{2i} \{\exp[i(\omega t + \varphi_1)] - \exp[-i(\omega t + \varphi_1)]\} = \\ = \frac{1}{i} \left[ \frac{\mathbf{I}_m}{2} \exp(i\omega t) - \frac{\mathbf{I}_m^*}{2} \exp(-i\omega t) \right],$$

а для косинусоидального

$$I = \frac{I_m}{2} \{\exp[i(\omega t + \varphi_1)] + \exp[-i(\omega t + \varphi_1)]\} = \\ = \frac{\mathbf{I}_m}{2} \exp(i\omega t) + \frac{\mathbf{I}_m^*}{2} \exp(-i\omega t).$$

$\mathbf{I}_m^* = I_m \exp(-i\varphi_1)$  – сопряженная комплексная амплитуда тока.

Таким образом, синусоидальный ток – геометрическая разность векторов  $\mathbf{I}_m/2$  и  $\mathbf{I}_m^*/2$ , вращающихся в противоположных направлениях с угловой частотой  $\omega$ , а косинусоидальный ток – геометрическая сумма этих векторов.

Расчет линейных электрических цепей основан на использовании вольтамперных характеристик (ВАХ) элементов, их составляющих. ВАХ, как известно, связывает ток, протекающий через элемент, с разностью потенциалов на его выводах (иначе, с падением напряжения на элементе). Когда электрические сигналы в цепи имеют гармонический вид, то необходимо учитывать соотношение начальных фаз гармонического сигнала тока, протекающего через элемент, и гармонического сигнала падения напряжения на элементе. Амплитудные значения тока и напряжения связаны величиной сопротивления элемента, обратная величина к которому называется проводимостью. Для рассмотренных элементов линейных цепей ниже приводятся ВАХ, соотношения начальных фаз тока и падения напряжения и значения сопротивлений и проводимостей.

Для резистора:

$$U(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_U),$$

$$I(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_I) = (U_m/R) \cdot \sin(\omega t + \varphi_U),$$

$$I_m = (U_m/R), \quad \varphi_I = \varphi_U,$$

$R$  – резистивное сопротивление,

$1/R$  – резистивная проводимость.

Для индуктивности:

$$U(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_U),$$

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) = L^{-1} \int U(t) dt$$

$$= (U_m / \omega L) \cdot \sin(\omega t + \varphi_U - \pi/2),$$

$$I_m = (U_m / \omega L), \quad \varphi_I = \varphi_U - \pi/2,$$

$X_L = \omega L$  – индуктивное сопротивление,

$Y_L = 1/\omega L$  – индуктивная проводимость.

По начальной фазе ток в индуктивности отстает от падения напряжения.

Для емкости:

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U),$$

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) = C dU(t)/dt =$$

$$= (U_m \omega C) \sin(\omega t + \varphi_U + \pi/2),$$

$$I_m = (U_m \omega C), \quad \varphi_I = \varphi_U + \pi/2,$$

$X_C = 1/\omega C$  – емкостное сопротивление,

$Y_C = \omega C$  – емкостная проводимость.

По начальной фазе ток в емкости опережает падение напряжения.

Для упрощения расчета за счет устранения тригонометрических функций применяется символический метод, использующий комплексные амплитуды тока и напряжения, которые для линейных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  связаны следующими соотношениями:

$$I_{mR} = U_{mR} / R, \quad I_{mL} = U_{mL} / i\omega L, \quad I_{mC} = i\omega C U_{mC},$$

$$U_{mR} = I_{mR} R, \quad U_{mL} = i\omega L I_{mL} = iX_L I_{mL},$$

$$U_{mC} = -i(\omega C)^{-1} I_{mC} = -iX_C I_{mC}.$$

Комплексное сопротивление цепи (импеданс):

$$\mathbf{Z} = R + iX = Z \exp(i\varphi) = Z \cos\varphi + iZ \sin\varphi,$$

$$Z = |\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2},$$

$R$  – активное сопротивление (действительная часть  $\mathbf{Z}$ ),  $X$  – реактивное сопротивление (мнимая часть  $\mathbf{Z}$ ). Фазовый сдвиг – это аргумент комплексного сопротивления:

$$\varphi = \arg \mathbf{Z} = \arctg(X/R).$$

### 1.3. Вращающееся магнитное поле.

Известно, что потокосцепление в катушке индуктивности  $\Psi$  пропорционально току этой катушки  $I$ , а модуль вектора магнитной индукции  $B$  пропорционален  $\Psi$ , следовательно, и  $B$  пропорционален  $I$ . Таким образом, если ток задан гармонической функцией  $I(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I)$ , то соответствующая индукция магнитного поля будет

$$B(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi_I),$$

выражение для  $B_m$  в данном случае для нас несущественно. Последнее выражение не содержит зависимости от пространственных координат и предполагает рассмотрение только ограниченного участка магнитного (соленоидного) поля, где силовые линии совпадают с направлением вектора  $\mathbf{B}$  (см. рис. 1.2). Для достижения нашей цели – получения вращающегося магнитного поля – будем считать  $a$  достаточно большим, что бы можно было получить перекрытие участков типа  $a$  различных катушек. Тогда магнитное поле катушки в рассматриваемой области можно задать вектором  $\mathbf{B}$ , направленным по оси катушки и изменяющимся по модулю.

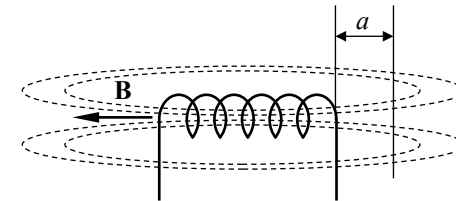


Рис. 1.2.

Системы силового питания с сигналами переменного тока, отличающимися по начальной фазе, называются многофазными. При этом разность фаз  $\Delta\varphi = 2\pi/n$ , где  $n$  – число фаз. Наиболее распространены трехфазные системы, когда

$$I_1(t) = I_m \cdot \cos(\omega t),$$

$$I_2(t) = I_m \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3),$$

$$I_3(t) = I_m \cdot \cos(\omega t - 4\pi/3).$$

Многофазные системы позволяют легко получать вращающееся магнитное поле. Для этого применяется система индукторов (катушек, обмоток), оси которых расположены в одной плоскости под углами  $2\pi/n$  (рис. 1.3,а). Пусть каждый индуктор питается от отдельной фазы и создает вдоль своей оси переменное магнитное поле амплитуды  $B_m$ :

$$\begin{aligned} B_1(t) &= B_m \cos(\omega t), \\ B_2(t) &= B_m \cos(\omega t - 2\pi/3), \\ B_3(t) &= B_m \cos(\omega t - 4\pi/3). \end{aligned}$$

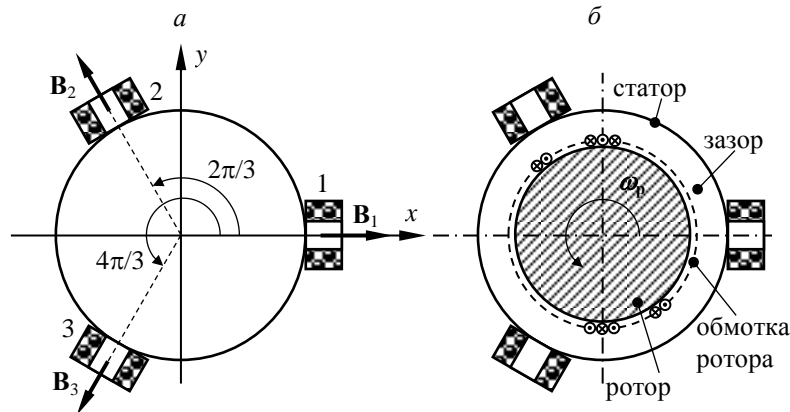


Рис. 1.3.

Определим суммарное поле в центре устройства:

$$B_x = B_m \cos(\omega t) + B_m \cos(\omega t - 2\pi/3) \cos(2\pi/3) + B_m \cos(\omega t - 4\pi/3) \cos(4\pi/3) = (3/2) B_m \cos(\omega t),$$

$$B_y = B_m \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3) \sin(2\pi/3) + B_m \cos(\omega t - 4\pi/3) \sin(4\pi/3) = (3/2) B_m \sin(\omega t),$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = (3/2) B_m$$

$$\operatorname{tg} \varphi = B_x / B_y = \operatorname{ctg}(\omega t),$$

то есть угол  $\varphi = \omega t + k\pi$  и линейно возрастает во времени. Таким образом, вектор полного поля вращается равномерно в плоскости  $XY$  с угловой скоростью  $\omega$ . В рассматриваемом случае мы получили вращение против часовой стрелки. Для смены

направления вращения достаточно поменять местами любые две фазы.

Достоинством рассмотренной модели является ее простота, однако модель обладает недостатками, к которым следует отнести следующие:

а) магнитное поле существенно криволинейной конфигурации описывается вектором  $\mathbf{B}$  постоянного направления, что справедливо только для сильных полей или в ограниченной области пространства;

б) вращающееся магнитное поле получено только для указанных ограниченных областей пространства, в частности для центра конструкции, а при создании электрических машин нас интересует поле в так называемом «зазоре» между ротором и статором (рис. 1.3,б).

При  $f = 50$  Гц скорость вращения составляет 3000 об./мин. Для уменьшения числа оборотов в  $m$  раз достаточно составить систему из  $m$  частей, каждая из которых включает в себя  $n$  индукторов, питающихся от разных фаз ( $n$  – число фаз).

Вращающееся магнитное поле позволяет создать двигатели очень простой конструкции. Их основные части: статор с обмотками, создающими вращающееся поле, и ротор с короткозамкнутыми проводниками. При своем вращении магнитное поле пересекает проводники ротора и индуцирует в них ЭДС. При этом в проводнике появляется ток  $I$ , что приводит к возникновению механической силы  $F$ , приложенной к проводнику:

$$F = a l_n I B \sin \gamma,$$

где  $a$  – коэффициент размерности,  $l_n$  – длина проводника,  $B$  – индукция,  $\gamma$  – угол между вектором индукции  $\mathbf{B}$  и направлением тока  $I$ . Направление силы определяется правилом, согласно которому сила действует в направлении уменьшения индуцируемого тока, что выполняется при уменьшении скорости перемещения проводника относительно магнитного поля, а это возможно, только если направление движения совпадает с направлением перемещения тока. Следовательно, ротор вращается в направлении вращения поля. Если скорости

проводника и поля одинаковы, то  $I = 0$  и  $F = 0$ . То есть скорость ротора  $\omega_p$  всегда несколько меньше, чем угловая скорость поля  $\omega_n$ , и синхронное вращение принципиально невозможно. Отсюда название таких машин – асинхронные двигатели. Разница в скоростях определяется коэффициентом скольжения  $S$ :

$$S = (\omega_n - \omega_p) / \omega_n \quad (S = 0,02 \div 0,05).$$

Ротор исключительно прост, никакого подвода тока (щеток, колец) не надо. Ток в роторе будет возникать, даже если это сплошной кусок металла. Частота тока в роторе  $\Omega_p$  равна разности  $\omega_n - \omega_p$ , то есть  $\Omega_p = S\omega_n$ . Так как магнитный поток двигателя изменяется во времени (с частотой питающей ЭДС в статоре и с частотой  $S\omega_n$  в роторе), то эти части машины для уменьшения потерь делают из тонких пластин специальных сплавов. Вращающий момент двигателя

$$M = Fl \cos \alpha,$$

где  $l \cos \alpha$  – плечо, к которому приложена сила  $F$ ,  $\alpha = \Omega_p t$  – угол между плоскостью контура, охватывающего продольное сечение ротора, и вектором индукции  $\mathbf{B}$ .

#### 1.4. Трансформация гармонических колебаний.

Трансформатор является элементом линейных цепей, выполняющим преобразование амплитуды гармонического сигнала, а именно преобразование амплитуды гармонического колебания напряжения  $u_m$ ,

$$U_{\text{вх}}(t) = U_{m \text{ вх}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_U),$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{m \text{ вых}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_U).$$

при этом электрический сигнал остается гармоническим с неизменной частотой.

В трансформаторе используются свойства электрического поля порождать магнитное поле и свойство переменного магнитного поля порождать электрический ток.

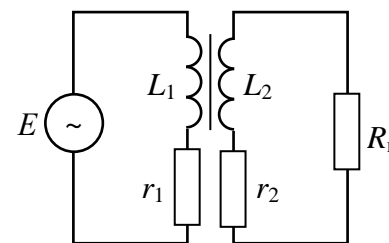


Рис. 1.4.

Принципиальная схема трансформации гармонических колебаний представлена на рис. 1.4, а собственно сам трансформатор состоит из двух катушек с индуктивностью  $L_1$ ,  $L_2$  и сопротивлением  $r_1$  и  $r_2$ , соответственно.  $E$  – источник входного сигнала ( $U_{\text{вх}} = E$ ),  $R_n$  – сопротивление нагрузки ( $U_{\text{вых}} = U_{R_n}$ ).

Принципиальный расчет трансформатора состоит в доказательстве неизменности  $\varphi_U$  и в определении конструктивных параметров устройства для получения заданного соотношения  $U_{m \text{ вых}} / U_{m \text{ вх}}$ .

Для описания работы трансформатора введем понятие взаимной индукции  $M$ . Она связывает величину тока в одной из катушек с наводимой им ЭДС во второй катушке аналогично коэффициенту самоиндукции  $L$ , который связывает ток и ЭДС в одной катушке:

$$\varepsilon_{11} = -L \frac{dI_1}{dt}, \quad \varepsilon_{21} = -M \frac{dI_2}{dt}.$$

Для получения величины коэффициента связи  $K = M / \sqrt{L_1 L_2}$ , близкой к 1 обе катушки располагают на общем сердечнике, изготавливаемом из ферромагнитного материала, причем  $L = b\mu w^2$ , где  $w$  – число витков, а  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника.

По закону Кирхгофа для напряжений (сумма падений напряжения в контуре равна нулю) схема на рис. 1.4 описывается следующей системой уравнений с использованием комплексных амплитуд:



$$\begin{cases} \mathbf{I}_1 r_1 = \mathbf{E} - \mathbf{I}_1 i\omega L_1 - \mathbf{I}_2 i\omega M, \\ \mathbf{I}_2 (r_2 + R_H) = -\mathbf{I}_2 i\omega L_2 - \mathbf{I}_1 i\omega M. \end{cases}$$

После эквивалентных преобразований получим

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{I}_1 [r_1 + (r_2 + R_H)n^2 + i(\omega L_1 - \omega L_2 n^2)], \\ \mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_1 \frac{i\omega M}{(r_2 + R_H) + i\omega L_2}, \end{cases}$$

где  $n = \sqrt{\frac{\omega^2 M^2}{(r_2 + R_H)^2 + (\omega L_2)^2}}$  – коэффициент трансформации.

Входное сопротивление системы связанных контуров определяется выражением

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{E} / \mathbf{I}_1 = r_1 + (r_2 + R_H)n^2 + i(\omega L_1 - \omega L_2 n^2) = R_3 + iX_3,$$

где  $n^2[(r_2 + R_H) - i\omega L_2]$  – сопротивление вторичной цепи, приведенное к первичной.

На практике индуктивность в трансформаторе получается настолько большой, что для не очень малых  $\omega$  (50 Гц, 400 Гц) и не очень больших  $R_H$  можно считать, что

$$(r_2 + R_H) \ll \omega L_2.$$

Следовательно,

$$n^2 \cong \frac{M^2}{L_2^2}.$$

Так как

$$K = M / \sqrt{L_1 L_2} \approx 1, \quad \text{то}$$

$$M \approx \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{и}$$

$$n^2 \cong \frac{L_1}{L_2} = \frac{b\mu w_1^2}{b\mu w_2^2} = \frac{w_1^2}{w_2^2} \quad \text{и}$$

$$n = \frac{w_1}{w_2}.$$

И тогда

$$\mathbf{Z}_3 \cong r_1 + (r_2 + R_H) \frac{M^2}{L_2^2} + i(\omega L_1 - \omega L_2 \frac{M^2}{L_2^2}) = R_3 + iX_3.$$

В силу того, что  $\omega L_1 = \omega \frac{L_2 M^2}{L_2^2}$ ,

$$\mathbf{Z}_3 \cong R_3 = r_1 + (r_2 + R_H) \frac{L_1}{L_2} = r_1 + n^2 (r_2 + R_H).$$

Так как  $r_1$  и  $r_2$  малы (это сопротивления проводов катушек), то

$$\mathbf{Z}_3 \cong R_3 = n^2 R_H.$$

Таким образом, входное сопротивление трансформатора является резистивным и зависит только от сопротивления нагрузки и коэффициента трансформации. Сдвиг по фазе между входным напряжением  $E$  и током первичной цепи  $I_1$  отсутствует, и поскольку  $U_{\text{вых}} \sim I_2 \sim \Psi_2 \sim \Psi_1 \sim I_1$ , то  $\varphi_{U_{\text{вых}}} = \varphi_{U_{\text{вх}}}$ .

Соотношения между токами в трансформаторе определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_1 \frac{i\omega M}{(r_2 + R_H) + i\omega L_2}, \quad (r_2 + R_H) \ll \omega L_2, \quad M = \sqrt{L_1 L_2},$$

и тогда

$$\mathbf{I}_2 \cong -\mathbf{I}_1 \frac{M}{\omega L_2} = -\mathbf{I}_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\mathbf{I}_1 n.$$

Для модулей токов (их действующих или амплитудных значений) справедливо соотношение для трансформации токов

$$\frac{I_2}{I_1} = n = \frac{w_1}{w_2}.$$

Так как коэффициент полезного действия (КПД) трансформатора близок к 1, то  $U_{\text{вх}} I_1 \cong U_{\text{вых}} I_2$ . Отсюда трансформация напряжений

$$\frac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{вых}}} \cong \frac{I_2}{I_1} \cong n = \frac{w_1}{w_2}.$$

Потери энергии в трансформаторах определяются следующими причинами:

а) перемагничивание сердечника, которое описывается эмпирической формулой для мощности потерь:

$$P_{Fe} = \alpha f B_m^\beta V,$$

где  $\alpha$  – характеристика материала,  $f$  – частота перемагничивания,  $B_m$  – максимальная индукция в сердечнике трансформатора,  $\beta$  – коэффициент, зависящий от  $B_m$  и изменяющийся в пределах  $1,6 \div 3,0$ ,  $V$  – объем сердечника; средством уменьшения потерь этого рода является изготовление сердечников из сталей с малой площадью петли гистерезиса;

б) выделение тепла токами Фуко, контурными токами, возникающими под действием переменного магнитного поля; средство борьбы с этими потерями – изготовление сердечника из пластин, отделенных одна от другой и электрически изолированных, кроме того, таким способом преодолевается размагничивающее действие токов Фуко.

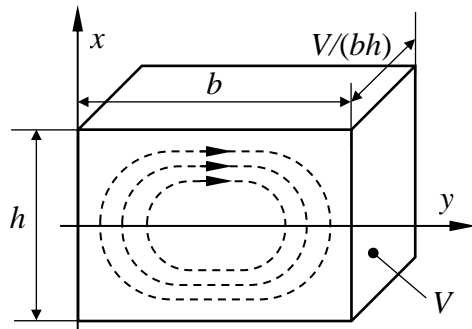


Рис. 1.5.

Рассмотрим механизм уменьшения потерь за счет пластинчатой конструкции сердечника трансформатора. При  $h \ll b$  (см. рис. 1.5) сопротивление контурного слоя толщиной  $dx$  составит  $R \approx \gamma 2b/dx$ , где  $\gamma$  – удельное сопротивление. При магнитном потоке  $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$ , ЭДС  $e = -d\Phi/dt = -e_m \cos \omega t$ ,  $e_m = 2\pi f \Phi_m$ . Полагая  $\Phi_m = B_m bh$  ( $S = bh$ ) и  $e_{mx} \approx 2\pi f B_m b 2x$ , мощность, расходуемая в слое  $dx$ , будет равна

$dP = e_{mx}^2/2R = f(x)dx$ . Мощность во всем сечении составляет

$$P = \int_0^{h/2} f(x)dx = \frac{\pi^2}{6\gamma} bh^3 f^2 B_m^2,$$

а во всем объеме

$$P_f = \frac{P}{bh} V = \frac{\pi^2}{6\gamma} h^2 f^2 B_m^2 V.$$

Таким образом, имеет место квадратичная зависимость потерь от частоты. Произведем теперь сравнение потерь в двух сердечниках одинакового сечения  $h \times b$  и объема  $V_0$ , но составленных из разных пластин толщиной  $a_1 = h/n_1$  и  $a_2 = h/n_2$ , где  $n_i$  – число пластин сердечников. Тогда

$$P_{1f} = A \frac{h^2}{n_1^2} \cdot \frac{V_0}{n_1} n_1, \quad P_{2f} = A \frac{h^2}{n_2^2} \cdot \frac{V_0}{n_2} n_2,$$

следовательно,

$$P_{2f}/P_{1f} = (n_1/n_2)^2,$$

и получаем сильную квадратичную зависимость уменьшения потерь с ростом  $n$ .

## 1.5. Операторный метод расчета электрических цепей.

В основе операторного метода расчета процессов в цепи лежит преобразование Лапласа, которое позволяет перенести решение из области функций действительного переменного в область комплексного переменного  $p$ :  $p = \alpha + i\omega$ . Прямое преобразование Лапласа задается соотношением:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt,$$

где  $f(t)$  – функция действительного переменного, определенная при  $t \geq 0$ ,  $f(t)|_{t < 0} = 0$ ,  $f(t)$  должна удовлетворять условиям ограниченного роста:  $|f(t)| < M \exp(C_0 t)$ , где множитель  $M$  и показатель роста  $C_0$  – положительные числа. Обратное преобразование Лапласа задается соотношением

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) \exp(pt) dp,$$

где  $F(p)$  – изображение по Лапласу,  $f(t)$  – оригинал. Связь между  $F(p)$  и  $f(t)$  будем записывать в следующем виде:

$$[f(t)] = F(p),$$

если  $F(p)$  является изображением  $f(t)$ .

Преобразование Фурье – это частный случай преобразования Лапласа, когда  $p = i\omega$ .

Для преобразования Лапласа справедливы следующие основные соотношения:

$$\Delta \left[ \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(p) \text{ – преобразование Лапласа линейно,}$$

$$\Delta \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) - f(0) \text{ – для ненулевых начальных условий,}$$

$$\Delta \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) \text{ – для нулевых начальных условий,}$$

$$\Delta \left[ \int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(p)}{p},$$

$$\Delta [f(t \pm \tau)] = \exp(\pm p\tau) F(p) \text{ – смещение в области действительного переменного,}$$

$$\Delta [f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \text{ – изменение масштаба действительного переменного,}$$

$$\Delta \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = \Delta \left[ \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] = F_1(p) \cdot F_2(p) \text{ –}$$

операция свертки.

Приведем изображения типовых сигналов.

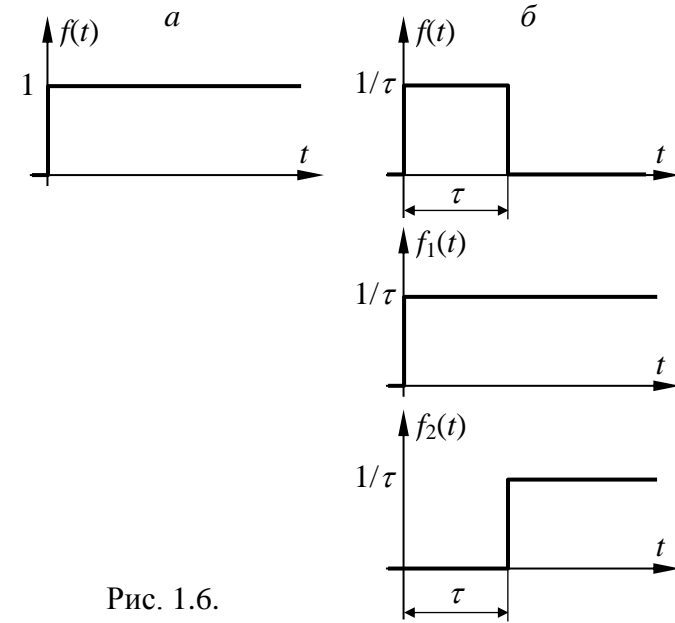


Рис. 1.6.

Изображение по Лапласу единичной функции (рис. 1.6,а):

$$F(p) = \int_0^{\infty} \mathbf{1}(t) \exp(-pt) dt = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Изображение по Лапласу импульсной единичной функции (рис. 1.6,б) определяется, исходя из того, что она представляет собой разность двух единичных функций, помноженных на  $1/\tau$ :

$$F(p) = F_1(p) - F_2(p), \text{ где } F_1(p) = \frac{1}{\tau p} \text{ и } F_2(p) = \frac{1}{\tau p} \exp(-p\tau),$$

и, следовательно, изображением импульсной единичной функции будет

$$F(p) = \frac{1}{\tau p} [\exp(-p\tau)].$$

Изображение по Лапласу экспоненциальной функции

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) \exp(-pt) dt = \frac{1}{\alpha + p}.$$

Изображение по Лапласу синусоидальной функции

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) \exp(-pt) dt = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}.$$

При использовании операторного метода операции дифференцирования и интегрирования функций времени заменяются соответствующими операциями умножения и деления функций комплексного переменного на оператор  $p$ , что существенно упрощает расчет, так как сводит систему дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений. Имеются специальные справочники, в которых приведены оригиналы и изображения широкого диапазона функций (см., например, [1, с. 242]).

После расчета в операторной форме токи и напряжения как функции времени можно определить по таблицам оригиналов и изображений, или воспользовавшись теоремой разложения, которая позволяет определить функцию действительного переменного по её изображению, представленному в виде рациональной дроби  $F(p)=F_1(p)/F_2(p)$ . Рассмотрим три варианта в зависимости от значений корней  $p_k$  характеристического уравнения  $F_2(p)=0$ .

Для случая вещественных и различных корней

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \exp(p_k t),$$

где  $n$  – число корней  $p_k$ , а

$$F_2'(p_k) = \left. \frac{dF_2(p)}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

При наличии нулевого корня  $F(p)=F_1(p)/pF_3(p)$ , тогда

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} \exp(p_k t), \quad F_3'(p_k) = \left. \frac{dF_3(p)}{dp} \right|_{p=p_k},$$

где  $p_k$  – корни характеристического уравнения  $F_3(p)=0$ , а  $n$  – число этих корней.

В случае комплексно-сопряженных корней  $p_k$

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \exp(p_k t) \right].$$

Рассмотрим пример расчета цепей операторным методом. Пусть дан последовательный  $RLC$ -контур (см. рис. 1.7,а), находящийся при нулевых начальных условиях:  $U_C(0) = 0$ ,  $i_L(0) = 0$ . Уравнение по закону напряжений Кирхгофа будет иметь вид:

$$U = IR + L \frac{dI}{dt} + C^{-1} \int_{-\infty}^t I dt = IR + L \frac{dI}{dt} + u_C(0_-) + C^{-1} \int_0^t I dt.$$

Тогда изображения по Лапласу для напряжения и тока будут:

$$U(p) = RI(p) + pLI(p) - LI(0_-) + U_C(0_-)/p + 1/(pC)I(p),$$

$$I(p) = \frac{U(p) + LI(0_-) - U_C(0_-)/p}{R + pL + 1/(pC)} = \frac{U_0(p)}{Z(p)},$$

где  $U_0(p) = U(p) + LI(0_-) - U_C(0_-)/p$  – операторное напряжение,  $Z(p) = R + pL + 1/(pC)$  – операторное сопротивление. Если  $p$  заменить на  $i\omega$ , то получим комплексное сопротивление цепи. Величины  $LI(0_-)$  и  $U_C(0_-)/p$  называют расчетными напряжениями. Они характеризуют энергию магнитного и электрического полей, запасенную в  $L$  и  $C$  к моменту коммутации.

Для нулевых значений начальных условий закон Ома имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

Входной сигнал представляет собой коммутируемое постоянное напряжение:  $U(t) = \mathbf{1}(t)U$ , следовательно,  $U(p) = U/p$ . Тогда при нулевых начальных условиях

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{R + pL + 1/(pC)} = \frac{UC}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Корни уравнения  $F_2(p) = LCp^2 + RCp + 1 = 0$  имеют вид

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

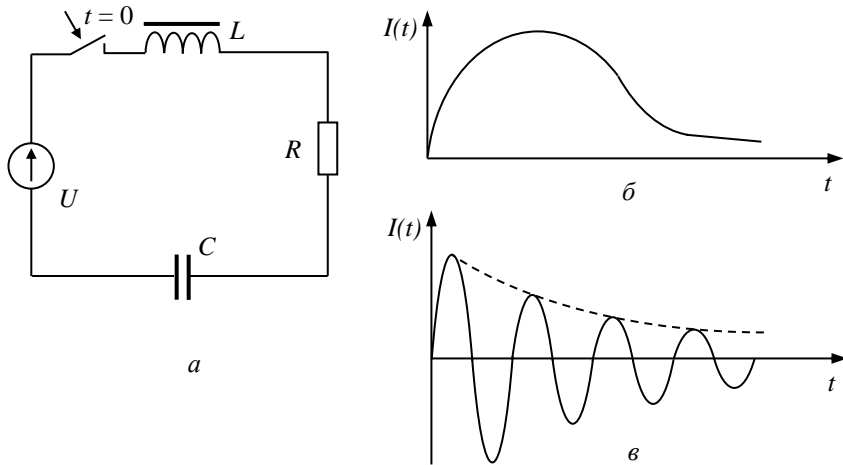


Рис. 1.7.

Введем ряд обозначений:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{— характеристическое сопротивление контура,}$$

$$\alpha = R/2L \quad \text{— коэффициент затухания контура,}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{— резонансная частота,}$$

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \text{— частота собственных затухающих колебаний.}$$

Имеются следующие варианты решения.

1. При  $R > 2\rho$  корни вещественны и различны.

Воспользуемся теоремой разложения.

$$\begin{aligned} F'_2(p_1) &= 2Lp_1 + RC, \\ F'_2(p_2) &= 2Lp_2 + RC. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{UC}{2Lp_1 + RC} \exp(p_1 t) + \frac{UC}{2Lp_2 + RC} \exp(p_2 t) = \\ &= \frac{U}{2Lp_1 + R} \exp(p_1 t) + \frac{U}{2Lp_2 + R} \exp(p_2 t). \end{aligned}$$

Так как  $I(0) = 0$ , то

$$\begin{aligned} U/(2Lp_1 + R) &= -U/(2Lp_2 + R), \\ 2Lp_1 + R &= -2Lp_2 - R, \\ R &= -L(p_1 + p_2), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U}{L(p_1 - p_2)} \exp(p_1 t) - \frac{U}{L(p_1 - p_2)} \exp(p_2 t) = \\ &= \frac{U}{L(p_1 - p_2)} [\exp(p_1 t) - \exp(p_2 t)] \end{aligned}$$

(см. рис. 1.7,б).

2. При  $R < 2\rho$  имеем комплексные сопряженные корни и

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

при этом

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Следовательно

$$p_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_c.$$

Как указано выше, нам следует воспользоваться следствием из теоремы разложения для случая комплексных сопряженных корней. Однако для рассматриваемой простой задачи приведем другой вариант решения. Воспользуемся решением, полученным для  $R > 2\rho$ , и, подставив в него комплексные корни  $-\alpha \pm i\omega_c$ , получим

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U}{L(p_1 - p_2)} [\exp(p_1 t) - \exp(p_2 t)] = \\ &= \frac{U}{2i\omega_c L} [\exp(-\alpha t) \exp(i\omega_c t) - \exp(-\alpha t) \exp(-i\omega_c t)] = \end{aligned}$$

$$= \frac{U}{\omega_c L} \exp(-\alpha t) \frac{\exp(i\omega_c t) - \exp(-i\omega_c t)}{2i}.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, получим окончательный результат

$$I(t) = \frac{U}{\omega_c L} \exp(-\alpha t) \sin(\omega_c t),$$

который, как нетрудно убедиться, совпадает с решением по следствию из теоремы разложения для случая комплексных сопряженных корней. График соответствующей функции  $I(t)$  представлен на рисунке 1.7,в, где множитель  $\exp(-\alpha t)$  определяет затухание.

При составлении операторных схем, эквивалентных исследуемым электрическим, источники тока и напряжения заменяются соответствующими изображениями  $I(p)$  и  $U(p)$ . Индуктивность заменяется на  $pL$ , а емкость – на  $1/pC$  при нулевых начальных условиях. Если начальные условия ненулевые, то последовательно с  $pL$  добавляется источник напряжения  $LI(0)$ , а с  $1/pC$  – источник напряжения  $U_C(0)/p$ .

## 2. РАССЧЕТ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ГРАФОВ.

### 2.1. Основные понятия теории графов.

Методы теории графов являются мощным средством расчета систем различной физической природы. Различные аспекты теории графов изложены в работах [2, 3, 4, 5, 6].

*Графом*  $\Gamma$  называют совокупность множества вершин  $V$  и множества ребер  $R$ :  $\Gamma = \{V, R\}$ . Элементами множества  $V$  могут быть любые объекты. Множество  $R$  образуется парами вида  $r_\alpha = (v_j, v_k)$ , где  $v_j$  и  $v_k$  – элементы множества  $V$ . Между вершинами и ребрами устанавливаются отношения *инциденций* (принадлежности). Так, ребро  $r_\alpha = (v_j, v_k)$  инцидентно вершинам,  $v_j$  и  $v_k$ , которые при этом называют *смежными*. Если вершина  $v_j$  принадлежит, кроме ребра  $r_\alpha$ , также ребрам  $r_\beta$  и  $r_\gamma$ , то говорят, что  $v_j$  инцидентна ребрам  $r_\alpha$ ,  $r_\beta$  и  $r_\gamma$ .

Отметим, что в приведенном определении паре вершин ставится в соответствие единственное ребро. Когда множество  $R$  таково, что некоторой паре вершин соответствует несколько ребер (например,  $r_\alpha = (v_j, v_k)$ ,  $r_\beta = (v_j, v_k)$ ), то совокупность множеств  $\{V, R\}$  называют *мультиграфом*.

Существуют следующие способы представления графов.

Граф может быть представлен простым перечислением элементов его множеств – списком. Например, запись  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  $R = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_6), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$  однозначно определяет граф, образованный шестью вершинами ( $v=6$ ) и девятью ребрами ( $r=9$ ).

Граф задают также с помощью *матриц*. *Матрицей смежностей*  $S = [s_{jk}]_{v \times v}$  называют матрицу с элементами  $s_{jk}$ , равными 1, если вершина  $v_j$  смежна с  $v_k$ , и равными 0 в противном случае. Элементами главной диагонали матрицы  $S$  являются нули. *Матрицей инциденций*  $I = [i_{jk}]_{r \times v}$  называют матрицу с элементами  $i_{jk}$ , равными 1, если ребро  $r_j$  инцидентно вершине  $v_k$  и равными 0 в противном случае. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, то любая строка матрицы  $I$  содержит лишь две единицы.

Например, для графа, определенного ранее списками вершин и ребер, описанные матрицы таковы:

$$S = \begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \quad I = \begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \end{array}$$

Граф может быть представлен чертежом, на котором каждой вершине отвечает точка, а ребру – отрезок прямой или кривой, соединяющей смежные вершины. На рис. 2.1 изображены три различных геометрических представления графа, заданного выше списками и матрицами.

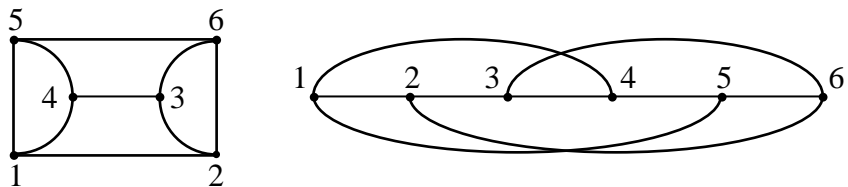


Рис. 2.1.

Для иллюстрации способов определения был рассмотрен граф, состоящий из шести вершин, связанных девятью ребрами. Этот граф был представлен списками вершин и ребер, матрицами смежностей и инцидентности и тремя графическими изображениями. Та же информация может быть выражена следующим образом: в качестве примера было приведено шесть изоморфных графов. Графы  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  называют *изоморфными*,

если между множествами  $V$  и  $V'$ ,  $R$  и  $R'$ , образующими эти графы, существуют взаимно однозначные соответствия; иначе говоря, каждому элементу  $v_j$  множества  $V$  отвечает элемент  $v'_j$  множества  $V'$ , и из смежности вершин  $v_j$  и  $v_k$  следует смежность вершин  $v'_j$  и  $v'_k$ .

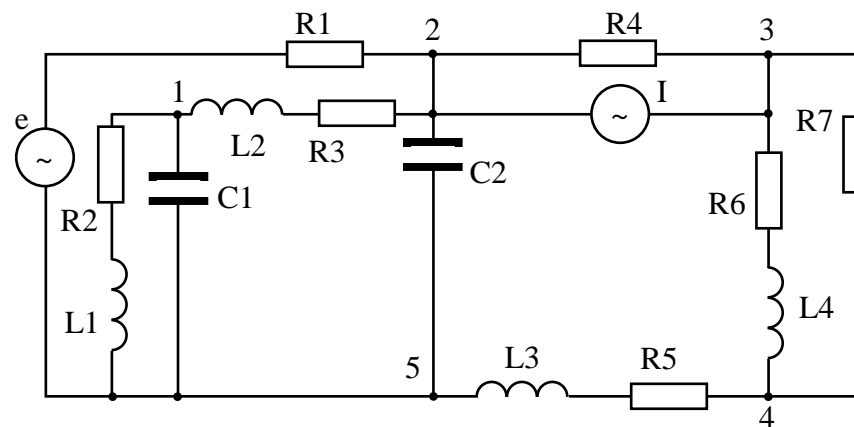


Рис. 2.2

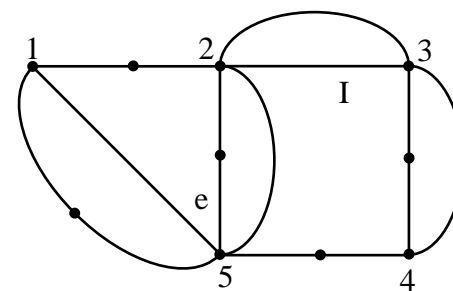


Рис. 2.3

Для расчета систем с помощью теории графов необходимо получить граф системы. Наиболее просто эта процедура выполняется для электрических систем, обычно представляемых с помощью принципиальных схем. В этом случае элементы схемы (двухполюсники) заменяются отрезками, рассматриваемыми как ребра получаемого графа, а точки соединения элементов соответствуют вершинам графа.

На рисунке 2.2 представлена схема электрической системы, граф которой приведен на рисунке 2.3.

Для механических систем также можно построить граф, заменяя отрезками механические двухполюсники. Заметим, что в этом случае необходимо предварительно получить схему механической системы по ее рисунку и описанию.

Следует отметить, что в схемах физических систем пару вершин могут связывать несколько параллельных ребер. Поэтому полученные указанным путем абстрактные структуры являются, вообще говоря, *мультиграфами*. В дальнейшем термин «граф» будем применять в широком смысле, т. е. под графом будем понимать и собственно граф и мультиграф.

Приведем определения основных понятий теории графов.

Граф называют *планарным*, если его геометрическое представление может целиком размещаться в плоскости чертежа, на котором ребра не пересекаются. Планарным, в частности, является граф, использованный ранее в качестве иллюстрации. В самом деле, первый из чертежей на рис. 2.1 представляет такую реализацию графа, когда у ребер нет других общих точек, кроме вершин.

Пример *непланарного* графа приведен на рис. 2.4.

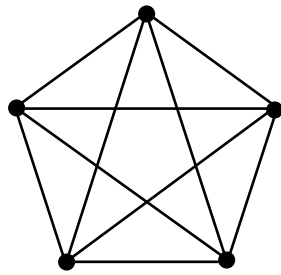


Рис. 2.4.

Совокупности, образованные подмножествами множеств  $V$  и  $R$ , называют *подграфами*.

Подграф, состоящий из последовательно соединенных в общих вершинах неповторяющихся ребер:  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$  называют *путем*. Для графа на

рис. 2.1 можно указать такие, например, пути:  $\{(1,4), (4,3), (3,2)\}$ ,  $\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$ .

Если две, какие угодно вершины графа можно связать путем, пролегающим через его ребра и другие его вершины, то граф называют *связным*.

Иногда рассматриваются совокупности связных графов, которые – в соответствии с определением – также являются графами. Подобные графы называют *несвязными*, состоящими из связных компонент.

Если конечные вершины пути совпадают:  $v_1 = v_n$ , то подграф называют *циклом* или *контуром*. Каждая вершина контура инцидентна двум и только двум ребрам. Укажем некоторые из контуров графа на рис. 2.1:  $\{(1,2), (2,3), (3,6), (6,5), (5,4), (4,1)\}$ ,  $\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$ ,  $\{(1,5), (5,4), (4,1)\}$ .

Связный подграф связного графа, включающий полное множество всех вершин  $V$  и такое подмножество множества ребер  $R$ , что подграф не содержит ни одного контура, называют *деревом*. На рис. 2.3 в первом ряду приведены некоторые деревья графа, изображенного на рис. 2.1. Во втором ряду на рис. 2.5 представлены ребра графа, не вошедшие в состав деревьев. Они образуют *дополнения* этих деревьев. Отметим, что дополнение последнего дерева является контуром.

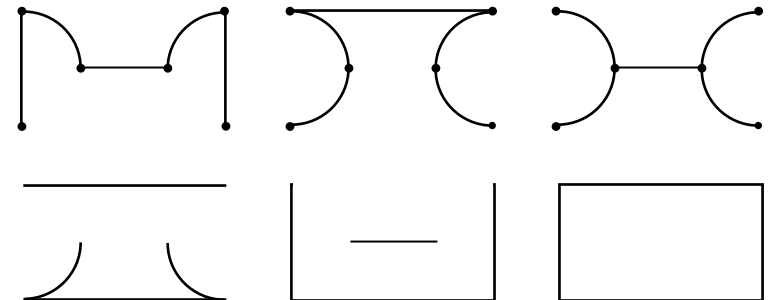


Рис. 2.5.

Если исходный граф сам не является деревом, то выбор последнего неоднозначен. Когда дерево выбрано, то тем самым



проведено разбиение всех ребер на два подмножества: ребра, образующие дерево, называют *ветвями*, а остальные ребра, входящие в состав дополнения дерева, – *хордами*.

**Теорема 1.** Пусть связный граф составлен из  $v$  вершин и  $r$  ребер. Тогда число всех ветвей

$$b = v - 1, \quad (2.1)$$

а число всех хорд

$$c = r - v + 1. \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Доказательство проводится по методу математической индукции.

а) Для графа минимального размера  $v = 2$ . Если при этом  $b > v - 1$  (то есть  $b > 1$ ), то две вершины соединены двумя или более ветвями и образуется контур, что противоречит определению дерева. Следовательно (при соблюдении связности дерева)  $b = v - 1 = 1$ , и утверждение теоремы верно.

б) Пусть утверждение теоремы справедливо для графа, имеющего  $v$  вершин, то есть  $b_v = v - 1$ . Докажем, что отсюда следует справедливость утверждения теоремы для графа, полученного из исходного дополнением одной вершины, и содержащего  $v+1$  вершину, то есть что  $b_{v+1} = (v + 1) - 1 = v$ . Действительно, чтобы подграф оставался связным, новая вершина должна быть соединена с остальными, по крайней мере, одной ветвью. Но, допуская возможность присоединения и второй ветви, приходим к заключению, что эта ветвь замыкает путь, пролегающий между вершинами связного подграфа, и образует контур, что вступает в противоречие с определением дерева. Следовательно, с добавлением одной вершины добавляется одна и только одна ветвь, и

$$b_{v+1} = (v - 1) + 1 = v = (v + 1) - 1.$$

Таким образом, справедливость формулы (2.1) доказана методом индукции.

Но ветви и хорды в совокупности составляют все множество ребер:  $r = b + c$ , откуда и вытекает равенство (2.2).

Если граф из  $v$  вершин и  $r$  ребер является несвязным, то совокупность деревьев его  $k$  связных компонент образует *лес*.

**Теорема 2.** Число ветвей леса

$$b = v - k, \quad (2.1a)$$

а число хорд несвязного графа

$$c = r - v + k. \quad (2.2a)$$

*Доказательство.* Число ветвей деревьев  $k$  связных компонент графа равно

$$b = \sum_{i=1}^k b_i, \text{ где } b_i = v_i - 1.$$

Тогда

$$b = \sum_{i=1}^k (v_i - 1) = v - k.$$

Поскольку  $r = b + c$ , то

$$c = r - b = r - v + k.$$

Далее будем рассматривать только связные графы.

*Независимым* контуром называется контур, образованный хордой и путем, пролегающим по ветвям и соединяющим вершины, инцидентные данной хорде.

**Теорема 3.** Для каждой хорды существует единственный независимый контур.

*Доказательство.* Хорда инцидентна двум вершинам графа. Так как дерево включает в свой состав все вершины, то и вершины, инцидентные хорде, принадлежат дереву. Но дерево – связный подграф. Поэтому указанные вершины, действительно, связаны путем, пролегающим по ветвям, и данный путь единственный, так как допущение о наличии второго пути, пролегающего по ветвям дерева, равносильно допущению о наличии в дереве контура, что противоречит определению дерева.

Из рассмотренной теоремы следует, что число независимых контуров графа совпадает с числом хорд.

Два графа называют *дуальными* по отношению друг к другу, если установлено взаимно однозначное соответствие между ветвями одного и хордами другого, между хордами

одного и ветвями другого. Однако при конкретном рассмотрении один граф считают обычно исходным, а другой – дуальным по отношению

к первому. Условимся величины, относящиеся к дуальному графу, в отличие от величин, характеризующих исходный граф, снабжать индексом «д». Тогда определение дуальности графов можно выразить равенствами

$$b_d = c, c_d = b. \quad (2.3)$$

Следовательно, число ребер исходного и дуального графов совпадают. Действительно,  $r_d = c_d + b_d = c + b = r$ . Для определения числа вершин дуального графа воспользуемся выражением  $b_d = v_d - 1$ , справедливым для любого связного графа. Поскольку  $b_d = c$ , имеем  $v_d - 1 = c$ , откуда

$$v_d = c + 1, \quad (2.4)$$

то есть число вершин дуального графа на единицу больше числа хорд исходного графа.

Равенства (2.3) и (2.4) позволяют разработать графический способ построения графа, дуального данному.

Любой контур планарного графа окаймляет некоторую ограниченную часть плоскости. Поставив точку внутри каждой фигуры, ограниченной независимым контуром, получим  $c$  точек. Если поставить еще одну точку за пределами части плоскости, занятой графом, то совокупность  $c + 1$  точек можно считать вершинами графа, дуального данному.

Чтобы построить дуальный граф, достаточно теперь  $c + 1$  вершин соединить ребрами. Так как  $r_d = r$ , то каждое ребро дуального графа обязательно должно пересечь одно и только одно ребро исходного графа. При этом ребро, пересекающее ветвь, будет хордой дуального графа, а ребро, пересекающее хорду, – ветвью дуального графа.

Полученные правила проиллюстрируем конкретным примером. Для большей наглядности вершины исходного графа изобразим светлыми кружками, а дуального – черными; ветви исходного дерева выделим жирными линиями, ветви дуального – двойными (пунктирные линии – хорды дуального графа). На рис. 2.6, а изображен исходный

граф, рис. 2.6, б иллюстрирует построение дуального графа, рис. 2.6, в представляет дуальный граф. Можно убедиться в том, что граф, дуальный графу на рис. 2.6, в, является графом на рис. 2.6, а.

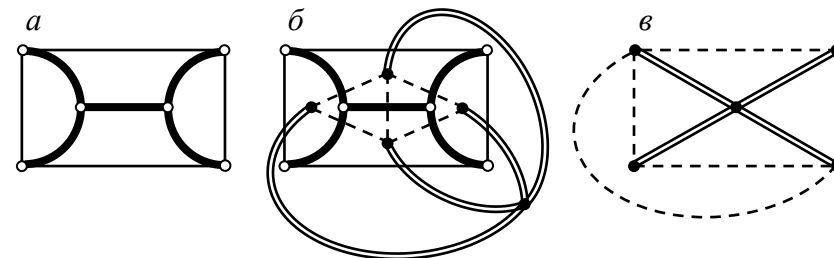


Рис. 2.6.

## 2.2. Дуальные физические системы.

Обратимся к электрическим цепям – простому последовательному контуру и простому параллельному контуру, изображенным на рис. 2.7.

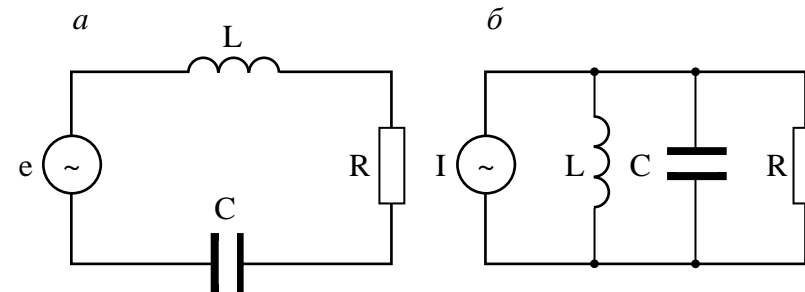


Рис. 2.7

Очевидно, что граф первой из них  $\Gamma_{\text{посл}} = \{v = 4, r = 4\}$  представляет собой контур, граф второй  $\Gamma_{\text{пар}} = \{v = 2, r = 4\}$  – связку параллельных ребер, инцидентных одной общей паре вершин. Легко убедиться в том, что эти графы дуальны друг другу.

Уравнение простой последовательной цепи записывается по закону Кирхгофа для напряжений в форме

$$L \frac{dI}{dt} + RI + C^{-1} \int Idt = e, \quad (2.5)$$

или, имея в виду, что  $I = dq/dt$ ,

$$L\dot{q} + R\dot{q} + C^{-1}q = e, \quad (2.6)$$

где  $e$  – ЭДС.

Такие физические величины, как электрический заряд  $q$ , ток  $i = \dot{q}$ , общие для всех последовательно соединенных двухполюсников, будем называть *последовательными переменными*.

Уравнения параллельной цепи по закону Кирхгофа для токов имеют вид

$$C \frac{dU}{dt} + R^{-1}U + L^{-1} \int Udt = I, \quad (2.7)$$

или, имея в виду, что  $U = d\psi/dt$ ,

$$C\dot{\psi} + R^{-1}\dot{\psi} + L^{-1}\psi = I. \quad (2.8)$$

Обобщенные потокосцепления  $\psi$ , напряжения  $u = \dot{\psi}$ , общие для всех параллельно соединенных двухполюсников, назовем *параллельными переменными*.

Уравнения (2.5) и (2.6) отличаются от уравнений (2.7) и (2.8) лишь обозначениями, что позволяет ввести понятие о *дуальных физических системах* (в данном случае – о дуальных электрических цепях).

Физические системы называют дуальными, если уравнения для последовательных (параллельных) переменных одной из них отличаются лишь обозначениями от уравнений для параллельных (последовательных) переменных другой. Дуальным физическим системам отвечают дуальные графы, полученные из схем физических систем заменой двухполюсников ребрами графа.

Заметим, что механическими последовательными переменными являются импульсы сил  $l$  и силы  $p = \dot{l}$ ,

механическими параллельными переменными – перемещения  $h$  и скорости  $v = \dot{h}$ .

### 2.3. Ориентированные графы и законы Кирхгофа.

Чтобы применить законы Кирхгофа, каждому ребру графа для определения знака соответствующей составляющей предписывается определенное направление, отвечающее расчетному положительному направлению тока (в электрических системах), протекающего через двухполюсник цепи, который был заменен данным ребром графа.

У графа, предназначенного для расчетов, каждому  $j$ -му ребру ставятся в соответствие значения последовательной  $x_j$  и параллельной  $y_j$  переменных этого ребра.

Прообразами последовательных переменных  $x_j$  в электрических цепях служат заряды  $q_j$  и токи  $I_j$ , в механических системах – импульсы сил  $l_j$  и силы  $p_j$ . Интегралы и производные любого порядка от этих величин также являются последовательными переменными.

Прообразами параллельных переменных  $y_j$  в электрических цепях являются обобщенные потокосцепления  $\psi_j$  и напряжения  $u_j$ , в механических системах – перемещения  $h_j$  и скорости  $v_j$ . Интегралы и производные любого порядка от этих величин остаются параллельными переменными.

Указав искомые величины  $x_j$  и  $y_j$ , отвечающие  $j$ -му ребру, следует определить также положительное направление отсчета данных величин. Унифицируя выбор положительного направления отсчета последовательной и параллельной переменных  $j$ -го ребра, будем снабжать ребро стрелкой, указывающей это направление. Ориентированное ребро принято для краткости называть *дугой*, а граф, составленный из дуг, имеющих общими точками вершины, – *ориентированным графом* или, короче, – *орграфом*.

Если орграф отражает топологическую структуру электрической цепи, то для всех его вершин, инцидентных дугам, справедливы уравнения первого закона Кирхгофа:

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, v, \quad (2.9)$$

где  $a_{ij} = +1$ , если  $j$ -я дуга исходит из  $i$ -й вершины,  
 $a_{ij} = -1$ , если  $j$ -я дуга приходит в  $i$ -ю вершину,  
 $a_{ij} = 0$ , если  $j$ -я дуга не инцидентна  $i$ -той вершине.

Для всевозможных контуров, служащих подграфами данного орграфа, справедливы уравнения второго закона Кирхгофа:

$$\sum_{j=1}^r b_{kj} y_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.10)$$

где предполагается, что каждому  $k$ -му контуру предписано определенное направление обхода (по ходу часовой стрелки или против него); при этом

$b_{kj} = +1$ , если ориентация  $j$ -й дуги отвечает направлению обхода  $k$ -того контура,  
 $b_{kj} = -1$ , если ориентация  $j$ -й дуги противоположна направлению обхода  $k$ -того контура,  
 $b_{kj} = 0$ , если  $j$ -й дуга не входит в  $k$ -тый контур,

$K$  – число контуров графа.

Отметим, что уравнения (2.9) справедливы для токов и для производных токов любого порядка. Для электрических зарядов соответствующие уравнения могут быть получены интегрированием, и потому будут содержать в качестве постоянных интегрирования начальные значения зарядов:

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} \Delta q_j = \sum_{j=1}^r a_{ij} (q_j - q_{j0}) = 0.$$

То же самое имеет место для модификаций уравнений второго закона Кирхгофа для обобщенных потокосцеплений:

$$\sum_{j=1}^r b_{kj} \Delta \psi_j = \sum_{j=1}^r b_{kj} (\psi_j - \psi_{j0}) = 0.$$

Электромеханические аналогии позволяют распространить уравнения (2.9) и (2.10) на механические системы. В форме (2.9) уравнения справедливы для сил и их производных. Уравнения для импульсов сил аналогичны модификациям

уравнений первого закона Кирхгофа для зарядов. В форме (2.10) уравнения справедливы для скоростей и их производных. Для перемещений уравнения аналогичны модификациям уравнений второго закона Кирхгофа для потокосцеплений.

Законы Кирхгофа для механических переменных являются следствием законов сложения сил и скоростей в проекциях на координатные оси. Находясь в соответствии с определениями последовательных и параллельных соединений двухполюсников, уравнения этих законов отражают топологические структуры механических систем.

По физическому содержанию первый закон свидетельствует о том, что в точке сочленения пассивных двухполюсников импульс сил сохраняет заданное значение (закон сохранения импульса), а второй закон – о связности физического пространства: выходя из точки сочленения пассивных двухполюсников и перемещаясь вдоль контура, составленного пассивными двухполюсниками, неизменно возвращаются в исходную точку.

Законы Кирхгофа имеют фундаментальное значение для широкого класса физических систем, а уравнения этих законов применяются для аналитического описания систем.

Говоря для определенности об орграфах, отражающих структуры электрических цепей, заметим, что каждая дуга ограничена двумя смежными вершинами, и если для одной из них ток является вытекающим, то для другой – притекающим. Поэтому в уравнение первого закона для первой вершины ток входит со знаком плюс, а для второй – со знаком минус. Просуммировав все  $v$  уравнений, получим тождество  $0 \equiv 0$ . Таким образом, одно из уравнений является избыточным, и система независимых уравнений образуется совокупностью  $v-1$  уравнений первого закона Кирхгофа.

Не так просто обстоит дело с уравнениями второго закона: выбор контуров неоднозначен, по мере усложнения структуры электрической цепи и отвечающего ей орграфа отбор совокупности контуров, для которых уравнения второго

закона Кирхгофа составляют полную систему независимых уравнений, становится все более затруднительным, разрастаясь в сложную проблему. Ее решение достигается использованием совокупности независимых контуров, приведенное выше определение которых сохраняет силу и для орграфов.

#### 2.4. Независимые контуры, отсечения и матрицы их уравнений.

Рассмотрим связный орграф, образованный  $v$  вершинами и  $r$  дугами. Дерево является его подграфом, включающим все  $v$  вершин и такое подмножество множества дуг, чтобы, с одной стороны, соблюдалось условие связности и, с другой, подграф не содержал ни одного контура. Выбор деревьев неоднозначен. Проводя с помощью орграфа расчеты, выберем одно определенное дерево и до завершения расчетов не будем пользоваться никаким другим. Дерево, выбранное для расчетов, назовем *опорным*.

После выбора опорного дерева ветви и хорды сохраняют ориентацию дуг орграфа. Ориентация хорды, породившей независимый контур, определяет направление обхода этого контура. Число независимых контуров совпадает с числом хорд  $c$ .

**Теорема 4.** Совокупность уравнений второго закона Кирхгофа для независимых контуров образует полную систему независимых уравнений относительно параллельных переменных:

$$\sum_{j=1}^r c_{kj} y_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, c, \quad (2.11)$$

где  $c_{kk} = +1$ , а если  $j \neq k$ , то

$c_{kj} = +1$  в том случае, когда  $j$ -я ветвь входит в состав  $k$ -того контура и ориентирована согласно  $k$ -той хорде;

$c_{kj} = -1$  в том случае, когда  $j$ -я ветвь входит в состав  $k$ -того контура и ориентирована противоположно  $k$ -той хорде;

$c_{kj} = 0$  в том случае, когда  $j$ -я ветвь не входит в независимый контур  $k$ -той хорды.

*Доказательство.* Независимость уравнений независимых контуров следует из того, что каждое уравнение содержит параллельную переменную лишь одной хорды, и, во всяком случае, именно этими переменными уравнения отличаются одно от другого.

Полнота системы *уравнений независимых контуров* (УНК) вытекает из требования связности к физически реализуемой системе. Конкретно она означает, что каждая дуга графа системы входит в какой-нибудь контур рассматриваемого графа. В противном случае последовательная (и, следовательно, параллельная) переменная дуги принимает нулевое значение, и дуга в работе системы не участвует. Каждая хорда входит в состав своего независимого контура (см. теорему 3), поэтому параллельная переменная хорды входит в какое-нибудь уравнение системы УНК. Поскольку дерево контуров не содержит, а каждая ветвь должна входить в некоторый контур системы, то каждая ветвь входит в состав какого-нибудь независимого контура, и параллельная переменная ветви входит в какое-нибудь уравнение системы УНК. Таким образом, параллельные переменные всех дуг графа входят в систему УНК, и, следовательно, последняя является полной.

Для составления системы уравнений независимых контуров все дуги должны иметь определенный индекс. Причем первые индексы приписываются ветвям, а последующие – хордам.

Система УНК может быть записана в матричной форме:

$$\mathbf{C}\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{cc} \mathbf{C}_b & \mathbf{E}_c \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{Y}_c \end{array} = \mathbf{0},$$

где  $c \times r$  – матрица коэффициентов  $\mathbf{C}$  представлена в блочной форме:  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_b \mathbf{E}_c]$ ; матрица-блок  $\mathbf{C}_b = [c_{kj}]_{c \times b}$  содержит коэффициенты, отнесенные лишь к ветвям, а  $\mathbf{E}_c$  – единичная

$c \times c$ -матрица; вектор параллельных переменных состоит из параллельных переменных ветвей и хорд:  $\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{Y}_c \end{vmatrix}$ .

Рассмотрим в качестве примера орграф (рис. 2.8) с выделенным жирными линиями опорным деревом и укажем соответствующие ему УНК.

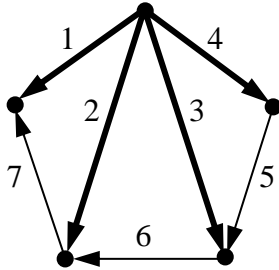


Рис. 2.8.

$$\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_7 \end{array} = \mathbf{0}.$$

Естественно предположить, что можно получить полную совокупность независимых уравнений для последовательных переменных, каждое из которых отличается от остальных, по крайней мере, переменной ветви, поскольку содержит последовательную переменную лишь одной ветви. Такие уравнения действительно можно составить. Их называют *уравнениями отсечений* (УО). Если УНК отражают второй закон, то УО – первый закон Кирхгофа.

Исходя из взаимной однозначности между дугами дуальных орграфов, можно определить отсечения как подграфы данного графа, дуальные независимым контурам дуального орграфа.

Для определения отсечения можно, однако, не прибегать к понятию дуальности (оно проявится как следствие).

Напомним, что дерево связывает ветвями все вершины орграфа. Если из дерева изъять любую ветвь, то связность нарушится, дерево распадется на две связные компоненты, каждая из которых объединяет группу вершин (одна группа, в частности, может состоять всего из одной вершины). Итак, изымая из дерева одну ветвь, все вершины орграфа разбивают на две не пересекающиеся группы.

Подграф, состоящий из ветви и тех хорд, одна из смежных вершин которых инцидентна первой, а другая – второй группе вершин орграфа, образовавшихся при удалении из дерева данной ветви, называется *отсечением*.

Для получения отсечения вершины разбиваются на группы, одну из которых можно условно назвать первой, а другую – второй. Если, например, ветвь направлена из первой группы во вторую, то под *согласной ориентацией* хорды следует понимать случай, когда хорда также выходит из первой и приходит во вторую группу.

**Теорема 5.** Совокупность  $b$  всех уравнений отсечений (УО) образует полную систему независимых уравнений относительно последовательных переменных:

$$\sum_{j=1}^r d_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, b, \quad (2.12)$$

где  $d_{ii} = +1$ , а если  $j \neq i$ , то

$d_{ij} = +1$  в том случае, когда  $j$ -я хорда входит в состав отсечения  $i$ -той ветви и ориентирована согласно  $i$ -той ветви;

$d_{ij} = -1$  в том случае, когда  $j$ -я хорда входит в состав отсечения  $i$ -той ветви и ориентирована противоположно  $i$ -той ветви;

$d_{ij} = 0$  в том случае, когда  $j$ -я хорда не входит в состав отсечения  $i$ -той ветви.

*Доказательство.* Независимость уравнений отсечений следует из того, что каждое уравнение содержит последовательную переменную лишь одной ветви, и, во всяком случае, именно этими переменными уравнения отличаются одно от другого.

Полнота системы уравнений отсечений означает, что последовательные переменные всех дуг входят в уравнения системы. Для последовательных переменных ветвей это очевидно, а для последовательных переменных хорд соответствует тому, что каждая хорда входит в состав отсечения какой-либо ветви. Если это не так, и какая-нибудь хорда не входит в отсечение ни одной ветви, то при удалении любой ветви инцидентные хорде вершины всегда остаются в одной группе вершин, то есть всегда связаны путем, пролегающим по ветвям. Тогда указанные вершины связаны более чем одним путем, пролегающим по ветвям, и в дереве есть контур, что противоречит определению дерева. Таким образом, последовательные переменные всех дуг графа входят в систему УО, и, следовательно, последняя является полной.

Система УО может быть записана в матричной форме:

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{0}, \text{ или } \left| \begin{array}{cc} \mathbf{E}_b & \mathbf{D}_c \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_c \end{array} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{D}$  –  $b \times r$ -матрица коэффициентов УО;  $\mathbf{D}$  представлена в блочной форме:  $\mathbf{D} = [\mathbf{E}_b \mathbf{D}_c]$ ;  $\mathbf{E}_b$  – единичная  $b \times b$ -матрица; матрица-блок  $\mathbf{D}_c = [d_{ij}]_{b \times c}$  содержит коэффициенты, отнесенные к хордам, а вектор последовательных переменных состоит из последовательных переменных ветвей и хорд:  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_c \end{bmatrix}$ .

Рассмотрим в качестве примера оргграф (рис. 2.8) и укажем соответствующие ему УО.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ 1 \left| \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{array} \Bigg| = \mathbf{0}. \end{array}$$

Легко убедиться, что каждое из четырех уравнений системы выражает первый закон Кирхгофа для соответствующей вершины. Иногда это является менее очевидным.

Процедура построения отсечений показана на рисунке 2.9.

Хотя рассмотренный пример носит частный характер, но в силу его произвольности он позволяет подтвердить вывод о том, что система УО является следствием первого закона Кирхгофа.

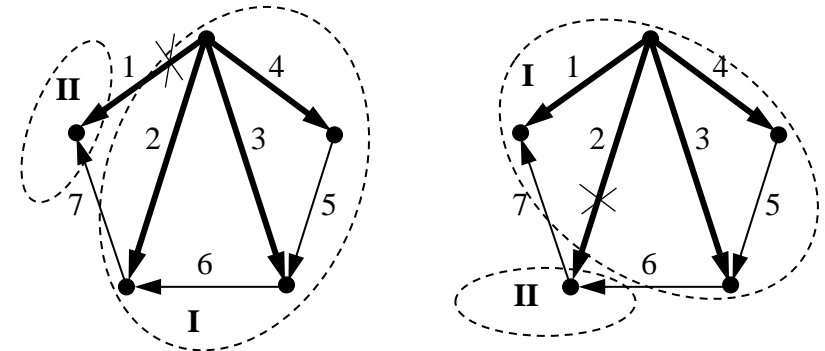


Рис. 2.9, а, б.

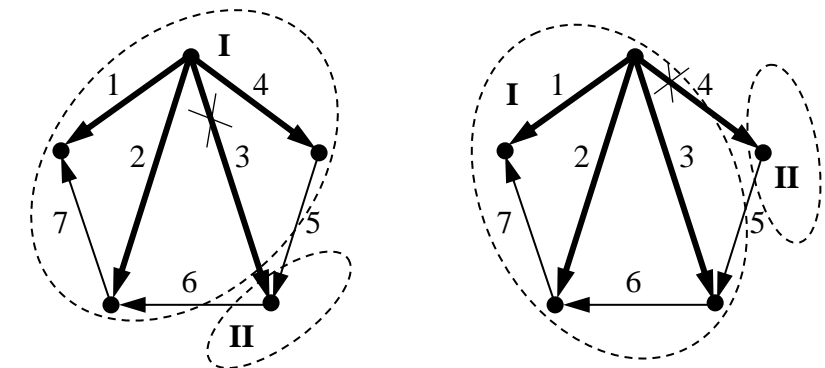


Рис. 2.9, в, г.

Матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  коэффициентов УНК и УО не являются независимыми.

**Теорема 6.** Произведение матрицы  $\mathbf{C}$  на транспонированную матрицу  $\mathbf{D}$  есть матрица-нуль:

$$\mathbf{C}\mathbf{D}^T = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

*Доказательство.* Будем исходить из того, что произведение матриц есть матрица  $\mathbf{C}\mathbf{D}^T = \mathbf{\Omega} = [\omega_{ki}]_{c \times b}$ , элементы которой по

определению

$$\omega_{ki} = \sum_{j=1}^r c_{kj} d_{ji},$$

где  $b + 1 \leq k \leq r, 1 \leq i \leq b$ .

Эту сумму разобьем на две части:

$$\omega_{ki} = \sum_{j=1}^b c_{kj} d_{ji} + \sum_{j=b+1}^r c_{kj} d_{ji}.$$

В первой группе слагаемых множители  $d_{ji}$  – элементы единичной матрицы  $\mathbf{E}_b$ , во второй группе множители  $c_{kj}$  – элементы единичной матрицы  $\mathbf{E}_c$ . Отличными от нуля являются  $d_{ii} = 1$  в первой группе и  $c_{kk} = 1$  во второй группе. Поэтому элемент  $\omega_{ki}$  содержит лишь два слагаемых, отличных от нуля:

$$\omega_{ki} = c_{ki} + d_{ki},$$

причем  $k$  – индекс хорды,  $i$  – индекс ветви.

Если  $c_{ki} \neq 0$ , то это означает, что  $i$ -я ветвь входит в состав независимого контура  $k$ -й хорды (см. рис. 2.10,а). При удалении  $i$ -й ветви вершины, инцидентные  $k$ -й хорде, окажутся в разных группах, иначе в дереве есть контур. Следовательно, и  $d_{ki} \neq 0$ .

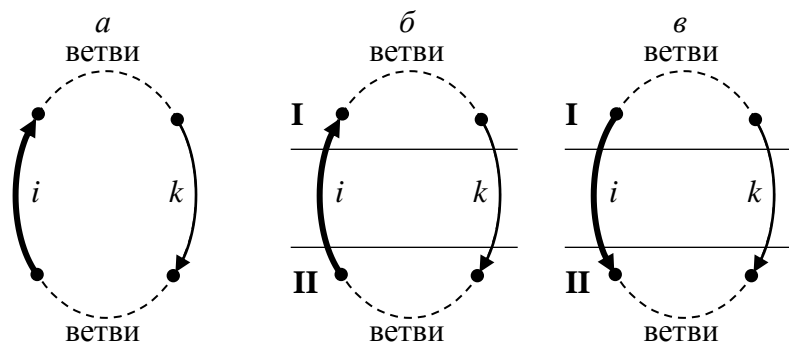


Рис. 2.10.

Если  $d_{ki} \neq 0$ , то это означает, что при удалении  $i$ -й ветви вершины, инцидентные  $k$ -й хорде, оказались в разных группах вершин дерева. Следовательно, единственный и существующий путь (поскольку дерево – это связный подграф), соединяющий вершины, инцидентные  $k$ -й хорде, проходит через  $i$ -ю ветвь. И,

по определению независимого контура (и теореме 3),  $i$ -я ветвь входит в независимый контур  $k$ -й хорды, то есть  $c_{ki} \neq 0$ .

Итак, если элементы матриц  $c_{ki}$  и  $d_{ki}$  равны нулю, то обязательно одновременно. Если же  $c_{ki}$  и  $d_{ki}$  не равны нулю, то обладают противоположными знаками, в чем нетрудно убедиться.

Пусть  $c_{ki} = +1$  (рис. 2.10,б), тогда в  $k$ -том независимом контуре  $i$ -тая ветвь сонаправлена с  $k$ -той хордой. При удалении  $i$ -той ветви вершины дерева распадаются на две группы и  $i$ -тая ветвь направлена из I группы в группу II. Нетрудно видеть, что  $k$ -тая хорда (входящая в отсечение  $i$ -той ветви) направлена из II группы в группу I, то есть  $d_{ki} = -1$ .

Пусть  $c_{ki} = -1$ , тогда имеет место картина, отраженная на рисунке 2.10,в. Из рассуждений, аналогичных предыдущему случаю, вытекает, что  $d_{ki} = +1$ .

Теорема доказана. Из нее вытекает ряд следствий.

**Следствие 1.** Произведение матрицы  $\mathbf{C}$  на транспонированную матрицу  $\mathbf{D}$  есть матрица-нуль:

$$\mathbf{DC}^T = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Результат получается транспонированием обеих частей равенства (2.13).

**Следствие 2.** Из двух блок-матриц  $\mathbf{C}_b$  и  $\mathbf{D}_c$  достаточно знать одну, вторая находится транспонированием и заменой знака.

Подставив блочные представления сомножителей левой части равенства (2.13), получим

$$\mathbf{CD}^T = \left| \begin{array}{cc} \mathbf{C}_b & \mathbf{E}_c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{E}_b \\ \mathbf{D}_c^T \end{array} \right| = \mathbf{0}.$$

Применяя правила умножения матриц, найдем

$$\mathbf{C}_b + \mathbf{D}_c^T = \mathbf{0},$$

или

$$\mathbf{D}_c^T = -\mathbf{C}_b. \quad (2.15)$$

Ранее, блок-матрицы  $\mathbf{C}_b$  и  $\mathbf{D}_c$  вычислялись для орграфа, изображенного на рис. 2.8. Можно убедиться, что эти конкретные блок-матрицы удовлетворяют равенству (2.15).

**Следствие 3.** Среди параллельных переменных



независимыми являются только параллельные переменные ветвей.

Выполнив умножение в левой части блочного представления УНК, получим:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{E}_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{Y}_c \end{vmatrix} = \mathbf{C}_b \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{Y}_c = -\mathbf{C}_b \mathbf{Y}_b.$$

Последнее равенство позволяет вектор параллельных переменных всех дуг орграфа выразить через параллельные переменные ветвей:

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{Y}_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_b \\ -\mathbf{C}_b \end{vmatrix} \mathbf{Y}_b = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_b \\ \mathbf{D}_c^T \end{vmatrix} \mathbf{Y}_b.$$

Окончательно

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}^T \mathbf{Y}_b. \quad (2.16)$$

Таким образом, уравнения независимых контуров можно трактовать как уравнения связей, налагаемых на параллельные переменные.

**Следствие 4.** Среди последовательных переменных всех дуг орграфа независимыми являются последовательные переменные хорд.

Из блочной записи УО получаем

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_b & \mathbf{D}_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_c \end{vmatrix} = \mathbf{X}_b + \mathbf{D}_c \mathbf{X}_c = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{X}_b = -\mathbf{D}_c \mathbf{X}_c.$$

Вектор последовательных переменных всех дуг орграфа выражается через последовательные переменные хорд:

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{D}_c \\ \mathbf{E}_c \end{vmatrix} \mathbf{X}_c = \begin{vmatrix} \mathbf{C}_b^T \\ \mathbf{E}_c \end{vmatrix} \mathbf{X}_c,$$

то есть

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}^T \mathbf{X}_c. \quad (2.17)$$

Таким образом, уравнения отсечений можно считать уравнениями связей, налагаемых на последовательные переменные.

## 2.5. Вывод уравнений физических систем с помощью графов.

Методы теории графов находят широкое применение в ряде прикладных дисциплин. Особо следует отметить высокую эффективность этих методов при выборе рациональных алгоритмов расчета сложных физических систем: не только электрических, механических, но также гидравлических, акустических термодинамических и иных. В данной книге рассматриваются, однако, только системы механические, электрические и электромеханические, и среди разнообразных возможностей приложения графов для расчетов описывается только применение их при выводе уравнений движения.

Для вывода уравнений физических систем используют так называемые *кодированные орграфы*.

Если ранее графы строились путем замены двухполюсников ребрами, то кодирование представляет своего рода обратный процесс, как бы реставрацию той физической системы, которую определяет данный граф. *Кодом*  $j$ -го ребра (или  $j$ -й дуги) называют приписываемое этому ребру (дуге) выражение, связывающее  $j$ -ю последовательную и  $j$ -ю параллельную переменные. Если коды выражают зависимости последовательных переменных от параллельных, то совокупность всех таких соотношений может быть записана в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{Y}, \quad (2.18)$$

где  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ , как и выше, – векторы всех последовательных и параллельных переменных;  $\mathbf{M}$  – диагональная матрица для систем, образованных двухполюсниками. Разрешая уравнение (2.18) относительно параллельных переменных, получаем

$$\mathbf{Y} = \mathbf{N} \mathbf{X}, \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-1}$ .

Традиционными для механики являются уравнения относительно перемещений, то есть параллельных переменных. Среди параллельных переменных независимыми являются параллельные переменные ветвей, поэтому уравнения движения для параллельных переменных, составленные с привлечением графов, называют *уравнениями ветвей*. Получая уравнения с помощью графов, используют свойства матриц коэффициентов УНК и УО, что позволяет упростить процесс вывода и довести его до автоматизма.

Излагая идеи, приводящие к простому аппарату вывода уравнений ветвей, сначала будем исходить из предположения, что система образована лишь пассивными двухполюсниками. В этом случае, как известно, уравнения движения принимают вид системы однородных дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания с собственными частотами при ненулевых начальных условиях.

Пусть исследуемой системе отвечает кодированный орграф, в котором выбрано опорное дерево. Коды заданы соотношением (2.18). Запишем определяемое исходным орграфом УО:

$$\left| \begin{array}{cc} \mathbf{E}_b & \mathbf{D}_c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_c \end{array} \right| = \mathbf{0}.$$

Вектор последовательных переменных посредством зависимости (2.18) выразим через вектор параллельных переменных:

$$\left| \begin{array}{cc} \mathbf{E}_b & \mathbf{D}_c \end{array} \right| \mathbf{M} \left| \begin{array}{c} \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{Y}_c \end{array} \right| = \mathbf{0}.$$

Теперь применим формулу (2.16), позволяющую параллельные переменные всех дуг выразить через параллельные переменные только ветвей:

$$\left| \begin{array}{cc} \mathbf{E}_b & \mathbf{D}_c \end{array} \right| \mathbf{M} \left| \begin{array}{c} \mathbf{E}_b \\ \mathbf{D}_c^T \end{array} \right| \mathbf{Y}_b = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) и представляет совокупность уравнений движения в форме уравнений ветвей. При выводе уравнений ветвей для конкретной системы нет надобности повторять изложенные рассуждения. Достаточно исходить из

полученной структуры уравнений (2.20). Вычисления по этой формуле отличаются предельной простотой, являющейся следствием того, что множителем перед вектором параллельных переменных ветвей служит тройное матричное произведение, крайние множители которого связаны операцией транспонирования, а средний множитель – диагональная матрица.

Записывая выражение (2.20) в форме  $\mathbf{B}\mathbf{Y}_b = \mathbf{0}$ , под матрицей  $\mathbf{B}$  будем подразумевать результат умножения:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{D}^T.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, произвольный элемент матрицы  $\mathbf{B}$  определится выражением

$$b_{jk} = \sum_{i=1}^r d_{ji} m_{ii} d_{ki}, \quad (2.21)$$

где  $d_{ji}$ ,  $d_{ki}$  – элементы матрицы  $\mathbf{D}$ ;  $m_{ii}$  – диагональный элемент матрицы кодов  $\mathbf{M}$ .

Выражение (2.21) позволяет сформулировать простое правило вычисления коэффициентов  $b_{jk}$ . Над каждым столбцов матрицы коэффициентов УО запишем соответствующие диагональные элементы матрицы кодов:

$$\begin{array}{cccc} m_{11} & m_{22} & \cdots & m_{rr} \\ \left| \begin{array}{cccc} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{b1} & d_{b2} & \cdots & d_{br} \end{array} \right|. \end{array}$$

Теперь для получения коэффициентов  $b_{jk}$  достаточно перемножить расположенные один над другим в первом, втором и т. д. столбцах элементы  $j$ -й и  $k$ -й строк матрицы  $\mathbf{D}$ , затем каждое произведение умножить на элемент матрицы кодов и результаты просуммировать. Легко заметить, что  $b_{jk} = b_{kj}$ , и, следовательно, матрица  $\mathbf{B}$  – симметрическая.

Если система содержит активные двухполюсники – источники параллельных и последовательных переменных, – то вывод уравнений ветвей не усложняется существенно. Следует

только условиться источники параллельных переменных (скоростей) включать в число первых ветвей, а источники последовательных переменных (сил) – в число последних хорд. Тогда описанные выше операции осуществляются над усеченной матрицей  $\mathbf{D}$ , полученной отделением соответствующих первых и последних ее столбцов, а отделенные столбцы умножаются на заданные функции, определяющие законы изменения параллельных и последовательных переменных, генерируемых источниками.

Для примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 2.11. Для вывода уравнений системы в форме уравнений ветвей построим оргграф, соответствующий схеме этой системы.

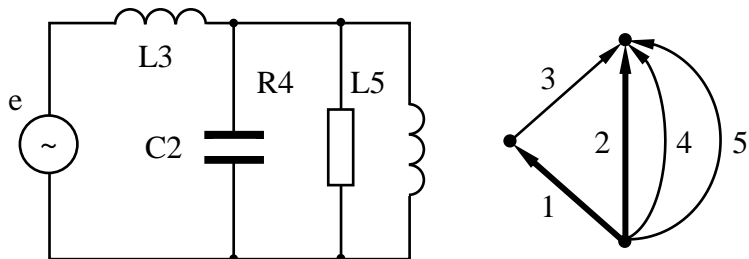


Рис. 2.11

Индексы на схеме и оргграфе отвечают порядковому номеру дуг.

Соответствующие УО таковы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_5 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Матрица  $\mathbf{M}$  в уравнениях кодов  $\mathbf{I} = \mathbf{M}\mathbf{U}$  (вектор напряжений  $\mathbf{U} = (u_2, u_3, u_4, u_5)^T$ ) имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} C_2 p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (L_3 p)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (L_5 p)^{-1} \end{vmatrix},$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования по времени.

Отсекая первый столбец матрицы УО и записывая уравнения ветвей в форме (2.20), получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{M} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

или после перемножения матриц

$$\begin{vmatrix} 1 & (L_3 p)^{-1} & - (L_3 p)^{-1} \\ 0 & - (L_3 p)^{-1} & C_2 p + (L_3 p)^{-1} + R_4^{-1} + (L_5 p)^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

В результате имеем два уравнения. Первое из них определяет ток, действующий вдоль последовательно соединенных двухполюсников: источника напряжения, и индуктивности  $L_3$ :

$$I_1 = (L_3 p)^{-1} (u_2 - u_1).$$

Второе уравнение

$$- (L_3 p)^{-1} u_1 + C_2 p u_2 + (L_3 p)^{-1} u_2 + (R_4)^{-1} u_2 + (L_5 p)^{-1} u_2 = 0,$$

или в традиционной форме уравнения Лагранжа второго рода с учетом  $u_2 = \dot{\psi}_2$

$$C_2 \ddot{\psi}_2 + R_4^{-1} \dot{\psi}_2 + (L_3^{-1} + L_5^{-1}) \psi_2 = L_3^{-1} \int e(t) dt.$$

Обращаясь к методу составления уравнений относительно последовательных переменных с помощью графов, используем описанные правила составления уравнений относительно параллельных переменных и представим их в соответствии принципом дуальности.

Уравнения для последовательных переменных, полученные помощью оргграфов систем, называют *уравнениями хорд*. Исходными для них служат УНК:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{E}_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{Y}_c \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Уравнения кодов записывают в форме (2.19) и с учетом кодирования (при отсутствии источников переменных)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{E}_c & \mathbf{N} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_c \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

А по следствию 4 из теоремы 6 получаем

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{E}_c \\ \mathbf{N} & \mathbf{C}_b^T \\ & \mathbf{E}_c \end{vmatrix} \mathbf{X}_c = \mathbf{C} \mathbf{N} \mathbf{C}^T \mathbf{X}_c = \mathbf{0}.$$

Для иллюстрации правил вывода уравнений хорд рассмотрим конкретный пример.

Схема электрической цепи, содержащей источник ЭДС  $e_1$ , представлена на рис. 2.12,а, а отвечающий ей оргграф – на рис. 2.12,б. Ориентация дуг выбрана таким образом, чтобы ветви были направлены согласно направлению обхода контуров, обусловленных ориентацией хорд.

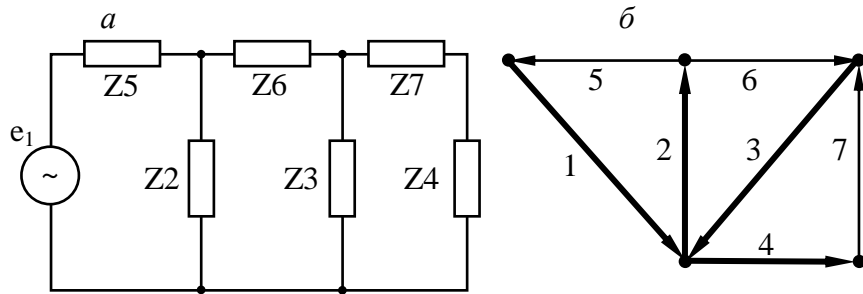


Рис. 2.12

Для рассматриваемой электрической цепи УНК имеют вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_7 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

где  $U_1, U_2, \dots, U_7$  – напряжения двухполюсников. Уравнениям кодов придадим форму

$$U_j = Z_j I_j \quad (j = 2, 3, \dots, 7),$$

где  $I_j$  – токи, протекающие через двухполюсники.

Отметим, что уравнения хорд приобретают вид алгебраических уравнений для комплексных токов, если рассматривается установившийся режим для ЭДС, изменяющейся по синусоидальному закону, когда

$$Z_j = R_j + i[\omega L_j - (\omega C_j)^{-1}].$$

Эти же уравнения будут дифференциальными, если коэффициентам уравнений кодов придать смысл дифференциальных операторов:

$$Z_j = L_j p + R_j + (p C_j)^{-1}, \quad p = d/dt,$$

что совпадает с операторным представлением.

Выполнив действия, аналогичные описанным выше, получим искомые уравнения хорд.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} U_1 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{N} \begin{vmatrix} I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

где

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_7 \end{vmatrix},$$

или после перемножения матриц

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} u_1 + \begin{vmatrix} Z_2 + Z_5 & Z_2 & 0 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_6 & Z_3 \\ 0 & Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Итак, методы теории графов могут быть применены, в частности, для вывода уравнений относительно параллельных или последовательных переменных, причем формализация такого аппарата для систем, образованных двухполюсниками, приводит к весьма простым приемам вычисления коэффициентов этих уравнений. Вычисления усложняются, если в состав системы входят многополюсные

элементы. Последнее, однако, не исключает применения графов для расчетов подобных систем.

## 2.6. Z- и Y-графы.

Ранее под графом, как правило, подразумевалось его геометрическое представление, получаемое из схем физических систем заменой двухполюсников ребрами. Такой способ удобен для практики и позволяет установить некоторые соотношения и правила составления дифференциальных уравнений с помощью графов. Для иллюстрации способа вывода уравнений хорд этот принцип, однако, отчасти был нарушен: коэффициенты уравнений кодов для орграфа на рис. 2.12 таковы, что каждому ребру отвечает, вообще говоря, три двухполюсника: сопротивление, индуктивность, емкость, соединенные последовательно. Это, безусловно, не лишено смысла, поскольку цепочка последовательно соединенных двухполюсников пронизывается общим током. Экономия в числе ребер сказывается тем более чем больше двухполюсников насчитывает электрическая цепь.

Далее для определенности будем говорить о графах, соответствующих электрическим цепям. Метод аналогий позволит перенести сказанное и на механические системы.

Граф, предназначенный для составления уравнений хорд, назовем *Z-графом*. Каждое ребро Z-графа соответствует фрагменту электрической цепи, ограниченному двумя узлами, через все участки которого протекает общий ток (действует общая последовательная переменная).

На рис. 2.13 изображен отрезок, эквивалентный  $j$ -му ребру графа. Отметим, что отрезок должен содержать, по крайней мере, один пассивный двухполюсник; иными словами, из трех параметров  $L_j$ ,  $R_j$ ,  $C_j$  хотя бы один должен быть отличен от нуля. Вместе с тем каждый отличный от нуля параметр определяется суммой параметров однородных двухполюсников, соединенных последовательно:

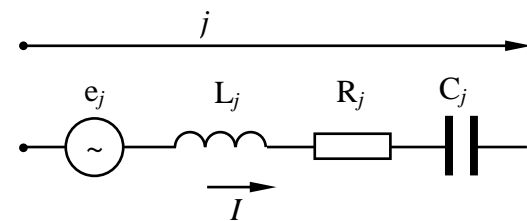


Рис. 2.13

$$e_j = \sum_{s=1}^S e_s, \quad R_j = \sum_{k=1}^K R_k, \quad L_j = \sum_{a=1}^A L_a, \quad C_j = \frac{\prod_{g=1}^G c_g}{\sum_{i=1}^G \prod_{g=1, g \neq i}^G c_g},$$

$$A + K + G \neq 0.$$

Источник ЭДС, эквивалентный совокупности последовательно соединенных источников, характеризуется ЭДС  $e_j$ , равной алгебраической сумме ЭДС всех источников совокупности: значение ЭДС источника входит в сумму со знаком плюс, если направление возрастания потенциала внутри источника совпадает с положительным направлением тока  $I_j$ , и со знаком минус – в противном случае.

Токи ребер Z-графа подлежат определению с помощью уравнений хорд. Если участок цепи между двумя узлами содержит источник тока, то сила тока, протекающего через этот участок известна заранее и равна заданной силе тока источника. В Z-граф ребра, отвечающие участкам с источником тока, не включаются. Однако вершины графа, к которым притекает и из которых вытекает ток источника, должны быть соответствующим образом помечены.

На рис. 2.14 изображен Z-орграф для электрической цепи, изображенной на рис. 2.12. Соответствующие УНК и уравнения кодов имеют вид

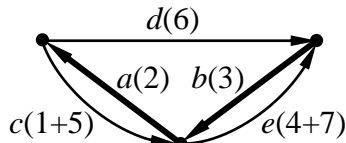


Рис. 2.14

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_a \\ \vdots \\ U_e \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

$$U_j = Z_j I_j - e_j, \quad j = a, b, \dots, e.$$

Легко убедиться, что уравнения хорд для этого графа совпадают с полученными ранее, если заметить, что  $Z_a = Z_2$ ,  $Z_b = Z_3$ ,  $Z_c = Z_5$ ,  $Z_d = Z_6$ ,  $Z_e = Z_4 + Z_7$ ,  $e_j = 0$  ( $j \neq c$ ).

На рис. 2.15,а изображена электрическая цепь, на рис. 2.15,б – отвечающий ей Z-орграф.

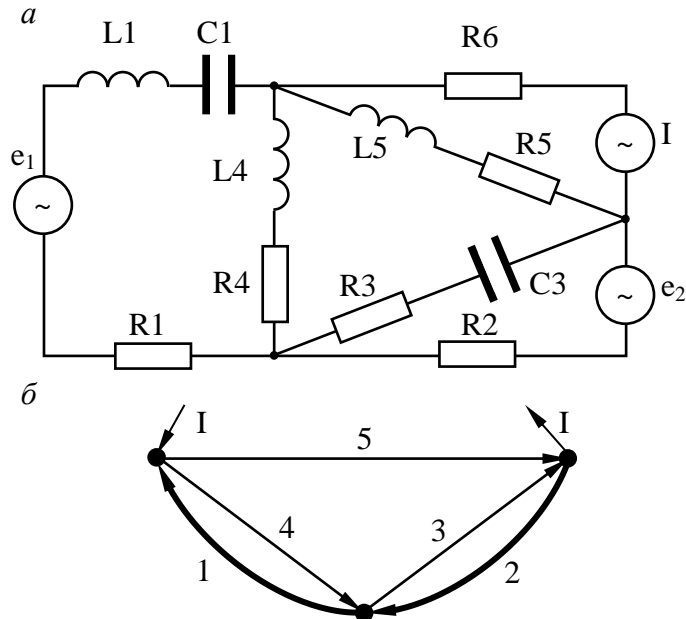


Рис. 2.15

Коэффициенты уравнений кодов обозначим для краткости

$$Z_1 = L_1 p + R_1 + (C_1 p)^{-1},$$

$$Z_2 = R_2,$$

$$Z_3 = R_3 + (C_3 p)^{-1},$$

$$Z_4 = L_4 p + R_4,$$

$$Z_5 = L_5 p + R_5.$$

Система уравнения независимых контуров для этой системы будет такой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

а уравнения кодов выглядят следующим образом

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e_2.$$

Выразим токи через токи хорд (независимые последовательные переменные) и ток источника:

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} I - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} I.$$

Несмотря на то, что ток источника связан с вершинами, инцидентными всем дугам графа, его влияние учитывается только на токи  $I_1$  и  $I_2$ , так как  $I_3$ ,  $I_4$  и  $I_5$  являются независимыми переменными. Знак, с которым при учете суммируется ток источника, определяется по правилам, принятым при составлении уравнений по первому закону Кирхгофа: если ток

источника сонаправлен с током, в котором он учитывается, по отношению к общей вершине, то суммирование производится со знаком «-», иначе со знаком «+».

В результате, после подстановки вектора токов в уравнения кодов, а полученного вектора напряжений в систему УНК, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{Z} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_1 I + e_1 \\ Z_2 I + e_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

или после перемножения матриц

$$\begin{vmatrix} Z_2 + Z_3 & 0 & Z_2 \\ 0 & Z_1 + Z_4 & Z_1 \\ Z_2 & Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_1 I + e_1 \\ Z_2 I + e_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Предназначенный для составления уравнений ветвей граф назовем *Y-графом*. Граф включает в свой состав ребра, *j*-е из которых соответствует участку электрической цепи, изображенному на рис. 2.16. Этот участок состоит из источника тока и трех пассивных двухполюсников, параллельно соединенных между собой.

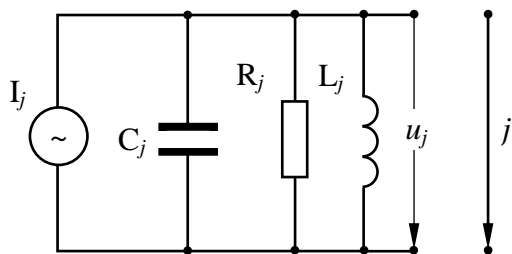


Рис. 2.16.

Каждый двухполюсник эквивалентен совокупности параллельно соединенных однородных двухполюсников и характеризуется параметром, являющимся суммой параметров

двухполюсников совокупности, причем сила тока источника определяется как алгебраическая сумма с учетом заданных положительных направлений токов каждого из источников. По крайней мере, один из параметров  $C_j, R_j, L_j$  должен быть отличен от нуля.

$$I_j = \sum_{s=1}^S I_s, \quad C_j = \sum_{g=1}^G C_g, \quad L_j = \frac{\prod_{a=1}^A L_a}{\sum_{i=1}^A \prod_{a=1, a \neq i}^A L_a}, \quad R_j = \frac{\prod_{k=1}^K R_k}{\sum_{i=1}^K \prod_{k=1, k \neq i}^K R_k},$$

$$A + K + G \neq 0.$$

Если к совокупности пассивных двухполюсников параллельно присоединен источник ЭДС, то напряжение между общими зажимами такой совокупности равно заданному значению ЭДС, взятому с обратным знаком. Из *Y*-графа исключаются ребра, отвечающие подобной совокупности. Вершины *Y*-графа, соответствующие зажимам участка цепи, содержащего источник ЭДС, сливаются в одну общую вершину, что является следствием равенства нулю внутреннего сопротивления источника ЭДС.

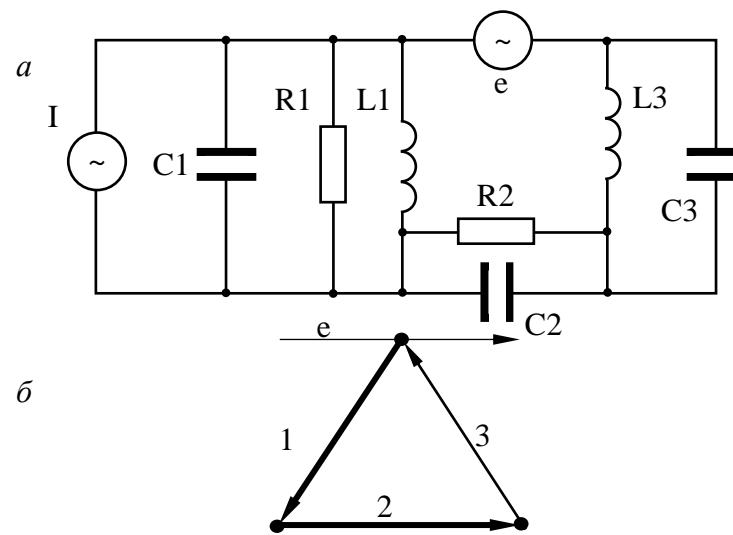


Рис. 2.17.

Для образовавшейся таким путем вершины Y-графа должны быть указаны величина и направление приложенной к ней ЭДС.

На рис. 2.17,*а* изображена электрическая цепь, на рис. 2.17,*б* – отвечающий ей Y-орграф.

Для данного орграфа УО имеют вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Обозначив для краткости

$$Y_1 = C_1 p + R_1^{-1} + (L_1 p)^{-1},$$

$$Y_2 = C_2 p + R_2^{-1},$$

$$Y_3 = C_3 p + (L_3 p)^{-1},$$

запишем уравнения кодов

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Вектор напряжений выразим через напряжения ветвей и ЭДС источника:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} e.$$

Подставив выражения векторов токов и напряжений в УО, получим уравнения ветвей рассматриваемой электрической цепи

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{vmatrix} \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} e \right) - \begin{vmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\} = \mathbf{0},$$

или после перемножения матриц

$$\begin{vmatrix} Y_1 + Y_3 & Y_3 \\ Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Y_3 \\ Y_3 \end{vmatrix} e - \begin{vmatrix} I \\ 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

### 3. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ.

#### 3.1. Основные понятия.

Системы различной физической природы, описываемые идентичными дифференциальными уравнениями, называются *эквивалентными*. Отношение эквивалентности позволяет устанавливать соответствия между различными физическими величинами и параметрами. В свою очередь, с помощью этих соответствий заключения о характере динамического режима, о соотношениях между величинами, установленные для одной системы, переносятся на другую систему, менее доступную для изучения. Такая возможность составляет содержание *метода аналогий*.

Электрические цепи, эквивалентные механическим системам, используются для экспериментальных исследований, так как в электрических цепях осуществить измерения с помощью компактных и чувствительных приборов значительно легче. Результаты же электрических измерений при использовании таблицы аналогий без труда переносятся на механические системы.

Электромеханические аналогии приводят также к взаимному обогащению аналитических методов механики и электротехники.

В частности, опираясь на традиции электротехники, можно выработать правила графических представлений механических систем посредством схем, отражающих структуру соединений ее элементов.

На рис. 3.1,*а* схематически изображена механическая система с одной степенью свободы, которой отвечает координата  $h$ , определяющая отклонение массы  $m$  от положения равновесия. Вертикальное перемещение массы происходит под действием возмущающей силы  $p$ , упругой восстанавливающей силы, характеризуемой жесткостью  $s$ , и демпфирующей силы вязкого трения с коэффициентом  $r$ , который называют иногда



механическим сопротивлением. Уравнение движения механической системы имеет вид

$$m\ddot{h} + r\dot{h} + ch = p. \quad (3.1)$$

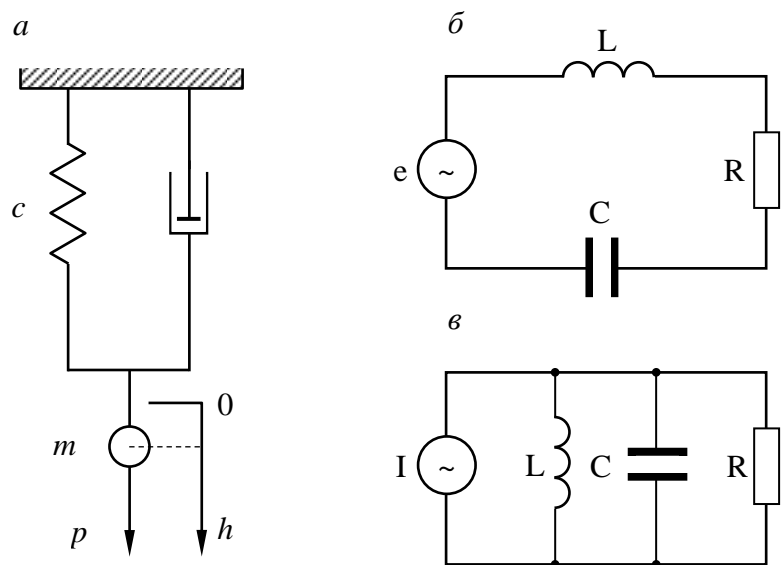


Рис. 3.1

На рис. 3.1,б представлена электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных источника ЭДС  $e$ , индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и емкости  $C$ .

Уравнение тока  $I$ , пронизывающего все элементы последовательной цепи, вытекает из второго закона Кирхгофа:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + C^{-1} \int Idt = e. \quad (3.2)$$

По определению  $I = dq/dt$ , где  $q$  – величина электрического заряда, переносимого током через поперечное сечение проводника. Мгновенное значение заряда

$$q = q_0 + \int_0^t Idt$$

в последнем слагаемом уравнения (3.2) для краткости представлено неопределенным интегралом. Имея это в виду, уравнению можно придать форму

$$L\dot{q} + R\dot{q} + C^{-1}q = e. \quad (3.3)$$

В электрической цепи, изображенной на рис. 3.1,в, источник тока  $I$  подключен к параллельно соединенным между собой емкости  $C$ , сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$ . Для общего всем этим элементам напряжения  $u$  уравнение следует из первого закона Кирхгофа:

$$C \frac{dU}{dt} + R^{-1}U + L^{-1} \int Udt = I. \quad (3.4)$$

Неопределенный интеграл в последнем слагаемом использован для сокращения записи и представляет мгновенное значение потокосцепления. Так как напряжение  $u$  является общим для всех элементов цепи, то можно каждому элементу поставить в соответствие величину

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t Udt,$$

которую при этом называют *обобщенным потокосцеплением*. Для обобщенного потокосцепления уравнение (3.4) запишем в виде

$$C\ddot{\psi} + R^{-1}\dot{\psi} + L^{-1}\psi = I. \quad (3.5)$$

Сопоставляя уравнения (3.1), (3.3) и (3.5), можно убедиться, что это различные формы записи одного и того же обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Различие в буквенных обозначениях не имеет принципиального значения: если возмущающая сила  $p$ , ЭДС  $e$  и ток  $I$  источников меняются по одному и тому же закону, то один и тот же характер зависимости от времени будут иметь перемещение  $h$  и ток  $I$  в последовательной цепи и напряжение  $u$  на элементах параллельной цепи.

Отметим, что уравнению механических перемещений можно придать форму, совпадающую с формами (3.2) и (3.4), если

ввести мгновенное значение скорости перемещения массы  $v$ , полагая

$$h = h_0 + \int_0^t v dt$$

и используя для краткости обозначение перемещения  $s$  помощью неопределенного интеграла:

$$m\dot{v} + rv + c \int v dt = p. \quad (3.6)$$

Сопоставив уравнение (3.6) с уравнениями (3.2) и (3.4), установим, что они имеют одну и ту же форму.

В целом ряде случаев сложные механические системы можно представить составленными из элементарных структурных ячеек, соответствующих простейшей механической системе, изображенной на рис. 3.1,а. В теории электрических цепей различают Z-цепи, фрагментами которых служат такие совокупности последовательно соединенных элементов, как показано на рис. 3.1,б, и Y-цепи, составленные из фрагментов, подобных изображенным на рис. 3.1,в. Возможность расчленения сложных систем на простейшие составляющие лежит в основе двух систем электромеханических аналогий.

Сопоставив между собой каждый из членов приведенных дифференциальных уравнений, установим соответствия между величинами, характеризующими механическую систему, с одной стороны, и величинами, характеризующими последовательную и параллельную электрические цепи, с другой. Результаты сопоставлений сведены в табл. 3.1.

Если механическая система состоит из структурных единиц, подобных изображенным на рис. 3.1,а, то с помощью таблицы можно установить, какие электрические цепи будут ей эквивалентны по первой или второй системе электромеханических аналогий. С этой целью в уравнениях механической системы следует механические величины и параметры заменить соответствующими электрическими величинами и параметрами, выбранными из второго или третьего столбца таблицы. Электрические цепи, описываемые полученными таким путем уравнениями, и будут искомыми.

Результаты их исследования могут быть перенесены на эквивалентную механическую систему.

Таблица 3.1. Две системы электромеханических аналогий.

Механическая система	Электрическая цепь	
	Первая система аналогий	Вторая система аналогий
Перемещение $h$	Электрический заряд $q$	Обобщенное потокоцепление $\psi$
Скорость $v$	Сила тока $I$	Напряжение $u$
Сила $p$	ЭДС $e$	Сила тока $I$
Масса $m$	Индуктивность $L$	Емкость $C$
Механическое сопротивление $r$	Сопротивление $R$	Проводимость $R^{-1}$
Жесткость $c$	Инверсная емкость $C^{-1}$	Инверсная индуктивность $L^{-1}$
Кинетическая энергия $T=(mv^2)/2$	Энергия магнитного поля $W_M=(LI^2)/2$	Энергия электрического поля $W_e'=(CU^2)/2$
Потенциальная энергия $П=(ch^2)/2$	Энергия электрического поля $W_e=(C^{-1}q^2)/2$	Энергия магнитного поля $W_M'=(L^{-1}\psi^2)/2$
Диссипативная функция $D=(rv^2)/2$	$D_e=(RI^2)/2$	$D_e'=(R^{-1}u^2)/2$

Если механическая система состоит из структурных единиц, подобных изображенным на рис. 3.1,а, то с помощью таблицы можно установить, какие электрические цепи будут ей эквивалентны по первой или второй системе электромеханических аналогий. С этой целью в уравнениях механической системы следует механические величины и параметры заменить соответствующими электрическими величинами и параметрами, выбранными из второго или третьего столбца таблицы. Электрические цепи, описываемые полученными таким путем уравнениями, и будут искомыми. Результаты их исследования могут быть перенесены на эквивалентную механическую систему.

### 3.2. Построение механических схем.

Для графического представления механических систем в качестве схемы используются двухполюсники, определения и условные обозначения которых приведены в таблицах 3.2 и 3.3.

Таблица 3.2. Механические двухполюсники поступательного движения.

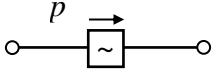
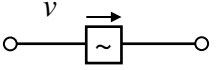
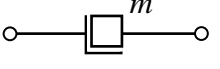
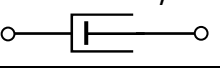

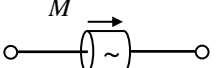
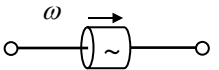
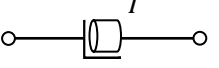
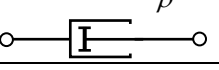

Тип двухполюсника	Обозначение	Сила	Скорость
Источник силы		$p$	–
Источник скорости		–	$v$
Масса		$p_m = m(dv_m/dt)$	$v_m = m^{-1} \int p_m dt$
Механическое сопротивление		$p_r = rv_r$	$v_r = r^{-1} p_r$
Жесткость		$p_c = m^{-1} \int v_c dt$	$v_c = c^{-1} (dp_c/dt)$

Таблица 3.3. Механические двухполюсники вращательного движения.

Тип двухполюсника	Обозначение	Момент	Угловая скорость
Источник вращающего момента		$M$	–
Источник угловой скорости		–	$\omega$
Момент инерции		$M_I = I(d\omega_I/dt)$	$\omega_I = I^{-1} \int M_I dt$
Момент сопротивления		$M_\rho = \rho\omega_\rho$	$\omega_\rho = \rho^{-1} M_\rho$
Жесткость на кручение		$M_\sigma = \sigma \int \omega_\sigma dt$	$\omega_\sigma = \sigma^{-1} (dM_\sigma/dt)$



Для построения схем установим, прежде всего, такие фундаментальные понятия, как последовательное и параллельное соединения двухполюсников.

Будем различать первый и второй (или начальный и конечный) полюсы двухполюсников, полагая, что первый (начальный) полюс служит началом отсчета геометрической координаты.

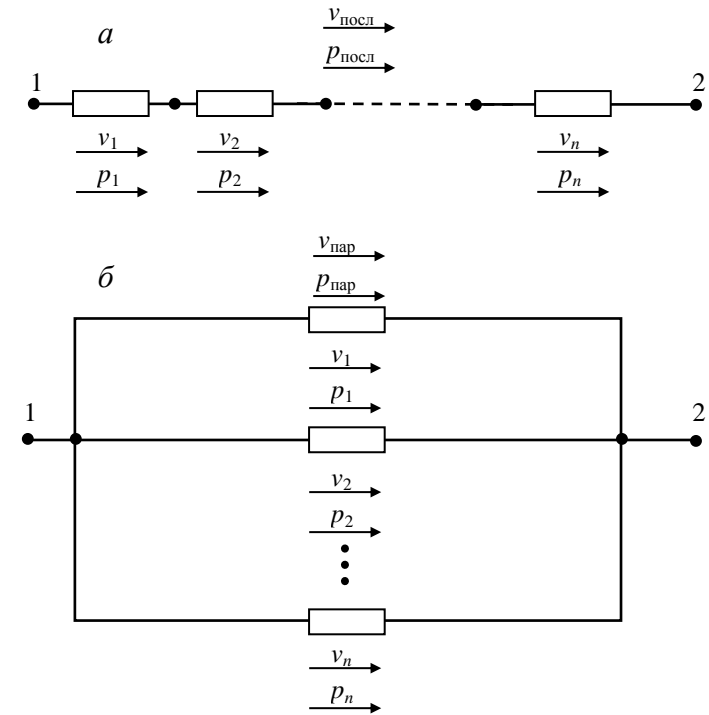


Рис. 3.2.

О последовательном соединении двухполюсников говорят в том случае, если второй полюс предыдущего двухполюсника сливается с первым полюсом последующего. Совокупность последовательно соединенных двухполюсников эквивалентна двухполюснику, начальным полюсом которого служит первый полюс первого двухполюсника, а конечным – второй полюс n-го

двухполюсника (рис. 3.2,а). Двухполюсники соединены параллельно, если все их первые полюсы, сливаясь, образуют общий первый полюс, а слившиеся вторые полюсы – второй полюс эквивалентного двухполюсника (рис. 3.2,б).

Каждому  $j$ -му механическому двухполюснику ставятся в соответствие скорость смещения второго полюса относительно первого  $v_j$  и сила  $p_j$ , вызывающая смещение второго полюса относительно первого. Скорость конечного полюса  $n$  последовательно соединенных двухполюсников относительно их начала

$$v_{\text{посл}} = \sum_{j=1}^n v_j ;$$

сила, действующая вдоль этой последовательности двухполюсников,

$$p_{\text{посл}} = p_1 = p_2 = \dots = p_n.$$

В случае параллельного соединения вторые полюсы всех  $n$  двухполюсников смещаются относительно их общего начала с одной и той же скоростью

$$v_{\text{пар}} = v_1 = v_2 = \dots = v_n;$$

сила, направленная на смещение общего второго полюса относительно начала, складывается из сил, действующих на каждый из двухполюсников:

$$p_{\text{пар}} = \sum_{j=1}^n p_j .$$

Таким образом, последовательное соединение характеризуется тем, что каждый из двухполюсников последовательности находится под действием общей силы, а параллельное – тем, что все двухполюсники перемещаются с одной и той же общей скоростью.

На основании приведенных определений можно построить схему, отвечающую механической системе, составленной из двухполюсников. Построение схем рассмотрим на примерах.

Механическая система, изображенная на рис. 3.1, а, составлена из четырех двухполюсников: массы  $m$ , жесткости  $c$ , механического сопротивления  $r$  и источника силы  $p$ .

Штриховкой отмечено начало отсчета перемещений (и, следовательно, скоростей) всех двухполюсников. Поскольку все перемещения совпадают, приходим к выводу, что двухполюсники соединены между собою параллельно. Этот вывод приводит к схеме, представленной на рис. 3.3.

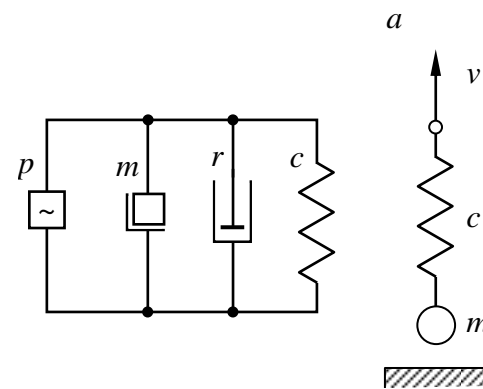


Рис. 3.3.

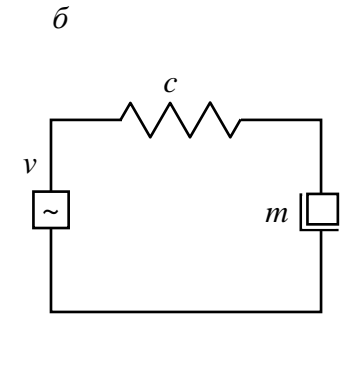


Рис. 3.4.

На рис. 3.4, а изображена механическая система, состоящая из груза массой  $m$ , подвешенного на пружине жесткостью  $c$ . Верхний конец пружины совершает вертикальные перемещения со скоростью  $v$ , закон изменения которой предполагается заданным. Перемещение и скорость груза определяются относительно системы отсчета, отмеченной штриховкой. Относительно этой же системы задан закон изменения скорости  $v$ . Поэтому скорость деформации пружины  $v_c = v - v_m$  где  $v_m$  – скорость перемещения груза. Отсюда  $v_m + v_c - v = 0$ , то есть скорости двухполюсников суммируются, что свидетельствует о последовательном их соединении и приводит к схеме, представленной на рис. 3.4, б.

На рис. 3.5, а показана механическая система, состоящая из грузов  $m_1$  и  $m_2$ , подвешенных на пружинах жесткостью  $c_1$  и  $c_2$ . К первому из грузов приложена сила  $p$ , вызывающая вертикальные перемещения. Система на рис. 3.5, б представляет собой тонкий упругий стержень с двумя насаженными на него массивными дисками. Один конец стержня жестко заделан.

Диски обладают моментами инерции  $I_1$  и  $I_2$ . На первый из них действует вращающий момент  $M$ , порождающий крутильные колебания дисков, сопровождающиеся скручиваниями участков стержня, характеризуемых жесткостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

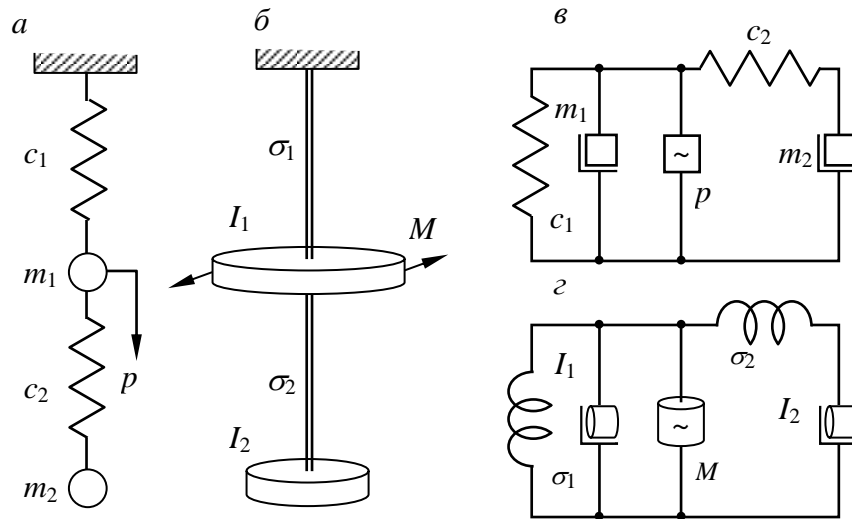


Рис. 3.5.

Нетрудно заметить, что первая система является сочетанием двух рассмотренных выше. Повторив рассуждения предшествующих примеров, получим схему, представленную на рис. 3.5, в.

Рассматриваемые системы с поступательным и вращательным движением эквивалентны в том смысле, что описываются дифференциальными уравнениями, отличающимися лишь обозначениями. Аналогичны по своей структуре и схемы этих систем. Вторая из них изображена на рис. 3.5, г.

Таблицы 3.2 и 3.3 содержат зависимости между силой и скоростью для пассивных двухполюсников. Коэффициенты в зависимостях не всегда постоянны, зависимости могут иметь нелинейный характер. Класс механических систем, представленных двухполюсниками, соединенными между собой в различных сочетаниях, весьма широк. Целый ряд прикладных

задач решается с использованием моделей механических систем в виде набора двухполюсников.

Вместе с тем такие модели не являются универсальными и не всегда пригодны к решению задач механики. В качестве более сложных элементов используются многополюсники. Можно показать, например, что рычаг описывается уравнениями, позволяющими считать его аналогом идеального трансформатора, т. е. трехполюсника.

Но многополюсники также не исчерпывают все богатство представлений механики. В ряде случаев модели механических систем имеют более сложный характер. При этом расширяется и усложняется аппарат метода электромеханических аналогий.

Ограничимся, однако, двухполюсными представлениями, наиболее простыми и отчетливо выражающими идеи электромеханических аналогий.

### 3.3. Электрические цепи, эквивалентные механическим системам.

В п. 3.1 электрическая цепь была названа эквивалентной механической системе в том случае, если уравнения электрической цепи отличаются от уравнений механической системы лишь обозначениями. Понятия дуальных систем, дуальных графов и разработка графического способа дуализации позволяют установить графический способ построения схем электрических цепей, эквивалентных механическим системам, образованным двухполюсниками.

Возвратившись к табл. 3.1, отметим, что первая система электромеханических аналогий определяется, прежде всего, соответствиями скорость  $v \leftrightarrow$  сила тока  $I$ , сила  $p \leftrightarrow$  ЭДС ( $e$ ) (или напряжение  $U$ ), в то время как вторая система электромеханических аналогий характеризуется соответствиями: скорость  $v \leftrightarrow$  напряжение  $u$ , сила  $p \leftrightarrow$  сила тока  $I$ . Но это означает, что первая система аналогий параллельные механические переменные переводит в последовательные электрические, а последовательные — в параллельные; по

второй системе параллельным механическим переменным отвечают параллельные же электрические, последовательным – последовательные. В свою очередь отмеченное обстоятельство свидетельствует о том, что вторая система аналогий не меняет топологическую структуру системы, то есть граф механической системы является также графом электрической цепи, эквивалентной механической системе по второй системе аналогий. В связи с этим вторую систему электромеханических аналогий называют *прямой*, а первую систему – *обратной*. Граф электрической цепи, эквивалентной механической системе по первой (обратной) системе аналогий, является дуальным для графа механической системы.

Теперь возникла возможность сформулировать правила графического построения электрических цепей, эквивалентных механическим системам.

а) Механическую систему представляют ее схемой, т. е. чертежом, отражающим характер соединений механических двухполюсников.

б) Отвечающий системе граф получают заменой каждого двухполюсника отрезком, представляющим ребро графа.

в) Схему электрической цепи, эквивалентной механической системе по второй системе аналогий, можно получить простой заменой механических двухполюсников электрическими (табл. 3.1).

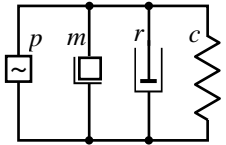
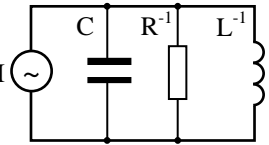
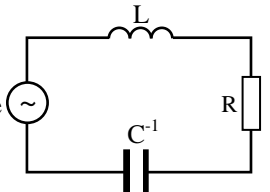
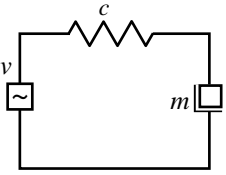
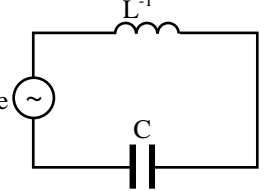
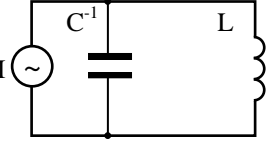
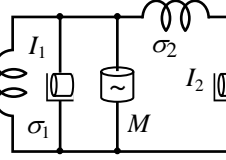
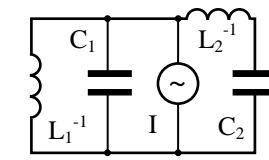
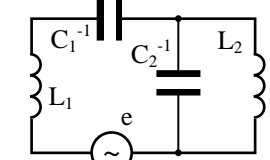
г) Схему электрической цепи, эквивалентной механической системе по первой системе аналогий, можно построить, применив правила дуализации и заменяя электрические двухполюсники дуальными.

Сформулированные правила проиллюстрируем примерами, рассмотрим схемы механических систем, приведенных на рис. 3.3 – 3.5. Поскольку графы схем на рис. 3.5, в и г совпадают, достаточно рассмотреть любую из них. Результаты построений сведем в табл. 3.4.

В первом столбце таблицы приведены схемы механических систем, во втором – схемы электрических цепей, эквивалентных соответствующим механическим системам по

второй системе аналогий, в третьем – эквивалентные по первой системе аналогий. Если механические системы представимы в виде соединенных между собой двухполюсников, то какой бы степени сложности эта система ни была, она будет составлена из элементарных частей, подобных рассмотренным в табл. 3.4.

Таблица 3.4. Электрические цепи, эквивалентные механическим системам.

Механическая система	Электрическая цепь II	Электрическая цепь I
		
		
		

### 3.4. Дуальные механические системы.

Топологическая структура дуальной механической системы может быть установлена с помощью разработанных правил дуализации. Но дуализируя механическую систему, исходные двухполюсники следует замещать дуальными механическими двухполюсниками. Каковы они?

Для ответа на последний вопрос поступим следующим образом. В табл. 3.1 второй и третий столбцы, по сути, представляют таблицу соответствий для дуальных электрических цепей. Расширим таблицу, дополнив ее четвертым столбцом, который вместе с первым образует таблицу соответствий для дуальных механических систем. Четвертый столбец составим так: из второй строки табл. 3.1, например, следует, что скорости  $v$  по первой системе аналогий отвечает ток; величиной, дуальной для тока, является напряжение, которой, в свою очередь, по первой системе аналогий соответствует сила. Итак, дуальной величиной по отношению к скорости является сила. Повторив подобные рассуждения для остальных строчек, получим табл. 3.5.

Таблица 3.5. Соответствия для дуальных механических систем.

Исходная величина	Дуальная величина
Перемещение $h$	Импульс силы $l$
Скорость $v = dh/dt$	Сила $p = dl/dt$
Сила $p$	Скорость $v$
Масса $m$	Податливость $s = c^{-1}$
Жесткость $c$	Инверсная масса $n = m^{-1}$
Механическое сопротивление $r$	Инверсное сопротивление $g = r^{-1}$
Кинетическая энергия	
$T=(mv^2)/2$	$T_d=(sp^2)/2$
Потенциальная энергия	
$\Pi=(ch^2)/2$	$\Pi_d=(nl^2)/2$
Диссипативная функция	
$D=(rv^2)/2$	$D_d=(gp^2)/2$

Табл. 3.5 устанавливает взаимно однозначные соответствия между механическими двухполюсниками: сила  $\leftrightarrow$  скорость, масса  $\leftrightarrow$  податливость, механическое сопротивление  $\leftrightarrow$  инверсное сопротивление. Полученные результаты, однако, имеют более широкий смысл. Вернемся к рассмотрению электрических цепей и вспомним, что мгновенное состояние последовательной цепи определялось уравнением относительно силы тока, а параллельной цепи – уравнением относительно напряжения. Это, безусловно, рациональный, но не единственный способ.

Последовательную цепь можно описать уравнениями относительно напряжений, придав им, например, следующую форму:

$$U_L + U_R + U_C = e, \quad U_R = RC \frac{dU_C}{dt}, \quad u_L = LC \frac{d^2U_C}{dt^2}.$$

Уравнения относительно силы тока для параллельной цепи отличаются лишь обозначениями:

$$I_L + I_R + I_C = I, \quad I_R = R^{-1}L \frac{dI_L}{dt}, \quad I_C = CL \frac{d^2I_L}{dt^2},$$

то есть возможно описание электрических цепей уравнениями либо относительно токов, либо относительно напряжений. Токи и напряжения являются дуальными переменными величинами.

Наличие электромеханических аналогий позволяет предположить, что аналитическое описание механических систем также осуществимо посредством дуальных переменных.

Основным уравнением динамики системы материальных точек, является уравнение второго закона Ньютона, имеющее в скалярной форме вид

$$m\ddot{h} = p.$$

При замене дуальными величинами это уравнение преобразуется к виду

$$s\dot{l} = v.$$

Так как  $s = c^{-1}$ ,  $dl/dt = p$ , то последнему уравнению эквивалентно следующее:

$$\dot{p} = cv,$$

которое получено дифференцированием уравнения закона Гука. Итак, при переходе к дуальным переменным роль основного уравнения динамики приобретает уравнение закона Гука.

Если конфигурация системы задается набором координат, определяющих положение материальных точек, то мгновенное состояние устанавливается с помощью наборов координат и скоростей материальных точек. При переходе к дуальным переменным конфигурация механической системы характеризуется набором импульсов сил, приложенных к системе, а состояние – наборами импульсов и мгновенных

значений сил. Состояние системы изменяется под воздействием возмущений, имеющих характер скоростей с заданными законами изменения.

На основании изложенного можно составить представление о своеобразии аппарата механики в дуальных переменных. Меняются местами, в частности, причина и следствие: причиной изменения состояния служит воздействие приложенной скорости, следствием – изменение характера сил, действующих на систему.

Чтобы завершить построение аппарата механики в дуальных переменных, следует обсудить вопрос о характере и смысле связей и их реакций, определить понятие числа степеней свободы. Однако такой аппарат редко находит применение, и в данной книге использоваться не будет.

В заключение рассмотрим пример применения аппарата механики в дуальных переменных. Груз массой  $m$  подвешен на пружине с жесткостью  $c$ , верхний конец которой закреплен. В начальный момент  $t=0$  система пребывала в положении статистического равновесия. Затем к грузу внезапно была приложена постоянная по величине сила  $p$ , направленная по вертикали вниз. Уравнение движения груза

$$m\ddot{h} + ch = p.$$

Обозначив  $\omega_0^2 = c/m$ , общее решение уравнения запишем в виде

$$h = p/c + A \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Определив постоянные интегрирования из начальных условий  $h_0 = \dot{h}_0 = 0$  при  $t = 0$ , найдем

$$h = (p/c)(1 - \cos \omega_0 t), \quad \dot{h} = (p/(m\omega_0)) \sin \omega_0 t.$$

Сместившись под действием силы  $p$  в новое положение равновесия, груз будет совершать около этого положения гармонические колебания с собственной частотой  $\omega_0$ .

В дуальных переменных уравнение движения груза приобретет иной вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_d}{\partial \dot{l}} + \frac{\partial \Pi_d}{\partial l} = s\ddot{l} + nl = 0.$$

Так как  $n/s = c/m = \omega_0^2$ , последнее уравнение можно представить в форме

$$\ddot{l} + \omega_0^2 l = 0,$$

откуда получаем общее решение

$$l = K \sin(\omega_0 t + \beta),$$

где  $K, \beta$  – постоянные.

Из начальных условий  $l_0 = \dot{l}_0 = 0$  при  $t = 0$  определим постоянные интегрирования и получим

$$l = (p/\omega_0) \sin \omega_0 t.$$

Найденный таким путем закон изменения импульса силы  $l$ , действующей на груз, находится в строгом соответствии с установленным ранее характером колебаний груза. В самом деле, при  $\dot{h}_0 = 0$  по теореме об изменении количества движения  $m\dot{h} = l$ , откуда  $\dot{h} = (p/(m\omega_0)) \sin \omega_0 t$ .



### **Список рекомендованной литературы**

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Наука, 1973.
2. А.Ю. Львович Электромеханические системы. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989.
3. Н.В. Егоров, Д.А. Овсянников. Электромеханические системы. Общие принципы анализа и расчета электромеханических систем. СПб: Изд-во СПбГУ, 2002.
4. К. Шимони. Физическая электроника. М.: Энергия, 1977.
5. Преобразование и обработка электрических сигналов. Методические указания по курсу «Электромеханические системы» 4.П (Методические указания для студентов физико-математических специальностей) СПб: Изд-во СПбГУ, 1998.
6. Контрольные задания по курсу «Электромеханические системы» 4.П (Методические указания для студентов физико-математических специальностей) СПб: Изд-во СПбГУ, 1998.