УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1
MSC 74M20, 26A33

Удар жесткого шара по бесконечной пластинке Кирхгофа — Лява с учетом объемной и сдвиговой релаксации*

М. В. Шитикова

Московский государственный строительный университет,
Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26
Воронежский государственный технический университет,
Российская Федерация, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

Для цитирования: *Шитикова М. В.* Удар жесткого шара по бесконечной пластинке Кирхгофа — Лява с учетом объемной и сдвиговой релаксации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 139–154. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.112

Рассматривается задача о нормальном низкоскоростном ударе жесткого шара по бесконечной вязкоупругой пластинке Кирхгофа — Лява. Динамическое поведениие вязкоупругой пластинки описывается моделью стандартного линейного тела с дробными производными. Параметр дробности, определяющий порядок дробной производной, учитывает изменение вязкости материала пластинки в зоне контакта в процессе удара. Местное смятие материала пластинки и контактная сила определяются по обобщенной теории Герца. Используя алгебру операторов Ю. Н. Работнова, а также учитывая действие объемной и сдвиговой релаксации, удается получить интегральное уравнение относительно местного смятия контактирующих тел. Приближенное решение этого уравнения позволяет найти временные зависимости не только для контактного смятия, но и для контактной силы.

Ключевые слова: низкоскоростной удар, вязкоупругая пластинка Кирхгофа — Лява, модель стандартного линейного тела с дробными производными, алгебра дробных операторов Работнова.

1. Введение. Задачи ударного взаимодействия относятся к наиболее сложным динамическим задачам механики деформируемого твердого тела [1], для решения которых используются различные аналитические, численные и экспериментальные методы.

Одним из наиболее эффективных подходов, позволяющих аналитически исследовать динамические свойства соударяемых тел, является волновой подход. В обзорной статье [2], посвященной анализу работ, использующих этот подход, отмечалось, что одной из первых в этом направлении была работа К. Зинера (C. Zener) [3], где рассмотрена задача об ударе упругого шара по упругой бесконечной пластинке Кирхгофа — Лява. Позже подход Зинера был обобщен в работе [4], где изучалась задача об ударе жесткого шара по вязкоупругой бесконечной пластинке Кирхгоффа — Лява. Однако в этой работе не дано четкого опеределения вязкоупругой мо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № FZGM-2020-0007).

дели, которая использовалась для описания динамического поведения бесконечной пластинки.

В обзоре [5] отмечается, что для описания вязкоупругих свойств соударяемых тел в последнее время с успехом используются различные модели вязкоупругости, содержащие производные дробного порядка [6, 7]. Некоторые из этих задач включены в «Справочник по дробным производным и их приложениям» [8] и «Энциклопедию по механике сплошных сред» [9–11].

Во всех предыдущих исследованиях ударного взаимодействия вязкоупругих тел с использованием моделей с дробными операторами (см. работы [9–12], а также и другие статьи, процитированные в них), предполагалось, что объемные деформации остаются упругими, что позволяет пренебречь объемной релаксацией по сравнению с релаксацией при сдвиге. Однако это предположение не всегда является обоснованным, поскольку для композитных материалов объемная релаксация может являться весьма существенной [13–15].

В данной работе этот недостаток устранен: в качестве вязкоупругой модели, описывающей поведение пластинки при ударном воздействии, выбрана трехмерная модель стандартного линейного тела с дробными производными, которая позволяет описать и сдвиговую, и объемную релаксации. Хотя трехмерные модели вязкоупругости с дробными операторами были известны и ранее [14, 16–18], однако в задачах ударного взаимодействия используются, насколько известно автору, впервые.

2. Основные соотношения трехмерной модели стандартного линейного тела с дробными производными. Для девиаторных частей σ'_{ij} и ϵ'_{ij} тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ϵ_{ij}, а также для их шаровых частей σ_{kk} и ϵ_{kk} для модели стандартного линейного тела с производными дробного порядка можно записать следующие соотношения:

$$\sigma'_{ij} + \tau_{\epsilon 1}^{\gamma} D^{\gamma} \sigma'_{ij} = 2\mu_0 \left(\epsilon'_{ij} + \tau_{\sigma 1}^{\gamma} D^{\gamma} \epsilon'_{ij} \right), \tag{1}$$

$$\sigma_{kk} + \tau_{\epsilon 2}^{\gamma} D^{\gamma} \sigma_{kk} = 3K_0 \left(\epsilon_{kk} + \tau_{\sigma 2}^{\gamma} D^{\gamma} \epsilon_{kk} \right), \tag{2}$$

где $\tau_{\epsilon 1}$ и $\tau_{\epsilon 2}$ — времена сдвиговой и объемной релаксации; $\tau_{\sigma 1}$ и $\tau_{\sigma 2}$ — времена сдвиговой и объемной ретардации; μ_0 и K_0 — релаксированные модуль сдвига и объемный модуль,

$$D^{\gamma} y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-t')^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} y(t') dt' \tag{3}$$

— дробная производная Римана—Лиувилля [19]; γ $(0 \leq \gamma \leq 1)$ — параметр дробности; $y(t)$ — произвольная функция; $\Gamma(1-\gamma)$ — гамма-функция.

Если ввести в рассмотрение безразмерный дробный оператор Ю. Н. Работнова [20]

$$\ni_{\gamma}^{*} (\tau_{\epsilon i}^{\gamma}) = \frac{1}{1 + \tau_{\epsilon i}^{\gamma} D^{\gamma}} \quad (i = 1, 2) \tag{4}$$

и учесть формулу [17]

$$\tau_{\epsilon i}^{\gamma} D^{\gamma} \cdot \ni_{\gamma}^{*} (\tau_{\epsilon i}^{\gamma}) = 1 - \ni_{\gamma}^{*} (\tau_{\epsilon i}^{\gamma}) \quad (i = 1, 2), \tag{5}$$

справедливость которой устанавливается непосредственной проверкой, то соотношения (1) и (2) можно переписать в виде

$$\sigma'_{ij} = 2\mu_{\infty} \left[1 - \frac{\mu_{\infty} - \mu_0}{\mu_{\infty}} \ni_{\gamma}^{*} (\tau_{\epsilon 1}^{\gamma}) \right] \epsilon'_{ij}, \tag{6}$$

$$\sigma_{kk} = 3K_\infty \left[1 - \frac{K_\infty - K_0}{K_\infty} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\epsilon 2})\right] \epsilon'_{ij}, \tag{7}$$

где введены обозначения для нерелаксированных модуля сдвига μ_∞ и объемного модуля K_∞:

$$\mu_\infty = \mu_0 \frac{\tau^\gamma_{\sigma 1}}{\tau^\gamma_{\epsilon 1}}, \qquad K_\infty = K_0 \frac{\tau^\gamma_{\sigma 2}}{\tau^\gamma_{\epsilon 2}}. \tag{8}$$

Используя выражения (6) и (7), запишем операторы сдвига $\tilde{\mu}$ и объемного расширения — сжатия $\tilde{K}$

$$\tilde{\mu} = \mu_\infty \left[1 - \nu_{\epsilon 1} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\epsilon 1})\right], \tag{9}$$

$$\tilde{K} = K_\infty \left[1 - \nu_{\epsilon 2} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\epsilon 2})\right], \tag{10}$$

где

$$\nu_{\epsilon 1} = \frac{\mu_\infty - \mu_0}{\mu_\infty}, \qquad \nu_{\epsilon 2} = \frac{K_\infty - K_0}{K_\infty}. \tag{11}$$

В дальнейшем нам понадобятся операторы $\tilde{\mu}^{-1}$ и $\tilde{K}^{-1}$, обратные к операторам $\tilde{\mu}$ и $\tilde{K}$. Чтобы их найти, нужно воспользоваться определением обратных операторов

$$\tilde{\mu}^{-1} \cdot \tilde{\mu} = 1, \qquad \tilde{K}^{-1} \cdot \tilde{K} = 1, \tag{12}$$

а также учесть формулу [17]

$$\ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\epsilon i}) \cdot \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\sigma i}) = \frac{\tau^\gamma_{\epsilon i} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\epsilon i}) - \tau^\gamma_{\sigma i} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\sigma i})}{\tau^\gamma_{\epsilon i} - \tau^\gamma_{\sigma i}} \quad (i = 1, 2), \tag{13}$$

справедливость которой устанавливается непосредственной проверкой, поскольку

$$\ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\epsilon i}) \cdot \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\sigma i}) = \frac{1}{(1 + \tau^\gamma_{\epsilon i} D^\gamma)(1 + \tau^\gamma_{\sigma i} D^\gamma)} = \frac{A}{1 + \tau^\gamma_{\epsilon i} D^\gamma} + \frac{B}{1 + \tau^\gamma_{\sigma i} D^\gamma},$$

где

$$A = \frac{\tau^\gamma_{\epsilon i}}{\tau^\gamma_{\epsilon i} - \tau^\gamma_{\sigma i}}, \quad B = -A \frac{\tau^\gamma_{\sigma i}}{\tau^\gamma_{\epsilon i}} = -\frac{\tau^\gamma_{\sigma i}}{\tau^\gamma_{\epsilon i} - \tau^\gamma_{\sigma i}}.$$

Выбирая операторы $\tilde{\mu}^{-1}$ и $\tilde{K}^{-1}$ в виде

$$\tilde{\mu}^{-1} = \mu^{-1}_\infty \left[1 + \nu_{\sigma 1} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\sigma 1})\right], \tag{14}$$

$$\tilde{K}^{-1} = K^{-1}_\infty \left[1 + \nu_{\sigma 2} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\sigma 2})\right], \tag{15}$$

где $\nu_{\sigma i}$ и $\tau_{\sigma i}$ — пока неизвестные константы, подставляя выражения (9) и (14), (10) и (15) в формулу (12) и учитывая соотношение (13), в результате получим

$$\nu_{\sigma i} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\sigma i}) \left[1 - \nu_{\epsilon i} \frac{\tau^\gamma_{\sigma i}}{\tau^\gamma_{\sigma i} - \tau^\gamma_{\epsilon i}}\right] - \nu_{\epsilon i} \ni^*_\gamma (\tau^\gamma_{\epsilon i}) \left[1 - \nu_{\sigma i} \frac{\tau^\gamma_{\epsilon i}}{\tau^\gamma_{\sigma i} - \tau^\gamma_{\epsilon i}}\right] = 0, \tag{16}$$

откуда следует, что

$$1 - \nu_{\epsilon i} \frac{\tau^\gamma_{\sigma i}}{\tau^\gamma_{\sigma i} - \tau^\gamma_{\epsilon i}} = 0, \tag{17}$$

$$1 - \nu_{\sigma i} \frac{\tau^\gamma_{\epsilon i}}{\tau^\gamma_{\sigma i} - \tau^\gamma_{\epsilon i}} = 0. \tag{18}$$

Из уравнений (17) и (18) находим

$$\tau_{\sigma i}^{\gamma}=\frac{\tau_{\epsilon i}^{\gamma}}{1-\nu_{\epsilon i}},\qquad \nu_{\sigma i}=\frac{\nu_{\epsilon i}}{1-\nu_{\epsilon i}}\quad (i=1,2) \tag{19}$$

или

$$\left(\frac{\tau_{\epsilon i}}{\tau_{\sigma i}}\right)^{\gamma}=1-\nu_{\epsilon i},\qquad \left(\frac{\tau_{\sigma i}}{\tau_{\epsilon i}}\right)^{\gamma}=1+\nu_{\sigma i}\quad (i=1,2). \tag{20}$$

Первая формула в (19) совпадает с формулами (8), а вторая формула в (19) имеет вид (сравни с формулами (11))

$$\nu_{\sigma 1}=\frac{\mu_\infty-\mu_0}{\mu_0},\qquad \nu_{\sigma 2}=\frac{K_\infty-K_0}{K_0}. \tag{21}$$

3. Алгебра обобщенных операторов Ю. Н. Работнова. Зная операторы (14) и (15), можно найти оператор податливости $\tilde{J}$ по формуле

$$\tilde{J}=\tilde{E}^{-1}=\frac{1}{3}\frac{3\tilde{K}+\tilde{\mu}}{3\tilde{K}\tilde{\mu}}=\frac{1}{3}\left(\tilde{\mu}^{-1}+\frac{1}{3}\tilde{K}^{-1}\right), \tag{22}$$

где $\tilde{E}$ — оператор Юнга.

Подставляя выражения (14) и (15) в формулу (22), находим

$$\tilde{J}=J_\infty\left[1+n_1 \ni_\gamma^*(\tau_{\sigma 1}^{\gamma})+n_2 \ni_\gamma^*(\tau_{\sigma 2}^{\gamma})\right], \tag{23}$$

где

$$n_1=\frac{1}{3}\frac{\nu_{\sigma 1}}{\mu_\infty J_\infty}=\frac{2}{3}(1+\nu_\infty)\,\nu_{\sigma 1},\quad n_2=\frac{1}{9}\frac{\nu_{\sigma 2}}{K_\infty J_\infty}=\frac{1}{3}(1-2\nu_\infty)\,\nu_{\sigma 2}.$$

Чтобы определить $\tilde{E}$, нужно использовать свойство взаимообратных операторов

$$\tilde{J}\cdot\tilde{E}=1, \tag{24}$$

а также учесть формулу (13). В результате получим

$$\tilde{E}=E_\infty\left[1-m_1 \ni_\gamma^*(t_{\epsilon 1}^{\gamma})-m_2 \ni_\gamma^*(t_{\epsilon 2}^{\gamma})\right], \tag{25}$$

где величины $t_{\epsilon 1}^{\gamma}$ и $t_{\epsilon 2}^{\gamma}$ определяются из квадратного уравнения

$$\frac{n_1 x}{\tau_{\sigma 1}^{\gamma}-x}+\frac{n_2 x}{\tau_{\sigma 2}^{\gamma}-x}=1,\quad x=t_{\epsilon i}^{\gamma}\quad (i=1,2), \tag{26}$$

или

$$(1+n_1+n_2)\,x^2-\left[\tau_{\sigma 1}^{\gamma}(1+n_2)+\tau_{\sigma 2}^{\gamma}(1+n_1)\right]x+\tau_{\sigma 1}^{\gamma}\tau_{\sigma 2}^{\gamma}=0, \tag{27}$$

а величины m_1 и m_2 находятся из линейной системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\tau_{\sigma 1}^{\gamma}}{\tau_{\sigma 1}^{\gamma}-t_{\epsilon 1}^{\gamma}}m_1+\frac{\tau_{\sigma 1}^{\gamma}}{\tau_{\sigma 1}^{\gamma}-t_{\epsilon 2}^{\gamma}}m_2=1,\\[2ex] \frac{\tau_{\sigma 2}^{\gamma}}{\tau_{\sigma 2}^{\gamma}-t_{\epsilon 1}^{\gamma}}m_1+\frac{\tau_{\sigma 2}^{\gamma}}{\tau_{\sigma 2}^{\gamma}-t_{\epsilon 2}^{\gamma}}m_2=1\end{gathered} \tag{28}$$

при условии, что величины $t_{\epsilon 1}^{\gamma}$ и $t_{\epsilon 2}^{\gamma}$ уже известны.

Теперь подсчитаем оператор, пропорциональный оператору цилиндрической жесткости, который будет использоваться в дальнейшем при решении задачи на удар

$$\frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})} + \frac{\tilde{E}}{2(1-\tilde{\nu})}, \tag{29}$$

где

$$\frac{1}{1+\tilde{\nu}} = \frac{2}{9}\frac{3\tilde{K}+\tilde{\mu}}{\tilde{K}}, \quad \frac{1}{1-\tilde{\nu}} = \frac{2(3\tilde{K}+\tilde{\mu})}{3\tilde{K}+4\tilde{\mu}}, \quad \tilde{E} = \frac{9\tilde{K}\tilde{\mu}}{3\tilde{K}+\tilde{\mu}}. \tag{30}$$

С учетом выражений (30) формулу (29) перепишем в виде

$$\frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} = \tilde{\mu} + \frac{9\tilde{K}\tilde{\mu}}{3\tilde{K}+4\tilde{\mu}} = \tilde{\mu} + \tilde{s}^{-1}, \tag{31}$$

причем

$$\tilde{s} = \frac{3\tilde{K}+4\tilde{\mu}}{9\tilde{K}\tilde{\mu}} = \frac{1}{3}\left(\tilde{\mu}^{-1} + \frac{4}{3}\tilde{K}^{-1}\right) = s_\infty\left[1 + \hat{n}_1 \ni^*_\gamma(\tau^\gamma_{\sigma 1}) + \hat{n}_2 \ni^*_\gamma(\tau^\gamma_{\sigma 2})\right], \tag{32}$$

где

$$s_\infty = \frac{3K_\infty + 4\mu_\infty}{9K_\infty\mu_\infty}, \quad \hat{n}_1 = \frac{3K_\infty\nu_{\sigma 1}}{3K_\infty+4\mu_\infty}, \quad \hat{n}_2 = \frac{3\mu_\infty\nu_{\sigma 2}}{3K_\infty+4\mu_\infty}.$$

Оператор $\tilde{s}^{-1}$ находится в виде

$$\tilde{s}^{-1} = \frac{9\tilde{K}\tilde{\mu}}{3\tilde{K}+4\tilde{\mu}} = s_\infty^{-1}\left[1 - \hat{m}_1 \ni^*_\gamma\left(\hat{t}^\gamma_{\epsilon 1}\right) - \hat{m}_2 \ni^*_\gamma\left(\hat{t}^\gamma_{\epsilon 2}\right)\right], \tag{33}$$

где величины $\hat{t}^\gamma_{\epsilon i}$ $(i = 1, 2)$ определяются из квадратного уравнения (27), в котором величины n_1 и n_2 заменены соответственно на $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$, а величины $\hat{m}_1$ и $\hat{m}_2$ определяются из линейной системы уравнений (28), в которой величины $t^\gamma_{\epsilon 1}$ и $t^\gamma_{\epsilon 2}$ соответственно на $\hat{t}^\gamma_{\epsilon 1}$ и $\hat{t}^\gamma_{\epsilon 2}$.

Наконец, подставляя выражение (33) в формулу (31), окончательно получим

$$\frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} = d_\infty\left[1 - \sum_{j=1}^{3}\eta_j \ni^*_\gamma\left(\hat{t}^\gamma_{\epsilon j}\right)\right], \quad \hat{t}^\gamma_{\epsilon 3} = \tau^\gamma_{\epsilon 1}, \tag{34}$$

где

$$d_\infty = \frac{\mu_\infty s_\infty + 1}{s_\infty}, \quad \eta_1 = \frac{\hat{m}_1}{\mu_\infty s_\infty + 1}, \quad \eta_2 = \frac{\hat{m}_2}{\mu_\infty s_\infty + 1}, \quad \eta_3 = \frac{\mu_\infty s_\infty \nu_{\epsilon 1}}{\mu_\infty s_\infty + 1}.$$

Обратный оператор к оператору (34) имеет вид

$$\frac{1-\tilde{\nu}^2}{\tilde{E}} = d_\infty^{-1}\left[1 + \sum_{j=1}^{3}\zeta_j \ni^*_\gamma\left(T^\gamma_{\sigma j}\right)\right], \tag{35}$$

где величины $T^\gamma_{\sigma 1}$, $T^\gamma_{\sigma 2}$ и $T^\gamma_{\sigma 3}$ находятся из кубического уравнения

$$\frac{\eta_1 x}{\hat{t}^\gamma_{\epsilon 1} - x} + \frac{\eta_2 x}{\hat{t}^\gamma_{\epsilon 2} - x} + \frac{\eta_3 x}{\hat{t}^\gamma_{\epsilon 3} - x} = -1, \quad x = T^\gamma_{\sigma i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{36}$$

или

$$
\begin{aligned}
&(1-\eta_1-\eta_2-\eta_3)\,x^3+\\
&\qquad+\left[\left(\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}+\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}\right)\eta_1+\left(\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}+\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}\right)\eta_2+\left(\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}+\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}\right)\eta_3-\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}-\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}-\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}\right]x^2+\\
&\qquad\qquad+\left[\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}(1-\eta_1)+\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}(1-\eta_2)+\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}(1-\eta_3)\right]x-\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}=0,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

а величины ζ_1, ζ_2 и ζ_3 находятся из системы трех линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\frac{\zeta_1\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}-T_{\sigma 1}^{\gamma}}+\frac{\zeta_2\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}-T_{\sigma 2}^{\gamma}}+\frac{\zeta_3\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 1}^{\gamma}-T_{\sigma 3}^{\gamma}}&=-1,\\
\frac{\zeta_1\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}-T_{\sigma 1}^{\gamma}}+\frac{\zeta_2\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}-T_{\sigma 2}^{\gamma}}+\frac{\zeta_3\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 2}^{\gamma}-T_{\sigma 3}^{\gamma}}&=-1,\\
\frac{\zeta_1\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}-T_{\sigma 1}^{\gamma}}+\frac{\zeta_2\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}-T_{\sigma 2}^{\gamma}}+\frac{\zeta_3\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}}{\hat{t}_{\epsilon 3}^{\gamma}-T_{\sigma 3}^{\gamma}}&=-1.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Применяя теорему Виета к уравнению (37), получаем полезную формулу, которая обобщает первую формулу в (20):

$$
\left(\frac{\prod_{j=1}^{3}\hat{t}_{\epsilon j}}{\prod_{j=1}^{3}T_{\sigma j}}\right)^{\gamma}=1-\sum_{j=1}^{3}\eta_j. \tag{39}
$$

Из формулы (39) видно, что при $\gamma=0$, т. е. при отсутствии вязкости,

$$
\sum_{j=1}^{3}\eta_j=0. \tag{40}
$$

Если считать, наоборот, что оператор (35) известен, а оператор (34) необходимо найти, то вместо формулы (39) получаем

$$
\left(\frac{\prod_{j=1}^{3}T_{\sigma j}}{\prod_{j=1}^{3}\hat{t}_{\epsilon j}}\right)^{\gamma}=1+\sum_{j=1}^{3}\zeta_j \tag{41}
$$

и при $\gamma=0$

$$
\sum_{j=1}^{3}\zeta_j=0. \tag{42}
$$

Формула (41) обобщает вторую формулу в (20).

В заключение данного раздела покажем, как представить оператор (4) в виде, удобном для приложений. С этой целью умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей справа в формуле (4), на $I^{\gamma}\tau_{\epsilon i}^{-\gamma}$, где

$$
I^{\gamma}y(t)=\int_0^t\frac{(t-t')^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}y(t')dt' \tag{43}
$$

— дробный интеграл [19].

Учитывая, что $D^\gamma I^\gamma = I^\gamma D^\gamma = 1$, перепишем выражение (4) в виде

$$\ni^*_\gamma\left(\tau^\gamma_{\epsilon i}\right) = \frac{I^\gamma \tau^{-\gamma}_{\epsilon i}}{1 - \left(-I^\gamma \tau^{-\gamma}_{\epsilon i}\right)}. \tag{44}$$

Интерпретируя формулу (35) как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $-I^\gamma \tau^{-\gamma}_{\epsilon i}$, представим оператор $\ni^*_\gamma\left(\tau^\gamma_{\epsilon i}\right)$ в виде

$$\ni^*_\gamma\left(\tau^\gamma_{\epsilon i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tau^{-\gamma(n+1)}_{\epsilon i} I^{\gamma(n+1)} \tag{45}$$

или

$$\ni^*_\gamma\left(\tau^\gamma_{\epsilon i}\right) y(t) = \int_0^t \ni_\gamma\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\epsilon i}}\right) y(t')dt', \tag{46}$$

где

$$\ni_\gamma\left(-t/\tau_{\epsilon i}\right) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau^\gamma_{\epsilon i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_{\epsilon i})^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \tag{47}$$

— дробноэкспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [21], которая при $\gamma = 1$ превращается в обычную экспоненту

$$\ni_1\left(-t/\tau_{\epsilon i}\right) = \frac{1}{\tau_{\epsilon i}} \exp(-t/\tau_{\epsilon i}).$$

4. Постановка задачи и определяющие уравнения. В работе [3] К. Зинером (C. Zener) была рассмотрена задача о нормальном низкоскоростном ударе шара по достаточно протяженной упругой пластинке, используя теорию тонких пластин. При этом предполагалось, что процесс ударного взаимодействия мишени (пластинки) и ударника (шара) заканчивается раньше, чем в область контакта вернутся волны, отраженные от границ пластинки (в [22] отмечалось, что для этого требуется, чтобы масса ударника не была слишком большой по сравнению с массой мишени). Было показано, что прогиб такой пластинки в месте удара шара определяется в виде

$$u(t) = \frac{\sqrt{3}}{16h^2\sqrt{\varrho}} \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)^{1/2} \int_0^t F(t')dt', \tag{48}$$

где $u(t)$ — перемещение срединной плоскости; h — толщина пластинки; ϱ — ее плотность; E и ν — ее модуль упругости и коэффициент Пуассона; $F(t)$ — контактная сила, которая, согласно теории Герца, связана с местным смятием материала пластинки $x(t)$ при помощи формулы

$$F(t) = \frac{4\sqrt{R}}{3} \frac{E}{1-\nu^2} x^{3/2}(t), \tag{49}$$

где R — радиус жесткого шара.

Уравнение движения жесткого шара массы m имеет вид

$$\ddot{z}(t) = -\frac{1}{m} F(t), \tag{50}$$

где точки над величинами означают производные по времени t.

Перемещение центра шара $z(t)$ связано с перемещением центра пластинки $u(t)$ и местным смятием материала пластинки в зоне контакта $x(t)$ следующим соотношением:

$$x(t) = z(t) - u(t). \tag{51}$$

Согласно принципу Вольтерра, для вязкоупругой пластинки упругие постоянные в формулах (48)–(50) нужно заменить операторами (34) и (35). Оператор, входящий в уравнение (48), можно разложить в ряд Неймана и учесть только два первых члена в силу кратковременности ударного процесса, т. е.

$$\left(\frac{1-\tilde{\nu}^2}{\tilde{E}}\right)^{1/2} = d_\infty^{-1/2}\left[1+\sum_{j=1}^{3}\zeta_j \ni_\gamma^* \left(T_{\sigma j}^\gamma\right)\right]^{1/2} \approx d_\infty^{-1/2}\left[1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\zeta_j \ni_\gamma^* \left(T_{\sigma j}^\gamma\right)\right]. \tag{52}$$

Контактную силу с учетом формулы (34) можно представить в виде

$$F(t) = \frac{4\sqrt{R}d_\infty}{3}\left[x^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^{3}\eta_j\int_0^t \ni_\gamma\left(-\frac{t-t''}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right)x^{3/2}(t'')dt''\right]. \tag{53}$$

Тогда с учетом выражений (52) и (53) уравнение (48) примет вид

$$\begin{aligned}
\text{æ}_\infty^{-1}u(t) = \int_0^t\left[x^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^{3}\eta_j\int_0^{t'} \ni_\gamma\left(-\frac{t'-t''}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right)x^{3/2}(t'')dt''\right]dt' +{}\\
+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\zeta_j\int_0^t\left\{\ni_\gamma\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\sigma j}}\right)\int_0^{t'}\left[x^{3/2}(t'')-\right.\right.\\
\left.\left.-\sum_{j=1}^{3}\eta_j\int_0^{t''} \ni_\gamma\left(-\frac{t''-t'''}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right)x^{3/2}(t''')dt'''\right]dt''\right\}dt',
\end{aligned} \tag{54}$$

где $\text{æ}_\infty = \frac{1}{4h^2}\sqrt{\frac{Rd_\infty}{3\varrho}}$.

Интегрируя дважды уравнение (50), находим

$$z(t) = -\frac{1}{m}\int_0^t F(t')(t-t')dt'. \tag{55}$$

Подставляя в уравнение (55) выражение (53), имеем

$$z(t) = -\frac{4\sqrt{R}d_\infty}{3m}\int_0^t\left[x^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^{3}\eta_j\int_0^{t'} \ni_\gamma\left(-\frac{t'-t''}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right)x^{3/2}(t'')dt''\right](t-t')dt'. \tag{56}$$

Подставляя теперь соотношения (54) и (56) в (51) и учитывая начальные условия

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = V_0, \tag{57}$$

где V_0 — скорость шара в момент удара, получим интегральное уравнение для определения функции $x(t)$:

$$x(t) = V_0 t - \frac{4\sqrt{R}d_\infty}{3m}\int_0^t \left[x^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^3 \eta_j \int_0^{t'} \ni_\gamma\left(-\frac{t'-t''}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right) x^{3/2}(t'')dt''\right](t-t')dt' -$$

$$- æ_\infty \int_0^t \left[x^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^3 \eta_j \int_0^{t'} \ni_\gamma\left(-\frac{t'-t''}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right) x^{3/2}(t'')dt''\right] dt' -$$

$$- \frac{1}{2} æ_\infty \sum_{j=1}^3 \zeta_j \int_0^t \left\{ \ni_\gamma\left(-\frac{t-t'}{\tau_{\sigma j}}\right) \int_0^{t'} \left[x^{3/2}(t'') - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=1}^3 \eta_j \int_0^{t''} \ni_\gamma\left(-\frac{t''-t'''}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right) x^{3/2}(t''')dt'''\right] dt'' \right\} dt'. \quad (58)$$

5. Приближенные вычисления. Поскольку ударный процесс является кратковременным процессом, то дробноэкспоненциальную функцию (46) в уравнении (58) можно заменить первым членом ряда (47) [23]

$$\ni_\gamma\left(-\frac{t}{t_j}\right) \approx \frac{t^{\gamma-1}}{t_j^\gamma \Gamma(\gamma)}. \quad (59)$$

Если при решении уравнения (58) использовать метод последовательных приближений, а в качестве первого приближения выбрать выражение

$$x(t) = V_0 t, \quad (60)$$

то, подставляя его в правую часть уравнения (58) и учитывая, что

$$\int_0^t (t-t')^{\gamma-1}(t')^{3/2}dt' = \frac{3}{2\gamma}\int_0^t t^\gamma \left(1-\frac{t'}{t}\right)^\gamma (t')^{1/2}dt' =$$

$$= \frac{3}{2\gamma}\int_0^t t^\gamma \left(1-\gamma\frac{t'}{t}\right)^\gamma (t')^{1/2}dt' = \frac{3}{\gamma}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\gamma\right)t^{3/2+\gamma},$$

находим

$$x^{(\gamma)} = V_0 t - \frac{16}{105}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m}V_0^{3/2}t^{7/2} + 4\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m}\frac{V_0^{3/2}\delta_\gamma(1/3-1/5\gamma)}{\gamma(5/2+\gamma)(7/2+\gamma)}t^{7/2+\gamma} -$$

$$- \frac{2}{5}æ_\infty V_0^{3/2}t^{5/2} + 3æ_\infty \frac{V_0^{3/2}\delta_\gamma(1/3-1/5\gamma)}{(5/2+\gamma)}t^{5/2+\gamma} - æ_\infty \frac{V_0^{3/2}\Delta_\gamma(1/5-1/7\gamma)}{\gamma}t^{5/2+\gamma} +$$

$$+ \frac{3}{2}æ_\infty \frac{V_0^{3/2}\Delta_\gamma\delta_\gamma(1/3-1/5\gamma)}{\gamma^2}\left(\frac{1}{5/2+\gamma} - \frac{\gamma}{7/2+\gamma}\right)t^{5/2+2\gamma}, \quad (61)$$

где

$$\delta_\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j}{\hat{t}_{\epsilon j}^\gamma}, \qquad \Delta_\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{j=1}^3 \frac{\zeta_j}{\tau_{\sigma j}^\gamma}.$$

При $\gamma = 0$ из соотношения (61) с учетом формул (40) и (42) получаем зависимость местного смятия упругой пластинки от времени:

$$x^{(0)}(t) = V_0 t - \frac{16}{105}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m}V_0^{3/2}t^{7/2} - \frac{2}{5}æ_\infty V_0^{3/2}t^{5/2}. \quad (62)$$

Выражение (62) можно получить и из соотношения (58), если учесть формулы (40) и (42), а также, что [см. формулу (59)]

$$\lim_{\gamma\to 0} \ni_\gamma \left(-\frac{t-t'}{\hat{t}_{\epsilon j}}\right) = \lim_{\gamma\to 0} \ni_\gamma \left(-\frac{t-t'}{\tau_{\sigma j}}\right) = \delta(t-t'), \tag{63}$$

где $\delta(t-t')$ — дельта-функция Дирака.

Полагая в выражении (62) функцию $x^{(0)}$ равной нулю, находим время контакта жесткого шара и упругой бесконечной пластинки:

$$t^{(0)}_{\mathrm{cont}} \approx t^{(0)}_1 \left(1 + \frac{8}{21}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m\text{æ}_\infty} t^{(0)}_1\right), \tag{64}$$

где

$$t^{(0)}_1 = \left(\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{V_0}\text{æ}_\infty}\right)^{2/3}.$$

Дифференцируя соотношение (62) по времени t

$$\frac{dx^{(0)}(t)}{dt} = V_0 - \frac{8}{15}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m} V_0^{3/2} t^{5/2} - \text{æ}_\infty V_0^{3/2} t^{3/2} \tag{65}$$

и приравнивая полученное выражение нулю, находим время $t^{(0)}_{\max}$, при котором функция $x^{(0)}(t)$ достигает максимального значения

$$t^{(0)}_{\max} \approx t^{(0)}_2 \left(1 - \frac{16}{45}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m\text{æ}_\infty} t^{(0)}_2\right), \tag{66}$$

где $t^{(0)}_2 = \left(\frac{1}{\text{æ}_\infty\sqrt{V_0}}\right)^{2/3}$, а само максимальное значение $x^{(0)}_{\max}(t^{(0)}_{\max})$ имеет вид

$$x^{(0)}_{\max}(t^{(0)}_{\max}) \approx V_0 t^{(0)}_2 \left(\frac{3}{5} - \frac{96}{189}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m\text{æ}_\infty} t^{(0)}_2\right). \tag{67}$$

Используя выражение (61) и пренебрегая членами более высокого порядка малости по времени t, получим соотношение $x^{(\gamma)}(t)$ для произвольных значений величины γ $(0 \le \gamma \le 1)$

$$x^{(\gamma)}(t) \approx V_0 t - \frac{16}{105}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m} V_0^{3/2} t^{7/2} - \frac{2}{5}\text{æ}_\infty V_0^{3/2} t^{5/2} - \text{æ}_\infty V_0^{3/2} \Delta_\gamma \frac{(1/5 - 1/7\gamma)}{\gamma} t^{5/2+\gamma}. \tag{68}$$

Приравнивая нулю выражение (68), находим

$$t^{(\gamma)}_{\mathrm{cont}} \approx t^{(0)}_{\mathrm{cont}} + \frac{5}{2}\Delta_\gamma \frac{(1/5 - 1/7\gamma)}{\gamma} \left(t^{(0)}_1\right)^{1+\gamma}. \tag{69}$$

Дифференцируя соотношение (68) по времени t, имеем

$$\frac{dx^{(\gamma)}(t)}{dt} \approx V_0 - \frac{8}{15}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m} V_0^{3/2} t^{5/2} - \\ - \text{æ}_\infty V_0^{3/2} t^{3/2} - \text{æ}_\infty V_0^{3/2} \Delta_\gamma \frac{(1/5 - 1/7\gamma)(5/2+\gamma)}{\gamma} t^{3/2+\gamma}. \tag{70}$$

Приравнивая выражение (70) нулю, получим

$$t_{\max}^{(\gamma)} \approx t_{\max}^{(0)} - \frac{2}{3}\Delta_\gamma \frac{(1/5-1/7\gamma)(5/2+\gamma)}{\gamma}\left(t_2^{(0)}\right)^{1+\gamma}. \qquad (71)$$

Подставляя выражение (71) в соотношение (68), находим

$$x_{\max}^{(\gamma)}(t_{\max}^{(\gamma)}) = x_{\max}^{(0)}(t_{\max}^{(0)}) - V_0\Delta_\gamma \frac{(1/5-1/7\gamma)}{\gamma}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)+1\right]\left(t_2^{(0)}\right)^{1+\gamma}. \qquad (72)$$

Теперь получим те же самые величины при значении $\gamma = 1$. Из выражения (68) при $\gamma = 1$ находим

$$x^{(1)}(t) \approx V_0 t - \frac{2}{5}æ_\infty V_0^{3/2} t^{5/2} - \left(\frac{16}{105}\frac{\sqrt{R}d_\infty}{m} + \frac{2}{35}æ_\infty \Delta_1\right) V_0^{3/2} t^{7/2}, \qquad (73)$$

где $\Delta_1 = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\zeta_j}{t_{\sigma j}}$.

Соотношение (73) позволяет определить все основные характеристики ударного взаимодействия:

$$t_{\text{cont}}^{(1)} = t_{\text{cont}}^{(0)} + \frac{1}{7}\Delta_1 t_1^{(0)^2}, \qquad (74)$$

$$t_{\max}^{(1)} = t_{\max}^{(0)} - \frac{2}{15}\Delta_1 t_2^{(0)^2}, \qquad (75)$$

$$x_{\max}^{(1)}(t_{\max}^{(1)}) = x_{\max}^{(0)}(t_{\max}^{(0)}) - \frac{4}{21}V_0\Delta_1 t_2^{(0)^2}. \qquad (76)$$

Из полученных выражений видно, что с увеличением вязкости время контакта шара и пластинки увеличивается, а максимумы у контактной силы уменьшаются и смещаются влево по временной оси, что находится в полном соответствии с результатами, полученными в работе [4] (см. рис. 2 в [4]).

6. Дискуссия и выводы. В работе [4] при решении аналогичной задачи на удар не конкретизирована вязкоупругая модель материала, из которого состоит пластинка. В данной же работе для описания вязкоупругих свойств материала пластинки была использована модель стандартного линейного тела с дробными производными, что позволило подтвердить справедливость основных результатов, полученных Дж. В. Филлипс и Х. Х. Кальвит (J. W. Phillips и H. H. Calvit) [4]. Только в качестве основных параметров в данной работе используется не тангенс угла механических потерь, а порядок дробной производной. Однако можно показать, что эти величины связаны друг с другом.

С этой целью подействуем оператором $\tilde{J}$, заданным формулой (23), на функцию $e^{i\omega t}$, предварительно заменив в формуле (23) дробные производные (3) на

$$D_+^\gamma y(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} \frac{(t-t')^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} y(t')dt'. \qquad (77)$$

Используя формулы (3) и (45), можно получить

$$\ni^*_{\gamma+}\left(\tau^\gamma_{\sigma i}\right)e^{i\omega t}=\frac{e^{i\omega t}}{1+\tau_{\sigma i}D^\gamma_+}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tau_{\sigma i}^{-\gamma(n+1)}I_+^{\gamma(n+1)}e^{i\omega t}\quad(i=1,2)\tag{78}$$

или

$$\ni^*_{\gamma+}\left(\tau^\gamma_{\sigma i}\right)e^{i\omega t}=e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(i\omega\tau_{\sigma i}\right)^{-\gamma(n+1)},\tag{79}$$

где

$$I^\gamma_+y(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{(t-t')^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}y(t')dt'$$

— дробный интеграл [19].

Сумму, стоящую в формуле (79), можно интерпретировать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $d=-(i\omega\tau_{\sigma i})^{-\gamma}$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(i\omega\tau_{\sigma i}\right)^{-\gamma(n+1)}=\frac{(i\omega\tau_{\sigma i})^{-\gamma}}{1-[-(i\omega\tau_{\sigma i})^{-\gamma}]}=\frac{1}{1+(i\omega\tau_{\sigma i})^{\gamma}}.\tag{80}$$

Таким образом,

$$\ni^*_{\gamma+}\left(\tau^\gamma_{\sigma i}\right)e^{i\omega t}=\frac{e^{i\omega t}}{1+(i\omega\tau_{\sigma i})^{\gamma}}=\left(\frac{æ_i^{-\gamma}+\cos\psi}{æ_{\sigma i}^{-\gamma}+æ_{\sigma i}^{\gamma}+2\cos\psi}-i\frac{\sin\psi}{æ_{\sigma i}^{-\gamma}+æ_{\sigma i}^{\gamma}+2\cos\psi}\right)e^{i\omega t},\tag{81}$$

где $æ_{\sigma i}=\omega\tau_{\sigma i}$, $\psi=\frac{1}{2}\pi\gamma$.

Учитывая формулу (81) в соотношении

$$\tilde{J}e^{i\omega t}=J(i\omega)e^{i\omega t},\tag{82}$$

получим выражение для комплексной податливости

$$\begin{aligned}J(i\omega)=J'(\omega)-iJ''(\omega)=\frac{1}{3}J_\infty\Biggl\{2(1+\nu_\infty)\frac{æ^\gamma_{\sigma 1}+æ^{-\gamma}_{\epsilon 1}+[1+(æ_{\sigma 1}/æ_{\epsilon 1})^\gamma]\cos\psi}{æ^{-\gamma}_{\sigma 1}+æ^{\gamma}_{\sigma 1}+2\cos\psi}+\\+(1-2\nu_\infty)\frac{æ^\gamma_{\sigma 2}+æ^{-\gamma}_{\epsilon 2}+[1+(æ_{\sigma 2}/æ_{\epsilon 2})^\gamma]\cos\psi}{æ^{-\gamma}_{\sigma 2}+æ^{\gamma}_{\sigma 2}+2\cos\psi}\Biggr\}-\\-i\frac{1}{3}J_\infty\left\{2(1+\nu_\infty)\frac{[(æ_{\sigma 1}/æ_{\epsilon 1})^\gamma-1]\sin\psi}{æ^{-\gamma}_{\sigma 1}+æ^{\gamma}_{\sigma 1}+2\cos\psi}+(1-2\nu_\infty)\frac{[(æ_{\sigma 2}/æ_{\epsilon 2})^\gamma-1]\sin\psi}{æ^{-\gamma}_{\sigma 2}+æ^{\gamma}_{\sigma 2}+2\cos\psi}\right\},\end{aligned}\tag{83}$$

где $æ_{\epsilon i}=\omega\tau_{\epsilon i}$.

Зная реальную и мнимую части комплексной податливости, входящие в выражение (83), можно найти тангенс угла механических потерь, поскольку

$$\mathrm{tg}\delta=\frac{J''(\omega)}{J'(\omega)}.\tag{84}$$

Чтобы показать зависимость максимальной величины $\mathrm{tg}\delta$ от параметра дробности γ, в работе [14] был рассмотрен численный пример при следующих значениях параметров вязкоупругой модели: $\nu_\infty=0.3$, $\mu_0/\mu_\infty=K_0/K_\infty=0.8$,

$\tau_{\epsilon 1}/\tau_{\epsilon 2} = \tau_{\sigma 1}/\tau_{\sigma 2} = 10^3$, $\omega = 1$. На рис. 1 в [14] приведен тангенс угла механических потерь tgδ как функция от $\ln æ_{\epsilon 2}$, где в качестве параметра взята величина γ. Как и утверждалось, с увеличением параметра дробности γ от 0 до 1 (это соответствует увеличению вязкости) максимальное значение величины tgδ также увеличивается. Это видно как на пиках, связанных со сдвиговой релаксацией (левые пики на рис. 1 в [14]), так и на пиках, связанных с объемной релаксацией (правые пики на рис. 1 в [14]), при этом сдвиговый пик был в 5.5 раза больше объемного.

Таким образом, в данной работе была рассмотрена задача о нормальном ударе жесткого шара по бесконечной вязкоупругой пластинке Кирхгофа — Лява, демпфирующие свойства которой описываются трехмерной моделью стандартного линейного тела с дробными производными, что позволило учесть объемную и сдвиговую релаксацию материала в процессе ударного взаимодействия.

Литература

1. Гольдсмит В. *Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел*, пер. с анг. Москва, Изд-во лит. по строительству (1965).

2. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Transient response of thin bodies subjected to impact: Wave approach. *The Shock and Vibration Digest* **39** (4), 273–309 (2007). https://doi.org/10.1177/0583102407080410

3. Zener C. The intrinsic inelasticity of large plates. *Physical Review* **59** (8), 669–673 (1941). https://doi.org/10.1103/PHYSREV.59.669

4. Phillips J. W., Calvit H. H. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate. *Journal of Applied Mechanics* **34** (4), 873–878 (1967). https://doi.org/10.1115/1.3607850

5. Shitikova M. V. Wave theory of impact and Professor Yury Rossikhin contribution in the field (A memorial survey). *Journal of Materials Engineering and Performance* **28** (6), 3161–3173 (2019). https://doi.org/10.1007/s11665-018-3824-6

6. Шитикова М. В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела. *Известия РАН. Механика твердого* тела **1**, 3–40 (2022). https://doi.org/10.31857/S0572329921060118

7. Shitikova M. V., Krusser A. I. Models of viscoelastic materials: a review on historical development and formulation. *Advanced Structured Materials* **175**, 285–326. (2022). https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6-14

8. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional calculus in structural mechanics. In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications.* Vol. 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences. Part A, 159–192, D. Baleanu, A. M. Lopes (eds). Berlin, De Gruyter (2019). https://doi.org/10.1515/9783110571905-009

9. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Classical beams and plates in a fractional derivative medium, Impact response. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*, 294–305. H. Altenbach, A. Öchsner (eds). Germany, Springer-Verlag GmbH (2020). https://doi/org/10.1007/978-3-662-53605-6-86-1

10. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional derivative Timoshenko beams and Uflyand-Mindlin plates, Impact response. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*, 962–971, H. Altenbach, A. Öchsner (eds). Germany, Springer-Verlag GmbH (2020). https://doi/org/10.1007/978-3-662-53605-6-87-1

11. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Collision of two spherical shells. Fractional operator models. *Encyclopedia of Continuum Mechanics* 324–332, H. Altenbach, A. Öchsner (eds). Germany, Springer-Verlag GmbH (2020). https://doi/org/10.1007/978-3-662-53605-6-88-1

12. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview. *Computers and Mathematics with Applications* **66** (5), 755–773 (2013). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.01.006

13. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Постников В. С. К выявлению объемной релаксации при динамических испытаниях. *Ученые записки Ереванского государственного университета* **2**, 10–14 (1968).

14. Мешков С. И., Пачевская Г. Н. К учету объемной релаксации методом внутреннего трения. *ПМТФ* **2**, 80–82 (1967).

15. Shitikova M. V., Popov I. I., Rossikhin Yu. A. Theoretical and experimental evidence of the bulk relaxation peak on the loss tangent versus frequency diagrams for concrete. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2022). https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2012857

16. Makris N. Three-dimensional constitutive viscoelastic laws with fractional order time derivatives. *Journal of Rheology* **41**, 1007–1020 (1997). https://doi.org/10.1122/1.550823

17. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids. In: *Fractional Calculus: History, Theory and Applications*, ed. by R. Daou, M. Xavier. Chapter 8, 165–226 (2015). New York, Nova Science Publ.

18. Alotta G., Barrera O., Cocks A., Di Paola M. On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model. *Meccanica* **52** (9), 2127–2142 (2017). https://doi.org/10.1007/s11012-016-0550-8

19. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск, Наука и техника (1987).

20. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator. *Fractional Calculus and Applied Analysis* **17** (3), 674–683 (2014). https://doi.org/10.2478/s13540-014-0192-2

21. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. *ПММ* **12** (1), 53–62 (1948).

22. Джонсон К. *Механика контакного взаимодействия*, пер. с англ. Москва, Мир (1989).

23. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел.* Москва, Наука (1977).

Статья поступила в редакцию 26 мая 2022 г.;
доработана 24 июля 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Шитикова Марина Вячеславовна — д-р физ.-мат. наук, проф.; mvs@vgasu.vrn.ru

Impact of a rigid sphere on an infinite viscoelastic Kirchhoff — Love plate considering volume and shear relaxations*

M. V. Shitikova

Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation
Voronezh State Technical University,
84, ul. 20-letiya Oktyabrya, Voronezh, 394006, Russian Federation

For citation: Shitikova M. V. Impact of a rigid sphere on an infinite viscoelastic Kirchhoff — Love plate considering volume and shear relaxations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 139–154.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.112 (In Russian)

The problem of a low-velocity normal impact of a rigid sphere upon an infinite viscoelastic Kirhhoff — Love plate is considered. The dynamic behaviour of the viscoelastic plate is described by the fractional derivative standard linear solid model. The fractional parameter defining the order of the fractional derivative governs the variation in the viscosity of plate's material within the contact domain during the impact process. The local bearing of the plate material under sphere's indentation, as well as the contact force are defined via the generalized Hertzian contact theory. Using the algebra of Rabotnov's fractional-order operators and taking the volume and shear relaxations into account, the integral equation for the local bearing of the contacting bodies has been obtained. Its approximate solution allows one to find the time dependence of the local indentation and the contact force.

Keywords: low-velocity impact, viscoelastic Kirhhoff — Love plate, fractional derivative standard linear solid model, algebra of Rabotnov's fractional operators.

*The work is supported by Ministry of Science and High Education of the Russian Federation (project no. FZGM-2020-0007).

References

1. Goldsmith W. *Impact. The theory and physical behaviour of colliding bodies.* London, Arnold (1960). [Rus. ed.: Goldsmith W. *Udar. Teoriy i fizicheskie svoistva soudaryemych tel.* Mir Publ. (1975)].

2. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Transient response of thin bodies subjected to impact: Wave approach. *The Shock and Vibration Digest* **39** (4), 273–309 (2007). https://doi.org/10.1177/0583102407080410

3. Zener C. The intrinsic inelasticity of large plates. *Physical Review* **59** (8), 669–673 (1941). https://doi.org/10.1103/PHYSREV.59.669

4. Phillips J. W., Calvit H. H. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate. *Journal of Applied Mechanics* **34** (4), 873–878 (1967). https://doi.org/10.1115/1.3607850

5. Shitikova M. V. Wave theory of impact and Professor Yury Rossikhin contribution in the field (A memorial survey). *Journal of Materials Engineering and Performance* **28** (6), 3161–3173 (2019). https://doi.org/10.1007/s11665-018-3824-6

6. Shitikova M. V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: A review. *Isvestiy Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* **1**, 3–40 (2022). https://doi.org/10.31857/S0572329921060118 (In Russian). [Eng. transl.: *Mechanics of Solids* **57** (1), 1–33 (2022). https://doi.org/10.3103/S0025654422010022].

7. Shitikova M. V., Krusser A. I. Models of viscoelastic materials: a review on historical development and formulation. *Advanced Structured Materials* **175**, 285–326 (2022). https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6-14

8. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional calculus in structural mechanics. In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications.* Vol. 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences. Part A, 159–192, D. Baleanu, A. M. Lopes (eds). Berlin, De Gruyter (2019). https://doi.org/10.1515/9783110571905-009

9. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Classical beams and plates in a fractional derivative medium, Impact response. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*, 294–305. H. Altenbach, A. Öchsner (eds). Germany, Springer-Verlag GmbH (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6-86-1

10. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional derivative Timoshenko beams and Uflyand-Mindlin plates, Impact response. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*, 962–971, H. Altenbach, A. Öchsner (eds). Germany, Springer-Verlag GmbH (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6-87-1

11. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Collision of two spherical shells. Fractional operator models. *Encyclopedia of Continuum Mechanics* 324–332, H. Altenbach, A. Öchsner (eds). Germany, Springer-Verlag GmbH (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6-88-1

12. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview. *Computers and Mathematics with Applications* **66** (5), 755–773 (2013). https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.01.006

13. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Postnikov V. S. To the detection of volume relaxation during dynamic tests. *Proceedings of Erevan State University* **2**, 10–14 (1968). (In Russian)

14. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Allowance for bulk relaxation by the method of internal friction. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **2**, 80–82 (1967). (In Russian) [Engl. transl.: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **8** (2), 47–48 (1967). https://doi.org/10.1007/BF00918032].

15. Shitikova M. V., Popov I. I., Rossikhin Yu. A. Theoretical and experimental evidence of the bulk relaxation peak on the loss tangent versus frequency diagrams for concrete. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2022). https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2012857

16. Makris N. Three-dimensional constitutive viscoelastic laws with fractional order time derivatives. *Journal of Rheology* **41**, 1007–1020 (1997). https://doi.org/10.1122/1.550823

17. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids. In: *Fractional Calculus: History, Theory and Applications*, ed. by R. Daou, M. Xavier. Chapter 8, 165–226. New York, Nova Science Publ. (2015).

18. Alotta G., Barrera O., Cocks A., Di Paola M. On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model. *Meccanica* **52** (9), 2127–2142 (2017). https://doi.org/10.1007/s11012-016-0550-8

19. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications*, New York, Gordon & Breach Sci. Publishers (1993).

20. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator. *Fractional Calculus and Applied Analysis* **17** (3), 674–683 (2014). https://doi.org/10.2478/s13540-014-0192-2

21. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect. *Fractional Fractional Calculus and Applied Analysis* **12** (1), 53–62 (1948). (In Russian) [Engl. transl.: *Fractional Calculus and Applied Analysis* **17** (3), 684–696 (2014). https://doi.org/10.2478/s13540-014-0193-1].
22. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press (1985). [Rus. ed.: Johnson K. L. *Mechanika kontactnogo vsaimodeistvia*. Moscow, Mir Publ. (1989)].
23. Rabotnov Yu. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Moscow, Mir Publ. (1980).

Received: May 26, 2022
Revised: July 24, 2022
Accepted: September 8, 2022

Author's information:

Marina V. Shitikova — mvs@vgasu.vrn.ru