

Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. I. Асимптотический анализ*

С. Б. Филиппов, А. Л. Смирнов, Г. А. Нестерчук

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Филиппов С. Б., Смирнов А. Л., Нестерчук Г. А.* Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. I. Асимптотический анализ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 109–120. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.110>

Низшие собственные частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из замкнутой круговой цилиндрической оболочки с присоединенной к ней концевой крышкой, имеющей форму пологого сферического сегмента, исследуются в статье с помощью численных и асимптотических методов. Выделены три типа собственных колебаний конструкции. Собственные частоты и формы колебаний первого типа близки к частотам и формам колебаний пологой сферической оболочки, формы и частоты второго типа — к частотам и формам цилиндрической оболочки, а третьего типа — к частотам и формам колебаний консольной балки с грузом на конце. В данной работе асимптотическими методами найдены приближенные значения для частот колебаний первого типа. Обнаружено хорошее согласие асимптотических и численных результатов, полученных с помощью метода конечных элементов.

Ключевые слова: сопряженные оболочки, собственные колебания, асимптотические методы.

1. Введение. Анализ колебаний составных тонкостенных конструкций представляет значительный интерес, поскольку такие элементы часто встречаются в реальных инженерных системах (трубопроводы, резервуары, цистерны, корпуса и т. д.). Одной из разновидностей таких конструкций являются цилиндрические оболочки с торцевыми крышками разных типов (рис. 1, 2). В статье рассматриваются только крышки в форме сферического сегмента.

При решении краевых задач теории свободных колебаний сопряженных оболочек применяются различные методы. Разложение решений уравнений теории оболочек в ряды использовалось в статьях [1–4]. В работах [5–7] для определения собственных частот колебаний применялся метод Ритца. В большинстве этих исследований проведено сравнение полученных результатов с результатами, найденными методом конечных элементов (МКЭ). Расчету сопряженных оболочек численным методом прогонки посвящена книга [8].

Уравнения теории тонких оболочек содержат естественный малый параметр — безразмерную толщину оболочки. Применение асимптотических разложений решений этих уравнений по малому параметру [9, 10] оказывается особенно эффективным при анализе низкочастотных колебаний сопряженных оболочек. В ряде случаев ис-

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023



Рис. 1. Торцевые крышки разных типов.



Рис. 2. Элемент реальной конструкции: цилиндрическая оболочка с торцевой крышкой.

ходная краевая задача в первом приближении распадается на несколько более простых краевых задач, а нижняя часть спектра собственных частот делится на части, соответствующие колебаниям одной из сопряженных оболочек. Это позволяет получить формулы для определения приближенных значений некоторых частот в явном виде [11].

Асимптотический метод, использующийся в данной работе для приближенного решения задачи о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной с пологой сферической оболочкой, отличается от методов, описанных в монографии [11]. В [11] решения краевых задач первого приближения не отличаются качественно друг от друга и находятся с помощью одной и того же алгоритма. Так, например, формы низкочастотных колебаний цилиндрической и конической оболочек вращения имеют большое число волн по параллели. Для пологой сферической оболочки низшей частоте соответствует осесимметричная форма колебаний, поэтому для определения частот колебаний, близких к частотам пологой сферической оболочки требуется особый подход, аналогичный тому, который использовался в задаче о колебаниях цилиндрической оболочки, соединенной с кольцевой пластиной [12].

2. Численные результаты. В статье асимптотическим и численными методами определяются частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из тонкой круговой цилиндрической оболочки радиуса R , длины L и толщины H_s с жестко присоединенной концевой крышкой в форме сферического сегмента толщины H_p и радиуса кривизны R_p . Второй край оболочки жестко заделан. Оболочка и крышка

изготовлены из изотропного материала с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . При $R_p = \infty$ оболочка вырождается в пластину, при $R_p = R$ — в оболочку полусферической формы.

Начнем решение задачи с численного исследования, которое будет служить ориентиром для асимптотического анализа. Численный анализ конструкции был выполнен в пакете конечных элементов *COMSOL v5.6* для следующих параметров: $R = 1$ м, $L = 4$ м, $H = 0.01$ м — толщина оболочек, $R_p = 10$ м, $E = 11 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.35$, $\rho = 8960$ кг/м³. Рассматривалась сходимость метода на различных сетках. Лучшую сходимость обеспечивает разбиение на прямоугольные элементы (shaped mesh) с характерными размерами элемента в промежутке $[0.008, 0.08]$. Дальнейшее уменьшение размера элемента слабо влияет на результаты: относительное изменение частот спектра не превышает 1%.

Значения параметра частот собственных колебаний

$$\Omega = (\omega^2 \cdot 12\rho\sigma R^4 / (EH^2))^{1/4},$$

где $\sigma = 1 - \nu^2$ и $f, \omega = 2\pi f$ — соответственно частота и циклическая частота колебаний, показаны на рис. 3 для крышек в форме круглой пластины ($R_p = \infty$) и при $R_p = 10$ м.

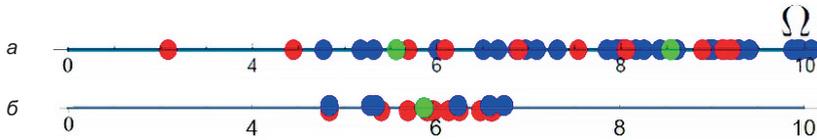


Рис. 3. Низшие собственные частоты конструкции с крышкой в форме пластины (а) и в форме сферического сегмента (б). «Оболочечные» частоты отмечены синим, частоты крышки — красным, «балочные» частоты — зеленым.

Соответствующие формы колебаний для конструкции с крышкой в форме сферического сегмента показаны на рис. 4.

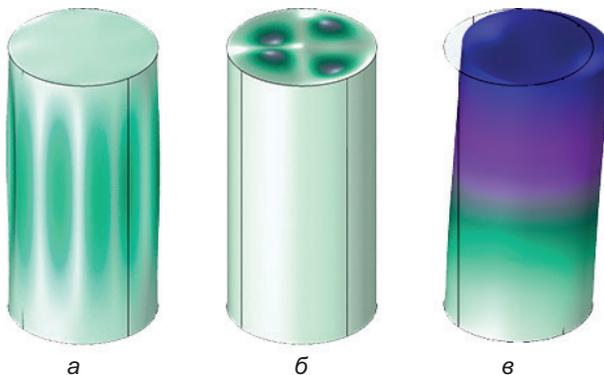


Рис. 4. Типы форм собственных колебаний: а — оболочечные; б — крышечные; в — балочные.

3. Основные уравнения. Рассмотрим малые свободные низкочастотные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, сопряженной по краю с пологой

сферической оболочкой. Далее используются безразмерные параметры, связанные с размерными следующим образом: $l = L/R$, $r_p = R_p/R$, $h_s = H_s/R$, $h_p = H_p/R$, где H_s и H_p — размерные толщины цилиндрической и сферической оболочек соответственно.

На рис. 5 изображено сечение данной конструкции плоскостью, проходящей через ее ось симметрии. За единицу длины выбран радиус R цилиндрической оболочки.

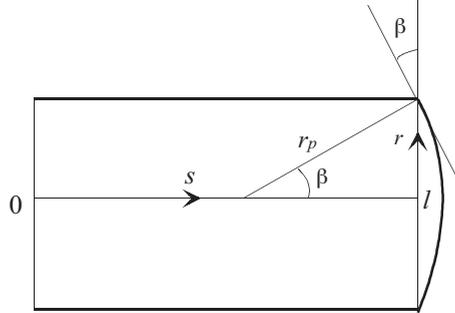


Рис. 5. Сечение конструкции плоскостью.

После разделения переменных безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрической оболочки, принимают вид [11]

$$\begin{aligned}
 T_1' + mS + \lambda u &= 0, & S' - mT_2 + Q_2 + 2H' + \lambda v &= 0, \\
 Q_1' + mQ_2 - T_2 + \lambda w &= 0, & Q_1 &= M_1' + mH, & Q_2 &= -mM_2 + H', \\
 T_1 &= u' + \nu(w + mv), & T_2 &= w + mv + \nu u', & 2S &= (1 - \nu)(v' - tu), \\
 M_1 &= \mu^4(\vartheta_1' + \nu m\vartheta_2), & M_2 &= \mu^4(m\vartheta_2 + \nu\vartheta_1'), & H &= \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', \\
 & & \vartheta_1 &= -w', & \vartheta_2 &= mw + v,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где (\prime) обозначает производную по безразмерной продольной координате $s \in [0, l]$; m — число волн по параллели; u , v и w — компоненты перемещения; T_1 , T_2 , S , Q_1 , Q_2 — усилия; M_1 , M_2 , H — моменты; ϑ_1 и ϑ_2 — углы поворота; $\lambda = \omega^2 \sigma \rho R^2 E^{-1}$ — параметр частоты; $\mu^4 = h_s^2/12$ — малый параметр; h_s — безразмерная толщина оболочки.

Уравнения колебаний пологой сферической оболочки [13] в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
 (rT_{1p})' - T_{2p} + \frac{m}{r}S_p &= 0, & (rS_p)' + S_p - mT_{2p} &= 0, \\
 (rQ_{1p})' + mQ_{2p} - \frac{r}{r_p}(T_{1p} + T_{2p}) + \lambda r w_p &= 0, \\
 rQ_{1p} &= (rM_{1p})' - M_{2p} + mH_p, & rQ_{2p} &= -mM_{2p} + (rH_p)' + H_p, \\
 T_{1p} &= \varepsilon_{1p} + \nu\varepsilon_{2p}, & T_{2p} &= \varepsilon_{2p} + \nu\varepsilon_{1p}, & 2S_p &= (1 - \nu)\varepsilon_{12p}, \\
 \varepsilon_{1p} &= u_p' + \frac{w_p}{r_p}, & \varepsilon_{2p} &= \frac{u_p}{r} + m\frac{v_p}{r} + \frac{w_p}{r_p}, & \varepsilon_{12p} &= v_p' - \frac{v_p}{r} - \frac{m}{r}u_p, \\
 M_{1p} &= \mu^4(\vartheta_{1p}' + \nu\frac{m}{r}\vartheta_{2p} + \frac{\nu}{r}\vartheta_{1p}), & M_{2p} &= \mu^4(\frac{m}{r}\vartheta_{2p} + \frac{1}{r}\vartheta_{1p} + \nu\vartheta_{1p}'), \\
 H_p &= \mu^4(1 - \nu)\vartheta_{2p}', & \vartheta_{1p} &= -w_p', & \vartheta_{2p} &= \frac{m}{r}w_p.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь (') обозначает производную по безразмерной радиальной координате $r \in [0, 1]$; u_p, v_p и w_p — компоненты перемещения; $T_{1p}, T_{2p}, S, Q_{1p}, Q_{2p}$ — усилия; M_{1p}, M_{2p}, H_p — моменты; ϑ_{1p} и ϑ_{2p} — углы поворота, $\mu_p^4 = h_p^2/12$ — малый параметр; h_p — безразмерная толщина сферической оболочки. Если мембранные усилия выразить через безразмерную функцию Φ по формулам

$$T_{1p} = r_p \mu_p^4 \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{m^2}{r^2} \Phi \right), \quad T_{2p} = r_p \mu_p^4 \Phi'', \quad S_p = -\frac{r_p \mu_p^4}{r} \left(m \Phi' - \frac{\Phi}{r} \right),$$

то систему уравнений (2) можно записать в следующем компактном виде [13, 14]:

$$\Delta^2 w_p + \Delta \Phi - \Omega_p^4 w = 0, \quad \Delta^2 \Phi = k^2 \Delta w_p, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}, \quad \Omega_p^4 = \frac{\lambda}{\mu_p^4}, \quad k^2 = \frac{\sigma}{\mu_p^4 r_p^2}.$$

Предположим, что оболочка и пластина изготовлены из одного материала. В этом случае на параллели сопряжения $s = l, r = 1$ должны быть выполнены следующие восемь условий непрерывности [11]:

$$\begin{aligned} u_p &= -u \sin \beta + w \cos \beta, & w_p &= -w \sin \beta - u \cos \beta, \\ h_p T_{1p} &= h_s (T_1 \sin \beta - Q_1 \cos \beta), & h_p Q_{1p} &= h_s (Q_1 \sin \beta + T_1 \cos \beta), \\ v_p &= v, & \vartheta_{1p} &= \vartheta_1, & h_p S_p &= h_s S, & h_p M_{1p} &= -h_s M_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sin \beta = 1/r_p$ (рис. 5).

Для полой сферической оболочки $r_p \gg 1$. Следовательно, $\sin \beta \ll 1, \beta \ll 1$ и условия сопряжения (4) можно заменить приближенными условиями

$$\begin{aligned} u_p &= w, & w_p &= -u, & h_p T_{1p} &= -h_s Q_1, & h_p Q_{1p} &= h_s T_1, \\ v_p &= v, & \vartheta_{1p} &= \vartheta_1, & h_p S_p &= h_s S, & h_p M_{1p} &= -h_s M_1. \end{aligned} \quad (5)$$

На краю оболочки $s = 0$ должны быть заданы четыре однородных граничных условия. В качестве примера рассмотрим условия жесткой заделки:

$$u = w = v = \vartheta_1 = 0 \quad \text{для} \quad s = 0. \quad (6)$$

Если при $\lambda = \lambda_k$ уравнения (1), (2) имеют нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (5), (6), то λ_k является собственным значением соответствующей краевой задачи. Наименьшее положительное собственное значение λ_1 соответствует первой частоте колебаний.

4. Частоты колебаний первого типа (крышечные). Для приближенного вычисления частот колебаний первого типа, близких к частотам колебаний полой сферической оболочки, воспользуемся аналогией между упруго подкрепленной пластиной и полой оболочкой из книги [13]. Заменим пологую сферическую оболочку круглой пластиной, лежащей на упругом основании с безразмерной жесткостью

$$k^2 = \frac{\sigma}{\mu_p^4 r_p^2}.$$

При этом исходная задача о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной с пологой сферической оболочкой, сводится к задаче о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной с круглой пластиной на винклеровском основании. С помощью асимптотического подхода, который использовался в задаче о колебаниях цилиндрической оболочки, соединенной с кольцевой пластиной [12], получаем, что в первом приближении частоты колебаний первого типа могут быть найдены путем решения задачи о колебаниях круглой пластины с жестко заделанным краем.

Уравнение, описывающее поперечные колебания круглой пластины, лежащей на винклеровском основании с жесткостью k^2 , имеет вид

$$\Delta^2 w_p - \varkappa^4 w_p = 0, \quad \varkappa^4 = \Omega_p^4 - k^2. \quad (7)$$

Подстановка точного решения этого уравнения

$$w_p = C_1 J_m(\varkappa s_p) + C_2 I_m(\varkappa s_p),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; J_m — функция Бесселя; I_m — модифицированная функция Бесселя в граничные условия жесткой заделки

$$w_p(1) = w_p'(1) = 0$$

дает систему линейных алгебраических уравнений для определения C_1 и C_2 . Равенство нулю определителя этой системы

$$J_m(\varkappa)I_{m-1}(\varkappa) - J_{m-1}(\varkappa)I_m(\varkappa) = 0 \quad (8)$$

служит уравнением для определения параметров $\varkappa(m, n)$, где n — номер положительного корня уравнения (8). Корни нумеруются в порядке возрастания. Из второй формулы (7) следует, что приближенное значение параметра частоты Ω_p можно найти по формуле Зеделя (W. Soedel) [15]:

$$\Omega_p^4 = \varkappa^4 + k^2. \quad (9)$$

Частотам колебаний первого типа для цилиндрической оболочки, сопряженной с круглой пластиной, соответствует $k = 0$. Эти частоты $\Omega_p = \varkappa$ оказываются меньше, чем частоты колебаний оболочки, закрытой пологой сферической крышкой. С увеличением радиуса кривизны сферической оболочки r_p параметр k убывает и разница между частотами уменьшается.

Рассмотрим конструкцию со следующими значениями параметров: $h_p = h_s = h = 0.01$; $r_p = 20$; $\nu = 0.35$. В третьем и четвертом столбцах табл. 1 для разных значений m и n приведены значения параметра \varkappa и приближенные значения параметра частоты Ω_p , полученные по формуле (9). В пятом столбце содержатся значения Ω_p , найденные МКЭ, а в шестом — погрешность приближенного значения частоты.

Для рассматриваемого примера погрешность вычисления низших частот по формуле Зеделя представляется вполне допустимой, за исключением низшей частоты, которой соответствует осесимметричная форма колебаний. Рассмотрим осесимметричные колебания цилиндрической оболочки с крышкой в виде пологой сферической оболочки с целью получить более точные приближенные формулы для низших частот первого типа.

Таблица 1. Параметры частоты $\Omega_p(m, n)$

m	n	\varkappa	Формула (9)	COMSOL	Погрешность, %
0	1	3.20	4.38	3.94	11
1	1	4.61	5.17	4.97	4
2	1	5.91	6.20	6.03	3
0	2	6.31	6.55	6.36	3
3	1	7.14	7.32	7.11	3
1	2	7.80	7.93	7.71	3

Уравнения осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки следуют из уравнений (1), если положить в них $m = 0$:

$$\begin{aligned} T_1' + \lambda u = 0, \quad Q_1' - T_2 + \lambda w = 0, \quad Q_1 = M_1', \\ T_1 = u' + \nu w, \quad T_2 = w + \nu u', \quad M_1 = \mu^4 \vartheta_1', \quad \vartheta_1 = -w'. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнений (2) при $m = 0$ получаем уравнения осесимметричных колебаний полой сферической оболочки:

$$\begin{aligned} (rT_{1p})' - T_{2p} = 0, \quad T_{1p} = \varepsilon_{1p} + \nu \varepsilon_{2p}, \quad T_{2p} = \varepsilon_{2p} + \nu \varepsilon_{1p}, \\ \varepsilon_{1p} = u_p' + \frac{w_p}{r_p}, \quad \varepsilon_{2p} = \frac{u_p}{r} + \frac{w_p}{r_p}, \\ (rQ_{1p})' - \frac{r}{r_p}(T_{1p} + T_{2p}) + \lambda r w_p = 0, \quad rQ_{1p} = (rM_{1p})' - M_{2p}, \\ M_{1p} = \mu_p^4 \vartheta_{1p}', \quad M_{2p} = \mu^4 \left(\frac{1}{r} \vartheta_{1p} + \nu \vartheta_{1p}' \right), \quad \vartheta_{1p} = -w_p'. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем функцию Φ такую, что

$$T_{1p} = \frac{r_p \mu^4 \Phi'}{r}, \quad T_{2p} = r_p \mu^4 \Phi''.$$

Тогда систему уравнений (11) можно записать в виде

$$\Delta^2 w_p + \Delta \Phi - \Omega_p^4 w = 0, \quad \Delta^2 \Phi = k^2 \Delta w_p, \quad (12)$$

где

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad \Omega_p^4 = \frac{\lambda}{\mu_p^4}, \quad k^2 = \frac{\sigma}{\mu_p^4 r_p^2}.$$

При $k \rightarrow 0$ уравнения (12) превращаются в уравнения осесимметричных колебаний круглой пластины.

Исключение из уравнений (12) неизвестной функции Φ приводит к уравнению для определения w_p :

$$\Delta(\Delta^2 w_p - \varkappa^4 w_p) = 0, \quad \varkappa^4 = \Omega_p^4 - k^2.$$

Для осесимметричной краевой задачи при $s = l, r = 1$ из восьми приближенных условий сопряжения (5) остаются шесть:

$$u_p = w, \quad w_p = -u, \quad h_p T_{1p} = -h_s Q_1,$$

$$h_p Q_{1p} = h_s T_1, \quad \vartheta_{1p} = \vartheta_1, \quad h_p M_{1p} = -h_s M_1, \quad (13)$$

а условия жесткой заделки приобретают вид

$$u = w = \vartheta_1 = 0 \quad \text{для} \quad s = 0. \quad (14)$$

Предположим, что $\mu_p \sim \mu \ll 1$, $\lambda \sim \mu^4$, и будем искать решение системы уравнений (11) в виде суммы безмоментного решения y_0 и функций краевого эффекта y_1, y_2 :

$$y = \mu^{I_0(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)+2} y_1 + \mu^{I_1(y)} y_2. \quad (15)$$

Здесь y заменяет любую из неизвестных функций, входящую в систему (11); $I_1(y)$ и $I_2(y)$ — показатели интенсивности, приведенные в табл. 2. При их выборе принимались во внимание результаты [16].

Таблица 2. Показатели интенсивности

Показатели	Функции					
	u	w	ϑ	T_1	M_1	Q_1
I_0	2	4	6	4	∞	∞
I_1	3	2	1	4	4	3

Функции y_0 являются решениями безмоментных уравнений, которые получаются из уравнений (10) при $\mu = 0$:

$$T_1' + \lambda u = 0, \quad T_2 = \lambda w, \quad T_1 = u' + \nu w, \quad T_2 = w + \nu u'. \quad (16)$$

Функции краевого эффекта y_1 и y_2 имеют вид

$$y_1 = \sum_{j=1}^2 D_j \hat{y}_j \exp(r_j s / \mu), \quad y_2 = \sum_{j=3}^4 D_j \hat{y}_j \exp[r_j (s - l) / \mu],$$

где $D_j \sim 1$ — произвольные постоянные,

$$r_{1,2} = g(-1 \pm i), \quad r_{3,4} = g(1 \pm i), \quad g = \sigma^{1/4} / \sqrt{2}, \quad i^2 = -1.$$

В частности, $\hat{w}_j = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$. Функция y_1 быстро убывает при увеличении s от 0 до l , а функция y_2 — при уменьшении s от l до 0. Предположим, что $l \gg \mu$. Тогда $y_1(l) \ll 1$, а $y_2(0) \ll 1$. В уравнения (10) и (11) входят два малых параметра μ, μ_p и один большой параметр r_p . Асимптотические разложения решений краевой задачи зависят от соотношения порядков этих параметров. При получении асимптотики решений системы (10) было сделано предположение $\mu \sim \mu_p$, которое означает, что толщины оболочек не слишком сильно отличаются друг о друга. Предположим дополнительно, что

$$\frac{1}{r_p} \sim \mu^2,$$

и рассмотрим случай, когда переменные, входящие в систему (11), имеют следующие порядки:

$$w_p \sim \vartheta_{1p} \sim 1, \quad u_p \sim T_{1p} \sim \mu^2, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4.$$

Подставив решения (15) в условия (14) и (13), получим граничные условия первого приближения

$$u_0 = 0, \quad w_1 = -w_0, \quad \vartheta_{11} = 0, \quad s = 0,$$

$$w_2 = -u_p, \quad w_p = 0, \quad T_{1p} = 0, \quad h_p Q_{1p} = h_s T_1, \\ \vartheta_{1p} = 0, \quad h_p M_{1p} = -h_s M_{12}, \quad s = l, \quad r = 1.$$

В первом приближении краевая задача для уравнений (10) и (11) или (12) с граничными условиями (13) и (14) сводится к решению четырех независимых задач:

1. Краевая задача на собственные значения для уравнений (11) или (12) с граничными условиями

$$w_p(1) = 0, \quad w'_p(1) = 0, \quad T_{1p}(1) = 0, \quad \text{или} \quad \Phi' = 0.$$

2. Система линейных алгебраических уравнений

$$w_2(l) = -u_p(1), \quad h_s M_{12}(l) = -h_p M_{1p}(1)$$

для определения постоянных D_3 и D_4 .

3. Система линейных алгебраических уравнений

$$w_1(0) = -w_0, \quad \vartheta_{11} = 0$$

для определения постоянных D_1 и D_2 .

4. Неоднородная краевая задача для безмоментной системы (16) с граничными условиями

$$u_0(0) = 0, \quad h_s T_{10} = h_p Q_{1p}(1) - h_s T_{11}(0).$$

Рассмотрим только задачу 1, так как ее решение позволяет найти приближенное значение параметра λ и основную часть формы колебаний. Перемещения цилиндрической оболочки $u \sim w \sim \mu^2$ малы по сравнению с нормальным перемещением сферической оболочки $w_p \sim 1$, что подтверждают и расчеты МКЭ (см. рис. 4).

Решение системы уравнений (12) с граничными условиями

$$w_p = 0, \quad w'_p = 0, \quad \Phi' = 0, \quad r = 1 \tag{17}$$

приведено в справочнике [14]. После подстановки ее общего решения

$$w_p = C_1 + C_2 J_0(\varkappa r) + C_3 I_0(\varkappa r), \quad \Phi = C_1 \frac{r^2}{4} \Omega^4 - \frac{k^2}{\varkappa^2} (C_2 J_0(\varkappa r)) - C_3 I_0(\varkappa r)$$

в граничные условия (17) и приравнивания нулю определителя системы линейных однородных уравнений для произвольных постоянных C_1 , C_2 и C_3 получаем следующее уравнение для определения приближенного значения параметра \varkappa :

$$(\varkappa^4 + k^2)[J_0(\varkappa)I_1(\varkappa) + I_0(\varkappa)J_1(\varkappa)] - \frac{k^2}{\varkappa} I_1(\varkappa)J_1(\varkappa) = 0. \tag{18}$$

Корень \varkappa уравнения (18) связан с параметром частоты Ω_p формулой (9).

Сравним приближенные значения двух первых параметров частот осесимметричных колебаний $\Omega_p(0, 1)$ и $\Omega_p(0, 2)$, найденных с помощью уравнения (18), с приведенными в табл. 1 результатами МКЭ и приближением, полученным при использовании уравнения (9) для разных значений радиуса кривизны крышки (табл. 3).

Таблица 3. Частотный параметр для двух низших частот осесимметричных колебаний сферической крышки с разными радиусами кривизны, найденный аналитически и численно

r_p	(18)		(9)		COMSOL	
	$\Omega_p(0, 1)$	$\Omega_p(0, 2)$	$\Omega_p(0, 1)$	$\Omega_p(0, 2)$	$\Omega_p(0, 1)$	$\Omega_p(0, 2)$
∞	3.196	6.306	3.196	6.306	3.196	6.303
20	4.028	6.517	4.379	6.554	3.939	6.364
10	5.696	7.076	5.833	7.164	5.003	6.971

При $r_p = 20$ для $\Omega_p(0, 1)$ использование уравнения (18) вместо уравнения (9) уменьшает погрешность с 11 до 2 %. Для $\Omega_p(0, 2)$ замена уравнения (9) уравнением (18) приводит к незначительному уменьшению погрешности, составляющей 3 %. При $r_p = 10$ для $\Omega_p(0, 1)$ погрешность обоих уравнений возрастает до 13 и 16 %, а для $\Omega_p(0, 2)$ погрешность уравнений не увеличивается, составляя 2 и 3 % соответственно.

5. Заключение. Собственные частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из круговой цилиндрической оболочки с крышкой в виде пологого сферического сегмента, были найдены с использованием МКЭ. Путем применения асимптотических методов получены простые приближенные формулы для низших частот колебаний этой конструкции, которые мало отличаются от частот колебаний крышки.

Замена пологого сферического сегмента круглой пластиной на упругом основании позволило использовать асимптотический метод, который применялся ранее при исследовании колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной. В первом приближении для определения частот была получена формула Зеделя. Сравнение асимптотических результатов с результатами МКЭ для шести частот показало, что погрешность формулы Зеделя не превышает 4 %, за исключением первой частоты, для которой она составила 11 %.

Первой частоте соответствует осесимметричная форма колебаний. В связи с этим в статье разработан новый асимптотический подход для исследования осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с пологим сферическим сегментом. Подстановка в условия сопряжения решения уравнений цилиндрической оболочки в виде суммы безмоментного состояния и краевого эффекта приводит в первом приближении к краевой задаче для пологой сферической оболочки с граничными условиями скользящей заделки. Решение этой краевой задачи известно. Использование нового асимптотического подхода позволило уменьшить погрешность вычисления первой частоты с 11 до 2 %.

Литература

1. Caresta M., Kessissoglou N. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells. *J. Sound Vib.* **329** (6), 733–751 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.10.003>
2. Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng G. A variational method for free vibration analysis of joined cylindrical-conical shells. *J. Vib. Control* **19** (6), 2319–2334 (2013). <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2133-3>
3. Shakouri M., Kochakzadeh M.A. Free vibration analysis of joined conical shells analytical and experimental study. *Thin Walled Struct.* **85** (1), 350–358 (2014). <http://dx.doi.org/10.1016%2Fj.tws.2014.08.022>
4. Sarkheil S., Foumani M.S. Free vibrational characteristics of rotating joined cylindrical-conical shells. *Thin-walled Struct.* **107** (1), 657–670 (2016). <http://dx.doi.org/10.1016%2Fj.tws.2016.07.009>

5. Lee Y. S., Yang M. S., Kim H. S., Kim J. H. A study on the free vibration of the joined cylindrical-spherical shell structures. *Comput. Struct.* **80** (27), 2405–2414 (2002).
6. Ma X., Jin G., Xiong Y., Liu Z. Free and forced vibration analysis of coupled conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. *Int. J. Mech. Sci.* **88** (1), 122–137 (2014).
7. Kang J. H. Vibrations of a cylindrical shell closed with a hemi-spheroidal dome from a three-dimensional analysis. *Acta Mech.* **228** (2), 531–545 (2017). <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1731-1>
8. Мяченков В. И., Григорьев И. В. *Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: справочник*. Москва, Машиностроение (1981).
9. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R. *Asymptotic methods in mechanics of solids*. Switzerland, Springer International Publishing (2015).
10. Tovstik P. E., Smirnov A. L. *Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells*. Scientific Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Publishing Co Ltd. (2001).
11. Филиппов С. Б. *Теория сопряженных и подкрепленных оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).
12. Filippov S. B. Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. A State of the Art Report*. Springer's Series Advanced Structured Materials, vol. 123, 123–140 (2020).
13. Филин А. П. *Элементы теории оболочек*. Ленинград, Стройиздат (1975).
14. Болотин В. В. (ред.) *Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение (1978).
15. Soedel W. *Vibrations of Shells and Plates*. New York, Marcel Dekker Inc. (2004).
16. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. *Свободные колебания тонких упругих оболочек*. Москва, Наука (1979).

Статья поступила в редакцию 21 января 2023 г.;
доработана 21 января 2023 г.;
рекомендована к печати 25 января 2023 г.

Контактная информация:

Филиппов Сергей Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.filippov@spbu.ru
Смирнов Андрей Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.l.smirnov@spbu.ru
Нестерчук Григорий Анатольевич — ассистент; g.nesterchuk@spbu.ru

Natural vibrations of a cylindrical shell with the end cap.

I. Asymptotic analysis*

S. B. Filippov, A. L. Smirnov, G. A. Nesterchuk

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Filippov S. B., Smirnov A. L., Nesterchuk G. A. Natural vibrations of a cylindrical shell with the end cap. I. Asymptotic analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 109–120. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.110> (In Russian)

Low natural frequencies and vibration modes of the structure, consisting of a closed circular cylindrical shell with the end cap, having the shape of a shallow spherical segment, are examined in the paper using numerical and asymptotic methods. There are three types natural vibrations of the structure. Natural frequencies and vibration modes of the first type are close to the frequencies and vibration modes of a shallow spherical shell, modes and frequencies of the second type — to frequencies and modes of a cylindrical shell, and those of the third type — to frequencies and modes of vibration of a cantilever beam with a load at the end. In the first part of the research approximate values for the frequencies of

*The research was supported by Russian Science Foundation (project No.23-21-00111), <https://rscf.ru/en/project/23-21-00111/>

vibrations of the first type are found by asymptotic methods. Asymptotic and numerical results obtained with finite element method are in good agreement.

Keywords: joint thin shells, free vibrations, asymptotic methods.

References

1. Caresta M., Kessiosoglou N. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells. *J. Sound Vib.* **329** (6), 733–751 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.10.003>
2. Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng G. A variational method for free vibration analysis of joined cylindrical-conical shells. *J. Vib. Control* **19** (6), 2319–2334 (2013). <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2133-3>
3. Shakouri M., Kochakzadeh M.A. Free vibration analysis of joined conical shells analytical and experimental study. *Thin Walled Struct.* **85** (1), 350–358 (2014). <http://dx.doi.org/10.1016%2Fj.tws.2014.08.022>
4. Sarkheil S., Foumani M.S. Free vibrational characteristics of rotating joined cylindrical-conical shells. *Thin-walled Struct.* **107** (1), 657–670 (2016). <http://dx.doi.org/10.1016%2Fj.tws.2016.07.009>
5. Lee Y.S., Yang M.S., Kim H.S., Kim J.H. A study on the free vibration of the joined cylindrical-spherical shell structures. *Comput. Struct.* **80** (27), 2405–2414 (2002).
6. Ma X., Jin G., Xiong Y., Liu Z. Free and forced vibration analysis of coupled conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. *Int. J. Mech. Sci.* **88** (1), 122–137 (2014).
7. Kang J.H. Vibrations of a cylindrical shell closed with a hemi-spheroidal dome from a three-dimensional analysis. *Acta Mech.* **228** (2), 531–545 (2017). <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1731-1>
8. Myachenkov V.I., Grigoryev I.V. *Calculation of composite shell structures on a computer.* Moscow, Mashinostroenie Publ. (1981). (In Russian)
9. Bauer S.M., Filippov S.B., Smirnov A.L., Tovstik P.E., Vaillancourt R. *Asymptotic methods in mechanics of solids.* Switzerland, Springer International Publishing (2015).
10. Tovstik P.E., Smirnov A.L. *Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells.* Scientific Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Publishing Co Ltd. (2001).
11. Filippov S.B. *The theory of conjugated and reinforced shells.* St Petersburg, St Petersburg University Press (1999). (In Russian)
12. Filippov S.B. Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. A State of the Art Report.* Springer's Series Advanced Structured Materials, vol. 123, 123–140 (2020).
13. Filin A.P. *Elements of the Theory of Shells.* Leningrad, Stroiizdat Publ. (1975). (In Russian)
14. Bolotin V.V. (ed.) *Vibrations in Engineering: A Handbook.* Vol. 1. Oscillations of Linear Systems. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1978). (In Russian)
15. Soedel W. *Vibrations of Shells and Plates.* New York, Marcel Dekker Inc. (2004).
16. Goldenveizer A.L., Lidsky V.B., Tovstik P.E. *Free Vibrations of Thin Elastic Shells.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)

Received: January 21, 2023

Revised: January 21, 2023

Accepted: January 25, 2023

Authors' information:

Sergei B. Filippov — s.filippov@spbu.ru

Andrei L. Smirnov — a.l.smirnov@spbu.ru

Grigory A. Nesterchuk — g.nesterchuk@spbu.ru