

*Т. Л. Ким, М. В. Компаниец*

## СУММИРОВАНИЕ ПО БОРЕЛЮ $\epsilon$ -РАЗЛОЖЕНИЯ ИНДЕКСА ФИШЕРА В ШЕСТОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ\*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получаемые в рамках ренормализационной группы и  $\epsilon$ -разложения ряды теории возмущений  $\varphi^4$ -модели являются, как хорошо известно, асимптотическими. В недавней работе одного из авторов статьи выполнено пересуммирование индекса Фишера  $\eta$  этой модели с использованием конформного преобразования Бореля для шестипетлевого разложения аномальной размерности поля  $\gamma_\varphi(u)$  по константе связи (заряду)  $u$ . Процедура пересуммирования  $\gamma_\varphi(u)$ , а также  $\beta$ -функции  $\beta(u)$  как функции  $u$  была проведена в 2 этапа. На первом шаге определено значение заряда  $u_*$  как нуля пересуммированной  $\beta$ -функции, затем найдено значение пересуммированной аномальной размерности поля  $\gamma_\varphi(u)$  в точке  $u = u_*$ . В настоящей работе проведено шестипетлево пересуммирование индекса Фишера  $\eta(\epsilon)$  как функции  $\epsilon$ . Результат сравнивается с оценками индекса Фишера, полученными из высокотемпературных разложений и расчётов методом Монте-Карло для трёхмерных систем и точным решением Онзагера для двумерной модели Изинга. Библиогр. 12 назв. Ил. 1. Табл. 1.

*Ключевые слова:* ренормализационная группа,  $\epsilon$ -разложение, многопетлевые диаграммы, критические показатели.

*T. L. Kim, M. V. Kompaniets*

## BOREL RESUMMATION OF THE $\epsilon$ -EXPANSION OF THE FISHER EXPONENT UP TO THE SIXTH ORDER OF PERTURBATION THEORY

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

It is well known that a series obtained in the framework of the renormalization group and  $\epsilon$ -expansion in  $\varphi^4$ -model are asymptotic. Resummation of the Fisher exponent  $\eta$  using Borel transform with conformal mapping up to six loop approximation of the anomalous field dimension  $\gamma_\varphi(u)$  was demonstrated in a recent paper of one of the co-authors ( $u$  — coupling constant). In this paper such a resummation of  $\gamma_\varphi(u)$  and beta function  $\beta(u)$  as a function of  $u$  was performed in two stages. First,  $u_*$  value was found as zero of the resummed beta function, then resummation of the anomalous field dimension was performed at  $u = u_*$ . In this paper we perform resummation of the Fisher exponent  $\eta(\epsilon)$  as a function of  $\epsilon$  at six loop level. We performed comparison of our results with results obtained in cited paper as well as with estimations of the Fisher exponent from the high temperature expansions and Monte Carlo simulations for 3D systems and Onsager's exact solution for two dimensional Ising model. Refs 12. Fig 1. Table 1.

*Keywords:* renormalization group,  $\epsilon$ -expansion, multiloop diagrams, critical exponents.

Метод ренормализационной группы (РГ) и  $\epsilon$ -разложения ( $\epsilon = 4 - d$ ,  $d$  — размерность пространства) является в настоящее время основным инструментом обоснования скейлинга и расчёта критических показателей в теории фазовых переходов II рода и критических явлений [1]. Наибольшие успехи достигнуты с использованием модели  $\varphi^4$ , в которой ренормгрупповой расчёт выполнен в шестипетлевом приближении (шестой порядок теории возмущений) [2]. Ряды теории возмущений полевых моделей кри-

\* Работа выполнена при поддержке исследовательского гранта СПбГУ 11.38.185.2014.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

тических явлений являются асимптотическими, для получения надёжных численных результатов их необходимо пересуммировать. Обычно это делается с помощью одного из вариантов суммирования по Борелю. В работе [2] таким образом была вычислена критическая размерность параметра порядка (индекс Фишера  $\eta$ ). Для этого были пересуммированы ряды по константе связи  $u$  для  $\beta$ -функции и аномальной размерности поля  $\gamma(u)$ , затем из условия  $\beta(u_*) = 0$  вычислено значение заряда  $u_*$  в неподвижной точке ренормгруппы и найдено значение индекса Фишера  $\eta = 2\gamma(u_*)$  для трёхмерного пространства  $d = 3$  ( $\epsilon = 1$ ) и в двумерном случае  $d = 2$  ( $\epsilon = 2$ ). Более детально процедура такого « $u$ -суммирования» изложена в работе [3]. В настоящей работе мы используем вариант нахождения индекса Фишера на основе суммирования по Борелю  $\epsilon$ -разложения этого индекса (« $\epsilon$ -суммирование»), полученного в [2] в шестом порядке теории возмущений. Для сравнения обоих вариантов суммирования мы дополним результаты работы [3] расчётом при дополнительных значениях  $\epsilon$ .

Полученный в [2] в шестипетлевом приближении ряд по константе связи  $u$  для аномальной размерности поля  $\gamma_\varphi$  в случае однокомпонентного поля имеет вид

$$\eta(u) = 2\gamma_\varphi(u) = \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{8}u^3 + \frac{65}{96}u^4 - 3,851170u^5 + 28,767998u^6 + O(u^7). \quad (1)$$

Пятипетлевая  $\beta$ -функция вычислена в работах [4–7]:

$$\frac{\beta(u)}{u} = -\epsilon + 3u - \frac{17}{3}u^2 + 32,54968u^3 - 271,60578u^4 + 2848,56826u^5 + O(u^6). \quad (2)$$

Определение из (2) положения неподвижной точки  $u_*$  в рамках  $\epsilon$ -разложения и подстановка результата в (1) даёт [2]:

$$\eta(\epsilon) = 0,018518500\epsilon^2 + 0,01869000\epsilon^3 - 0,0083287500\epsilon^4 + 0,2565643750\epsilon^5 - 0,08127264062\epsilon^6 + O(\epsilon^7). \quad (3)$$

Ряды (1)–(3) имеют вид

$$f(y) = \sum_n A_n y^n, \quad y = u, \epsilon$$

с коэффициентами  $A_n$ , факториально растущими при  $n \rightarrow \infty$ :

$$A_n = (-1)^n c a^n n^{b_0} n! (1 + O(1/n)). \quad (4)$$

Явный вид этой асимптотики является важной дополнительной информацией об изучаемых функциях, её параметры находятся методом инстантонного анализа [8].

Как и в [2], для пересуммирования ряда (3) мы будем использовать конформное преобразование Бореля в форме, предложенной в [9, 10]:

$$f(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{c_1 - c_2} (t \partial_t)^{c_2} B(yt), \quad (5)$$

где

$$B(x) = \left( \frac{x}{w(x)} \right)^y \sum_{k=0}^y C_k w(x)^k, \quad w(x) = \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+ax} + 1}. \quad (6)$$

Параметры представления (5), (6) выбираются так, чтобы первые члены разложения функции (5) в ряд по  $y$  правильно воспроизводили коэффициенты соответствующих разложений (1)–(3) и имели необходимый асимптотический вид (4). Записывая  $B(x)$  из (6) в виде ряда

$$B(x) = \sum_n \sum_k x^n B_{nk} C_k, \quad B_{nk} \equiv \frac{1}{n!} \left\{ (\partial_x)^n \left[ \left( \frac{x}{w(x)} \right)^v w(x)^k \right] \right\} \Big|_{x=0}, \quad (7)$$

из (5) получаем

$$f(y) = \sum_n \sum_k y^n f_{nk} C_k, \quad f_{nk} = B_{nk} k^{c_2} \Gamma(c_1 - c_2 + k + 1). \quad (8)$$

Комбинируя (8) с (3), находим

$$\sum_k \eta_{nk} C_k = A_n. \quad (9)$$

Соотношение (9) можно рассматривать как систему линейных уравнений на коэффициенты  $C_k$ . Чтобы правильно воспроизвести первые  $N$  коэффициентов в (3), достаточно учесть  $N$  членов суммы в (6). Вследствие того, что  $w(x)^k = O(x^k)$ , матрица  $\eta_{nk}$  является треугольной.

Для согласования асимптотического поведения коэффициентов разложения в (8) с асимптотикой (4) достаточно положить в (5)  $c_1 = b_0 + 3/2$  и использовать в (6) то же значение параметра  $a$ , что и в (4) [9, 10]. Параметр  $v$  в (7) определяет асимптотику функции (5)  $f(y) \sim y^v$  при больших значениях аргумента  $y \rightarrow \infty$ . Что касается параметра  $c_2$  в (5), то обычно используют значение  $c_2 = 0$ , однако результаты работы [3] показывают, что подходящий выбор значений  $c_2 \neq 0$  приводит к существенному улучшению результатов пересуммирования. Отметим, что при  $c_2 \neq 0$  вычисления облегчаются, если интегрированиями по частям перекинуть все производные  $\partial_t$  налево. Внеинтегральные члены обращаются в нуль, и в результате приходим к выражению вида

$$\eta(\varepsilon) = \int_0^\infty e^{-t c_1 - c_2} F_{c_2}(t) B(\varepsilon t),$$

где  $F_{c_2}(t)$  — полином по  $t$  степени  $c_2$ . Приведем для справки несколько первых полиномов, записав их в терминах параметра  $c \equiv c_1 - c_2 + 1$ :

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, \quad F_1 = -c + t, \quad F_2 = c^2 - (1 + 2c)t + t^2, \\ F_3 &= -c^3 + (1 + 3c + 3c^2)t - 3(1 + c)t^2 + t^3, \\ F_4 &= c^4 - (1 + 4c + 6c^2 + 4c^3)t + (7 + 12c + 6c^2)t^2 - (6 + 4c)t^3 + t^4, \\ F_5 &= -c^5 + (1 + 5c + 10c^2 + 10c^3 + 5c^4)t - 5(3 + tc + 6c^2 + 2c^3)t^2 + \\ &\quad + 5(5 + 6c + 2c^2)t^3 - 5(2 + c)t^4 + t^5. \end{aligned}$$

Для ряда (1) параметры асимптотики (4) имеют значения  $a = 1$ ,  $b_0 = 5/2$  [11]. В качестве оптимальных при пересуммировании в работе [3] найдены значения  $v = 3$ ,  $c_2 = 4$ . Как показано в [9, 10], использование значения  $c_2 \neq 0$  существенно улучшает в этом случае результаты пересуммирования. Параметры асимптотики (4)

для ряда (2):  $a = 1$ ,  $b_0 = 7/2$  [11]. В этом случае в [3] были использованы значения  $\nu = 1,8$ ,  $c_2 = 5$ . Вычисления с такими параметрами при различных  $\epsilon$  приводят к значениям индекса Фишера  $\eta^{(u)}$  (таблица).

В третьей строке таблицы представлены значения индекса Фишера  $\eta^{(\epsilon)}$ , полученные нами суммированием  $\epsilon$ -разложения (3), в четвёртой — ожидаемые значения  $\eta^{(\text{est})}$  для  $\epsilon = 1$  и  $\epsilon = 2$ .

При суммировании ряда (3) нами использовались значения параметров  $a = 1/3$ ,  $b_0 = 7/2$  [11]. Были рассмотрены варианты суммирования в диапазонах  $0 \leq c_2 \leq 5$ ,  $0 \leq \nu \leq 5$ . В качестве критерия выбора параметров  $c_2$  и  $\nu$  рассматривалась сходимость процедуры пересуммирования с увеличением числа учтённых слагаемых в сумме (3). Удобным способом контроля является рассмотрение «предсказательной способности» пересуммированного выражения. Известным примером в этом отношении является предсказание в [9, 10] пятипетлевого значения коэффициента разложения  $\beta$ -функции в теории  $\varphi^4$  по результатам пересуммирования известной в то время четырёхпетлевой  $\beta$ -функции. Рассчитанное впоследствии в [4] точное значение этого коэффициента хорошо совпало с предсказанным. Применительно к нашей задаче мы сравнивали точное значение шестого коэффициента в (3) со значениями, предсказываемыми пересуммированным выражением с учётом четырёх и пяти членов ряда в (3). При выбранных значениях параметров представления (5), (6) величина  $\eta(\epsilon)$  находилась численным интегрированием в (5). Чувствительность к выбору параметров  $\nu$  и  $c_2$  при  $\epsilon$ -суммировании оказалась существенно ниже, чем при  $u$ -суммировании. Оптимальными значениями параметров оказались следующие:  $\nu = 3,2$ ,  $c_2 = 3$ . При таких параметрах предсказываемое пересуммированным выражением значение шестого коэффициента в (3) в четырёх- и пятипетлевом приближениях оказалось равным  $-0,07592$  и  $-0,08128$  соответственно при точном значении  $-0,08127$ .

Для более детального сравнения двух методов мы также провели процедуру  $\epsilon$ -разложения положения неподвижной точки  $u_*$ . Определяя эту величину из условия  $\beta(u_*) = 0$  в виде ряда по  $\epsilon$ , имеем из (2)

$$u_* = \epsilon/3 + 0,20987654\epsilon^2 - 0,13755892\epsilon^3 + 0,26865296\epsilon^4 - 0,84368457\epsilon^5.$$

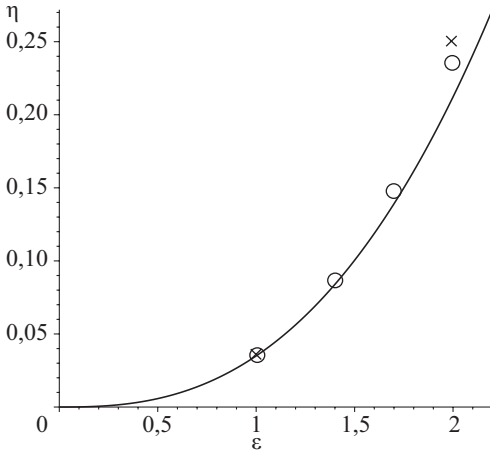
Оптимальными значениями параметров при пересуммировании этого выражения оказались  $c_2 = 0$ ,  $\nu = 1,1$ .

Переходя к сравнению результатов двух методов пересуммирования, сравним вначале полученные значения параметра  $\nu$ . Если рассматривать выбор оптимального значения  $\nu$  как оценку асимптотики  $f(y) \sim y^\nu$  ( $y = u, \epsilon$ ) искомой функции при  $y \rightarrow \infty$ , то для  $\eta(u)$ , согласно результатам работы [3], находим  $\eta(u) \sim u^3$ ,  $u \rightarrow \infty$ . По результатам  $\epsilon$ -суммирования соответствующие асимптотические оценки при  $\epsilon \rightarrow \infty$  дают  $\eta(\epsilon) \sim \epsilon^{3,2}$ ,  $u_*(\epsilon) \sim \epsilon^{1,1}$ , откуда  $\eta(u_*) \sim u_*^{2,9}$ . Показатели асимптотики для  $\eta(u)$ , предсказываемые обоими методами, оказались таким образом, весьма близкими.

Для сравнения значений индекса Фишера в дополнение к приведённой выше таблице представим также график зависимости  $\eta(\epsilon)$ , предсказываемой пересуммированным рядом (3). На рисунке видно, что для реального значения  $\epsilon = 1$  ( $d = 3$ ) результаты обоих подходов близки и находятся в согласии с оценкой из работы [12]. В то же время для двумерного случая ( $\epsilon = 2$ ) результат  $u$ -суммирования приводит к значению индекса Фишера, значительно более близкому к онзагеровскому ответу, чем результат  $\epsilon$ -суммирования.

**Зависимость индекса Фишера от параметра  $\epsilon$**

$\epsilon$	1	1,4	1,7	2
$\eta^{(u)}$	0,0360	0,0866	0,1477	0,2353
$\eta^{(\epsilon)}$	0,0354	0,0826	0,1366	0,2100
$\eta^{(\text{est})}$	0,0364	—	—	0,25



Зависимость индекса Фишера от  $\epsilon$ :

кружки — точки по схеме  $u$ -пересуммирования ( $\eta^{(u)}$ ); крестики — «ожидаемые значения» ( $\eta^{(est)}$ ) [12]; сплошная линия соответствует  $\eta^{(e)}$

В целом сравнение результатов  $\epsilon$ - и  $u$ -суммирования показывает, что предпочтение следует отдать последнему. Оно демонстрирует лучшую сходимость с увеличением числа учтённых членов разложения и приводит к лучшему согласию с точным решением для двумерного случая.

## Литература

1. Васильев А. Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. СПб.: Изд-во ПИЯФ, 1998. 774 с.
2. *Batkovich D. V., Chetyrkin K. G., Kompaniets M. V.* Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent  $\eta$  in  $O(n)$ -symmetric  $\phi^4$  model // Nucl. Phys. (B). 2016. Vol. 906. P. 147–167.
3. *Kompaniets M. V.* Prediction of the higher-order terms based on Borel resummation with conformal mapping // arXiv: 1604.04108.
4. *Chetyrkin K. G., Gorishny S. G., Larin S. A., Tkachev F. V.* Five-loop renormalization group calculations in the  $g\phi^4$  theory // Phys. Lett. (B). 1983. Vol. 132. P. 351–354.
5. *Kazakov D. I.* The method of uniqueness, a new powerful technique for multiloop calculations // Phys. Lett. (B). 1983. Vol. 133. P. 406–410.
6. *Chetyrkin K. G., Gorishny S. G., Larin S. A., Tkachov F. V.* Аналитическое вычисление многопетлевых приближений ренормгрупповых функций модели  $g\phi^4$  в  $MS$ -схеме: поддиаграммный анализ // Preprint INR P-0453. Moscow, 1986.
7. *Kleinert H., Neu J., Shulte-Frohlinde V., Chetyrkin K. G., Larin S. A.* Five-loop renormalization group functions of  $O(n)$ -symmetric  $\phi^4$ -theory and  $\epsilon$ -expansions of critical exponents up to  $\epsilon^5$  // Phys. Lett. (B). 1991. Vol. 272. P. 39–44.
8. *Lipatov L. N.* Divergence of the perturbation-theory series and the quasi-classical theory // J. Exptl. Theoret. Phys. 1977. Vol. 72. P. 411–423.
9. *Казakov Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В.* Аналитическое продолжение результатов теории возмущений модели  $g\phi^4$  в область  $g \geq 1$  // Теор. мат. физика. 1979. Т. 38, № 1. С. 15–25.
10. *Казakov Д. И., Ширков Д. В.* Asymptotic series of quantum field theory and their summation // Fortschritte der Physik. 1980. Bd. 28, N 8–9. S. 465–499.
11. *Zinn-Justin J.* Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Oxford University Press, 2002.
12. *Pelissetto A., Vicari E.* Critical phenomena and renormalization-group theory // Phys. Rep. 2002. Vol. 368. P. 549–727.

## References

1. Vasil'ev A. N. *Kvantovopolevaia renormgruppа v teorii kriticheskogo povedeniia i stokhasticheskoi dinamike* [Quantum field renormalization group in the theory of critical behavior and stochastic dynamics]. St. Petersburg, PNPI, 1998. 774 p. (In Russian)

2. Batkovich D. V., Chetyrkin K. G., Kompaniets M. V. Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent  $\eta$  in  $O(n)$ -symmetric  $\varphi^4$  model. *Nucl. Phys. (B)*, 2016, vol. 906, pp. 147–167.
3. Kompaniets M. V. Prediction of the higher-order terms based on Borel resummation with conformal mapping. *arXiv*: 1604.04108.
4. Chetyrkin K. G., Gorishny S. G., Larin S. A., Tkachev F. V. Five-loop renormalization group calculations in the  $g\varphi^4$  theory. *Phys. Rev. (B)*, 1983, vol. 132, pp. 351–354.
5. Kazakov D. I. The method of uniqueness, a new powerful technique for multiloop calculations. *Phys. Rev. (B)*, 1983, vol. 133, pp. 406–410.
6. Chetyrkin K. G., Gorishny S. G., Larin S. A., Tkachov F. V. Analiticheskoe vychislenie mnogopetlevykh priblizhenii renormgruppovykh funktsii modeli  $g\varphi^4$  v  $MS$ -skheme: podigrammnyi analiz [Analytical calculation of multiloopback approximations the renormgruppovykh of functions of model of  $g\varphi^4$  in  $MS$ -scheme: sub-diagram analysis]. Preprint INR P-0453. Moscow, 1986. (In Russian)
7. Kleiner H., Neu J., Shulte-Frohlinde V., Chetyrkin K. G., Larin S. A. Five-loop renormalization group functions of  $O(n)$ -symmetric  $\varphi^4$ -theory and  $\varepsilon$ -expansions of critical exponents up to  $\varepsilon^5$ . *Phys. Rev. (B)*, 1991, vol. 272, pp. 39–44.
8. Lipatov L. N. Divergence of the perturbation-theory series and the quasi-classical theory. *J. Exptl. Theoret. Phys.*, 1977, vol. 72, pp. 411–423.
9. Kazakov D. I., Tarasov O. V., Shirkov D. V. Analiticheskoe prodolzhenie rezul'tatov teorii voz-mushchenii modeli  $g\varphi^4$  v oblast'  $g \geq 1$  [Analytic continuation of the results of perturbation theory for the model  $g\varphi^4$  to the region  $g \geq 1$ ]. *Teor. mat. fizika. [Theoretical and Mathematical Physics]*, 1979, vol. 38, no 1, pp. 15–25. (In Russian)
10. Kazakov D. I., Shirkov D. V. Asymptotic series of quantum field theory and their summation. *Fortschritte der Physik*, 1980, vol. 28, no 8–9, pp. 465–499.
11. Zinn-Justin J. Quantum field theory and critical phenomena. Oxford, Oxford University Press, 2002.
12. Pelissetto A., Vicari E. Critical phenomena and renormalization-group theory. *Phys. Rep.*, 2002, vol. 368, pp. 549–727.

Статья поступила в редакцию 3 мая 2016 г.

#### К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я

*Ким Татьяна Лорановна* — кандидат физико-математических наук, доцент;  
e-mail: tlkim@yandex.ru

*Компаниец Михаил Владимирович* — кандидат физико-математических наук, доцент;  
e-mail: m.kompaniets@spbu.ru

*Kim Tatyana Loranovna* — PhD, Associate Professor; e-mail: tlkim@yandex.ru

*Kompaniets Mikhail Vladimirovich* — PhD, Associate Professor; e-mail: m.kompaniets@spbu.ru