УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1
MSC 74A30, 74B20, 74G30, 35J48

Об эллиптичности уравнений равновесия градиентной теории упругости и устойчивости в малом

В. А. Еремеев

Университет Кальяри,
Италия, 09123, Кальяри, виа Маренго, 2

Для цитирования: *Еремеев В. А.* Об эллиптичности уравнений равновесия градиентной теории упругости и устойчивости в малом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 99–108.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.109

В рамках градиентной теории упругости при конечных деформациях сформулированы условия сильной эллиптичности уравнений равновесия. В данной модели плотность энергии деформации является функцией первого и второго градиентов вектора места (градиента деформации). Свойство эллиптичности накладывает определенные ограничения на касательные модули. Оно также тесно связано с устойчивостью в малом, понимаемой как положительная определенность второй вариации функционала потенциальной энергии. В статье рассмотрена первая краевая задача — с краевыми условиями типа Дирихле. Для одномерной деформации определены достаточные и необходимые условия устойчивости в малом, которые представляют собой два неравенства для упругих модулей.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, сильная эллиптичность, устойчивость в малом.

1. Введение. Эллиптичность можно считать естественным свойством уравнений равновесия теории упругости, а также ряда других задач математической физики. Анализ свойств таких краевых задач привел к развитию математической теории эллиптических уравнений и эллиптических систем уравнений в частных производных [1–5]. В настоящее время в литературе имеются различные формулировки, связанные с эллиптичностью, такие, как, например, сильная эллиптичность, ординарная эллиптичность (эллиптичность по Петровскому), эллиптичность в смысле Дуглиса — Ниренберга и ряд других обобщений. В настоящей работе рассматривается условие сильной эллиптичности (см., например, [2, с. 101–102]).

В теории упругости, в том числе и при конечных деформациях, условие сильной эллиптичности играет важную роль дополнительного неравенства, налагаемого на определяющие соотношения упругого материала. Нарушение свойств сильной эллиптичности может приводить к разного рода патологиям решений, которые интерпретируются как возможное нарушение сплошности среды, т. е. разрушение, неустойчивость материала или локализация деформаций. Нужно отметить, что свойство сильной эллиптичности не связано с положительной определенностью потенциальной энергии деформации. Так, например, для изотропного линейно-упругого материала свойство сильной эллиптичности эквивалентно неравенствам $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$, в то время как положительная определенность влечет неравенства $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, которые являются более ограничительными (μ и λ — постоянные Ламе). Первые два неравенства соответствуют существованию свободных волн растяжения — сжатия и сдвига в линейно-упругой неограниченной среде, т. е. соответствующие решения при данных значениях упругих модулей не растут экспоненциально. Неравенство $3\lambda + 2\mu > 0$ означает положительность модуля объемной упругости. Для простых нелинейно-упругих материалов условие сильной эллиптичности тесно связано с устойчивостью в малом и единственностью решений линеаризованных краевых задач [6, 7]. В частности, известно [6], что:

1) условие сильной эллиптичности влечет устойчивость в малом однородной аффинной деформации для первой краевой задачи (поле перемещений на всей границе тела обращается в нуль);

2) устойчивость в малом влечет выполнение слабого условия сильной эллиптичности — неравенства Адамара.

В случае более сложных моделей материалов, в частности градиентной теории упругости, связь условий сильной эллиптичности с устойчивостью в малом, вообще говоря, более сложная (см., например, [8–10]). В отличие от простых материалов, в градиентной теории упругости уравнения равновесия в перемещениях представляют собой систему уравнений четвертого порядка [11–14], эллиптичность которой определяется членами со старшими производными [15] и не налагает никаких ограничений на остальные члены уравнений.

Цель настоящей работы — изучение свойств сильной эллиптичности уравнений равновесия градиентной теории упругости в связи с устойчивостью в малом. В настоящее время интерес к градиентным моделям сплошной среды, восходящим к работам Миндлина и Тупина [11–14], связан с их применением в наномеханике [16–20], а также в моделировании композитов, свойства компонент которых существенно отличаются между собой [21–24]. Для гиперупругого градиентного материала потенциальная энергия деформации зависит от первого и второго градиентов деформаций. Рассматривая такую энергию деформации, как обобщение определяющих соотношений простого материала, градиентные члены в энергии деформации можно интерпретировать как определенную регуляризацию решений в случае нарушения условия сильной эллиптичности простого материала. С другой стороны, нарушение сильной эллиптичности градиентного материала, вообще говоря, приводит к сингулярно возмущенной задаче и может быть интерпретировано как неустойчивость материала на микроуровне. В настоящей работе рассматривается первая краевая задача, т. е. с условиями Дирихле, для линеаризованных уравнений равновесия. Линеаризованные уравнения состояния могут быть представлены с помощью тензоров касательных модулей четвертого и шестого порядков, и эллиптичность определяется их свойствами.

2. Уравнения градиентной теории упругости и условия сильной эллиптичности. Пусть упругое тело B занимает в отсчетной конфигурации объем $V \in \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей S, на которой перемещения предполагаются заданными. В рамках градиентной теории упругости энергия деформации представляет собой функцию первого и второго градиентов вектора положения $\mathbf{x}$:

$$W = W(\mathbf{F}, \nabla\mathbf{F}), \qquad \mathbf{F} = \nabla\mathbf{x}, \tag{1}$$

где ∇ — трехмерный набла-оператор [6, 25]; $\mathbf{F}$ — градиент деформации. Применяя к (1) принцип материальной индифферентности [6, 26], приходим к зависимости [27]

$$W = W(\mathbf{C}, \mathbf{K}), \qquad \mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{K} = \nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \tag{2}$$

где $\mathbf{C}$ — мера деформации Коши — Грина; $\mathbf{K}$ — вторая мера деформации, которая представляет собой тензор третьего ранга; «$\cdot$» — скалярное произведение.

Уравнения равновесия в лагранжевом описании имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где ρ и $\mathbf{f}$ — соответственно плотность в отсчетной конфигурации и вектор массовых сил; $\mathbf{T}$ — полный тензор напряжений типа Пиолы, определяемый формулами

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} - \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{F}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ — тензоры напряжений и гипернапряжений типа Пиолы.

Кинематические краевые условия принимают вид

$$\mathbf{x}\Big|_S = \mathbf{x}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial n}\Big|_S = \mathbf{x}_1, \tag{5}$$

где $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$ — заданные на S вектор-функции; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к S.

Статические краевых условия в общем случае могут быть найдены в [25, 28, 29].

Решение $\mathbf{x}$ краевой задачи (3)–(5) доставляет стационарное значение функционалу потенциальной энергии $\mathcal{E}$, определяемого формулой

$$\mathcal{E}[\mathbf{x}] = \iiint\limits_V (W - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{x})\, dV, \tag{6}$$

и наоборот, достаточно гладкое решение, на котором обращается в нуль первая вариация $\mathcal{E}$, является решением краевой задачи (3)–(5), что составляет формулировку вариационного принципа Лагранжа для градиентной упругой среды [25, 28, 29].

Условие сильной эллиптичности уравнений (3) состоит в выполнении неравенства

$$(\mathbf{kka}) \,\vdots\, \frac{\partial^2 W}{\partial \nabla \mathbf{F}^2} \,\vdots\, (\mathbf{kka}) \geq C_1 |\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2 \tag{7}$$

для любых векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{a}$, а положительная постоянная C_1 не зависит от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{a}$. Здесь и далее используются следующие обозначения для операций над векторами и тензорами произвольных рангов. Для диад, триад, тетрад векторов двойное производное «:» задается формулами

$$(\mathbf{ab}) : (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}), \quad (\mathbf{abc}) : (\mathbf{def}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})\mathbf{af},$$

$$(\mathbf{abc}) : (\mathbf{de}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})\mathbf{a}, \quad (\mathbf{ab}) : (\mathbf{cde}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{e},$$

а тройное произведение «$\vdots$» определяется соотношениями

$$(\mathbf{abc}) \vdots (\mathbf{def}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}), \quad \text{etc.},$$

которые по линейности можно обобщить на тензоры произвольного ранга.

Следуя [8], представим W в виде суммы

$$W = U(\mathbf{C}) + V(\mathbf{C}, \mathbf{K}), \tag{8}$$

где $U(\mathbf{C}) = W(\mathbf{C}, \mathbf{0})$, $V(\mathbf{C}, \mathbf{K}) = W - U(\mathbf{C})$, так что $V(\mathbf{C}, \mathbf{0}) = 0$. Кроме того, примем естественное предположение, что

$$\mathbf{M}\big|_{\mathbf{K}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

т. е. что $\frac{\partial V}{\partial \nabla \mathbf{F}}\big|_{\nabla \mathbf{F}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. Отметим, что это предположение заведомо выполняется, если принятая отсчетная конфигурация является натуральной, т. е. в ней отсутствуют и напряжения, и гипернапряжения. Здесь же достаточно отсутствия только гипернапряжений. Таким образом, неравенство (7) налагает ограничения только на зависимость V от $\mathbf{K}$.

Для краткости будем называть простой материал с уравнением состояния $U = U(\mathbf{C})$ основным или базовым. Тогда уравнение (8) можно интерпретировать как градиентную регуляризацию базового материала. Отметим, что условие сильной эллиптичности для базового материала дается неравенством

$$(\mathbf{ka}) : \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{F}^2} : (\mathbf{ka}) \geq C_2 |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2, \tag{10}$$

где C_2 — положительная постоянная.

С другой стороны, возможна ситуация, в которой условие сильной эллиптичности для базового материала (10) выполнено, в то время как (7) — нет. Фактически это означает, что неустойчивость материала наступает на микроуровне. Одномерный случай такой ситуации проанализирован в [9].

Как и в [8], будем называть неравенство (7) условием сильной эллиптичности второго рода (SE2), а неравенство (10) — первого рода (SE1).

3. Линеаризованная задача. Пусть $\tilde{\mathbf{x}}$ — некоторое решение краевой задачи (3), (5). Рассмотрим бесконечно малое возмущение, заданное вектором малых добавочных перемещений $\mathbf{u}$, которое также удовлетворяет однородным краевым условиям (5):

$$\mathbf{u}\Big|_S = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\Big|_S = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Подставим в функционал $\mathcal{E}[\mathbf{x}]$ значение $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + t\mathbf{u}$, где t — малый параметр. Ограничиваясь слагаемыми до t^2 включительно, получим

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}} + t\delta\mathcal{E} + t^2\delta^2\mathcal{E}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}[\tilde{\mathbf{x}}], \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} &= \iiint\limits_V (\delta W - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u})\, dV = \\ &= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} : \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{F}} \,\vdots\, \nabla\nabla \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\delta^2\mathcal{E} = \iiint\limits_V w\,dV =$$
$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_V \Bigg(\nabla\mathbf{u} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}^2} : \nabla\mathbf{u} + \nabla\nabla\mathbf{u} \vdots \frac{\partial^2 W}{\partial \nabla\mathbf{F}^2} \vdots \nabla\nabla\mathbf{u} +$$
$$+ \nabla\mathbf{u} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}\partial\nabla\mathbf{F}} \vdots \nabla\nabla\mathbf{u} + \nabla\nabla\mathbf{u} \vdots \frac{\partial^2 W}{\partial\nabla\mathbf{F}\partial \mathbf{F}} : \nabla\mathbf{u}\Bigg)\,dV. \tag{15}$$

Первая вариация функционала $\mathcal{E}$ обращается в нуль, $\delta\mathcal{E} = 0$, поскольку $\tilde{\mathbf{x}}$ представляет собой решение, т. е. точку стационарности функционала $\mathcal{E}$. Таким образом, как и в случае нелинейной теории упругости [6] простых материалов, в (12) не входят линейные по $\mathbf{u}$ слагаемые. Соответственно, плотность энергии деформации можно представить в виде

$$W = W(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{K}}) + w(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{K}}; \nabla\mathbf{u}, \nabla\nabla\mathbf{u}), \tag{16}$$

где $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{K}} = \nabla\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T$, а w дается формулой

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\nabla\nabla\mathbf{u} \vdots \mathbf{D} \vdots \nabla\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u} : \mathbf{H} \vdots \nabla\nabla\mathbf{u}, \tag{17}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ — линейный тензор деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right)$, а $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ — тензоры касательных модулей, которые задаются формулами

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{F}^2}\right|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \nabla\mathbf{F}^2}\right|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}},\,\mathbf{K}=\tilde{\mathbf{K}}}, \quad \mathbf{H} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{F}\partial\nabla\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}},\,\mathbf{K}=\tilde{\mathbf{K}}}.$$

Отметим, что именно такая форма энергии деформации часто используется в линейной анизотропной градиентной теории упругости (см., например, [30, 31]). Тем не менее тензоры касательных модулей имеют, вообще говоря, иные свойства симметрии, а также зависят от начальной деформации.

При определенных предположениях w можно упростить следующим образом:

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\nabla\nabla\mathbf{u} \vdots \mathbf{D} \vdots \nabla\nabla\mathbf{u}. \tag{18}$$

Перекрестные члены в (18) обращаются в нуль в случае, если выполнено (9), а $\tilde{\mathbf{x}}$ соответствует аффинной деформации, когда $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$. Для малых деформаций (18) выполняется для материалов с центром симметрии, например изотропных [20, 31]. В дальнейшем ограничимся рассмотрением представления (18).

Таким образом, устойчивость в малом решения $\tilde{\mathbf{x}}$ определяется положительной определенностью второй вариации функционала потенциальной энергии $\delta^2\mathcal{E}$. Случай $\delta^2\mathcal{E} = 0$ соответствует нейтральному равновесию, а $\delta^2\mathcal{E} < 0$ — потере устойчивости. Отметим также, что положительная определенность $\delta^2\mathcal{E}$ устанавливается не только свойствами подынтегрального выражения w, но и краевыми условиями (в данном случае условиями Дирихле).

Линеаризованные уравнения равновесия записываются следующим образом:

$$\nabla \cdot \Big[\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \vdots \nabla\nabla\mathbf{u})\Big] = \mathbf{0}. \tag{19}$$

С использованием тензоров $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ неравенства сильной эллиптичности (7) и (10) принимают вид

$$(\mathbf{kka}) \,\vdots\, \mathbf{D} \,\vdots\, (\mathbf{kka}) \geq C_1 |\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2, \tag{20}$$

$$(\mathbf{ka}) : \mathbf{C} : (\mathbf{ka}) \geq C_2 |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2. \tag{21}$$

Как показано в [8], выполнение обоих неравенств влечет положительность второй вариации энергии деформации w, т. е. устойчивость в малом в случае однородной деформации. Там же показано, что (20) и (21) являются лишь достаточными условиями, но не необходимыми. Чтобы проанализировать диапазон допустимых значений упругих модулей, рассмотрим одномерную краевую задачу, аналогичную [9, 10].

4. Одномерная деформация. В одномерном случае вектор перемещений и тензоры упругих модулей сводятся к скалярам. Пусть $u = u(X)$ — поле перемещений, $X \in [0, a]$ — лагранжева координата. Тогда соотношения (18), (20) и (21) принимают вид

$$w = \frac{1}{2} C\varepsilon^2 + \frac{1}{2} D\varepsilon_{,X}^2, \quad \varepsilon = u_{,X}, \tag{22}$$

$$D > 0, \quad C > 0, \tag{23}$$

где $()_{,X}$ обозначает производную по X. Далее для простоты предположим, что C и D — постоянные. Соответствующая уравнениям (11) и (19) одномерная краевая задача дается соотношениями

$$Cu_{,XX} - Du_{,XXXX} = 0, \tag{24}$$

$$u(0) = 0, \quad u_{,X}(0) = 0, \quad u(a) = 0, \quad u_{,X}(a) = 0. \tag{25}$$

Легко видеть, что, если оба модуля C и D положительны, краевая задача (24) и (25) имеет только нулевые значения. Для этого достаточно рассмотреть функционал

$$J(u) \equiv \delta^2 \mathcal{E} = \int_0^a w\, dX = \frac{1}{2} \int_0^a \left(Cu_{,X}^2 + Du_{,XX}^2 \right) dX \tag{26}$$

и учесть неравенство Пуанкаре [32]:

$$\int_0^a u^2\, dX \leq \frac{a^2}{2} \int_0^a u_{,X}^2\, dX.$$

Также нетрудно показать, что, если D принимает отрицательные значения, J не ограничен снизу. Для этого возьмем u в форме

$$u(X) = A \int_0^X \sin \frac{\pi n}{a} X\, dX,$$

где A — произвольная постоянная; n — целое число. Тогда имеем

$$\varepsilon = A \sin \frac{\pi n}{a} X, \quad \varepsilon_{,X} = A \frac{\pi n}{a} \cos \frac{\pi n}{a} X,$$

так что J принимает значение

$$J = \frac{A^2 a}{4}\left[C + D\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\right].$$

Таким образом, при любом отрицательном значении D и любом C выражение для J будет отрицательным при достаточно большом n. Следовательно, для единственности решений задачи (24) и (25) значение D должно быть положительным. Отметим, что $D = 0$ здесь не рассматривается, в этом случае, вообще говоря, невозможно удовлетворить всем краевым условиям (25).

Рассмотрим теперь случай $D > 0$ и определим допустимый диапазон модуля C, при котором краевая задача (24) и (25) не имеет ненулевых решений и, следовательно, можно говорить об устойчивости в малом. Поскольку при $C > 0$ существует только нулевое решение (24) и (25), рассмотрим отрицательные значения C. Преобразуем (24) к виду

$$u_{,XXXX} + \gamma^2 u_{,XX} = 0, \quad \gamma = \sqrt{\frac{-C}{D}}. \tag{27}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (27) с краевыми условиями (25) соответствует задаче потери устойчивости упругой балки с защемленными концами [33] с минимальным значением $\gamma^* = 2\pi/a$. Таким образом, для упругого модуля C получаем неравенство

$$C > -\frac{4\pi^2 D}{a^2}. \tag{28}$$

Неравенства $(23)_1$ и (28) устанавливают допустимый диапазон для упругих модулей в случае одномерной задачи и определяют необходимые и достаточные условия устойчивости в малом для одномерной деформации.

5. Заключение. Рассмотрены условия сильной эллиптичности для градиентной теории упругости. На примере одномерной деформации продемонстрировано, что условие сильной эллиптичности (условие эллиптичности второго порядка) является необходимым условием устойчивости в малом. Получено неравенство (28), ограничивающее допустимые отрицательные значения касательного модуля C, который фактически является касательным модулем Юнга базового материала. Отметим, что эллиптичность и устойчивость в малом в случае простого нелинейно-упругого материала требуют выполнение неравенства $C > 0$. Таким образом, модель градиентного материала можно рассматривать как определенного рода регуляризацию в случае неустойчивости базового материала, поскольку здесь допускаются отрицательные значения C. Тем не менее сильная эллиптичность градиентного материала не гарантирует, вообще говоря, устойчивости в малом, поскольку в этом случае требуется выполнение дополнительного неравенства (28).

Автор благодарит академика Н. Ф. Морозова за привлечение внимания автора к проблемам наномеханики, в частности к задачам теории поверхностных напряжений [34–37], которая также тесно связана с градиентной теорией упругости (см., например, [38, 39]).

Литература/References

1. Agranovich M. Elliptic boundary problems. In: Agranovich M., Egorov Y., Shubin M. (eds). *Partial Differential Equations IX: Elliptic Boundary Problems. Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Vol. 79, 1–144. Berlin, Springer (1997).

2. Fichera G. *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems.* Vol. 8 (Lecture Notes in Mathematics), Berlin, Springer (1965).

3. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **12** (4), 623–727 (1959).

4. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **17** (1), 35–92 (1964).

5. Volevich L. R. Solubility of boundary value problems for general elliptic systems. *Mathematics Sb.* **68** (110), 373–416 (1965).

6. Lurie A. I. *Non-linear Theory of Elasticity.* Amsterdam, North-Holland (1990).

7. Ogden R. W. *Non-Linear Elastic Deformations.* Dover, Mineola (1997).

8. Eremeyev V. A. Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within non-linear strain gradient elasticity. *Mechanics Research Communications* **117**, 103782 (2021). https://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2021.103782

9. Eremeyev V. A., Reccia E. Strong ellipticity within the strain gradient elasticity: Elastic bar case. In: Giorgio I., Placidi L., Barchiesi E., Abali B. E., Altenbach H. (eds). *Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials* (Advanced Structured Materials). Vol. 175, 137–144. Cham, Springer (2022).

10. Eremeyev V. A., Reccia E. Nonlinear strain gradient and micromorphic one-dimensional elastic continua: Comparison through strong ellipticity conditions. *Mechanics Research Communications* **124**, 103909 (2022). https://doi.org/1016/j.mechrescom.2022.103909

11. Toupin R. A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **11** (1), 385–414 (1962).

12. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **17** (2), 85–112 (1964).

13. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **16** (1), 51–78 (1964).

14. Mindlin R. D., Eshel N. N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures* **4** (1), 109–124 (1968).

15. Mareno A., Healey T. J. Global continuation in second-gradient nonlinear elasticity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **38** (1), 103–115 (2006).

16. Aifantis E. C. Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales. *Journal of Engineering Materials and Technology* **121** (2), 189–202 (1999).

17. Aifantis E. Chapter One — Internal length gradient (ILG) material mechanics across scales and disciplines. *Advances in Applied Mechanics* **49**, 1–110 (2016). https://doi.org/10.1016/bs.aams.2016.08.001

18. Forest S., Cordero N. M., Busso E. P. First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales. *Computational Materials Science* **50** (4), 1299–1304 (2011). https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.03.048

19. Cordero N. M., Forest S., Busso E. P. Second strain gradient elasticity of nano-objects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **97**, 92–124 (2016). https://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2015.07.012

20. Lazar M., Agiasofitou E., Böhlke T. Mathematical modeling of the elastic properties of cubic crystals at small scales based on the Toupin-Mindlin anisotropic first strain gradient elasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **34** (1), 107–136 (2022). https://doi.org/10.1007/s00161-021-01050-y

21. Abdoul-Anziz H., Seppecher P. Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems* **6** (3), 213–250 (2018). https://doi.org/10.2140/memocs.2018.6.213

22. dell'Isola F., Steigmann D. A two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics. *Journal of Elasticity* **118** (1), 113–125 (2015). https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1

23. dell'Isola F., Steigmann D. J. *Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials.* Cambridge University Press, Cambridge (2020).

24. Rahali Y., Giorgio I., Ganghoffer J. F., dell'Isola F. Homogenization à la Piola produces second gradient continuum models for linear pantographic lattices. *International Journal of Engineering Science* **97**, 148–172 (2015). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.10.003

25. Eremeyev V. A., Cloud M. J., Lebedev L. P. *Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics.* New Jersey, World Scientific (2018).

26. Truesdell C., Noll W. *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, 3$^{\text{rd}}$ ed. Berlin, Springer (2004).

27. Eremeyev V. A. Local material symmetry group for first- and second-order strain gradient fluids. *Mathematics and Mechanics of Solids* **26** (8), 1173–1190 (2021). http://dx.doi.org/10.1177/10812865211021640

28. Bertram A., Forest S. (eds). *Mechanics of Strain Gradient Materials*. Cham, Springer International Publ. (2020).

29. Bertram A. *Compendium on Gradient Materials*. Cham, Springer (2023).

30. Auffray N., Quang H. Le, He Q.-C. Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **61** (5), 1202–1223 (2013). https://doi.org/10.1016/j.jmps.2013.01.003

31. Auffray N., He Q.-C., Quang H. Le. Complete symmetry classification and compact matrix representations for 3D strain-gradient elasticity. International. *Journal of Solids and Structures* **159**, 197–210 (2019). https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.029

32. Ladyzhenskaya O. A. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. In: *Applied Mathematical Sciences* (*AMS*), vol. 49. New York, Springer (1985).

33. Timoshenko S. P., Gere J. M. *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed. Auckland, McGraw-Hill (1963).

34. Duan H. L., Wang J., Karihaloo B. L. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Adv. Appl. Mech.* vol. 42, 1–68, Elsevier (2008).

35. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mech. Solida Sin.* **24**, 52–82 (2011). https://doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60009-8

36. Altenbach H., Morozov N. F. Surface effects in solid mechanics. In: *Advanced Structured Materials*, vol. 30. New York, Springer (2013).

37. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Mechanical properties of materials considering surface effects. In: *IUTAM Symposium on Surface Effects in the Mechanics of Nanomaterials and Heterostructures*, vol. 31 (IUTAM Bookseries). Dordrecht, Springer, 105–115 (2013).

38. Mindlin R. D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures* **1** (4), 417–438 (1965).

39. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Comparison of anti-plane surface waves in strain-gradient materials and materials with surface stresses. *Mathematics and Mechanics of Solids* **24** (8), 2526–2535 (2019).

Статья поступила в редакцию 6 июня 2022 г.;
доработана 7 сентября 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Еремеев Виктор Анатольевич — д-р физ.-мат. наук; eremeyev.victor@gmail.com

On ellipticity of static equations of strain gradient elasticity and infinitesimal stability

V. A. Eremeyev

University of Cagliari, 2, via Marengo, Cagliari, 09123, Italy

For citation: Eremeyev V. A. On ellipticity of static equations of strain gradient elasticity and infinitesimal stability. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 99–108. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.109 (In Russian)

Within the framework of strain gradient elasticity under finite deformations we formulate the strong ellipticity conditions of equilibrium equations. Within the model a strain energy density is a function of the first and second deformation gradients. Ellipticity involves certain constraints on the tangent elastic moduli. It is also closely related to infinitesimal stability which is defined as the positive definiteness of the second variation of the potential energy functional. Here we consider the first boundary-value problem, that is with Dirichlet-type boundary conditions. For one-dimensional deformations we determine necessary and sufficient conditions of infinitesimal instability. The latter constitute two inequalities for elastic moduli.

Keywords: strain gradient elasticity, strong ellipticity, infinitesimal stability.

Received: June 6, 2022
Revised: September 7, 2022
Accepted: September 8, 2022

Author's information:

Victor A. Eremeyev — eremeyev.victor@gmail.com