УДК 517.535 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1
MSC 30C15

Расположение нулей полиномов лакунарного типа

И. А. Вани, М. И. Мир, И. Назир

Кашмирский университет,
Индия, 192101, Анантнаг, Южный кампус

Для цитирования: *Вани И. А., Мир М. И., Назир И.* Расположение нулей полиномов лакунарного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 73–85. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.107

Недавно доказанное обобщение теоремы Энестрёма — Какейя, Н. А. Ратера и др. применимо к более широкому классу полиномов по сравнению со всеми другими результатами типа Энестрёма — Какейя, но оно неприменимо к полиномам, у которых один или два коэффициента равны нулю. Например, если рассматривать полином, у которого один или два коэффициента равны нулю, то можно заметить, что все результаты типа Энестрёма — Какейя, включая недавние обобщения Н. А. Ратера и др., неприменимы к такому полиному. Поэтому было интересно попытаться решить задачу для таких полиномов, что и было мотивацией авторов. В статье получены результаты, применимые к классу полиномов, называемому полиномами лакунарного типа. В настоящей работе, ослабляя условие известной теоремы Энестрёма — Какейя, мы исследуем полиномы лакунарного типа, получая обобщение для некоторых известных результатов о расположение нулей многочленов. В дополнение к этому на примерах показано, что полученные оценки дают лучшую информацию о границах нулей многочленов, чем некоторые, ранее опубликованные полученные результаты.

Ключевые слова: нули полинома, лакунарный полином, теорема Энестрёма — Какейя.

1. Введение. Различные экспериментальные наблюдения и исследования при переводе на математический язык приводят к математическим моделям. Анализ этих моделей может привести к задачам решения алгебраических полиномиальных уравнений определенной степени. Изучение нулей этих алгебраических комплексных многочленов — старая тема в аналитической теории многочленов, породившая за последнее столетие огромное количество исследований, включая приложения как внутри математики, так и за ее пределами. Помимо многочисленных приложений, изучение этой темы послужило источником вдохновения для многих теоретических исследований (включая первоначальную мотивацию современной алгебры). Алгебраические и аналитические методы нахождения нулей многочлена, вообще говоря, могут быть достаточно сложными, поэтому желательно наложить некоторые ограничения на многочлены. Это дало мотивацию исследованиям по определению областей комплексной плоскости, содержащих нули полинома, когда их коэффициенты ограничены специальными условиями. Самая востребованная задача алгебры — нахождение нулей многочлена. Но с ростом степени многочлена очень трудно найти его нули. Это делает определение областей, содержащих нули многочлена, серьезной проблемой. В 1829 г. А. Л. Коши [1] дал очень простое выражение для оценки нуля через коэффициенты полинома. Фактически он доказал, что все нули полинома

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

лежат в круге

$$|z| \leqslant 1 + \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} |a_j|.$$

Замечательным свойством этого результата является простота вычислений. В литературе [2] существует несколько результатов об оценках нулей многочленов. В классическом результате о расположении нулей многочлена с ограниченными коэффициентами, а именно в теореме Энестрёма — Какейя (см. разд. 8.3 в [3]) утверждается следующее:

Теорема 1.1. *Если* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *— полином степени* n *такой, что*

$$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1 \geqslant a_0 > 0,$$

тогда все нули $P(z)$ *лежат в* $|z| \leqslant 1$.

В литературе (см. [2–7]) существует несколько обобщений теоремы Энестрёма — Какейя. Всегда есть необходимость в улучшении результатов этой теоремы из-за ее применения во многих областях, включая обработку сигналов, теорию связи, криптографию, теорию управления, комбинаторику и математическую биологию. В этой статье, используя стандартные методы, мы устанавливаем области, в которых находятся нули полинома лакунарного типа $P(z) = a_0 + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j, 1 \leqslant \mu \leqslant n, a_0 \neq 0$, накладывая определенные ограничения на комплексные коэффициенты заданного лакунарного многочлена. Жойяль, Лабелль и Рахман [8] расширили теорему 1.1, сняв ограничение на гипотезу о неотрицательности всех коэффициентов, и доказали следующее.

Теорема 1.2. *Если* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *— полином степени* n *такой, что*

$$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1 \geqslant a_0,$$

то все нули $P(z)$ *лежат в*

$$|z| \leqslant \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Азиз и Заргар [9] обобщили теорему 1.2, ослабив условия в теореме Энестрёма — Какейя. Они получили следующий результат.

Теорема 1.3. *Если* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *— полином степени* n *такой, что для некоторого* $k \geqslant 1$

$$ka_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1 \geqslant a_0,$$

то все нули $P(z)$ *лежат в*

$$|z + k - 1| \leqslant \frac{ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Далее, У. М. Шах и Лиман [10] распространили теорему 1.3 на многочлены с комплексными коэффициентами.

Теорема 1.4. *Если $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного β $|\arg\ a_j - \beta| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ и $k \geqslant 1$,*

$$\textit{к}|a_{\textit{н}}| \geqslant |a_{n-1}| \geqslant \dots \geqslant |a_1| \geqslant |a_0|,$$

то все нули $P(z)$ лежат в

$$\Big|z - k - 1\Big| \leqslant \frac{1}{|a_n|}\bigg\{(k|a_n| - |a_0|)(\cos\alpha + \sin\alpha) + |a_0| + 2\sin\alpha \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\bigg\}.$$

Недавно Н. А. Ратер и др. [11], используя стандартные методы, получили результат, который определяет области, содержащие все нули полинома с действительными коэффициентами, и обобщили несколько результатов, касающихся теоремы Энестрёма—Какейя. Они получили следующий результат.

Теорема 1.5. *Если $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ — полином степени n с действительными коэффициентами такой, что для некоторого $k_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant r$, где $1 \leqslant r \leqslant n$,*

$$k_1 a_n \geqslant k_2 a_{n-1} \geqslant k_3 a_{n-2} \geqslant \dots \geqslant k_r a_{n-r+1} \geqslant a_{n-r} \geqslant \dots \geqslant a_1 \geqslant a_0,$$

то все нули $P(z)$ лежат в

$$\Big|z + k_1 - 1 - (k_2 - 1)\frac{a_{n-1}}{a_n}\Big| \leqslant \frac{1}{|a_n|}\bigg\{k_1 a_n - (k_2 - 1)|a_{n-1}| + 2\sum_{j=2}^{r}(k_j - 1)|a_{n-j+1}| - a_0 + |a_0|\bigg\}.$$

Затем Ратер и др. [12] распространили теорему 1.5 на многочлен с комплексными коэффициентами и доказали следующий результат.

Теорема 1.6. *Если $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного β $|\arg\ a_j - \beta| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ и $k_j \geqslant 1$, $a_{n-j} \neq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, r$, где $1 \leqslant r \leqslant n - 1$,*

$$k_0|a_n| \geqslant k_1|a_{n-1}| \geqslant k_2|a_{n-2}| \geqslant \dots \geqslant k_r|a_{n-r}| \geqslant \dots \geqslant |a_1| \geqslant |a_0|,$$

то все нули $P(z)$ лежат в

$$\Big|z + k_0 - 1 - (k_1 - 1)\frac{a_{n-1}}{a_n}\Big| \leqslant \frac{1}{|a_n|}\bigg\{(k_0|a_n| - |a_0|)(\cos\alpha - \sin\alpha) + 2\sin\alpha\left(\sum_{j=1}^{r} k_j|a_{n-j}| + \sum_{j=r+1}^{n}|a_{n-j}\right) - (k_1 - 1)|a_{n-1}| + 2\sum_{j=1}^{r}(k_j - 1)|a_{n-j}| + |a_0|\bigg\}.$$

Недавно Ратер и др. [12] обобщили теорему 1.5 на многочлены с комплексными коэффициентами.

Теорема 1.7. *Если* $P(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *— многочлен степени* n *с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного* β $|\arg\ a_j-\beta|\leqslant \alpha\leqslant \frac{\pi}{2}$, $j=0,1,2,\ldots,n$ *и* $k_j\geqslant 1$, $a_{n-j}\neq 0$, $j=0,1,2,\ldots,r$, *где* $1\leqslant r\leqslant n-1$,

$$|k_0+a_n|\geqslant|k_1+a_{n-1}|\geqslant|k_2+a_{n-2}|\geqslant\cdots\geqslant|k_{r-1}+a_{n-r+1}|\geqslant \\ \geqslant|k_r+a_{n-r}|\geqslant\cdots\geqslant|a_\mu|\geqslant|a_0|, \tag{1}$$

то все нули $P(z)$ *лежат в*

$$\left|z+\frac{(k_0-k_1)}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{a_n}\Bigg[(|k_0+a_n|-|a_1|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+ \\ +2\sin\alpha\left(\sum_{j=1}^{r}|k_j+a_{n-j}|+\sum_{j=r+1}^{n-1}|a_{n-j}|\right)+\sum_{j=1}^{r-1}|k_j-k_{j+1}|+|k_r|+|a_0|\Bigg].$$

2. Основные результаты. Хотя теоремы 1.5, 1.6 и 1.7 применимы к более широкому классу многочленов по сравнению с всеми другими результатами типа Энестрёма—Какейя, но они неприменимы к полиномам, у которых один или два коэффициенты нулевые. Например, если мы рассмотрим полином $P(z)=5z^5+4z^4+3z^3+0z^2+0z+1$, то можно заметить, что все результаты типа Энестрёма—Какейя, включая теоремы 1.5, 1.6 и 1.7, нельзя использовать для этого многочлена. Поэтому интересно получить результаты, применимые к такому классу многочленов. Это мотивирует получить результаты, применимые к классу многочленов типа $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j, 1\leqslant\mu\leqslant n, a_0\neq 0$. В этой статье мы обобщаем теоремы 1.6 и 1.7 на полиномы лакунарного типа с комплексными коэффициентами. Это дает оценку расположения нулей полинома при более слабых, чем упомянутые выше, ограничениях. Справедлив следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j, 1\leqslant\mu\leqslant n, a_0\neq 0$ *многочлен степени* n *с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного* β, $|\arg\ a_j-\beta|\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $j=0,1,2,\ldots,n$ *и* $k_j\geqslant 1$, $j=\mu-1,\mu,\mu+1,\ldots,\mu+r-1$, *где* $\mu\leqslant r\leqslant n$,

$$|k_{\mu-1}+a_n|\geqslant|k_\mu+a_{n-1}|\geqslant|k_{\mu+1}+a_{n-2}|\geqslant\cdots\geqslant|k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1}|\geqslant \\ \geqslant|k_{\mu+r-1}+a_{n-r}|\geqslant\cdots\geqslant|a_\mu|\geqslant|a_0|, \tag{2}$$

то все нули $P(z)$ *лежат в*

$$\left|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{a_n}\Bigg[(|k_{\mu-1}+a_n|-|a_\mu|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+ \\ +2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1}|k_j+a_{n+\mu-j-1}|+\sum_{j=\mu+r}^{n-1}|a_{n+\mu-j-1}|\right)+ \\ +\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|+|a_\mu|+2|a_0|\Bigg].$$

Если рассмотреть преобразование $k_j = (\lambda_j - 1)a_{n-j}, \quad a_{n-j} \neq 0, \quad \lambda_j \geqslant 1, \quad j = \mu - 1, \mu, \ldots, \mu + r - 1$, мы получаем следующее распространение теоремы 1.7 на полиномы лакунарного типа.

Следствие 2.1. *Пусть* $P(z) = a_0 + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j, 1 \leqslant \mu \leqslant n, a_0 \neq 0$ *— многочлен степени* n *с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного* β, $\quad |\arg\ a_j - \beta| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$ *и* $\lambda_j \geqslant 1$, $j = \mu - 1, \mu, \mu + 1, \ldots, \mu + r - 1$, *где* $\mu \leqslant r \leqslant n$,

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu-1}|a_n| \geqslant \lambda_\mu |a_{n-1}| \geqslant \lambda_{\mu+1}|a_{n-2}| \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{\mu+r-2}|a_{n-r+1}| \geqslant \\ \geqslant \lambda_{\mu+r-1}|a_{n-r}| \geqslant \cdots \geqslant |a_\mu| \geqslant |a_0|. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда все нули $P(z)$ *лежат в*

$$\begin{aligned} \left|(z + \lambda_{\mu-1} - 1) - (\lambda_\mu - 1)\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \frac{1}{a_n}\Bigg[(\lambda_{\mu-1}|a_n| - |a_\mu|)(\cos\alpha + \sin\alpha) + \\ + 2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \lambda_j |a_{n+\mu-j-1}| + \sum_{j=\mu+r}^{n-1} |a_{n+\mu-j-1}|\right) - \\ - (\lambda_\mu - 1)|a_{n-1}| + 2\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1}(\lambda_j - 1)|a_{n+\mu-j-1}| + |a_\mu| + 2|a_0|\Bigg]. \end{aligned}$$

Применяя следствие 2.1 к многочлену $f(tz)$, получаем следующий результат.

Следствие 2.2. *Пусть* $P(z) = a_0 + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j, 1 \leqslant \mu \leqslant n, a_0 \neq 0$ *— многочлен степени* n *с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного* β, $\quad |\arg\ a_j - \beta| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$ *и* $t > 0$, $\lambda_j \geqslant 1$, $j = \ mu - 1, \mu, \mu + 1, \ldots, \mu + r - 1$, *где* $\mu \leqslant r \leqslant n$,

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu-1}t^n|a_n| \geqslant \lambda_\mu t^{n-1}|a_{n-1}| \geqslant \lambda_{\mu+1}t^{n-2}|a_{n-2}| \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{\mu+r-2}t^{n-r+1}|a_{n-r+1}| \geqslant \\ \geqslant \lambda_{\mu+r-1}t^{nr}|a_{nr}| \geqslant \cdots \geqslant t^\mu|a_\mu| \geqslant |a_0|. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда все нули $P(z)$ *лежат в*

$$\begin{aligned} \left|z + (\lambda_{\mu-1} - 1)t - (\lambda_\mu - 1)\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \frac{1}{a_n}\Bigg[\left(\lambda_{\mu-1}|a_n| - \frac{|a_\mu|}{t^{n-\mu}}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha) + \\ + 2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \lambda_j \frac{|a_{n+\mu-j-1}|}{t^{j-\mu+1}} + \sum_{j=\mu+r}^{n-1} \frac{|a_{n+\mu-j-1}|}{t^{j-\mu+1}}\right) - \\ - (\lambda_\mu - 1)\frac{|a_{n-1}|}{t} + 2\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1}(\lambda_j - 1)\frac{|a_{n+\mu-j-1}|}{t^{j-\mu+1}} + \frac{|a_\mu|}{t^{n-\mu}} + 2\frac{|a_0|}{t^n}\Bigg]. \end{aligned}$$

Полагая $r = 1$, следствие 2.2 влечет следующий результат.

Следствие 2.3. *Пусть* $P(z) = a_0 + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j, 1 \leqslant \mu \leqslant n, a_0 \neq 0$ *— многочлен степени* n *с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного* β, $\quad |\arg\ a_j - \beta| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$ *и* $t > 0$, $\lambda_j \geqslant 1$, $j = \mu - 1, \mu$,

$$\lambda_{\mu-1}t^n|a_n| \geqslant \lambda_\mu t^{n-1}|a_{n-1}| \geqslant \cdots \geqslant t^\mu|a_\mu| \geqslant |a_0|.$$

Тогда все нули $P(z)$ лежат в

$$\left|z+(\lambda_{\mu-1}-1)t-(\lambda_\mu-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \frac{1}{a_n}\left[\left(\lambda_{\mu-1}|a_n|-\frac{|a_\mu|}{t^{n-\mu}}\right)(\cos\alpha+\sin\alpha)+\right.$$
$$\left.+2\sin\alpha\left(\lambda_\mu\frac{|a_{n-1}|}{t}+\sum_{j=\mu+1}^{n-1}\frac{|a_{n+\mu-j-1}|}{t^{j-\mu+1}}\right)-(\lambda_\mu-1)\frac{|a_{n-1}|}{t}+\frac{|a_\mu|}{t^{n-\mu}}+2\frac{|a_0|}{t^n}\right].$$

Полагая $t=1$ в следствии 2.3, мы получаем следующий результат.

Следствие 2.4. *Пусть $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n}a_jz^j, 1\leqslant\mu\leqslant n, a_0\neq 0$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного β, $|\arg\ a_j-\beta|\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $j=0,1,2,\ldots,n$ и $\lambda_j\geqslant 1$, $j=\mu-1,\mu$,*

$$k_{\mu-1}|a_n|\geqslant k_\mu|a_{n-1}|\geqslant\cdots\geqslant|a_\mu|\geqslant|a_0|.$$

Тогда все нули $P(z)$ лежат в

$$\left|z+(\lambda_{\mu-1}-1)-(\lambda_\mu-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \frac{1}{a_n}\Big[(\lambda_{\mu-1}|a_n|-|a_\mu|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+$$
$$+2\sin\alpha\left(\lambda_\mu|a_{n-1}|+\sum_{j=\mu+1}^{n-1}|a_{n+\mu-j-1}|\right)-(\lambda_\mu-1)|a_{n-1}|+|a_\mu|+2|a_0|\Big].$$

Положив $\lambda_\mu=1$ и $\lambda_{\mu-1}=\lambda$ в следствии 2.4, мы получаем следующий интересный результат.

Следствие 2.5. *Пусть $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n}a_jz^j, 1\leqslant\mu\leqslant n, a_0\neq 0$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что для некоторого действительного β, $|\arg\ a_j-\beta|\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $j=0,1,2,\ldots,n$ и $\lambda\geqslant 1$,*

$$\lambda|a_n|\geqslant|a_{n-1}|\geqslant\cdots\geqslant|a_\mu|\geqslant|a_0|.$$

Тогда все нули $P(z)$ лежат в

$$\Big|z+(\lambda-1)\Big| \leqslant \frac{1}{a_n}\Big[(\lambda_|a_n|-|a_\mu|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+$$
$$+2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{n-1}|a_{n+\mu-j-1}|\right)+|a_\mu|+2|a_0|\Big].$$

При $\alpha=\beta=0$ в теореме 2.1 мы получаем следующий интересный результат.

Следствие 2.6. *Пусть $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n}a_jz^j, 1\leqslant\mu\leqslant n, a_0\neq 0$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами такой, что для некоторого $k_j\geqslant 1$, $j=\mu-1,\mu,\mu+1,\ldots,\mu+r-1$, где $\mu\leqslant r\leqslant n$,*

$$k_{\mu-1}+a_n\geqslant k_\mu+a_{n-1}\geqslant k_{\mu+1}+a_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1}\geqslant$$
$$\geqslant k_{\mu+r-1}+a_{n-r}\geqslant\cdots\geqslant a_\mu\geqslant a_0\geqslant 0, \tag{5}$$

то все нули $P(z)$ лежат в

$$\left|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_{\mu})}{a_n}\right|\leqslant 1+\frac{1}{a_n}\left[k_{\mu-1}+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|+2|a_0|\right].$$

Теорема 2.2. *Пусть $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n}a_jz^j, 1\leqslant\mu\leqslant n, a_0\neq 0$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что $a_i=\alpha_i+i\beta_i$ и для некоторого $k_j\geqslant 1$ $j=\mu-1,\mu,\mu+1,\dots,\mu+r-1$, где $\mu\leqslant r\leqslant n$,*

$$\begin{gathered}k_{\mu-1}+\alpha_n\geqslant k_{\mu}+\alpha_{n-1}\geqslant k_{\mu+1}+\alpha_{n-2}\geqslant\dots\ geqk_{\mu+r-2}+\alpha_{nr+1}\geqslant\\ \geqslant k_{\mu+r-1}+\alpha_{nr}\geqslant\dots\geqslant\alpha_{\mu}\geqslant\alpha_0,\end{gathered}\tag{6}$$

то все нули $P(z)$ лежат в

$$\begin{gathered}\Bigg\{|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_{\mu})}{a_n}|\leqslant\frac{1}{|a_n|}\Bigg(\alpha_n-\alpha_{\mu}+|\alpha_{\mu}|+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+\\ +k_{\mu+r-1}+k_{\mu-1}+\sum_{j=\mu}^{n-1}|\gamma_{j+1}-\gamma_j|+2(|\alpha_0|+|\gamma_0|)\Bigg)\Bigg\}.\end{gathered}$$

Если все коэффициенты $P(z)$ вещественны, то приведенная выше теорема влечет следующий результат.

Следствие 2.7. *Пусть $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n}a_jz^j, 1\leqslant\mu\leqslant n, a_0\neq 0$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами такой, что для некоторого $k_j\geqslant 1$, $j=\mu-1,\mu,\mu+1,\dots,\mu+r-1$, где $\mu\leqslant r\leqslant n$,*

$$\begin{gathered}k_{\mu-1}+a_n\geqslant k_{\mu}+a_{n-1}\geqslant k_{\mu+1}+a_{n-2}\geqslant\dots\geqslant k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1}\geqslant\\ \geqslant k_{\mu+r-1}+a_{n-r}\geqslant\dots\geqslant a_{\mu}\geqslant a_0,\end{gathered}\tag{7}$$

то все нули $P(z)$ лежат в

$$\left|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_{\mu})}{a_n}\right|\leqslant 1+\frac{1}{a_n}\left[k_{\mu-1}+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|-\alpha_{\mu}+|\alpha_{\mu}|+2|a_0|\right].$$

Замечание. Для $a_0\geqslant 0$ следствие 2.7 сводится к следствию 2.6.

3. Примеры и анализ. В этом разделе мы приводим несколько примеров полиномов, чтобы показать, что теорема 2.1 дает лучшую информацию о расположении нулей, чем теорема Коши. Стоит отметить, что все существующие результаты типа Энестрёма—Какейя неприменимы для этих полиномов.

Пример 3.1. Пусть $P(z)=10z^3+10z^2+1$. Положив $r=2,\ \ \alpha=\beta=0,\ \ k_{\mu-1}=16/15,\ \ k_{\mu}=8/7,\ \ k_{\mu+1}=5/4$, в теореме 2.1, следует, что все нули $P(z)$ лежат в круге $|z-0,008|\leqslant 1,43$. Если же воспользоваться теоремой Коши, то отсюда следует, что все нули $P(z)$ лежат в круге $|z|\leqslant 2$.

Пример 3.2. Пусть $P(z)=3z^4+2.8z^3+2.6z^2+1$. Полагая $r=2$, $\alpha=\beta=0$, $k_{\mu-1}=0$, $k_{\mu}=0.2$, $k_{\mu+1}=0.4$ в теореме 2.1, получаем, что все нули $P(z)$ лежат в круге $|z-0.06| \leqslant 1.8$. Если же воспользоваться теоремой Коши, то отсюда следует, что все нули $P(z)$ лежат в круге $|z| \leqslant 2$.

Из приведенных выше примеров видно, что наши результаты дают лучшую оценку, чем оценка, полученная с помощью теоремы Коши.

4. Лемма. Для доказательства этих результатов нам понадобится следующая лемма, принадлежащая Говилу и Рахману [13].

Лемма 4.1. *Если для некоторого действительного* β

$$|a_j-\beta| \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad a_j \neq 0,$$

тогда для любых положительных действительных чисел t_1 *и* t_2

$$|t_1a_j - t_2a_{j-1}| \leqslant \big|t_1|a_j| - t_2|a_{j-1}|\big| \cos\alpha + (t_1|a_j| + t_2|a_{j-1}|)\sin\alpha.$$

5. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $P(z) = a_0 + \sum_{j=\mu}^{n} a_jz^j, 1 \leqslant \mu \leq n, a_0 \neq 0$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что некоторые $k_j \geqslant 1$, $j=\mu-1,\mu,\mu+1,\dots,\mu+r-1$, где $\mu \leqslant r \leqslant n$. Рассмотрим многочлен

$$\begin{gathered}
F(z) = (1-z)P(z) = -a_nz^{n+1} + (a_n - a_{n-1})z^n + \dots + (a_{n-r} - a_{n-r-1})z^{n-r} + \dots + \\
+ (a_{\mu+1} - a_\mu)z^{\mu+1} + a_\mu z^\mu - a_0z + a_0 = \\
= -a_nz^{n+1} + [(k_{\mu-1}+a_n) - (k_\mu + a_{n-1})]z^n - (k_{\mu-1} - k_\mu)z^n + \\
+ [(k_\mu + a_{n-1}) - (k_{\mu+1} + a_{n-2})]z^{n-1} - (k_\mu - k_{\mu+1})z^{n-1} + \dots + \\
+ [(k_{\mu+r-3} + a_{n-r+2}) - (k_{\mu+r-2} + a_{n-r+1})]z^{n-r+2} - (k_{\mu+r-3} - k_{\mu+r-2})z^{n-r+2} + \\
+ [(k_{\mu+r-2} + a_{n-r+1}) - (k_{\mu+r-1} + a_{n-r-1})]z^{n-r+1} - (k_{\mu+r-2} - k_{\mu+r-1})z^{n-r+1} + \\
+ [(k_{\mu+r-1} + a_{n-r}) - a_{n-r-1}]z^{n-r} - k_{\mu+r-1}z^{n-r} + (a_{n-r-1} - a_{n-r-2})z^{n-r-1} + \dots + \\
+ a_\mu z^\mu - a_0z + a_0,
\end{gathered}$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered}
\big|F(z)\big| = \big| - a_nz^{n+1} - (k_{\mu-1} - k_\mu)z^n + [(k_{\mu-1}+a_n) - (k_\mu + a_{n-1})]z^n + \\
+ [(k_\mu + a_{n-1}) - (k_{\mu+1} + a_{n-2})]z^{n-1} - (k_\mu - k_{\mu+1})z^{n-1} + \dots + \\
+ [(k_{\mu+r-3} + a_{n-r+2}) - (k_{\mu+r-2} + a_{n-r+1})]z^{n-r+2} - (k_{\mu+r-3} - k_{\mu+r-2})z^{n-r+2} + \\
+ [(k_{\mu+r-2} + a_{n-r+1}) - (k_{\mu+r-1} + a_{n-r-1})]z^{n-r+1} - (k_{\mu+r-2} - k_{\mu+r-1})z^{n-r+1} + \\
+ [(k_{\mu+r-1} + a_{n-r}) - a_{n-r-1}]z^{n-r} - k_{\mu+r-1}z^{n-r} + (a_{n-r-1} - a_{n-r-2})z^{n-r-1} + \dots + \\
+ a_\mu z^\mu - a_0z + a_0\big|,
\end{gathered}$$

т. е.

$$\begin{gathered}
\big|F(z)\big| \geqslant |z|^n \Bigg\{ |a_nz + (k_{\mu-1} - k_\mu)| - \Bigg(|(k_{\mu-1} + a_n) - (k_\mu + a_{n-1})| + \\
+ |(k_\mu + a_{n-1}) - (k_{\mu+1} + a_{n-2})|/|z| + |(k_\mu - k_{\mu+1}|/|z| + \dots +
\end{gathered}$$

$$+|(k_{\mu+r-3}+a_{n-r+2})-(k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1})|/|z|^{r-2}+|k_{\mu+r-3}-k_{\mu+r-2}|/|z|^{r-2}+$$
$$+|(k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1})-(k_{\mu+r-1}+a_{n-r-1})|/|z|^{r-1}+|k_{\mu+r-2}-k_{\mu+r-1}|/|z|^{r-1}+$$
$$+|(k_{\mu+r-1}+a_{n-r})-a_{n-r-1}|/|z|^{r}+|k_{\mu+r-1}|/|z|^{r}+$$
$$+|(a_{n-r-1}-a_{n-r-2})|/|z|^{r+1}+\dots+|a_{\mu+1}-a_{\mu}|/|z|^{n-\mu-1}+$$
$$\left.\left.+|a_{\mu}|/|z|^{n-\mu}+|a_0|/|z|^{n-1}+|a_0|/|z|^{n}\right)\right\}.$$

Пусть $|z|>1$ так, что $1/|z|<1$. Тогда у нас есть

$$\bigl|F(z)\bigr|\geqslant |z|^n\Biggl\{|a_nz+(k_{\mu-1}-k_{\mu})|-\Biggl(|(k_{\ mu-1}+a_n)-(k_{\mu}+a_{n-1})|+$$
$$+|(k_{\mu}+a_{n-1})-(k_{\mu+1}+a_{n-2})|+|(k_{\mu}-k_{\mu+1}|+\dots+$$
$$+|(k_{\mu+r-3}+a_{n-r+2})-(k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1})|+|k_{\mu+r-3}-k_{\mu+r-2}|+$$
$$+|(k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1})-(k_{\mu+r-1}+a_{n-r-1})|+|k_{\mu+r-2}-k_{\mu+r-1}|+$$
$$+|(k_{\mu+r-1}+a_{n-r})-a_{n-r-1}|+|k_{\mu+r-1}|+$$
$$\left.\left.+|(a_{n-r-1}-a_{n-r-2})|+\dots+|a_{\mu+1}-a_{\mu}|+|a_{\mu}|+2|a_0|\right)\right\}.$$

Применяя лемму 4.1, имеем для $|z|>1$

$$\bigl|F(z)\bigr|\geqslant |a_n||z|^n\Biggl\{\Bigl|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_{\mu})}{a_n}\Bigr|-\frac{1}{a_n}\Biggl[\Bigl(|(k_{\mu-1}+a_n)|-|(k_{\mu}+a_{n-1}|+$$
$$+|k_{\mu}+a_{n-1})|-|(k_{\mu+1}+a_{n-2}|+\dots+|k_{\mu+r-3}+a_{n-r+2})|-|k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1}|+$$
$$+|k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1}|-|k_{\mu+r-1}+a_{n-r-1}|+|k_{\mu+r-1}+a_{n-r}|-|a_{n-r-1}|+$$
$$+|a_{n-r-1}|-|a_{n-r-2}|+\dots+|a_{\mu+1}|-|a_{\mu}|\Bigr)\cos\alpha+\Bigl(|k_{\mu-1}+a_n)|+|(k_{\mu}+a_{n-1}|+$$
$$+|k_{\mu}+a_{n-1})|+|(k_{\mu+1}+a_{n-2}|+\dots+|k_{\mu+r-3}+a_{n-r+2})|-|k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1}|+$$
$$+|k_{\mu+r-2}+a_{n-r+1}|+|k_{\mu+r-1}+a_{n-r-1}|+|k_{\mu+r-1}+a_{n-r}|-|a_{n-r-1}|+$$
$$+|a_{n-r-1}|-|a_{n-r-2}|+\dots+|a_{\mu+1}|+|a_{\mu}|\Bigr)\sin\alpha+$$
$$\left.\left.+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|+|a_{\mu}|+2|a_0|\right]\right\},$$

откуда, с учетом (2), следует, что

$$\bigl|F(z)\bigr|\geqslant |a_n||z|^n\Biggl\{\Bigl|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_{\mu})}{a_n}\Bigr|-\frac{1}{a_n}\Biggl[(k_{\mu-1}|a_n|-|a_{\mu}|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+$$
$$+2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1}k_j|a_{n+\mu-j-1}|+\sum_{j=\mu+r}^{n-1}|a_{n+\mu-j-1}|\right)+$$
$$\left.\left.+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|+|a_{\mu}|+2|a_0|\right]\right\}>0,$$

если

$$\left|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}\right|>\frac{1}{a_n}\Bigg[(|k_{\mu-1}+a_n|-|a_\mu|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+ \\ +2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1}|k_j+a_{n+\mu-j-1}|+\sum_{j=\mu+r}^{n-1}|a_{n+\mu-j-1}|\right)+ \\ +\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|+|a_\mu|+2|a_0|\Bigg].$$

Это показывает, что те нули $F(z)$, модуль которых больше 1, лежат в

$$\left|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{a_n}\Bigg[(|k_{\mu-1}+a_n|-|a_\mu|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+ \\ +2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1}|k_j+a_{n+\mu-j-1}|+\sum_{j=\mu+r}^{n-1}|a_{n+\mu-j-1}|\right)+ \\ +\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|+|a_\mu|+2|a_0|\Bigg].$$

Но те нули $F(z)$, модуль которых меньше или равен 1, уже лежат в этой области. Отсюда следует, что все нули $F(z)$ и, следовательно, $P(z)$ лежат в

$$\left|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{a_n}\Bigg[(|k_{\mu-1}+a_n|-|a_\mu|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+ \\ +2\sin\alpha\left(\sum_{j=\mu}^{\mu+r-1}|k_j+a_{n+\mu-j-1}|+\sum_{j=\mu+r}^{n-1}|a_{n+\mu-j-1}|\right)+ \\ +\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+|k_{\mu+r-1}|+|a_\mu|+2|a_0|\Bigg].$$

Это завершает доказательство теоремы 2.1. □

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $P(z)=a_0+\sum_{j=\mu}^{n}a_jz^j, 1\leqslant\mu\leq n, a_0\neq 0$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что некоторые $k_j\geqslant 1$, $j=\mu-1,\mu,\mu+1,\dots,\mu+r-1$, где $\mu\leqslant r\leqslant n$. Рассмотрим многочлен

$$F(z)=(1-z)P(z)=-a_nz^{n+1}+(\alpha_n-\alpha_{n-1})z^n+\dots+(\alpha_{n-r}-\alpha_{n-r-1})z^{n-r}+\dots+ \\ +(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)z^{\mu+1}+\alpha_\mu z^\mu-\alpha_0z+\alpha_0+i\{(\gamma_n-\gamma_{n-1})z^n+(\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2})z^{n-1}\dots+ \\ +(\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu)z^{\mu+1}+\gamma_\mu z^\mu-\gamma_0z+\gamma_0\}= \\ =-a_nz^{n+1}+[(k_{\mu-1}+\alpha_n)-(k_\mu+\alpha_{n-1})]z^n-(k_{\mu-1}-k_\mu)z^n+ \\ +[(k_\mu+\alpha_{n-1})-(k_{\mu+1}+\alpha_{n-2})]z^{n-1}-(k_\mu-k_{\mu+1})z^{n-1}+\dots+ \\ +[(k_{\mu+r-3}+\alpha_{n-r+2})-(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})]z^{n-r+2}-(k_{\mu+r-3}-k_{\mu+r-2})z^{n-r+2}+$$

$$
\begin{gathered}
+\left[(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})-(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r-1})\right]z^{n-r+1}-(k_{\mu+r-2}-k_{\mu+r-1})z^{n-r+1}+\\
+\left[(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r})-\alpha_{n-r-1}\right]z^{n-r}-k_{\mu+r-1}z^{n-r}+(\alpha_{n-r-1}-\alpha_{n-r-2})z^{n-r-1}+\cdots+\\
+\alpha_\mu z^\mu-\alpha_0 z+\alpha_0+i\{(\gamma_n-\gamma_{n-1})z^n+(\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2})z^{n-1}\cdots+\\
+(\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu)z^{\mu+1}+\gamma_\mu z^\mu-\gamma_0 z+\gamma_0\},
\end{gathered}
$$

откуда получаем

$$
\begin{gathered}
\big|F(z)\big|=\big|-a_n z^{n+1}-(k_{\mu-1}-k_\mu)z^n+\left[(k_{\mu-1}+\alpha_n)-(k_\mu+\alpha_{n-1})\right]z^n+\\
+\left[(k_\mu+\alpha_{n-1})-(k_{\mu+1}+\alpha_{n-2})\right]z^{n-1}-(k_\mu-k_{\mu+1})z^{n-1}+\cdots+\\
+\left[(k_{\mu+r-3}+\alpha_{n-r+2})-(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})\right]z^{n-r+2}-(k_{\mu+r-3}-k_{\mu+r-2})z^{n-r+2}+\\
+\left[(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})-(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r-1})\right]z^{n-r+1}-(k_{\mu+r-2}-k_{\mu+r-1})z^{n-r+1}+\\
+\left[(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r})-\alpha_{n-r-1}\right]z^{n-r}-k_{\mu+r-1}z^{n-r}+(\alpha_{n-r-1}-\alpha_{n-r-2})z^{n-r-1}+\cdots+\\
+\alpha_\mu z^\mu-\alpha_0 z+\alpha_0+i\{(\gamma_n-\gamma_{n-1})z^n+(\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2})z^{n-1}\cdots+\\
+(\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu)z^{\mu+1}+\gamma_\mu z^\mu-\gamma_0 z+\gamma_0\}\big|,
\end{gathered}
$$

т. е.

$$
\begin{gathered}
\big|F(z)\big|\geqslant|z|^n\Bigg\{|a_n z+(k_{\mu-1}-k_\mu)|-\Bigg(|(k_{\mu-1}+\alpha_n)-(k_\mu+\alpha_{n-1})|+\\
+|(k_\mu+\alpha_{n-1})-(k_{\mu+1}+\alpha_{n-2})|/|z|+|(k_\mu-k_{\mu+1}|/|z|+\cdots+\\
+|(k_{\mu+r-3}+\alpha_{n-r+2})-(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})|/|z|^{r-2}+|k_{\mu+r-3}-k_{\mu+r-2}|/|z|^{r-2}+\\
+|(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})-(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r-1})|/|z|^{r-1}+|k_{\mu+r-2}-k_{\mu+r-1}|/|z|^{r-1}+\\
+|(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r})-\alpha_{n-r-1}|/|z|^r+|k_{\mu+r-1}|/|z|^r+\\
+|\alpha_{n-r-1}-\alpha_{n-r-2}|/|z|^{r+1}+\cdots+|\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu|/|z|^{n-\mu-1}+\\
+|\alpha_\mu|/|z|^{n-\mu}+|\alpha_0|/|z|^{n-1}+|\alpha_0|/|z|^n+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|+|\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}|/|z|\cdots+\\
+|\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu|/|z|^{n-\mu-1}+|\gamma_\mu|/|z|^{n-\mu}+|\gamma_0|/|z|^{n-1}+|\gamma_0|/|z|^n\Bigg)\Bigg\}.
\end{gathered}
$$

Используя гипотезу, получаем для $|z|>1$

$$
\begin{gathered}
\big|F(z)\big|\geqslant|a_n||z|^n\Bigg\{|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}|-\frac{1}{|a_n|}\Bigg((k_{\mu-1}+\alpha_n)-(k_\mu+\alpha_{n-1})+\\
+(k_\mu+\alpha_{n-1})-(k_{\mu+1}+\alpha_{n-2})+|(k_\mu-k_{\mu+1}|+\cdots+\\
+(k_{\mu+r-3}+\alpha_{n-r+2})-(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})+|k_{\mu+r-3}-k_{\mu+r-2}|+\\
+(k_{\mu+r-2}+\alpha_{n-r+1})-(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r-1})+|k_{\mu+r-2}-k_{\mu+r-1}|+\\
+(k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r})-\alpha_{n-r-1}+k_{\mu+r-1}+\alpha_{n-r-1}-\alpha_{n-r-2}+\cdots+\\
+\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu+|\alpha_\mu|+|\alpha_0|+|\alpha_0|+|\gamma_n-\gamma_{n-1}|+|\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}|\cdots+\\
+|\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu|+|\gamma_\mu|+|\gamma_0|+|\gamma_0|\Bigg)\Bigg\},
\end{gathered}
$$

откуда следует, что

$$\left|F(z)\right| \geqslant |a_n||z|^n\left\{|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}|-\frac{1}{|a_n|}\left(\alpha_n-\alpha_\mu+|\alpha_\mu|+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k_{\mu+r-1}+k_{\mu-1}+\sum_{j=\mu}^{n-1}|\gamma_{j+1}-\gamma_j|+2(|\alpha_0|+|\gamma_0|)\right)\right\}.$$

Это означает, что те нули $F(z)$, модуль которых больше 1, лежат в

$$\left\{|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}| \leqslant \frac{1}{|a_n|}\left(\alpha_n-\alpha_\mu+|\alpha_\mu|+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k_{\mu+r-1}+k_{\mu-1}+\sum_{j=\mu}^{n-1}|\gamma_{j+1}-\gamma_j|+2(|\alpha_0|+|\gamma_0|)\right)\right\},$$

Но те нули $F(z)$, модуль которых меньше или равен 1, уже лежат в этой области. Отсюда следует, что все нули $F(z)$, а значит, и $P(z)$ лежат в

$$\left\{|z+\frac{(k_{\mu-1}-k_\mu)}{a_n}| \leqslant \frac{1}{|a_n|}\left(\alpha_n-\alpha_\mu+|\alpha_\mu|+\sum_{j=\mu}^{\mu+r-2}|k_j-k_{j+1}|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k_{\mu+r-1}+k_{\mu-1}+\sum_{j=\mu}^{n-1}|\gamma_{j+1}-\gamma_j|+2(|\alpha_0|+|\gamma_0|)\right)\right\}.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.2. □

Авторы благодарят проф. Н. А. Широкова (СПбГУ) за помощь с переводом и оформлением русского текста статьи.

Литература/References

1. Cauchy A. L. Exercices de mathematiques. In: *Oeuvres* **9**, 122 (1829).
2. Marden M. Geometry of Polynomials. *Math. Surveys* **3**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1966).
3. Rahman Q. I. *Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials*. Oxford University Press (2002).
4. Bairagi S. D., Vinay Kumar Jain, Mishra T. K., Saha L. On the location of zeros of certain polynomials. *Inst. Math.* **99** (113), 287–294 (2016). https://doi.org/10.2298/PIM1613287B
5. Botta V., Suni M. H. On the location of zeros of quasi orthogonal polynomials with applications to some real self-reciprocal polynomials. *J. Classic. Anal.* **19** (2), 89–115 (2022). https://doi.org/10.7153/jca-2022-19-08
6. Kumar A., Manzoor Z., Zargar B. A. Annular regions containing all the zeros of lucanary-type polynomials. *Armenian Journal of Mathematics* **14** (4), 1–9 (2022). https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.4-1-9
7. Kumar P., Dhankhar R. On the location of zeros of polynomials. *Complex Anal. Oper. Theory* **16** (2), 8–18 (2022). https://doi.org/10.1007/s11785-021-01174-8
8. Joyal A., Labelle G., Rahman Q. I. On the location of zeros of polynomials. *Canad. Math. Bull.* **10**, 53–63 (1967).
9. Aziz A., Zargar B. A. Some Extensions of Eneström — Kakeya theorem. *Glasnick Matematicki* **31**, 239–244 (1996).
10. Shah W. M., Liman A. On Eneström — Kakeya theorem and related analytic functions. *Proc. Math. Sci.* **117**, 359–370 (2007). https://doi.org/10.1007/s12044-007-0031-z

11. Rather N. A., Dar I., Iqbal A. Generalizations of Eneström — Kakeya theorem and its extensions to analytic functions. *J. Class. Anal.* **16** (1), 37–44 (2020). https://doi.org/10.7153/jca-2020-16-05

12. Rather N. A., Dar I., Sha M. On the Zero Bounds of Polynomials and related analytic functions. *Applied Mathematics E-Notes* **21**, 525–532 (2021).

13. Govil N. K., Rahman Q. I. On Eneström — Kakeya theorem. *Tohoku Math.* **20** (2), 126–136 (1968).

Статья поступила в редакцию 13 мая 2022 г.;
доработана 28 августа 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Вани Ирфан Ахмад — науч. сотр.; irfanmushtaq62@gmail.com
Мир Мохаммад Ибрагим — ст. ассистент; ibrahimmath80@gmail.com
Назир Ишфак — науч. сотр.; ishfaqnazir02@gmail.com

Location of zeros of lacunary-type polynomials

I. A. Wani, M. I. Mir, I. Nazir

University of Kashmir, South Campus, Anantnag, 192101, India

For citation: Wani I. A., Mir M. I., Nazir I. Location of zeros of lacunary-type polynomials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 73–85. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.107 (In Russian)

Although recently proved generalization of Eneström — Kakey theorem by N. A. Rather et al. are applicable to the larger class of polynomials as compared to all other Eneström — Kakeya type results, but are not applicable to the polynomials whose one or two coefficients are zero. For instance, if we consider the polynomial whose one or two coefficients are zero, then one can note that all Eneström — Kakey type results including the recent generalizations by N. A. Rather et al. are not applicable to this polynomial. So it is interesting to look for the results applicable to such class of polynomials. Motivated by this, here we establish the following results applicable to such class of polynomials called the lacunary-type polynomials. In this paper, by relaxing the hypothesis of well-known Eneström — Kakey theorem, we obtain a result which is applicable to the lacunary-type of polynomials and generalizes several well-known results concerning the location of zeros of polynomials. In addition to this, we show by examples that our results presents better information about the bounds of zeros of polynomials than some known results.

Keywords: zeros of a polynomial, Lacunary-type polynomial, Eneström — Kakeya theorem.

Received: May 13, 2022
Revised: August 28, 2022
Accepted: September 8, 2022

Authors' information:

Irfan Ahmad Wani — irfanmushtaq62@gmail.com
Mohammad Ibrahim Mir — ibrahimmath80@gmail.com
Ishfaq Nazir — ishfaqnazir02@gmail.com