

## Замечание о точности рекуррентного прогноза в анализе сингулярного спектра\*

*В. В. Некруткин*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Некруткин В. В.* Замечание о точности рекуррентного прогноза в анализе сингулярного спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 47–60.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.105>

В рамках семейства методов анализа сингулярного спектра существует несколько вариантов прогнозирования сигналов, зашумленных аддитивной помехой. В настоящей статье предложен способ оценки точности рекуррентного варианта такого прогноза при длине ряда, стремящейся к бесконечности. При этом большинство элементов соответствующей конструкции удалось свести к уже исследованным и опубликованным результатам, хотя некоторые из них являются сложными для реализации в конкретных ситуациях. В статье все эти составляющие собраны вместе, дополнены и прокомментированы. В работе приведено несколько примеров нахождения оценок точности рекуррентного прогноза для конкретных сигналов и помех, проведенные вычислительные эксперименты подтверждают теоретические выводы.

*Ключевые слова:* обработка сигналов, анализ сингулярного спектра, рекуррентное прогнозирование, асимптотический анализ.

**1. Введение.** Несколько вариантов применения анализа сингулярного спектра (АСС) к прогнозированию сигналов, зашумленных аддитивной помехой, было рассмотрено в [1, гл. 2] (см. также [2]). Среди них основным является так называемый рекуррентный прогноз. Однако, судя по всему, теоретических результатов относительно точности прогноза для больших помех (не в линеаризованной постановке задачи) в настоящее время еще нет. В настоящей работе сделана попытка восполнить этот пробел.

Не вдаваясь в подробности (полное описание и обсуждение можно найти в разд. 3 этой статьи), отметим, что рекуррентный прогноз осуществляется с помощью специально построенной линейной рекуррентной формулы, примененной к восстановленному методом АСС сигналу. В этом смысле этот метод похож на обычный линейный прогноз (см., например, [3]). Отличия, однако, существенны, и главное из них — линейный прогноз применяется ко всему наблюдаемому ряду, в то время как рекуррентный — к его «зашумленной» аддитивной компоненте (сигналу). Именно поэтому требуется дополнительно оценить («восстановить») этот сигнал,

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00067).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

что и делается методом АСС. Кроме того, коэффициенты рекуррентной формулы в рассматриваемом прогнозе выражаются через проекцию на (возмущенное помехой) подпространство сигнала, что и позволило применить к их оценке теорию статьи [4].

В настоящей работе предложен способ оценки точности рекуррентного прогноза при длине ряда, стремящейся к бесконечности. Заметим, что почти все составляющие этого способа уже известны и опубликованы, хотя некоторые из них сложны для применения в конкретных ситуациях. Опишем эти составляющие.

Во-первых, это *коэффициенты вертикальности*, введенные в [1, § 5.2], они подробно описаны и проиллюстрированы в разд. 2 настоящей работы. Приведенные примеры показывают, что изучение асимптотического поведения коэффициентов вертикальности при длине ряда, стремящегося к бесконечности, вполне реалистично.

Вторая составляющая — это *синус наибольшего главного угла между возмущенным и невозмущенным линейным подпространствами сигнала* (см. [4]) для подробного описания и соответствующей математической техники. Многочисленные примеры в [4] убеждают, что асимптотическое поведение этой характеристики также может быть изучено для широкого класса сигналов и помех.

Последняя составляющая — *точность восстановления сигнала* с помощью АСС. Хотя общий подход к оценке этой точности опубликован в [4], в целом процедура является достаточно трудоемкой, и в настоящий момент существует лишь несколько примеров ее применения.

В статье все эти составляющие собраны вместе, дополнены и прокомментированы.

Раздел 2 статьи посвящен определению и асимптотическим свойствам коэффициентов вертикальности сигналов, управляемых линейными рекуррентными формулами (ЛРФ). В разделе 3 обсуждаются определение и свойства рекуррентного прогноза, а также способ оценки его точности.

В разделе 3.4 приведены примеры применения этой оценки, а в приложении — результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих теоретические построения.

Содержание и стиль этих примеров определяются изученными в предыдущих работах вариантами сигналов и помех. В число сигналов входят ряды, имеющие с точки зрения АСС простую структуру, но в то же время часто встречающиеся на практике в качестве моделей трендов и периодических компонент.

Заметим, что подход к рекуррентному прогнозированию в настоящей работе несколько отличается от предложенного в [1, гл. 2]. А именно, здесь так называемая приближенная ЛРФ (см. разд. 3.1), строится с помощью окна длины  $M$ , которая может отличаться от длины окна  $L$ , используемой для получения ошибок восстановления. Аналогичный подход использовался при проведении вычислительных экспериментов в [5]. В то же время в [1, гл. 2] рассматривается только случай  $L = M$ , более удобный для практической реализации.

Однако при  $L \sim \alpha N$  и  $M \sim \beta N$  с  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  асимптотический результат для ошибок прогнозирования при длине ряда  $N \rightarrow \infty$  будет в целом аналогичен.

**2. Коэффициенты вертикальности и ЛРФ. 2.1. Определение и примеры.** Пусть  $\mathcal{U}$  — некоторое линейное подпространство  $\mathbb{R}^M$  размерности  $d = \dim \mathcal{U}$ . Обозначим  $\Pi$  ортогональный проектор на  $\mathcal{U}$  и положим  $\epsilon_M = (0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^M$ .

Назовем число  $\vartheta = \|\text{P}\epsilon_M\|$  коэффициентом вертикальности  $\mathfrak{U}$  и заметим, что  $\vartheta$  является косинусом угла между вектором  $\epsilon_M$  и линейным пространством  $\mathfrak{U}$ . Если  $\vartheta = 1$  (иначе говоря, если  $\epsilon_M \in \mathfrak{U}$ ), тогда  $\mathfrak{U}$  называется вертикальным.

Пусть  $P_1, \dots, P_d$  — ортонормированный базис  $\mathfrak{U}$ , тогда  $\pi_i = (P_i, \epsilon_M)$  — последняя координата  $P_i$  и

$$\text{P}\epsilon_M = \sum_{i=1}^d \pi_i P_i \quad \text{и} \quad (\text{P}\epsilon_M, \epsilon_M) = \sum_{i=1}^d \pi_i^2 = \vartheta^2. \quad (1)$$

Будем говорить, что ряд  $\{y_n, n \geq 1\}$  управляется ЛРФ с вектором коэффициентов  $R = (c_{K-1}, \dots, c_1)^T$ , если при  $n \geq K$

$$y_n = \sum_{k=1}^{K-1} c_k y_{n-k}.$$

**Лемма 1.** Пусть ряд  $F = (f_1, \dots, f_n, \dots)$  управляется ЛРФ:

$$f_n = \sum_{k=1}^{M-1} b_k f_{n-k}, \quad n \geq M. \quad (2)$$

При  $1 \leq \ell \leq k$  положим  $F_{\ell,k} = (f_\ell, \dots, f_k)^T$  и обозначим  $U_0^\perp(M)$  линейное пространство с образующими  $\{F_{n,n+M-1}, n \geq 1\}$ . Тогда  $U_0^\perp(M)$  не является вертикальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $R(M) = (b_{M-1}, \dots, b_1)^T$ , тогда (2) примет вид

$$(Z_M, F_{n-M+1,n}) = 0 \quad \text{с} \quad Z_M = \begin{pmatrix} -R(M) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq M,$$

т. е.  $Z_M$  ортогонален  $U_0^\perp(M)$ . Поскольку  $(Z_M, \epsilon_M) = 1$ , то  $\epsilon_M \notin U_0^\perp(M)$ .

Предположим теперь, что ряд  $F = (f_1, \dots, f_n, \dots)$  управляется минимальной ЛРФ порядка  $d$ :

$$f_n = \sum_{k=1}^d a_k f_{n-k}, \quad n > d, \quad (3)$$

причем термин «минимальный» означает, что не существует ЛРФ порядка  $d' < d$ , управляющей рядом  $F$ .

Взяв  $M \geq d$ , обозначим, как и раньше,  $U_0^\perp(M)$  линейное векторное пространство, натянутое на  $\{F_{n,n+M-1}, n \geq 1\}$ . Кроме того, пусть  $\mathbf{P}_0^\perp(M)$  — ортогональный проектор  $\mathbb{R}^M \mapsto U_0^\perp(M)$ . Тогда  $\dim U_0^\perp(M) = d$  и  $\vartheta_M = \|\mathbf{P}_0^\perp(M)\epsilon_M\| < 1$ .

Рассмотрим  $P_1, \dots, P_d$  — базис  $U_0^\perp(M)$ , обозначим  $\mathbf{X} = [P_1 : \dots : P_d]$ . Тогда, как легко видеть,

$$\vartheta^2(M) = \epsilon_M^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon_M. \quad (4)$$

Используя (4), приведем примеры асимптотического поведения  $\vartheta_M^2$  при  $M \rightarrow \infty$  для нескольких вариантов  $f_n$ , а именно для экспоненциальных, полиномиальных

и тригонометрических рядов. При этом некоторые элементарные, но громоздкие вычисления будут опущены.

### 2.1.1. Коэффициенты вертикальности. Примеры.

1. Экспоненциальные ряды. Здесь

$$f_n = \sum_{i=1}^p \beta_i a_i^n \quad (5)$$

с  $a_i > 1$  и  $\beta_i \neq 0$ . Тем самым  $\dim U_0^\perp(M) = p$  при  $M \geq p$  и векторы  $P_\ell = A_{M,\ell}/\|A_{M,\ell}\|$  с  $A_{M,\ell} = (1, a_\ell, \dots, a_\ell^{M-1})^T$  и  $\ell = 1, \dots, p$  образуют базис пространства  $U_0^\perp(M)$ .

Обозначим  $\mathbf{X} = [P_1 : \dots : P_p]$ . Если  $M \rightarrow \infty$ , тогда  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{C}$  – матрица размера  $p \times p$  с элементами  $c_{ij} = \sqrt{(a_i^2 - 1)(a_j^2 - 1)/(a_i a_j - 1)}$ . Аналогичным образом  $\epsilon_M^T \mathbf{X} \rightarrow (\sqrt{1 - a_1^{-2}}, \dots, \sqrt{1 - a_p^{-2}}) =: D^T$  и  $\vartheta_M^2 \rightarrow \vartheta_\infty^2 = D^T \mathbf{C}^{-1} D$ . При  $p = 1$  имеет место равенство  $\vartheta_\infty^2 = 1 - 1/a_1^2$ .

2. Схема серий для экспоненциальных рядов. Этот случай подробно изучен с точки зрения АСС в [6].

При  $T > 0$  рассмотрим схему серий для рядов  $f_n = f_n^{(N)} = a^{nT/N}$ , где  $a > 1$ ,  $n = 1, \dots, N$  и  $N = 1, 2, \dots$

Здесь  $d = 1$ ,  $\mathbf{X} = (1, a^{T/N}, \dots, a^{(M-1)T/N})^T$  при  $M < N$ ,

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T = \sum_{k=0}^{M-1} a^{2kT/N} = \frac{a^{2MT/N} - 1}{a^{2T/N} - 1}, \quad \mathbf{X}^T \epsilon_M = a^{(M-1)T/N} \quad \text{и}$$

$$\vartheta_M^2 = \vartheta_M^2(N) = (a^{2T/N} - 1) \frac{a^{2(M-1)T/N}}{a^{2MT/N} - 1} = (1 - a^{-2T/N})(1 - a^{-2MT/N}).$$

Так как  $N \rightarrow \infty$ , то  $1 - a^{-2T/N} \sim 2 \ln(a)T/N$ . Рассмотрим случай  $M \rightarrow \infty$ . Если  $M/N \rightarrow \beta > 0$ , то  $N\vartheta_M^2(N) \rightarrow 2 \ln(a)T(1 - a^{-2T\beta})$ . Если же  $M = o(N)$ , то  $N\vartheta_M^2(N) \rightarrow 0$ .

3. Полиномиальные ряды. Здесь

$$f_n = \beta_p n^p + \dots + \beta_1 n + \beta_0, \quad \beta_p \neq 0.$$

В этом случае  $\dim U_0^\perp(M) = p + 1$  при  $M \geq p + 1$  и векторы  $P_\ell = Z_M(\ell)/\|Z_M(\ell)\|$  с  $Z_M(\ell) = (0^\ell, 1^\ell, \dots, (M-1)^\ell)^T$  образуют базис линейного пространства  $U_0^\perp(M)$ .

Положим  $\mathbf{X} = [P_0, \dots, P_p]$ . Тогда  $\|Z_M(\ell)\|^2 \sim M^{2\ell+1}/(2\ell+1)$  и  $\mathbf{X}_M^T \mathbf{X}_M \rightarrow \mathbf{C}_1$ , где  $\mathbf{C}_1$  – положительно определенная матрица размерности  $(p+1) \times (p+1)$  с элементами

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{\sqrt{(2i-1)(2j-1)}}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \dots, p+1.$$

Пусть  $A_p := (1, \dots, \sqrt{2\ell+1}, \dots, \sqrt{2p+1})^T$ . Тогда  $\sqrt{M} \epsilon_M^T \mathbf{X}_M \rightarrow A_p^T$  и  $M\vartheta_M^2 \rightarrow A_p^T \mathbf{C}_1^{-1} A_p > 0$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Если  $p = 1$ , то  $M\vartheta_M^2 \rightarrow 1/4$  при  $M \rightarrow \infty$ .

4. Тригонометрические ряды. Рассмотрим ряд

$$f_n = \sum_{i=1}^p \beta_i \cos(2\pi\omega_i n + \varphi_i) \quad \text{с } \beta_i \neq 0 \text{ и } \omega_i \in (0, 1/2),$$

где  $\omega_j \neq \omega_i$  при  $j \neq i$ . Если  $M \geq 2p$ , то  $\dim U_0^\perp(M) = 2p$ .

Положим  $\cos_{k\ell} = \cos(2\pi k\omega_\ell)$ ,  $\sin_{k\ell} = \sin(2\pi k\omega_\ell)$ ,

$$C_{j\ell} = (\cos_{0\ell}, \dots, \cos_{j-1\ell})^T, \quad S_{j\ell} = (\sin_{0\ell}, \dots, \sin_{j-1\ell})^T$$

и  $\mathbf{X} = [C_{M1} : \dots : C_{Mp} : S_{M1} : \dots : S_{Mp}]$ . Тогда  $M(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}/2 \rightarrow \mathbf{I}_{2p}$ , где  $\mathbf{I}_k$  — единичная матрица размера  $k \times k$ .

Аналогичным образом  $\|\epsilon_M^T \mathbf{X}_M\|^2 \rightarrow 2p$ . Поэтому  $\vartheta_M^2 \sim 4p/M$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Заметим, что если  $0 \in \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$  и(или)  $1/2 \in \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ , то по-прежнему  $\vartheta_M^2 \sim c/M$  с некоторой  $c > 0$ . В частности,  $\vartheta_M^2 = 1/M$  для  $f_n = c = \text{const} \neq 0$ .

**2.2. Построение ЛРФ.** Рассмотрим ряд  $F = (f_1, \dots, f_n, \dots)$  и предположим, что линейное пространство  $\mathcal{U}_0^\perp(M)$  с  $\dim \mathcal{U}_0^\perp(M) = d$  не является вертикальным для некоторого  $M > 1$ . Определим  $\mathcal{U}_0(M)$  как ортогональное дополнение к  $\mathcal{U}_0^\perp(M)$ , а  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0(M)$  как ортогональный проектор на  $\mathcal{U}_0(M)$ . Кроме того, введем  $(M-1) \times M$  матрицу  $\mathbf{G}_M$  равенством

$$\mathbf{G}_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующее предложение в несколько других обозначениях можно найти в [1, теор. 5.2 и предл. 5.3]. Приведем более короткое доказательство этого факта.

**Предложение 1.** Положим

$$R := (b_{M-1}, \dots, b_1)^T = -\frac{1}{1 - \vartheta_M^2} \mathbf{G}_M \mathbf{P}_0 \epsilon_M. \quad (6)$$

Тогда

$$f_n = \sum_{k=1}^{M-1} b_k f_{n-k}, \quad n \geq M. \quad (7)$$

Кроме того,

$$\|R\|^2 = \frac{\vartheta_M^2}{1 - \vartheta_M^2}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Заметим, что вектор  $\mathbf{P}_0 Y$  ортогонален  $\mathcal{U}_0^\perp(M)$  для любого  $Y \in \mathbb{R}^M$ . Поэтому  $(\mathbf{P}_0 Y, F_{n-M+1,n}) = 0$  при  $n \geq M$ .

Обозначим  $z_M$  последнюю координату вектора  $\mathbf{P}_0 Y$ . Если  $z_M \neq 0$ , тогда равенство  $(\mathbf{P}_0 Y, F_{n-M+1,n}) = 0$  может быть переписано в виде  $(Q, F_{n-M+1,n}) = 0$ , где

$$Q = \frac{1}{z_M} \mathbf{P}_0 Y = \begin{pmatrix} -\tilde{R} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad \tilde{R} = -\mathbf{G}_M Q = -\frac{1}{z_M} \mathbf{G}_M \mathbf{P}_0 Y.$$

Так как равенства  $(Q, F_{n-M+1,n}) = 0$  и  $f_n = (\tilde{R}, F_{n-M+1,n-1})$  эквивалентны, приходим к некоторой ЛРФ вида (7), которая управляет рядом  $F$ . Тем самым осталось

доказать, что выбор  $Y = \epsilon_M$  приводит к  $z_M = 1 - \vartheta_M^2$ . Это следует из формулы (1):  $(\mathbf{P}_0 \epsilon_M, \epsilon_M) = \|\mathbf{P}_0 \epsilon_M\|^2 = 1 - \vartheta_M^2$ , и равенство (7) получено. Используя формулу

$$\begin{pmatrix} -R \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \vartheta_M^2} \mathbf{P}_0 \epsilon_M,$$

приходим к (8). □

**3. Рекуррентный прогноз и его точность.** В [1, разд. 2.1] формула (6) используется для получения аппроксимации вектора  $R$  в случае, когда ряд  $F$  зашумлен аддитивной помехой — рядом  $E$ .

Пусть «сигнал»  $F = (f_1, \dots, f_n, \dots)$  управляется минимальной ЛРФ (3) порядка  $d$ . Кроме того, рассмотрим «помеху»  $E = (e_1, \dots, e_n, \dots)$ , положим  $F_N = (f_1, \dots, f_N)$ ,  $E_N = (e_1, \dots, e_N)$  и, наконец,  $X_N = (f_1 + \delta e_1, \dots, f_N + \delta e_N)$ , где  $\delta$  — формальный параметр возмущения. Предполагается, что известен ряд  $X_N$ , а целью является прогноз значений  $f_{N+1}, \dots, f_{N+S}$  ряда  $F$  при некотором  $S \geq 1$ .

Чтобы объяснить, как это делается, начнем с аппроксимации вектора коэффициентов ЛРФ (6).

**3.1. Аппроксимирующая ЛРФ.** В [1, гл. 2.] описан следующий метод получения аппроксимирующей ЛРФ.

1. *Вложение.* После выбора длины окна  $M < N$  ряд  $X_N$  преобразуется в ганкелеву матрицу  $\mathbf{H}(\delta)$  размера  $M \times K$  с элементами  $\mathbf{H}(\delta)[ij] = x_{i+j-1}$ ,  $1 \leq i \leq M$ ,  $1 \leq j \leq K := N - M + 1$ . Кроме того, предполагается, что  $\min(M, K) \geq d$ .

2. *Сингулярное разложение и специальная группировка.* Ищется наилучшее (по норме Фробениуса) приближение  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  матрицы  $\mathbf{H}(\delta)$  среди всех  $M \times K$  матриц ранга  $d$ . Это происходит путем сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{H}(\delta)$  и суммирования  $d$  главных элементарных матриц этого разложения.

Линейное пространство, натянутое на столбцы матрицы  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ , обозначим  $U_0^\perp(\delta)$ , а его ортогональное дополнение —  $U_0(\delta)$ . Кроме того, рассмотрим  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  и  $\mathbf{P}_0(\delta)$  — ортогональные проекторы на эти подпространства.

3. Если пространство  $U_0^\perp(\delta)$  не является вертикальным, то вектор

$$R(\delta) = - \frac{1}{\|\mathbf{P}_0(\delta) \epsilon_M\|^2} \mathbf{G}_M \mathbf{P}_0(\delta) \epsilon_M$$

предлагается как аппроксимация вектора  $R$ , введенного в (6).

Следующее предложение (см. [4, предл. 5.1]) используется для оценки точности этой аппроксимации.

**Предложение 2.** Обозначим  $\Delta \mathbf{P}(\delta) = \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$ , где  $\|\mathbf{A}\|$  есть спектральная норма матрицы  $\mathbf{A}$ . Если  $\Delta \mathbf{P}(\delta) < \|\mathbf{P}_0 \epsilon_M\|$ , то  $U_0^\perp(\delta)$  не является вертикальным и

$$\|R(\delta) - R\| \leq \frac{\Delta \mathbf{P}(\delta)}{1 - \vartheta_M^2} \left( 1 - \frac{\Delta \mathbf{P}(\delta)}{\sqrt{1 - \vartheta_M^2}} \right)^{-2} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{1 - \vartheta_M^2}} \right).$$

**Замечание 1.** Предложение 2 дает достаточные условия сходимости  $\|R(\delta) - R\| \rightarrow 0$  в терминах  $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$  и  $\vartheta_M$  при  $M \rightarrow \infty$ . А именно, если  
1)  $\liminf_M \vartheta_M < 1$ ;

2)  $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\| \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ , то  $\|R(\delta) - R\| = O(\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|) \rightarrow 0$ . Как следует из примеров раздела 2.1, первое условие выглядит вполне естественно. Что касается второго, то в [4, разд. 3.2] приведено много примеров его выполнения.

**3.2. Рекуррентный прогноз.** Опишем, как строится рекуррентный прогноз на основе аппроксимации ЛРФ, рассмотренной в предыдущем разделе.

Так как [см. формулу (7)],  $f_{N+1} = (R, F_{N-M+1, N})$  с  $F_{N-M+1, N} = (f_{N-M+1}, \dots, f_N)^\top$ , то для получения прогноза  $\tilde{f}_{N+1}$  значения  $f_{N+1}$  с помощью аппроксимирующей ЛРФ  $R(\delta)$  нужно иметь хорошую аппроксимацию  $\tilde{F}_{N-M+1, N} = (f_{N-M+1}(\delta), \dots, f_N(\delta))^\top$  вектора  $F_{N-M+1, N}$ .

Тогда число

$$\tilde{f}_{N+1} = (R(\delta), \tilde{F}_{N-M+1, N}) \quad (9)$$

называется *прогнозом ряда  $F_N$  на один шаг*. При  $k > 1$  прогноз ряда  $F_N$  на  $k$  шагов определяется рекуррентно (см. [1, разд. 2.1]). Например,  $\tilde{f}_{N+2} := (R(\delta), \tilde{F}_{N-M+2, N+1}^*)$  с  $\tilde{F}_{N-M+2, N+1}^* = (f_{N-M+2}(\delta), \dots, f_N(\delta), \tilde{f}_{N+1})^\top$ .

Существует множество способов оценки значений  $f_i$  сигнала  $F_N$ . В базовом варианте АСС-прогноза это делается следующим образом. Прежде всего, выбирается новое *окно длины  $L$* , играющее точно такую же роль, как окно длины  $M$  в разделе 3.1. Заметим, что в [1] и [2] описан только случай  $L = M$ .

Далее первые 2 пункта построения аппроксимирующей ЛРФ (вложение, сингулярное разложение и специальная группировка), описанные в разделе 3.1, реализуются с заменой  $M$  на  $L$ . Как и раньше, результирующая матрица размера  $L \times K$  с  $K = N - L + 1$  обозначается  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ .

Затем строится ганкелева матрица  $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ , ближайшая к  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  в норме Фробениуса. Наконец, применяя преобразование, обратное к вложению, получаем ряд  $F_N(\delta) = (f_1(\delta), \dots, f_N(\delta))$ , который рассматривается как приближение к  $F_N$ .

Именно такой выбор приближения  $\tilde{F}_{N-M+1, N}$  вектора  $F_{N-M+1, N}$  в формуле (9) и приводит к *рекуррентному прогнозу ряда  $F_N$  на один шаг методом АСС*.

**3.3. Точность прогноза. Основная формула.** Перейдем теперь к оценке точности рекуррентного прогноза. Обозначив  $\Delta_{N-M+1, N} = \tilde{F}_{N-M+1, N} - F_{N-M+1, N}$  и  $\Delta(R) = R(\delta) - R$ , получим

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_{N+1} - f_{N+1}| &= |(R(\delta), \tilde{F}_{N-M+1, N}) - (R, F_{N-M+1, N})| \leq \\ &\leq |(\Delta(R), F_{N-M+1, N})| + |(R, \Delta_{N-M+1, N})| + |(\Delta(R), \Delta_{N-M+1, N})| \leq \\ &\leq \|\Delta(R)\| \|F_{N-M+1, N}\| + \|R\| \|\Delta_{N-M+1, N}\| + \|\Delta(R)\| \|\Delta_{N-M+1, N}\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Тем самым оценка сверху точности прогноза на один шаг зависит от

- 1) абсолютных значений сигнала  $f_i$  при  $i = N - M + 1, \dots, N$ ;
- 2) нормы  $\|R\|$  [см. (6)]. Согласно (8), эта норма выражается через коэффициент вертикальности  $\vartheta_M$ . В частности, если  $\vartheta_M \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ , то  $\|R\| \sim \vartheta_M$ ;
- 3) точности  $\Delta(R) = R(\delta) - R$  аппроксимирующей ЛРФ. Ввиду предложения 2 и замечания 1 естественно ожидать, что  $\|R(\delta) - R\| = O(\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|)$ .

Как уже говорилось, множество примеров, касающихся скорости сходимости  $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$  к нулю, можно найти в [4, разд. 3.2];

4) абсолютных значений ошибок аппроксимации  $r_i(\delta) = f_i(\delta) - f_i$  для последних  $M$  значений сигнала  $F_N$ .

Для этого случая общий подход к теоретическому оцениванию величин  $|r_i(\delta)|$  при  $N \rightarrow \infty$  с помощью АСС опубликован в [4]. Хотя эта процедура может быть достаточно трудоемкой, несколько примеров ее применения приведены ниже.

**3.4. Точность рекуррентного прогноза. Примеры.** Как уже отмечалось, неравенство (10) дает возможность получить оценку сверху точности прогноза за один шаг для ряда  $F_N$ . В этом разделе приведен ряд примеров, когда все компоненты этой оценки могут быть теоретически проанализированы при больших  $N, L$  и  $M$ .

**Пример 1.** Экспоненциальный сигнал и гармоническая помеха.

Рассмотрим  $f_n = a^n$  с  $a > 1$  и  $e_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$  с  $\omega \in (0, 1/2)$ .

**Теоретические результаты.**

1.  $\vartheta_M^2 \rightarrow 1 - 1/a^2$  при  $M \rightarrow \infty$  (см. разд. 2.1.1 настоящей работы).
2. Если  $M/N \rightarrow \beta \in (0, 1)$ , то для любого  $\delta$   $\Delta\mathbf{P}(\delta) \sim c\sqrt{N}a^{-N}$  с некоторым  $c > 0$ , см. [4, разд. 3.2.1]).
3. Если  $L \leq K$  и  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1/2)$ , то  $r_j(\delta) = \rho_j(\delta) + O(N^2a^{-N})$ , где

$$|\rho_j(\delta)| \leq C \begin{cases} a^{-(L-j)}/j & \text{при } 1 \leq j < L, \\ 1/L & \text{при } L \leq j < K, \\ 1/(N-j+1) + a^{-(N-j+1)} & \text{при } K \leq j \leq N \end{cases} \quad (11)$$

для любого  $\delta$ . Этот результат опубликован в [6].

**Оценка сверху**  $|\tilde{f}_{N+1} - f_{N+1}|$ .

Рассмотрим второе слагаемое  $\|R\| \|\Delta_{N-M+1, N}\| = \|R\| \|\tilde{F}_{N-M+1, N} - F_{N-M+1, N}\|$  в правой части (10). Согласно (8),  $\|R\|^2 = \vartheta_M^2/(1 - \vartheta_M^2) \rightarrow \text{const} > 0$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Из (11) легко получить, что  $\|\Delta_{N-M+1, N}\|$  не стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому в этих условиях правая часть (10) тоже не стремится к нулю. Конечно, отсюда не следует, что левая часть (10) не стремится к нулю, но компьютерные эксперименты (см. приложение) подтверждают эту гипотезу.

**Пример 2.** Схема серий для экспоненциального сигнала и гармонической помехи.

Здесь  $f_n = f_n^{(N)} = a^{nT/N}$  с  $a > 1$ ,  $0 < n \leq N$ ,  $N \geq 1$  и  $e_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$  с  $0 < \omega < 1/2$ .

**Теоретические результаты.**

1. Если  $M/N \rightarrow \beta \in (0, 1)$ , то  $N\vartheta_M^2 \rightarrow \text{const} > 0$  (см. разд. 2.1.1).
2. В этих же условиях существует  $\delta_0 > 0$  такое, что  $\Delta\mathbf{P}(\delta) = O(N^{-1})$  при  $|\delta| < \delta_0$ .
3. Если  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ , то существует  $\delta'_0 > 0$  такое, что  $\max_{1 \leq i \leq N} |r_i(\delta)| = O(N^{-1})$  при  $|\delta| < \delta'_0$ .

Доказательство обоих утверждений можно найти в [6].

**Оценка сверху**  $|\tilde{f}_{N+1} - f_{N+1}|$ .

Пусть  $L/N \rightarrow \alpha$  и  $M/N \rightarrow \beta$ ,  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ .



Так как

$$\|\Delta(R)\| = \|R(\delta) - R\| = O(\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|) = O(1/M)$$

и

$$\|F_{N-M+1,N}\|^2 = \sum_{i=N-M+1}^N f_i^2 = O(M),$$

то первое слагаемое  $J_1 = \|\Delta(R)\| \|F_{N-M+1,N}\|$  в правой части (10) имеет вид  $J_1 = O(1/\sqrt{M}) = O(1/\sqrt{N})$ . Аналогично  $\|R\|^2 \sim \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{e}_M\|^2 = O(1/M)$  и

$$\|\Delta_{N-M+1,N}\|^2 = \|\tilde{F}_{N-M+1,N} - F_{N-M+1,N}\|^2 = \sum_{i=N-M+1}^N (f_i(\delta) - f_i)^2 = O(MN^{-2}).$$

Поэтому для второго слагаемого  $J_2 = \|R\| \|\Delta_{N-M+1,N}\|$  в правой части (10) получаем оценку  $J_2 = O(N^{-1})$ . Так как  $\Delta(R) = o(\|R\|)$ , то  $|f_{N+1} - f_{N+1}| = O(1\sqrt{N})$ .

**Пример 3.** *Линейный сигнал и гармоническая помеха.*

Здесь  $f_n = an + b$  и  $e_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$ ,  $0 < \omega < 1/2$ .

**Теоретические результаты.**

1. Если  $M \rightarrow \infty$ , то  $M\vartheta_M^2 \rightarrow \text{const} > 0$  (см. разд. 2.1.1).

2. Если нечетное  $N \rightarrow \infty$  и  $M = (N + 1)/2$ , то  $\Delta\mathbf{P}(\delta) = O(N^{-2})$  для любого  $\delta$ .

3. При нечетном  $N$  и  $L = (N + 1)/2$ ,  $\max_{1 \leq i \leq N} |r_i(\delta)| = O(N^{-1})$  для любого  $\delta$ .

Оба утверждения следуют из результатов, опубликованных в [7]. Общие соображения и компьютерные эксперименты наводят на мысль, что аналогичные асимптотики для  $\Delta\mathbf{P}(\delta)$  и  $\max_{1 \leq i \leq N} |r_i(\delta)|$  должны остаться верными при  $M/N \rightarrow \beta$  и  $L/N \rightarrow \alpha$ , если  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ .

**Оценка сверху**  $|\tilde{f}_{N+1} - f_{N+1}|$ .

Так как  $f_n \sim an$ , то

$$\|F_{N-M+1,N}\|^2 = \sum_{i=N-M+1}^N f_i^2 = O(N^3)$$

и  $\|F_{N-M+1,N}\| = O(N^{3/2})$  при  $N \rightarrow \infty$ . Поскольку  $|f_i(\delta) - f_i| = O(N^{-1})$ ,

$$\|\Delta_{N-M+1,N}\|^2 = \sum_{i=N-M+1}^N (f_i(\delta) - f_i)^2 = O(MN^{-2}) = O(N^{-1})$$

и  $\|\Delta_{N-M+1,N}\| = O(N^{-1/2})$ .

Далее  $\|R(\delta) - R\| = O(\Delta\mathbf{P}(\delta)) = O(1/N^2)$ , а  $\|R\|^2 \sim \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{e}_M\|^2 = O(1/M)$ , т. е.  $\|R\| = O(1/\sqrt{N})$ . Поэтому

$$J_1 = \|R(\delta) - R\| \|F_{N-M+1,N}\| = O(N^{-1/2}), \quad J_2 = \|R\| \|\Delta_{N-M+1,N}\| = O(N^{-1})$$

и поскольку  $\|R(\delta) - R\| = o(\|R\|)$ , то ошибка прогноза на один шаг имеет вид  $O(N^{-1/2})$ .

**Пример 4.** *Постоянный сигнал и пилообразная помеха.*

Здесь  $f_n = 1$  и  $e_n = (-1)^n$ .

**Теоретические результаты.**

1. Если  $M \rightarrow \infty$ , то  $M\vartheta_M^2 \rightarrow \text{const} > 0$  (см. разд. 2.1.1).

2. Если  $M/N \rightarrow \beta \in (0, 1)$ , то существует  $\delta_0 > 0$  такое, что  $\Delta\mathbf{P}(\delta) = O(N^{-1})$  при  $|\delta| < \delta_0$ .

3. Если  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ , то существует  $\delta'_0 > 0$  такое, что  $\max_{1 \leq i \leq N} |r_i(\delta)| = O(N^{-1})$  при  $|\delta| < \delta'_0$ . Оба результата можно найти в [4, разд. 5.3.1].

Компьютерные эксперименты вселяют надежду, что аналогичные результаты будут иметь место для  $f_n = \cos(2\pi\omega_1 n + \varphi_1)$  и  $e_n = \cos(2\pi\omega_2 n + \varphi_2)$ , где  $\omega_1, \omega_2 \in (0, 1/2)$  и  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

**Оценка сверху**  $|\tilde{f}_{N+1} - f_{N+1}|$ .

Поскольку все теоретические результаты для этого случая аналогичны уже описанным в Примере 2, то  $|\tilde{f}_{N+1} - f_{N+1}| = O(1/\sqrt{N})$ .

**4. Приложение. Компьютерные эксперименты.** В этом разделе представлено несколько вариантов компьютерных экспериментов, которые иллюстрируют теоретические результаты разд. 3.4. Как уже отмечалось, рассматриваемые ряды имеют вид  $x_n = f_n + \delta e_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , и задача состоит в прогнозировании значения сигнала  $f_{N+k}$ ,  $k \geq 1$ .

Рассматриваются три варианта сигнала  $f_n$ :

1. Экспоненциальный сигнал (EXP):  $f_n = a^n$ ,  $a = 1.01$ , причем  $\delta = 1$ .

2. Линейный сигнал (LIN):  $f_n = an + b$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $\delta = 0.5$ .

3. Гармонический сигнал (COS):  $f_n = \cos(2\pi\omega_0 n)$  с  $\omega_0 = \sqrt{2}/2$ ,  $\delta = 0.5$ .

Во всех случаях помеха имеет вид  $e_n = \cos(2\pi\omega n)$  с  $\omega = \sqrt{3}/2$ .

Как и раньше,  $\tilde{f}_{N+k}$  обозначает значение рекуррентного прогноза величины  $f_{N+k}$ , в то время как  $\Delta_k^{(f)}(N) = |\tilde{f}_{N+k} - f_{N+k}|$  есть ошибка прогноза на  $k$  шагов.

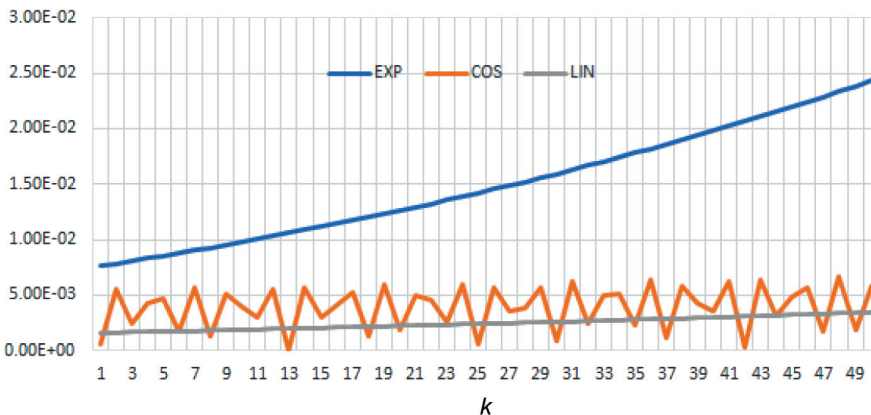


Рис. 1. Ошибки прогноза на  $k$  шагов для экспоненциального (EXP), гармонического (COS) и линейного (LIN) сигналов в зависимости от  $k$ ,  $k = 1(1)50$ .

**Прогноз на  $1 \leq k \leq 50$  шагов.** Рис. 1 носит предварительный характер. На нем показаны ошибки прогноза на  $k$  шагов для экспоненциального (EXP), гармонического (COS) и линейного (LIN) сигналов при  $N = 500$ ,  $L = M = 250$  и  $k = 1(1)50$ . Заметим, что эти ошибки демонстрируют весьма гладкое поведение для EXP и LIN, в то время как  $\Delta_k^{(f)}(N)$  сильно осциллирует для COS.

Поэтому в дальнейшем иллюстрируется поведение  $\Delta_1^{(f)}(N)$  как функции  $N$  для экспоненциального и линейного сигналов, а характеристика  $(\sum_{k=1}^{10} \Delta_k^{(f)}(N))/10$  выбрана для иллюстрации поведения прогноза для гармонического сигнала.

Заметим, что во всех следующих экспериментах используются длины рядов  $N = 50(50)1000$  и  $L = M = N/2$ .

**Экспоненциальный сигнал.** На рис. 2 изображено поведение ошибок прогноза на один шаг в зависимости от длины ряда  $N$  для экспоненциального сигнала и гармонической помехи.

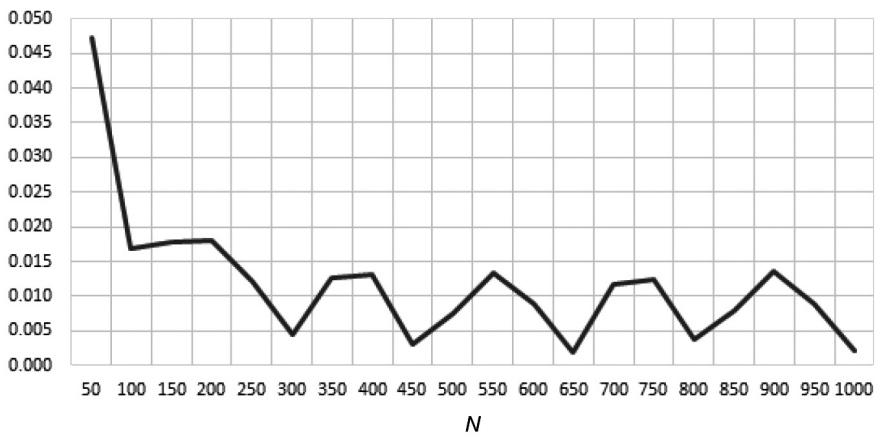


Рис. 2. Ошибки прогноза на один шаг как функция длины ряда  $N$  для сигнала EXP.

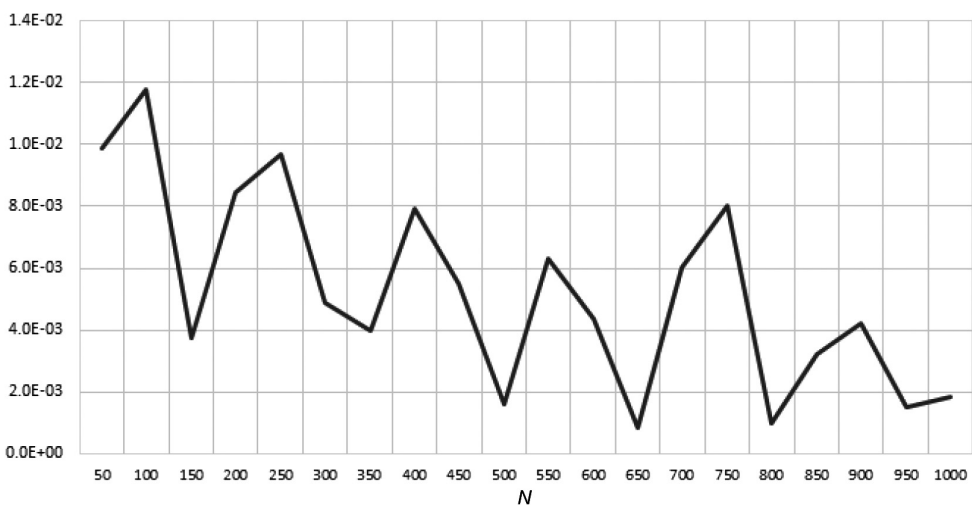


Рис. 3. Ошибки прогноза на один шаг как функция длины ряда  $N$  для сигнала LIN.

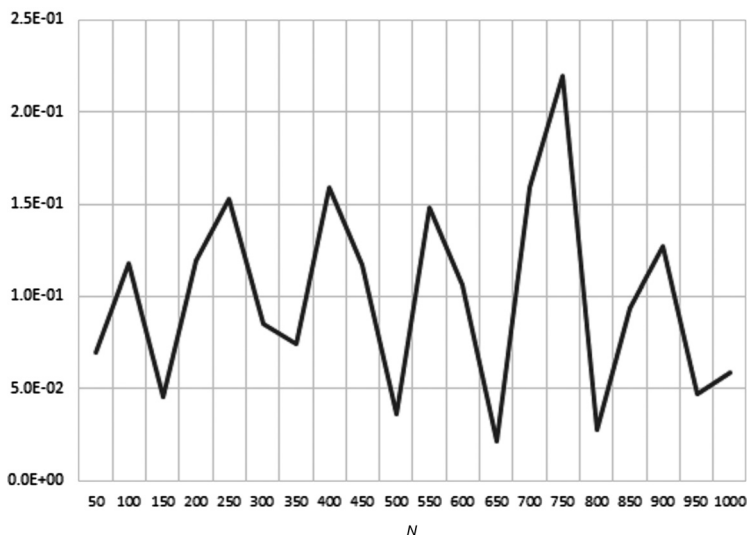


Рис. 4.  $\sqrt{N}$ , умноженный на ошибки прогноза на один шаг как функция длины ряда  $N$  для сигнала LIN.

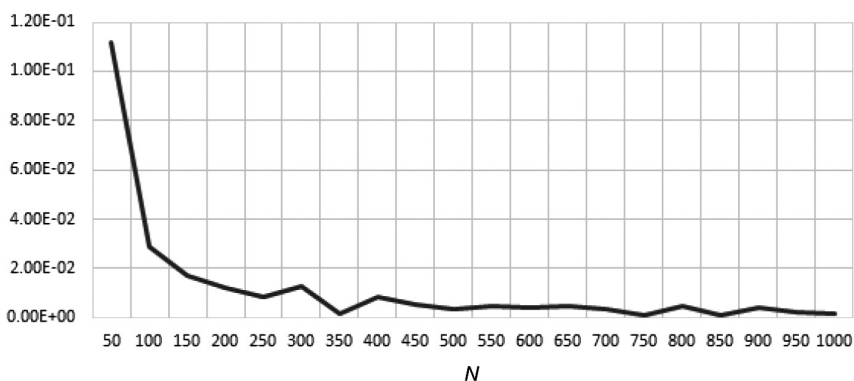


Рис. 5. Среднее от ошибок на  $k = 1(1)10$  шагов прогноза как функция длины ряда  $N$  для сигнала COS.

Теоретические результаты раздела 3.4 показывают, что  $\Delta_1^{(f)}(N) = O(1)$ . Судя по рис. 2, эта оценка является достаточно точной — начиная примерно с  $N = 300$  значения  $\Delta_1^{(f)}(N)$  не показывают очевидную тенденцию к уменьшению.

**Линейный сигнал.** Как уже было замечено, для линейного сигнала ожидаемая оценка для  $\Delta_1^{(f)}(N)$  есть  $O(N^{-1/2})$ . Рис. 3 и 4 подтверждают этот теоретический результат.

**Гармонический сигнал.** Согласно результатам раздела 3.4, ожидаемая оценка сверху ошибок прогноза на один шаг для гармонического сигнала есть  $O(N^{-1/2})$ . Рис. 5 и 6 показывают, что, возможно, настоящая скорость сходимости есть  $O(N^{-1})$ .

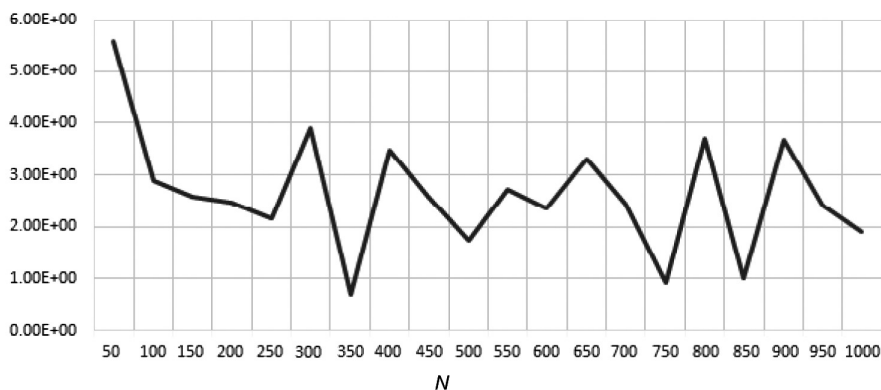


Рис. 6.  $N$ , умноженное на среднее от ошибок на  $k = 1(1)10$  шагов прогноза как функция длины ряда  $N$  для сигнала COS.

**4. Благодарности.** Автор благодарит рецензентов, замечания которых, несомненно, способствовали улучшению работы.

### Литература

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. New York, Chapman & Hall/CRC (2001).
2. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. 2<sup>nd</sup> ed. Springer Briefs in Statistics, Springer (2020).
3. Vaidyanathan P. P. *The Theory of Linear Prediction*. Morgan & Claypool Publ. (2008).
4. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).
5. Golyandina N. On the choice of parameters in Singular Spectrum Analysis and related subspace-based methods. *Statistics and Its Interface* **3**, 259–279 (2010).
6. Ivanova E., Nekrutkin V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis. *Statistics and Its Interface* **12**(1), 49–59 (2019). <https://dx.doi.org/10.4310/SII.2019.v12.n1.a5>
7. Зенкова Н. В., Некруткин В. В. Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9**(67), вып. 2, 246–255 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.206>

Статья поступила в редакцию 18 июля 2022 г.;  
доработана 29 августа 2022 г.;  
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Некруткин Владимир Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; [vnekr@statmod.ru](mailto:vnekr@statmod.ru)

### Remark on the precision of recurrent forecast in singular spectrum analysis\*

V. V. Nekrutkin

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Nekrutkin V. V. Remark on the precision of recurrent forecast in singular spectrum analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 47–60. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.105> (In Russian)

\*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00067).

Within the family of methods named as Singular Spectrum Analysis there exist several variants of forecasting algorithms for signals corrupted by additive noise. In this paper the way to estimate the asymptotical accuracy of the recurrent variant of such a forecast for long series is shown and illustrated. It occurs that almost all elements of this construction are already studied and published, though some of them are hard to be implemented in concrete situations. Here all these elements are brought together, expanded and discussed. Several theoretical and computational examples are presented.

*Keywords:* signal processing, singular spectrum analysis, recurrent forecasting, asymptotical analysis.

## References

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. New York, Chapman & Hall/CRC (2001).
2. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. 2<sup>nd</sup> ed. Springer Briefs in Statistics, Springer (2020).
3. Vaidyanathan P.P. *The Theory of Linear Prediction*. Morgan & Claypool Publ. (2008).
4. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).
5. Golyandina N. On the choice of parameters in Singular Spectrum Analysis and related subspace-based methods. *Statistics and Its Interface* **3**, 259–279 (2010).
6. Ivanova E., Nekrutkin V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis. *Statistics and Its Interface* **12**(1), 49–59 (2019). <https://dx.doi.org/10.4310/SII.2019.v12.n1.a5>
7. Zenkova N.V., Nekrutkin V.V. On the Asymptotical Separation of Linear Signals from Harmonics by Singular Spectrum Analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9**(67), iss. 2, 246–255 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.206> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 2, 166–173. (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122020157>].

Received: July 18, 2022  
Revised: August 29, 2022  
Accepted: September 8, 2022

## Author's information:

Vladimir V. Nekrutkin — [vnekr@statmod.ru](mailto:vnekr@statmod.ru)