УДК 517.955 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1
MSC 35A02, 35C10

Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных. Часть 2. Существование и единственность решений задачи Коши для линейных уравнений*

В. И. Гишларкаев

Чеченский государственный университет,
Российская Федерация, 364093, Грозный, ул. Шерипова, 32

Для цитирования: *Гишларкаев В. И.* Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных. Часть 2. Существование и единственность решений задачи Коши для линейных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 21–35.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.103

В статье предлагается метод анализа задачи Коши для широкого класса эволюционных линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Применением преобразования (обратного) Фурье исходное уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению, которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение в соответствующем банаховом пространстве. Подбор этого пространства осуществляется так, чтобы можно было воспользоваться принципом сжимающих отображений. Для проведения соответствующих оценок для операторов, порождаемых преобразованным уравнением, мы накладываем условия финитности по пространственной переменной для обратного Фурье-образа коэффициентов, а сами пространства коэффициентов исходного уравнения определяются из теорем Пэли — Винера о Фурье-образах. При этом используется аппарат теории интеграла Бохнера в псевдонормированных пространствах, а также теория счетно-нормированных пространств и пространств Соболева. Выделены классы функций, в которых доказано существование и единственность решений. Для уравнений с коэффициентами вида $a_\alpha(t,x) = p_\alpha(t) \cdot q_\alpha(x)$ получены точные решения в виде преобразования Фурье от конечных сумм для операторных экспонент. Эта работа является непосредственным продолжением статьи «Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных: формулы представления решений задачи Коши», опубликованной в 2022 г.

Ключевые слова: преобразование Фурье, обобщенные функции с компактным носителем, свертка, интегро-дифференциальные уравнения, теорема Пэли — Винера, операторная экспонента.

1. Введение. В [1, 2] на основе преобразования Фурье получены решения задачи Коши для линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами специального вида.

---

*Первую часть статьи см.: *Гишларкаев В. И.* Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных: формулы представления решений задачи Коши // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 480–494. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.309

В данной работе рассматриваются вопросы существования и единственности решений задачи Коши для уравнений вида

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

где $(t,x) \in (0,T)\times R^n, \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Также получены формулы представления решений для коэффициентов вида $a_\alpha(t)\cdot b_\alpha(x)$ при финитных $b_\alpha(x)$. Наиболее общим результатом по однозначной разрешимости является теорема 3. Так же как в [1, 2], основой нашего подхода является преобразование Фурье.

Так как преобразование Фурье является гомоморфизмом из алгебры со сверточным умножением в алгебру с поточечным умножением, то применение преобразования Фурье по x к уравнению (1) сводит его к интегро-дифференциальному уравнению. В этом уравнении интегрирование проводится не по временной переменной, поэтому его можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение в подходящем банаховом пространстве и можно воспользоваться стандартными методами доказательства существования и единственности решений. При этом мы налагаем определенные условия на коэффициенты уравнения (1). Какие-то случаи, когда эти условия на коэффициенты не выполняются, рассмотрены в [1, 2]. Точнее, в [1, 2] получены явные формулы решений задачи Коши для уравнений типа (1) с коэффициентами $a_\alpha(t,x) = \epsilon_\alpha \cdot b_\alpha(t)$, где ϵ_α равно x_i или 1, и в каких-то случаях в [1] доказана однозначная разрешимость.

Подробному анализу задачи Коши для линейных уравнений как с постоянными, так и переменными коэффициентами посвящена статья [3]. Рассмотренный в данной работе случай линейного уравнения (1) с приведенными ограничениями на коэффициенты не подпадает под условия, выполнение которых предполагается в [3] и изучается отличными от [3] методами. Получаемое при этом в каких-то конкретизациях уравнение (1), формулы для решений также отличаются от формул, в которых представляются решения в [3].

Вопросам однозначной разрешимости задачи Коши для (1) посвящен раздел 2. В разделе 3 рассмотрен вопрос о представимости решений задачи Коши для частных случаев уравнения (1), приведены соответствующие формулы в различных случаях. Данная статья по своему идейному подходу и рассматриваемым задачам является непосредственным продолжением [2].

2. Существование и единственность решений задачи Коши для линейных эволюционных уравнений. Основной целью данного раздела является доказательство существования и единственности решений задачи Коши для уравнений вида

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x) \tag{2}$$

в пространстве $L_1((0,T);M)$, где M — некоторое метрическое пространство, при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения.

В этом и следующем разделе под решением уравнения понимается классическое решение, непрерывное вместе со всеми производными, содержащимися в уравнении.

Рассмотрим вначале задачу

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in M, \tag{4}$$

где все $a_\alpha \in C^{0,A}_{F,T}(R^n)$, $f \in C([0,T];M)$ при некотором $T > 0$. Пространство $C^{l,A}_{F,T}(R^n)$, $l \in N \cup \{0\}$ определяется аналогично $C^{l,A}_{T}(R^n)$ из [1]:

$$\begin{gathered} C^{l,A}_{F,T}(R^n) := \{\Phi|_{[0,T]\times R^n} | (\Phi(\cdot,x) \in C^l(0,T) \forall x \in R^n) \wedge (\forall t \in [0,T]), \\ \Phi(t,\cdot) : C^n \to C\text{— целая функция: } ((Im\Phi(t,x) = 0 \forall (t,x) \in [0,T]\times R^n) \wedge \\ \wedge (\exists c = c(\Phi), r = r(\Phi) \in R :\ |\Phi(t,z)| < ce^{r|Imz|}\ \forall (t,z) \in [0,T]\times C^n)\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Напомним, что в соответствии с одним из вариантов теоремы Пэли — Винера (эта теорема и ее аналог для обобщенных функций приводятся, например, в [4])

$$(((\check{\varphi} \in L_2(R^n)) \wedge (supp\check{\varphi} \subset B(0;r)) \Leftrightarrow ((\varphi\text{— целая функция}) \wedge (|\varphi(\lambda)| \le ce^{r|Im\lambda|}))),$$

где $B(0;r)$ — шар радиуса с центром в 0; мы пользуемся определениями прямого и обратного преобразований Фурье, принятых в [1, 2]: $F[\varphi](\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_{R^n_x} \varphi(x)e^{i(\xi,x)}dx$ — прямое, $F^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n_\xi} f(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi$ — обратное преобразования Фурье. То есть

$$\varphi \in C^{l,A}_{F,T} \Leftrightarrow (\varphi(\cdot,x) \in C^l(0,T)) \wedge ((\check{\varphi}(t,\cdot) \in L_2(R^n)) \wedge (supp\check{\varphi}(t,\cdot) \Subset R^n)\ \forall t \in [0,T]).$$

Поэтому $(\check{a}_\alpha(t,\cdot) \in L_2(R^n)) \wedge (supp\check{a}_\alpha(t,\cdot) \Subset R^n)\ \forall \alpha$.

Символ A в обозначении пространства $C^{l,A}_{F,T}$ указывает на то, что функции из этого пространства аналитичны всюду по пространственной переменной; символ F в нижнем индексе — обратное преобразование Фурье от функций из этого пространства, которые являются регулярными (не обобщенными) функциями.

Отметим, что в (5) предполагается независимость от t числа r для каждой конкретной функции $\Phi(t,x)$. Поэтому

$$(\varphi \in C^{l,A}_{F,T}(R^n)) \Rightarrow (\exists r : supp\check{\varphi}(t,\cdot) \subset B(0;r)\ \forall t \in [0,T]). \tag{6}$$

Применив к задаче (3), (4) обратное преобразование Фурье, получим

$$\partial_t\check{u}(t,\xi) - \int_{R^n_\xi} \Phi(t,\xi,\zeta)\check{u}(t,\zeta)d\zeta = \check{f}(t,\xi), \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi) \in F^{-1}(M), \tag{7}$$

где $\Phi(t,\xi,\zeta) := \sum_{|\alpha|=2} \check{a}_\alpha(t,\xi-\zeta)\zeta^\alpha$.

Уравнение (7) принадлежит к классу так называемых интегро-дифференциальных уравнений, содержащих операции дифференцирования и интегрирования. Эти уравнения можно разделить на два вида, отличающиеся методами исследования, — уравнения, в которых интегрирование проводится не по временной переменной t, по которой производная содержится в уравнении, а только по пространственной, как в уравнении (7), и уравнения, содержащие и интегрирование по времени. Уравнения 1-го типа не требуют особой общей теории и являются объектом теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

Рассматривая $\check{u}(t,\xi)$ как функцию $\check{u}(\cdot) : [0,T] \to M$, где M — соответствующее метрическое пространство, можно получить некоторые общие результаты о существовании и единственности решений задачи (7). Соответствующие результаты для (3), (4) получим, взяв преобразование Фурье от решений задачи (7). При этом подберем M так, чтобы оператор

$$(A(g))(\xi) = \int_{R^n_\zeta} \Phi(t,\xi,\zeta) g(\zeta) d\zeta \tag{8}$$

при каждом фиксированном t действовал бы из M в M и обладал бы свойствами, позволяющими применить принцип сжимающих отображений или его какие-то обобщения.

Перейдем к конкретному определению M. Рассмотрим

$$H^s(R^n) := \{u \in S'(R^n) : \check{u}(\xi) \in L_2(\mu_s(d\xi))\}, \ s \in R_+, \tag{9}$$

где мера μ_s определена равенством $\mu_s(\omega) := \int_\omega (1+|\xi|^2)^s d\xi \ \forall \omega \in \mathcal{B}(R^n)$, $\mathcal{B}(R^n)$ — борелевская σ-алгебра на R^n; $S'(R^n)$ — пространство обобщенных функций умеренного роста, подробно оно рассматривается, например, в [4, гл. 7]. Как известно, пространство (9) является пространством Соболева (см., например, [5, теорема 1.1.1]), при этом $\|u\|_{H^s(R^n)} = \|\check{u}\|_{L_2(\mu_s)}$, где $\|\check{u}\|^2_{L_2(\mu_s)} := \int (1+|\xi|^2)^s |\check{u}(\xi)|^2 d\xi$.

Введем обозначение для образа обратного преобразования Фурье пространства $H^s(R^n)$:

$$\check{H}^s(R^n) := \{\check{u}(\xi) : u(x) \in H^s(R^n)\} = \{v(\xi) \in S'(R^n) : \hat{v}(x) \in H^s(R^n)\},$$

в силу определения $\check{H}^s(R^n) = L_2(\mu_s)$ (функции из пространств $H^s(R^n)$, $\check{H}^s(R^n)$, $L_2(\mu_s)$ предполагаются комплекснозначными). Пусть

$$H^\infty(R^n) := \cap_{s=1}^\infty H^s(R^n).$$

На $H^\infty(R^n)$ введем счетную систему норм $\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty$, $\|u\|_m := \|u\|_{H^m(R^n)}$. Как и всякое счетно-нормированное пространство, его можно метризовать, т. е. ввести метрику, порождающую ту же топологию, что и исходная система норм. Введем такую метрику формулой $\rho(g,h) := \sum_{m=1}^\infty 2^{-m} \frac{\|g-h\|_m}{1+\|g-h\|_m}$. Метрическое пространство $H^\infty(R^n)$ полно [6, теорема 8.1.18]. Из теорем вложения пространств Соболева следует, что

$$H^\infty(R^n) = \{u \in C^\infty(R^n) : \partial^\alpha u \in L_2(R^n) \ \forall \alpha\}$$

[5, гл. I, п. 1.2].

Образ $\check{H}^\infty(R^n)$ обратного преобразования Фурье пространства $H^\infty(R^n)$ определяется равенством $\check{H}^\infty(R^n) = \{\check{u}(\xi) : u(x) \in H^\infty(R^n)\} = \{v(\xi) : \hat{v}(x) \in H^\infty(R^n)\}$. Очевидно,

$$\check{H}^\infty(R^n) := \cap_{m=1}^\infty \check{H}^m(R^n) = \cap_{m=1}^\infty L_2(\mu_m). \tag{10}$$

На $\check{H}^\infty(R^n)$ введем счетную возрастающую систему норм

$$\{\|\cdot\|_{\vee,m}\}_{m=1}^\infty, \ \|u\|_{\vee,m} = \|u\|_{L_2(\mu_m)} := \left(\int (1+|\xi|^2)^m |u(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

и эквивалентную ей метрику

$$\rho_\vee(g,h) := \sum_{m=1}^\infty 2^{-m} \frac{\|g-h\|_{\vee,m}}{1+\|g-h\|_{\vee,m}}. \tag{12}$$

В силу (10) метрическое пространство $\check{H}^\infty(R^n)$ полно.

Заметим, что метрика (12) инвариантна относительно сдвигов: $\rho_\vee(g,h) = \rho_\vee(g-f,h-f)$. Она не порождается никакой нормой, ибо $\rho_\vee(\lambda g,0) \neq |\lambda|\rho_\vee(g,0))$. Но, если положить $p_\vee(g) := \rho_\vee(g,0)$, то $p_\vee$ — псевдонорма, т. е. для $p_\vee$ выполнены положительность (($p_\vee(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $p_\vee(0) = 0$), полуаддитивность ($p_\vee(x+y) \leq p_\vee(x) + p_\vee(y)$))) и $p_\vee(\lambda x) = \chi(|\lambda|)p_\vee(x)$, где $\chi(\cdot)$ — некоторая функция со свойствами: $\chi(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\chi(0) = 0$, $\chi(\cdot)$ непрерывна в нуле.

Из аксиом псевдонормы следует, что функция $\chi : R_+ \to R_+$ неубывающая. Действительно, предположим противное, т. е. $\exists \lambda_1 < \lambda_2 : \chi(\lambda_1) > \chi(\lambda_2)$. Тогда $p(\lambda_1 x) > p(\lambda_2 x)\ \forall x$ и $p(\lambda_1 x) = p(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_2 x) = \chi(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})p(\lambda_2 x) < \chi(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})p(\lambda_1 x)$, т. е. $\chi(\lambda) > 1$, где p — псевдонорма, $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$. Для произвольного $x \neq 0$ рассмотрим последовательность $\lambda^n x$, в силу непрерывности χ в нуле $p(\lambda^n x) = \chi(\lambda^n)p(x) \to_{n\to\infty} 0$, но, с другой стороны, $p(\lambda^n x) = \chi(\lambda)p(\lambda^{n-1}x) = \cdots = (\chi(\lambda))^n p(x) \to_{n\to\infty} \infty$.

Очевидно, $\rho_\vee(g,h) = p_\vee(g-h)$.

Лемма 1. *Пусть $a_\alpha \in C^{0,A}_{F,T}(R^n)$. Тогда оператор A, определенный равенством* (8)*, действует из $\check{H}^\infty(R^n)$ в $\check{H}^\infty(R^n)$, линеен и непрерывен.*

Доказательство. Оценим нормы $\|(A(g))(\cdot)\|_{\vee,m}$. По неравенству Гёльдера

$$\|(A(g))(\cdot)\|^2_{\vee,m} = \int_{R^n_\xi}\left|\int_{R^n_\zeta} g(\zeta)\sum_{|\alpha|=2}\check{a}_\alpha(t,\xi-\zeta)\zeta^\alpha d\zeta\right|^2(1+|\xi|^2)^m d\xi \leq$$

$$\leq \left(\int |g(\zeta)|^2(1+|\zeta|^2)^{m+[\frac{n}{2}]+3}\right)d\zeta \cdot \int_{R^n_\xi}\left(\int_{R^n_\zeta}\left|\sum_{|\alpha|=2}\check{a}_\alpha(t,\xi-\zeta)\frac{\zeta^\alpha}{1+|\zeta|^2}\right|^2 \times\right.$$

$$\left.\times\frac{(1+|\xi|^2)^{m+1+[\frac{n}{2}]}}{(1+|\zeta|^2)^{m+1+[\frac{n}{2}]}}d\zeta\right)(1+|\xi|^2)^{-(1+[\frac{n}{2}])}d\xi. \qquad (13)$$

В силу определения пространства $C^{0,A}_{F,T}(R^n)$

$$\exists r:\ supp\check{a}_\alpha(t,\cdot) \subset B(0;r)\ \forall t \in [0,T],\ \forall\ a_\alpha \text{ из (3)}. \qquad (14)$$

Поэтому во внутреннем интеграле правой части неравенства цепочки (13) интегрирование можно проводить только по тем ζ, для которых $|\xi-\zeta| \leq r$, т. е. $r \geq ||\xi|-|\zeta||, |\xi| \leq |\zeta|+r$. Пользуясь последним неравенством и соотношением $(1+|\xi|^2) \leq (1+(|\zeta|+r)^2) \leq (1+r+|\zeta|)^2 \leq (1+r)^2(1+|\zeta|)^2 \leq (1+r)^2 3(1+|\zeta|^2)\ \forall \xi,\zeta:\ |\xi-\zeta| \leq r$, получим из (13) неравенство:

$$\|(A(g))(\cdot)\|_{\vee,m} \leq K(r,n,m,a_\alpha)\|g\|_{\vee,m+[\frac{n}{2}]+3}, \qquad (15)$$

где $K(r,n,m,a_\alpha) = ((3(1+r)^2)^{[\frac{n}{2}]+m+1}\int(\sum_{|\alpha|=2}|\check{a}_\alpha(t,\zeta)|)^2 d\zeta \int(1+|\xi|^2)^{-(1+[\frac{n}{2}])}d\xi)^{\frac{1}{2}}$.

Итак, $A : \check{H}^\infty(R^n) \to \check{H}^\infty(R^n)$. Линейность A очевидна. Непрерывность A следует из (15) [6, теорема 8.5.1]. Непрерывность линейного оператора в данном случае эквивалентна ограниченности [6, теорема 8.5.3]. □

Ниже нам понадобится несколько другая система норм, эквивалентная (11). Две системы норм мы называем эквивалентными, если они порождают одну и ту же сходимость (топологию). Как видно из [6, п. 3.4], для эквивалентности двух счетных возрастающих систем норм $\{\|\cdot\|_m^1\}$ и $\{\|\cdot\|_m^2\}$ достаточно иметь эквивалентность $\|\cdot\|_m^1$ и $\|\cdot\|_m^2 \forall m$. Пусть $r \geq 1$, где r определено в (14). Тогда

$$\|g\|_m^{\vee} := \left(\int (mr+|\xi|)^{2m}|g(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

является нормой и система $\{\|\cdot\|_m^{\vee}\}_1^{\infty}$ эквивалентна на $\check{H}^{\infty}$ системе (11). Действительно, $\|g\|_{\vee,m} \leq \|g\|_m^{\vee}$; $\|g\|_m^{\vee} \leq (mr)^m(\int(1+|\xi|)^{2m}|g(\xi)|^2d\xi)^{\frac{1}{2}} \leq (3mr)^m\|g\|_{\vee,m}$.

Пусть $\rho(g,h) := \sum_1^{\infty} 2^{-m}\frac{\|g-h\|_m^{\vee}}{1+\|g-h\|_m^{\vee}}$. Определим псевдонорму p, порожденную метрикой ρ,

$$p(g) := \rho(g,0). \tag{17}$$

Аналогично (13), (15) для системы $\{\|\cdot\|_m^{\vee}\}$ получим

$$(\|(A(g))(\cdot)\|_m^{\vee})^2 \leq \left(\int |g(\zeta)|^2(mr+|\zeta|)^{2m+n+3}d\zeta\right) \times$$
$$\times \int_{R_\xi^n}\left(\int_{R_\zeta^n}\left|\sum_{|\alpha|=2}\check{a}_\alpha(t,\xi-\zeta)\frac{\zeta^\alpha}{(mr+|\zeta|)^2}\right|^2 \frac{(mr+|\xi|)^{2m+n+1}}{(mr+|\zeta|)^{2m+n+1}}d\zeta\right),$$
$$(mr+|\xi|)^{-(1+n)}d\xi \leq (\|g\|_{m+[\frac{n+5}{2}]}^{\vee})^2\int_{R_\xi^n}(mr+|\xi|)^{-(n+1)} \times$$
$$\times\left(\int_{R_\zeta^n}\left(\sum_{|\alpha|=2}|\check{a}_\alpha(t,\xi-\zeta)|\right)^2\left(\frac{mr+|\zeta|+r}{mr+|\zeta|}\right)^{2m+n+1}d\zeta\right)d\xi \leq$$
$$\leq (\|g\|_{m+[\frac{n+5}{2}]}^{\vee})^2\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}K(n,a_\alpha), \tag{18}$$

где $K(n,a_\alpha) = 2^{n+1}\int(1+|\xi|)^{-(n+1)}d\xi\int(\sum_{|\alpha|=2}|\check{a}_\alpha(t,\xi)|)^2d\xi$.

Далее будет использовано пространство интегрируемых функций со значениями в псевдонормированном полном пространстве. В связи с этим приведем некоторые определения и свойства интеграла Бохнера, определяемого обычно для B-значных функций, где B — банахово пространство. Мы сформулируем их в частном случае, когда функция определена на измеримом пространстве с мерой $([0,T],\sigma,\mu)$. Если $h(t)$ — B-значная ступенчатая функция со значениями h_i на $S_i \in \sigma$, то $\int_0^T h(t)\mu(dt) := \sum h_i\mu(S_i)$. Пусть теперь $h(t)$ — произвольная измеримая функция, т. е. предельная функция для какой-то последовательности $\{h_n(t)\}$ ступенчатых функций сходящейся μ — почти всюду на $[0,T]$. Тогда $\|h(t)-h_n(t)\|$ — измеримая функция и имеет смысл интеграл $\int_0^T\|h(t)-h_n(t)\|\mu(dt)$. Если последний интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$, то существует $lim_{n\to\infty}\int_0^T h_n(t)\mu(dt)$, который и принимается за $\int_0^T h(t)\mu(dt)$, он не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций $\{h_n(t)\}$ [7]. Верна теорема Бохнера: $h(t)$ — интегрируема по Бохнеру, следовательно, $h(t)$ измерима и $\int\|h(t)\|\mu(dt) < \infty$.

Приведенная схема построения интеграла проходит без всяких изменений и в случае, когда в качестве B берется полное псевдонормированное пространство.

Пусть p — псевдонорма на векторном пространстве $B, (B,p)$ — полно. Верны аналог теоремы Бохнера, неравенство $p(\int_0^T f(t)\mu(dt)) \leq \int_0^T p(f(t))\mu(dt)$, аналоги других свойств интеграла Бохнера.

Рассмотрим при $q \geq 1$ пространство $L_q([0,T],\mu;B)$ μ-измеримых на $[0,T]$ B-значных функций (классов эквивалентности), для которых $(p(u))^q$ μ — интегрируема на $[0,T]$. Пространство $L_q([0,T],\mu;B)$ при $q \geq 1$ с псевдонормой $p_q(u) = (\int_0^T (p(u(t)))^q \mu(dt))^{\frac{1}{q}}$ является полным пространством, что следует из доказательства соответствующего утверждения в случае банахова пространства B. В случае, когда μ-мера Лебега на отрезке $[0,T]$, указывать ее в обозначении пространства не будем.

Лемма 2. *Пусть при некотором $T_1 > 0$ для правой части уравнения* (3) *выполнены включения $f(\cdot,x) \in C([0,T_1])\forall x \in R^n$ и $f(t,\cdot) \in H^\infty(R^n)\forall t \in [0,T_1]$, начальное условие $u_0(x)$ из* (4) *принадлежит $H^\infty(R^n)$. Тогда при некотором $T \leq T_1$ существует функция v такая, что $v(\cdot,x) \in C^1([0,T])\forall x \in R^n, v(t,\cdot) \in \check{H}^\infty(R^n))\forall t \in [0,T]$ и v является единственным решением задачи* (7) *в пространстве $(L_1([0,T];\check{H}^\infty(R^n)),p_1)$, где псевдонорма $p_1(u) = \int_0^T p(u(t))dt$, а псевдонорма p определяется равенством* (17).

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (6) следует, что

$$\exists C_1 > 0: \; sup_{t\in[0,T_1]} \int_{R^n_\zeta} \left| \sum_{|\alpha|=2} \check{a}_\alpha(t,\xi) \right| d\xi < C_1. \tag{19}$$

Поэтому в (18) величину $K(n,a_\alpha)$ можно взять не зависящей от t, хотя a_α зависит от t. Далее, интегральное уравнение

$$\check{u}(t,\xi) = \check{u}_0(\xi) + \int_0^t \int_{R^n_\zeta} \Phi(\tau,\xi,\zeta)\check{u}(\tau,\zeta)d\zeta + \check{f}(\tau,\xi)d\tau, \tag{20}$$

где $\Phi(\tau,\xi,\zeta)$ определено сразу после формулы (7), эквивалентно задаче (7). Введем оператор $B : L_1([0,T];\check{H}^\infty(R^n)) \to L_1([0,T];\check{H}^\infty(R^n))$, где T будет определено ниже, равенством

$$\begin{aligned} Bg = \check{u}_0(\xi) + \int_0^t \int_{R^n_\zeta} \Phi(\tau,\xi,\zeta)g(\tau,\zeta)d\zeta + \check{f}(\tau,\xi)d\tau = \\ = \check{u}_0(\xi) + \int_0^t (A(g(\tau,\cdot)))(\tau,\xi) + \check{f}(\tau,\xi)d\tau, \; t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь A — оператор (8). Метрика на $L_1([0,T];\check{H}^\infty(R^n))$, как указывалось выше, определяется равенством $d(\phi,\psi) := p_1(\phi - \psi)$, а псевдонорма p_1 определена в формулировке леммы 2. Очевидно,

$$\begin{aligned} d(Bg,Bh) = p_1(Bg - Bh) = \int_0^T p\left(\int_0^t (A(g(\tau,\cdot) - h(\tau,\cdot))(\tau,\xi))d\tau\right) dt \leq \\ \leq \int_0^T \left(\int_0^T p(A(g(\tau,\cdot) - h(\tau,\cdot))(\tau,\xi))d\tau\right) dt. \end{aligned}$$

Пользуясь определением псевдонормы, неравенствами (18), (19) и строгим возрастанием функции $t(1+t)^{-1}$, получим

$$d(Bg,Bh) \le T\int_0^T \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\|A(g(\tau,\cdot)-h(\tau,\cdot))\|_m^{\vee}(1+\|A(g(\tau,\cdot)-h(\tau,\cdot))\|_m^{\vee})^{-1}d\tau <$$

$$< T\int_0^T \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\frac{e_m K N_{m+n+1}}{1+e_m K N_{m+n+1}}dt,$$

где $e_m := ((1+\frac{1}{m})^m)^2 \uparrow e^2$, $N_m := \|g(t)-h(t)\|_m^{\vee}$, K — константа из (18), не зависящая от m, t. Взяв $K \ge 1$, имеем

$$d(Bg,Bh) \le Te^2K\int_0^T \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\frac{N_{m+n+1}}{1+N_{m+n+1}} = Te^2K2^{n+1}\int_0^T \sum_{m=n+2}^{\infty} 2^{-m}\frac{N_m}{1+N_m} <$$

$$< Te^2K2^{n+1}\int_0^T \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\frac{N_m}{1+N_m} = Te^2K2^{n+1}d(g,h),$$

так как $e_mK > 1$ $\forall m$ и $(e_mKN_{m+n+1})(1+e_mKN_{m+n+1})^{-1} < (e_mKN_{m+n+1})(1+N_{m+n+1})^{-1} < eKN_{m+n+1}(1+N_{m+n+1})^{-1}$. Отсюда, взяв $T < (e^2K2^{n+1})^{-1}$, имеем, что оператор $B : L_1([0,T];\check{H}^{\infty}(R^n)) \to L_1([0,T];\check{H}^{\infty}(R^n))$ является сжимающим и поэтому существует неподвижная точка, т. е. такое $v \in L_1([0,T];\check{H}^{\infty}(R^n))$, что

$$v(t,\xi) = \check{u}_0(\xi) + \int_0^t (A(v(\tau,\cdot)))(\tau,\xi) + \check{f}(\tau,\xi)d\tau. \tag{22}$$

Абсолютная непрерывность при произвольном фиксированном ξ правой части последнего равенства является известным свойством неопределенного интеграла Лебега, что и означает аналогичное свойство для $v(t,\xi)$, т. е. $\forall\xi \in R^n$ $v(\cdot,\xi) \in AC([0,T])$ (здесь мы воспользовались также и определением (8) оператора A, и тем, что $\check{a}_\alpha(t,\xi)$ непрерывны по t). Воспользуемся еще раз (22). В правой части (22) под знаком интеграла стоит функция, непрерывная по переменной интегрирования. Поэтому $v(\cdot,\xi) \in C^1(0,T)$. □

Заметим, что любая функция $w(t) = \int_0^t f(\tau)\mu(d\tau),\ t \in [0,T]$ со значениями в полном псевдонормированном пространстве (B,p) дифференцируема (по Фреше) μ п. в. как функция $w(\cdot) : [0,T] \to (B,p)$ [8, гл. 6, § 4, лемма 10].

Из леммы 2 следует разрешимость следующей задачи:

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in H^{\infty}(R^n). \tag{23}$$

Теорема 1. *Пусть* $a_\alpha \in C^{0,A}_{F,T_1}(R^n)$, $f(\cdot,x) \in C([0,T_1])\forall x \in R^n, f(t,\cdot) \in H^{\infty}(R^n))\forall t \in [0,T_1]$. *Тогда* $\exists T \le T_1$: *на* $[0,T]$ *задача* (23) *имеет решение из* $L_1([0,T];H^{\infty}(R^n))$, *и оно единственно в нем.*

Доказательство. В соответствии с леммой 2 $\exists T$: существует функция $v(\cdot,x) \in C^1([0,T])\forall x \in R^n, v(t,\cdot) \in \check{H}^{\infty}(R^n))\forall t \in [0,T]$ и $v(t,\xi)$ является решением задачи (7). Очевидно, функция $u(t,x) = \hat{v}(t,x) \in L^1([0,T];H^{\infty}(R^n))$ является решением задачи (23).

Так как преобразование Фурье является изометрией между пространствами $H^\infty(R^n)$, $\check{H}^\infty(R^n)$, и если $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ — различные решения задачи (23) из $L^1([0,T];H^\infty(R^n))$, то $\check{u}_1(t,\xi)$, $\check{u}_2(t,\xi)$ — два разных решения задачи (7) из $L^1([0,T];\check{H}^\infty(R^n))$, что противоречит лемме 2. □

Рассмотрим теперь задачу

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in H^\infty(R^n)$$

с теми же условиями на коэффициенты, правую часть, что и в задаче (23). Применив обратное преобразование Фурье, получим

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) - \int_{R^n_\xi} \Phi(t,\xi,\zeta)\check{u}(t,\zeta)d\zeta = \check{f}(t,\xi), \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi) \in \check{H}^\infty(R^n),$$

где

$$\Phi_{2k}(t,\xi,\zeta) := (-1)^k \sum_{|\alpha|=2k} \check{a}_\alpha(t,\xi-\zeta)\zeta^\alpha, \quad \Phi(t,\xi,\zeta) := \sum_{k=0}^{m} \Phi_{2k}(t,\xi,\zeta). \tag{24}$$

Лемма 3. *Для любого $t \in [0,T]$ определим равенством (8), где вместо Φ берется Φ_{2k} из (24), оператор A_{2k} с областью определения $\check{H}^\infty(R^n)$. Тогда A_{2k} : $\check{H}^\infty(R^n) \to \check{H}^\infty(R^n)$ линеен и непрерывен.*

Доказательство. Так же как в (2.17), получается оценка:

$$(\|((A_{2k}(g))(\xi)\|_m^\vee)^2 \le (\|g\|_{m+k+n}^\vee)^2 \left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m} K(n,a_\alpha),$$

$$K(n,a_\alpha) = 2^{n+1}\int (1+|\xi|)^{-(n+1)}d\xi \int \left(\sum_{|\alpha|=2k} |\check{a}_\alpha(t,\xi)|\right)^2 d\xi, \tag{25}$$

т. е. $A_{2k}(\check{H}^\infty(R^n)) \subset \check{H}^\infty(R^n)$, A_{2k} — непрерывен; линейность A_{2k} очевидна.

Из леммы 3 следует, что оператор $A := \sum_{k=0}^m A_{2k}$ (для A верно равенство (8), где Φ определено в (24)) действует из $\check{H}^\infty(R^n)$ в $\check{H}^\infty(R^n)$ линейно и непрерывно.

Теорема 2. *Пусть в задаче Коши*

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in H^\infty(R^n), \tag{26}$$

$a_\alpha \in C^{0,A}_{F,T_1}(R^n)$, $f(\cdot,x) \in C([0,T_1])\forall x \in R^n$, $f(t,\cdot) \in H^\infty(R^n))\forall t \in [0,T_1]$. *Тогда* $\exists T \le T_1 :$ *на* $[0,T]$ *задача* (26) *имеет решение из пространства* $L_1([0,T];H^\infty(R^n))$, *и оно единственно в нем.*

Доказательство теоремы 2 получается очевидной модификацией доказательства теоремы 1.

Верна также более общая теорема. При этом пространство коэффициентов определяется следующим образом:

$$C^{l,A}_{F^1,T}(R^n) := \{\Phi|_{[0,T]\times R^n} | (\Phi(\cdot,x) \in C^l(0,T)\forall x \in R^n) \wedge (\forall t \in [0,T]),$$

$$\Phi(t,\cdot): C^n \to C \text{ — целая функция: } ((Im\Phi(t,x) = 0 \forall (t,x) \in [0,T]\times R^n) \wedge$$

$$(\exists c = c(\Phi), r = r(\Phi) \in R: \ |\Phi(t,z)| < c(1+\|z\|_{C^n})^{-1}e^{r|Imz|} \ \forall (t,z) \in [0,T]\times C^n)\}.$$

Из упомянутой выше теоремы Пэли—Винера следует, что если $a_\alpha \in C^{0,A}_{F^1,T}(R^n)$, то $supp\check{a}_\alpha(t,\cdot) \Subset R^n$, $\check{a}_\alpha(t,\cdot)$ — дифференцируема и $\partial_{x_j}\check{a}_\alpha(t,\cdot) \in L_2(R^n)\ \forall j$.

Символ F^1 в нижнем индексе обозначения пространства $C^{l,A}_{F^1,T}(R^n)$ указывает на то, что обратное преобразование функций из этого пространства является регулярной функцией, имеющей частные производные первого порядка по пространственным переменным.

Теорема 3. *Рассматривается задача Коши*

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|\le m} \varepsilon_\alpha a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in H^\infty(R^n), \tag{27}$$

где $\exists T_1 :\ f(\cdot,x) \in C([0,T_1])\forall x \in R^n, f(t,\cdot) \in H^\infty(R^n)\forall t \in [0,T_1], a_\alpha \in C^{0,A}_{F,T_1}(R^n)$ *при четных* $|\alpha|$ *и* $a_\alpha \in C^{0,A}_{F^1,T_1}(R^n)$ *при нечетных* $|\alpha|$; $\varepsilon_\alpha = 1$ *при четных* $|\alpha|$ *и одной из пространственных переменных* x_i *при нечетных* $|\alpha|$. *Тогда* $\exists T \le T_1 :\ \exists u \in L_1([0,T];H^\infty(R^n))$ *такая, что* $u(\cdot,x) \in C^1((0,T))\forall x \in R^n$ *и является решением задачи* (27) *и оно единственно в* $L_1([0,T];H^\infty(R^n))$.

Доказательство. Рассмотрим случай уравнения

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|=2k+1} \varepsilon_\alpha a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x).$$

Применив к нему обратное преобразование Фурье, а затем проинтегрировав по частям, получим

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + (A_{2k+1}\check{u}(t,\zeta))(t,\xi) = \check{f}(t,\xi),$$

где оператор $A_{2k+1} : \check{H}^\infty(R^n) \to \check{H}^\infty(R^n)$ действует по формуле

$$(A_{2k+1}g(t,\cdot))(t,\xi) := (-1)^{k+1}\int \sum_{|\alpha|=2k+1} \zeta^\alpha(\partial_{i(\alpha)}\check{a}_\alpha(t,\xi-\zeta))g(t,\zeta)d\zeta.$$

Аналогично (18) получается оценка

$$\|(A_{2k+1}(g))(\xi)\|^\vee_m)^2 \le (\|g\|^\vee_{m+k+1+n})^2\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m} K'(n,a_\alpha),$$

где $K'(n,a_\alpha) = 2^{n+1}\int(1+|\xi|)^{-(n+1)}d\xi\int(\sum_{|\alpha|=2k+1}|\partial_{\xi_{i(\alpha)}}\check{a}_\alpha(t,\xi)|)^2 d\xi$. Используя эту оценку и (25), получим

$$\left(\left\|\sum_{k=0}^m (A_k(g))(\xi)\right\|^\vee_l\right)^2 \le 2^{n+1}\int(1+|\xi|)^{-(n+1)}d\xi,$$

$$\int\left(\sum_{|\alpha|\le m}(|\check{a}_\alpha(t,\xi)| + |\partial_{\xi_{i(\alpha)}}\check{a}_\alpha(t,\xi)|)\right)^2 d\xi\left(\sum_{k=0}^m \|g\|_{l+k+1+n}\right)^2. \tag{28}$$

Из (28) следует, что $\sum_{k=1}^m A_k =: A : L_1([0,T];\check{H}^\infty(R^n)) \to L_1([0,T];\check{H}^\infty(R^n))$ — сжатие, поэтому задача

$$\partial_t\check{u}(t,\xi) + (A\check{u}(t,\zeta))(t,\xi) = \check{f}(t,\xi), \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi) \in \check{H}^\infty(R^n), \tag{29}$$

которая получается применением обратного преобразования Фурье к задаче (27), имеет единственное в $L_1([0,T];\check{H}^\infty(R^n))$ решение; доказательство аналогично доказательству леммы 1. Так же как в теореме 1, получается, что преобразование Фурье этого решения будет единственным в $L_1([0,T];H^\infty(R^n))$ решением задачи (27).

Замечание 1. Если в теоремах 1–3 начальные условия берутся из пространства Шварца $S(R^n)$ быстро убывающих функций, а правые части уравнений непрерывны по t при фиксированных пространственных переменных и принадлежат $S(R^n)$ как функции от пространственных переменных при фиксированной временной, то приведенные выше доказательства этих теорем с соответствующими очевидными изменениями дают существование и единственность решений в $L_1([0,T];S(R^n))$.

3. Представление решений задачи Коши для линейных уравнений с коэффициентами $a_\alpha(t)\cdot b_\alpha(x)$. Применение преобразования Фурье к уравнению (2), сводящее его к интегро-дифференциальному уравнению, позволяет также получить формулы для решения задачи (2), (4) в различных случаях. Проиллюстрируем этот подход на нескольких примерах.

Рассмотрим сначала уравнение (3), когда

$$f(t,x)\equiv 0, a_\alpha(t,x)=a_\alpha(t)b_\alpha(x); a_\alpha\in C(0,T), b_\alpha\in C_F^A(R^n),$$

где пространство коэффициентов $C_F^A(R^n)$ определяется равенством

$$C_F^A(R^n):=\{\Phi|_{R^n}|\Phi:C^n\to C-\text{целая функция}:((Im\Phi(x)=0\forall x\in R^n)\wedge \\ \wedge(\exists c=c(\Phi),r\in R:|\Phi(z)|<ce^{rImz}\forall z\in C^n)\}.$$

Из одного из вариантов теоремы Пэли — Винера следует, что

$$\varphi\in C_F^A(R^n)\Leftrightarrow((\check{\varphi}\in L_2(R^n))\wedge(supp\check{\varphi}\subset B(0;r))).$$

Поэтому $\check{b}_\alpha\in L_2^0(R^n):=\{f\in L_2(R^n):\ suppf\Subset R^n\}\forall\alpha$. Под носителем функции $b\in L_2$ мы понимаем носитель обобщенной (регулярной) функции b. Определим на $L_2(R^n)$ оператор A_α равенством

$$(A_\alpha(g))(\xi)=\int_{R^n_\zeta}\check{b}_\alpha(\xi-\zeta)\zeta^\alpha g(\zeta)d\zeta.$$

Так же как лемма 1, доказывается, что оператор $A_\alpha:S(R^n)\to S(R^n)$ линеен и непрерывен. Применив обратное преобразование Фурье к уравнению (3), получим

$$\partial_t\check{u}(t,\xi)=\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(t)(A_\alpha\check{u})(t,\xi). \tag{30}$$

Начальное условие для $\check{u}(t,\xi)$ также берем из $S(R^n)$, следовательно, $u(0,x)\in S(R^n)$,

$$\check{u}(t,\xi)|_{t=0}=\check{u}_0(\xi)\in S(R^n). \tag{31}$$

Тогда, очевидно,

$$\check{u}(t,\xi)=\sum_{|\alpha|=2}e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A_\alpha}\check{u}_0(\xi). \tag{32}$$

Напомним, что операторная экспонента $e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A}$ определяется равенством $e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)^k A^k}{k!}$ (так как $\|A^k\| \le \|A\|^k$, то $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$, и поэтому ряд для экспоненты $e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A}\check{u}_0$ сходится — частичные суммы образуют фундаментальную последовательность, а $S(R^n)$ — полное пространство). В силу линейности и ограниченности оператора задача (30), (31) имеет единственное решение, представленное у нас в виде (32).

Таким образом, взяв преобразование Фурье в (32), получим комплексное решение задачи (3), (4) с $f(t,x) \equiv 0$:

$$u(t,x) = F_{\xi \to x}\left(\sum_{|\alpha|=2} e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A_\alpha}\check{u}(\xi)\right). \tag{33}$$

Функция $u(t,x)$, определяемая равенством (33), принадлежит пространству $L_1([0,T];S(R^n))$. Поэтому в соответствии с замечанием 1 это решение единственно в $L_1(0,T;S(R^n))$. Заметим, что $Imu(t,x)$ — действительное решение уравнения (3) с $f(t,x) \equiv 0$ при нулевом начальном условии. Поэтому $Imu(t,x) \equiv 0$ и, следовательно, $u(t,x)$ из (33) является действительным решением (3), (4) с $f(t,x) \equiv 0$.

Точно так же доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $u_0 \in S(R^n), a_\alpha(t) \in C(0,T), b_\alpha(x) \in C_F^A(R^n), f(\cdot,x) \in C(0,T)\forall x \in R^n, f(t,\cdot) \in S(R^n)\forall t \in [0,T]$. *Тогда задача*

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(t)b_\alpha(x)\partial_x^\alpha u(t,x) = f(t,x), \ \ u|_{t=0} = u_0(x)$$

имеет единственное в $L_1((0,T);S(R^n))$ *решение, и это решение представляется в виде*

$$u(t,x) = F_{\xi\to x}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{|\alpha|=2k} e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A_\alpha}\check{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_\alpha}\check{f}(\tau,\xi)d\tau\right)\right).$$

Отметим, что полученное решение из-за единственности решения является действительным (а не комплексным) решением.

Изменим теперь пространство начальных данных — вместо $S(R^n)$ возьмем $C_F^A(R^n)$. Рассмотрим уравнение (3) при $f(t,x) \equiv 0$ со следующим начальным условием:

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in C_F^A(R^n). \tag{34}$$

Преобразованием Фурье задача (3), (34) сводится к уравнению (30) со следующим условием Коши:

$$\check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(x) \in L_2^0(R^n). \tag{35}$$

В силу неравенства Коши—Буняковского $A_\alpha(L_2(R^n)) \subset L_2(R^n)$, более того, $A_\alpha(L_2^0(R^n)) \subset L_2^0(R^n)$.

Действительно, если $g \in L_2^0(R^n)$ и $r_0, r_\alpha(|\alpha| = 2)$ таковы, что $B(0;r_0) \supset suppg$, $B(0;r_\alpha) \supset supp\check{b}_\alpha$, то, взяв $r = r_0 + \max\{r_\alpha\}$, получим $suppA_\alpha g \subset B(0;r)$. Но для оператора e^{A_α} из этого следует только, что он действует из $L_2^0(R^n)$ в $L_2(R^n)$. Далее,

$$\int |(A_\alpha(g))(\xi)|d\xi \le \int |\check{b}_\alpha(\xi-\zeta)|\cdot|\zeta^\alpha g(\zeta)|d\zeta \le \int |\check{b}_\alpha(y)|dy \times$$
$$\times r\int |g(\zeta)|d\zeta = C_\alpha r\|g\|_{L_1},\ \|A_\alpha^k g\|_{L_1} \le C_\alpha^k r^k (k!)\|g\|_{L_1}. \tag{36}$$

Поэтому при достаточно малых t ряд

$$\check{u}(t,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A_\alpha}\check{u}_0(\xi) \tag{37}$$

сходится в L_1 и представляет решение задачи (30), (35). Так же как в (36) $\int |\zeta^\alpha(A_\alpha^k(g))(\xi)|d\xi \le C_\alpha^k r^{k+|\alpha|}(k!)\|g\|_{L_1}$, т. е. для функции (37)

$$\xi^\alpha \check{u}(t,\xi) \in L_1\ \forall \alpha : |\alpha| \le m, \tag{38}$$

где m — произвольное заданное натуральное число. В соответствии с теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, беря почленно в бесконечной сумме (37) преобразование Фурье, получим $u(t,x)$. Из (38) следует $u(t,\cdot) \in C^m(R^n)$.

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть при некотором* T_1 $a_\alpha(t) \in C(0,T_1), b_\alpha(x) \in C_F^A(R^n)\forall\alpha$: $|\alpha| = 2;$ $f(\cdot,x) \in C(0,T_1)\forall x \in R^n, f(t,\cdot) \in S(R^n)\forall t \in [0,T_1], u_0(x) \in C_F^A(R^n)$. *Тогда* $\exists 0 < T < T_1$:

$$u(t,x) = F_{\xi\to x}\left(\sum_{|\alpha|=2} e^{(\int_0^t a_\alpha(\tau)d\tau)A_\alpha}\check{u}(\xi)\right)$$

является решением (действительным) задачи

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t)b_\alpha(x)\partial_x^\alpha u(t,x) = 0,\ \ u|_{t=0} = u_0(x),$$

и оно единственно в $L_1((0,T);H^\infty)$.

В силу единственности решения полученное решение является действительнозначной функцией.

Аналогично можно выписать решения и в других подобных случаях.

Автор благодарит А. В. Фурсикова за консультации и ценные советы.

Литература

1. Гишларкаев В. И. Об одном способе представления решений задачи Коши для линейных уравнений в частных производных. *Математический сборник* **209** (2), 82–101 (2018). https://doi.org/10.4213/sm8816

2. Гишларкаев В. И. Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных: формулы представления решений задачи Коши. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 3. 480–494 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.309

3. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Задача Коши. *Сер. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Фундаментальные направления* **32**, 5–98 (1988).

4. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, пер. с англ. Т. 1. Москва, Мир (1988).

5. Агранович М. С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей.* Москва, МЦНМО (2013).

6. Агранович М. С. *Обобщенные функции.* Москва, МЦНМО (2008).

7. Иосида К. Функциональный анализ, пер. с англ. Москва, ЛКИ/URS (2010).

8. Корпусов М. О., Свешников А. Г. *Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Геометрические и топологические свойства линейных пространств.* Москва, Красанд/URSS (2011).

Статья поступила в редакцию 9 мая 2022 г.;
доработана 16 июня 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Гишларкаев Ваха Исаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; vakhag@mail.ru

Fourier transform method for partial differential equations. Part 2. Existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problem for linear equations*

V. I. Gishlarkaev

Chechen State University,
32, ul. Sheripova, Grozny, 364093, Russian Federation

For citation: Gishlarkaev V. I. Fourier transform method for partial differential equations. Part 2. Existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problem for linear equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 21–35. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.103 (In Russian)

The article proposes a method for analyzing the Cauchy problem for a wide class of evolutionary linear partial differential equations with variable coefficients. By applying the (inverse) Fourier transform, the original equation is reduced to an integro-differential equation, which can be considered as an ordinary differential equation in the corresponding Banach space. The selection of this space is carried out in such a way that the principle of contraction mappings can be used. To carry out the corresponding estimates for the operators generated by the transformed equation, we impose the conditions of finiteness in the space variable for the inverse Fourier transform of the coefficients, and the spaces of the coefficients of the original equation are determined from the Paley — Wiener Fourier transform theorems. In this case, the apparatus of the theory of the Bochner integral in pseudo-normed spaces, countably-normed spaces and Sobolev spaces is used. Classes of functions are distinguished in which the existence and uniqueness of solutions are proved. For equations with coefficients with separated variables, exact solutions are obtained in the form of a Fourier transform of finite sums for operator exponentials.

Keywords: Fourier transform, distributions with compact support, convolution, integro-differential equations, Paley — Wiener theorem, operator exponential.

*First part see: Gishlarkaev V. I. Fourier transform method for partial differential equations: Formulas for representing solutions to the Cauchy problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 480–494. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.309 (In Russian)

References

1. Gishlarkaev V. I. A method for representing solutions of the Cauchy problem for linear partial differential equations. *Mat. Sb.* **209** (2), 82–101 (2018). https://doi.org/10.4213/sm8816 (In Russian) [Eng. transl.: *Sbornik: Mathematics* **209** (2), 222–240 (2018). https://doi.org/10.1070/SM8816].

2. Gishlarkaev V. I. Fourier-Transform Method for Partial Differential Equations: Formulas for Representing Solutions to the Cauchy Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 3. 480–494 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.309.2022 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 3, 301–312 https://doi.org/10.1134/S1063454122030086 (2022)].

3. Volevich L. R., Gindikin S. G. The Cauchy problem. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennye problemy matematiki.* VINITI. *Fundam. Napravleniya* **32**, 5–98 (1988). (In Russian)

4. *Hormander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis. In Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 256. Berlin, SpringerVerlag (1983). [Rus. ed.: Hormander L. Analiz linejnyh differencial'nyh operatorov s chastnymi proizvodnymi. Vol. 1. Moscow, Mir Publ. (1988)].

5. Agranovich M. S. *Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in domains with smooth and Lipschitz boundaries.* Moscow, MTsNMO Publ. (2013). (In Russian)

6. Agranovich M. S. *Distributions.* Moscow, MTsNMO Publ. (2008). (In Russian)

7. Yosida K. *Functional Analysis.* Berlin, Gottingen, Heidelberg, Springer-Verlag (1965) [Rus. ed.: Yosida K. *Funktsional'nyi analiz.* Moscow, LKI/URS Publ. (2010)].

8. Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. *Nonlinear functional analysis and mathematical modeling in physics. Geometric and topological properties of linear spaces.* Moscow, Krasand/URSS Publ. (2011). (In Russian)

Received: May 9, 2022
Revised: June 16, 2022
Accepted: September 8, 2022

Author's information:

Vakha I. Gishlarkaev — vakhag@mail.ru