МАТЕМАТИКА

УДК 517.98
MSC 81P15

О продолжении семейства проекторов до положительной операторнозначной меры*

А. О. Алексеев, Г. Г. Амосов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Российская Федерация, 141701, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9

Для цитирования: *Алексеев А. О., Амосов Г. Г.* О продолжении семейства проекторов до положительной операторнозначной меры // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 3–13.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.101

Рассмотрена задача о построении меры на дискретном множестве X, принимающей значения в положительном конусе ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Предполагается, что изначально задана проекторнозначная функция, определенная на подмножестве X_0 исходного множества X. Цель исследования — поиск скалярной меры μ на множестве X и продолжение проекторнозначной функции с X_0 на X. В результате получается операторнозначная мера, обладающая проекторнозначной плотностью относительно μ. В общем случае задача решена для $|X| = 4$ и $|X_0| = 2$. В качестве примера рассмотрена функция на X_0, принимающая значения во множестве проекторов на когерентные состояния. Для этого случая исследован вопрос об информационной полноте измерения, определяемого построенной мерой. Иными словами, можно ли по значениям матричного следа от произведения меры с квантовым состоянием (положительным оператором с единичным следом) восстановить квантовое состояние. Показано, что для построенной меры восстановить квантовое состояние можно, только если оно является проектором. Также найдено ограничение на распределение вероятностей, при котором оно может быть получено в результате измерения некоторого квантового состояния.

Ключевые слова: операторнозначная мера, когерентные состояния, информационная полнота.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00086, https://rscf.ru/project/19-11-00086/.

1. Введение. Некоммутативные операторнозначные меры составляют неотъемлемую часть квантовой теории информации [1], основы которой были заложены в пионерской работе [2], в которой была введена величина, называемая теперь верхней границей Холево, ограничивающая сверху информацию Шеннона, характеризующую измерение квантового состояния (положительного оператора с единичным следом). Неожиданным обнаруженным эффектом стало то, что верхняя граница Холево строго больше информации Шеннона, если операторнозначная мера некоммутативна (не является проекторнозначной мерой). Данный факт мотивировал исследования таких мер, являющихся проекциями проекторнозначных мер в силу знаменитой теоремы Наймарка [3]. В результате возникла квантовая теория статистических решений, позволяющая получать решающие правила для определения того, каким является состояние квантовой системы [4].

Одной из важнейших задач квантовой теории информации является проверка, будет ли операторнозначная мера информационно полной, т. е. можно ли восстановить квантовое состояние по результатам измерения [5]. Наиболее весомые результаты здесь были получены в случае дискретных мер. Значительный интерес представляет построение симметричных информационно полных мер (SIC-POVM) [6]. С другой стороны, задача об информационной полноте содержательна для непрерывных операторнозначных мер, т. е. таких мер, которые имеют операторнозначные плотности относительно некоторой меры Лебега. Классическим примером таких мер являются меры, плотностями которых являются проекторы на когерентные состояния [7]. В случае мер на локально компактных группах, построение информационно полных мер, ковариантных относительно действия проективных унитарных представлений группы, было решено с помощью использования принципа двойственности Понтрягина [8, 9].

В квантовой криптографии при передаче информации от передающей к принимающей стороне (называемых обыкновенно Алиса и Боб) используются заранее оговоренные способы кодирования информации квантовыми состояниями и ее декодирование с помощью известных операторнозначных мер. После передачи информации Алиса и Боб обмениваются данными о выборе кодирования и декодирования, с помощью чего получается так называемое квантовое распределение ключа [10]. Первый и наиболее известный протокол квантового распределения ключа BB84 [11] предполагает, что передающая и принимающая стороны используют двухуровневые системы, т. е. итоговое гильбертово пространство состояний равно четырем. Тем не менее фактически при передаче и измерении используется источник когерентного излучения, так что реальную систему следует считать бесконечномерной, тем самым возникает проблема исследования непрерывных операторнозначных мер, обладающих проекторнозначными плотностями [12].

В предлагаемой работе доказывается, что к заданному семейству из двух проекторов можно добавить еще два проектора, действующих в том же гильбертовом пространстве, так что существуют такие положительные веса, заданные на проекторах, вместе с которыми они образуют операторнозначную меру. В качестве примера рассмотрены проекторы на когерентные состояния. Для этого случая исследована информационная полнота канала, определяемого операторнозначной мерой. Данный канал осуществляет отображение выпуклого множества квантовых состояний (положительных операторов с единичным следом) в выпуклое множество распределений вероятностей. Доказано, что построенный канал не является информационно полным, т. е. по результату измерения нельзя восстановить произвольное состояние системы. Тем не менее, если состояние представляет собой одномерный проектор, оно может быть восстановлено. Найдены ограничения, которым удовлетворяют распределения вероятностей, получающиеся как результат измерения состояний.

2. Необходимые определения и постановка задачи. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство с фиксированной σ-алгеброй измеримых множеств $\mathfrak{A}$. Считают, что мера μ, заданная на $\mathfrak{A}$, является счетно-конечной, если [13]

$$\mu(A) \in [0, +\infty],\ A \in \mathfrak{A},$$

и существует такое счетное множество $\{A_k\} \subset \mathfrak{A},\ \mu(A_k) < +\infty$, что

$$X = \cup_k A_k.$$

В случае, если

$$\mu(A) < +\infty,\ A \in \mathfrak{A},$$

мера называется конечной. Обозначим $B(H)$ и $B(H)_+$ как алгебру всех ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H и конус всех положительных операторов в $B(H)$ соответственно. Отображение $\mathfrak{M} : \mathfrak{A} \to B(H)_+$ называется положительной операторнозначной мерой, если [4]

$$\mathfrak{M}(\cup_k A_k) = \sum \mathfrak{M}(A_k),\ A_k \in \mathfrak{A},\ A_k \cap A_m = \emptyset, k \neq m;$$

$$\mathfrak{M}(\emptyset) = 0,\ \mathfrak{M}(X) = I.$$

Будем считать, что мера $\mathfrak{M}$ является абсолютно непрерывной относительно меры μ с проекторнозначной плотностью, если существует такая измеримая проекторнозначная функция P на X, что

$$\mathfrak{M}(A) = \int_A P(x) d\mu(x). \tag{1}$$

Нас будет интересовать решение следующей задачи.

Вопрос. *Пусть имеется некоторый набор проекторов $P_x,\ x \in X_0 \in \mathfrak{A}$. Можно ли найти такую счетно-конечную меру μ, что для нее существует такая мера (1), что для сужения*

$$P(x) = P_x,\ x \in X_0? \tag{2}$$

Нас будут интересовать дискретные множества X и дискретные меры μ. Мы используем обозначения $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |e\rangle, \ldots$ для векторов гильбертова пространства с индексами $\alpha, \beta, e, \ldots$. При этом скалярное произведение между, например, $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ обозначается $\langle\alpha|\beta\rangle$, а если ρ — линейный оператор в H, то скалярное произведение между $|\alpha\rangle$ и $\rho|\beta\rangle$ обозначается $\langle\alpha|\rho|\beta\rangle$. Символ $|\psi\rangle\langle\psi|$ используется для единичного проектора на подпространство $\{\mathbb{C}\psi\}$, натянутое на единичный вектор $\psi \in H$. Такие обозначения называются *дираковскими* и часто используются в математической физике.

3. Мера на множестве из конечного числа элементов. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$ и $X_0 = \{1, 2\}$. Возьмем два произвольных единичных вектора $\psi, \xi \in H$, и положим $P_1 = |\psi\rangle\langle\psi|$ и $P_2 = |\xi\rangle\langle\xi|$.

Теорема. *Существует такая конечная мера μ на X, что плотность (2), заданная на X_0, продолжается до меры вида (1).*

Доказательство. Если $\xi = \psi$, получаем $P_3 = I - P_1,\ \mu(1) = \mu(3) = 1,\ \mu(2) = \mu(4) = 0$. В случае ортогональных ξ и ψ, $P_3 = I - P_1 - P_2,\ \mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = 1,\ \mu(4) = 0$. Осталось рассмотреть случай неортогональных и неколлинеарных ξ и ψ. Пусть K и P_K — подпространство, натянутое на векторы ξ и ψ, и ортогональный проектор на него соответственно. Найдем такой единичный вектор $\zeta \in K$ и положительные константы α и β, что

$$\alpha(P_1 + P_2) + \beta|\zeta\rangle\langle\zeta| = P_K.$$

Заметим, что $P_1 + P_2$ является положительным оператором, действующим в K и обращающимся в ноль на ортогональном дополнении $K^\perp$. Следовательно, существует такой ортонормированный базис e_1, e_2 в K, что

$$(P_1 + P_2)e_1 = \lambda_1 e_1,\ (P_1 + P_2)e_2 = \lambda_2 e_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Отметим, что $\lambda_1 = \lambda_2$ может иметь место только в случае, когда ξ и ψ ортогональны. Тем самым без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда оператор

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 P_K - P_1 - P_2)$$

имеет спектр $\{1, 0\}$ и является ортогональным проектором на подпространство, натянутое на единичный вектор $\zeta = e_2 \in K$. Рассмотрим оператор

$$T = \alpha(P_1 + P_2) + \beta|\zeta\rangle\langle\zeta|.$$

Найдем такие α и β, чтобы $T = P_K$. Заметим, что

$$Te_1 = \alpha\lambda_1 e_1,$$

$$Te_2 = (\alpha\lambda_2 + \beta)e_2.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_1},\ \beta = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Примем

$$P_3 = |\zeta\rangle\langle\zeta|,\ P_4 = I - P_K,$$

тогда для завершения доказательства нужно положить $\mu(1) = \mu(2) = \alpha,\ \mu(3) = \beta,\ \mu(4) = 1$. □

Следствие 1. *Пусть $dim H = 2$. Тогда существует такая конечная мера μ на $X = \{1, 2, 3\}$, что плотность (2), заданная на $X_0 = \{1, 2\}$, продолжается до меры вида (1).*

Доказательство. В этом случае $P_K = I$ и $P_4 = 0$. □

4. Проекторы на когерентные состояния. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$. Для каждого комплексного $z \in \mathbb{C}$ введем когерентные состояния $\psi_z \in H$ [7]:

$$\psi_z(x) \equiv \langle x|z\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} exp\left(-\frac{(x - \sqrt{2}\Re(z))^2}{2} + i\sqrt{2}\Im(z)x\right).$$

Фиксируем два неравных друг другу $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и рассмотрим проекторы $P_1 = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ и $P_2 = |\beta\rangle\langle\beta|$. Теорема гарантирует продолжение плотности $P_x,\ x \in X_0 = \{1, 2\}$ до меры на $X = \{1, 2, 3, 4\}$. В этом пункте мы получим данное продолжение в явной форме.

Предложение 1. *Продолжение имеет вид* $P_3 = |\zeta\rangle\langle\zeta|$, *где*

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}\right)}} \left(e^{i\frac{\Im(\bar{\alpha}\beta)}{2}}|\alpha\rangle - e^{-i\frac{\Im(\bar{\alpha}\beta)}{2}}|\beta\rangle\right).$$

Со скалярной мерой

$$\mu(1) = \mu(2) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}},\ \mu(3) = \frac{2e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}.$$

Замечание. *Отметим, что* $P_4 = \mathrm{I} - P_1 - P_2 - P_3$ *и* $\mu(4) = 1 - \mu(1) - \mu(2) - \mu(3)$.

Доказательство. Найдем собственные числа и собственные векторы оператора $P_1 + P_2$. Для этого запишем:

$$(P_1 + P_2)\,|e\rangle = \lambda|e\rangle$$

и

$$|e\rangle = x|\alpha\rangle + y|\beta\rangle.$$

Тогда

$$(P_1 + P_2)\,|e\rangle = (P_1 + P_2)\,(x|\alpha\rangle + y|\beta\rangle) = (x + y\langle\alpha|\beta\rangle)\,|\alpha\rangle + (x\langle\beta|\alpha\rangle + y)\,|\beta\rangle.$$

Это дает нам

$$\begin{cases} x + y\langle\alpha|\beta\rangle = \lambda x, \\ x\langle\beta|\alpha\rangle + y = \lambda y. \end{cases}$$

Таким образом, требуется найти собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \langle\alpha|\beta\rangle \\ \langle\beta|\alpha\rangle & 1 \end{pmatrix}$.

Получаем

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \langle\alpha|\beta\rangle \\ \langle\beta|\alpha\rangle & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + |\langle\alpha|\beta\rangle| \\ \lambda_2 = 1 - |\langle\alpha|\beta\rangle| \end{cases}.$$

Теперь в соответствии с теоремой мы хотим найти $|e_2\rangle$, отвечающий λ_2. Нормированный на единицу, он запишется так:

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\,(1 - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2)}} \left(-\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{|\langle\alpha|\beta\rangle|}|\alpha\rangle + |\beta\rangle\right).$$

А теперь, имея в виду то, что [7]

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \bar{\alpha}\beta\right),$$

$$\Downarrow$$

$$|\langle\alpha|\beta\rangle| = \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \Re(\bar{\alpha}\beta)\right\} = e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}},$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{|\langle\alpha|\beta\rangle|} = e^{i\Im(\bar{\alpha}\beta)},$$

домножим $|e_2\rangle$ на фазовый множитель $-e^{-i\frac{\Im(\bar{\alpha}\beta)}{2}}$ и запишем $|\zeta\rangle$ в виде

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\left(1-e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}\right)}}\left(e^{i\frac{\Im(\bar{\alpha}\beta)}{2}}|\alpha\rangle - e^{-i\frac{\Im(\bar{\alpha}\beta)}{2}}|\beta\rangle\right).$$

Получаем меру (1) на $X = \{1, 2, 3\}$ в гильбертовом пространстве $K = span(|\alpha\rangle, |\beta\rangle)$ с проекторнозначной плотностью

$$P_1 = |\alpha\rangle\langle\alpha|,\ P_2 = |\beta\rangle\langle\beta|,\ P_3 = |\zeta\rangle\langle\zeta| \tag{3}$$

и скалярную меру μ, заданную выражениями

$$\begin{aligned} \mu(1) = \mu(2) &= \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{1+|\langle\alpha|\beta\rangle|^2} = \frac{1}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}, \\ \mu(3) &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2|\langle\alpha|\beta\rangle|}{1+|\langle\alpha|\beta\rangle|} = \frac{2e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}. \end{aligned} \tag{4}$$

□

Пример. *Случай когерентных состояний с* $\beta = -\alpha$.

Запишем

$$\langle\alpha|-\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} - |\alpha|^2\right\} = e^{-2|\alpha|^2}.$$

Получаем вектор $|\zeta\rangle$, представляющий собой кот Шрёдингера [14]:

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-2|\alpha|^2})}}\left(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle\right).$$

Мера (1) на $X = \{1, 2, 3\}$ в гильбертовом пространстве $H = span(|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle)$ имеет проекторнозначную плотность

$$P_1 = |\alpha\rangle\langle\alpha|,\ P_2 = |-\alpha\rangle\langle-\alpha|,\ P_3 = |\zeta\rangle\langle\zeta|$$

по отношению к скалярной мере μ, заданной формулой

$$\mu(1) = \mu(2) = \frac{1}{1+e^{-2|\alpha|^2}},\ \mu(3) = \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{1+e^{-2|\alpha|^2}}.$$

5. Квантовый канал, определяемый мерой, и его информационная полнота. Рассмотрим случай $dimH = 2$ (кубит). Тем самым, согласно следствию 1, можно считать, что $X = \{1, 2, 3\}$ и $X_0 = \{1, 2\}$. Обозначим $\mathfrak{S}(H)$ и $\Pi(X)$ как выпуклое множество квантовых состояний (положительных операторов с единичным следом) в H и множество распределений вероятностей на X. Определим измерительный квантовый канал $\Phi : \mathfrak{S}(H) \to \Pi(X)$ формулой

$$\Phi(\rho)(A) = Tr(\rho\mathfrak{M}(A)),\ A \in \mathfrak{A},\ \rho \in \mathfrak{S}(H).$$

Будем называть измерение, осуществляемое $\mathfrak{M}$, полным, если по распределению вероятностей $\Phi(\rho)$ на X можно восстановить состояние ρ.

Рассмотрим случай $H = span(|\alpha\rangle, |\beta\rangle)$ и будем считать, что в H фиксирован ортонормированный базис из собственных векторов оператора $P_1 + P_2$. Известно, что произвольное $\rho \in \mathfrak{S}(H)$ может быть представлено в виде [1]

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & 1 - a_z \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где действительные числа a_x, a_y, a_z лежат внутри шара Блоха $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \le 1$. Пусть мера (1) на $X = \{1, 2, 3\}$ задана формулами (3)–(4). Рассмотрим распределение вероятностей

$$p_j = Tr(\rho\mathfrak{M}(j)) = \mu(j)Tr(\rho P_j),\ j \in X. \tag{6}$$

Предложение 2. *Распределение вероятностей (6) для состояния (5) имеет вид*

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}\frac{1}{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}\left(1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}a_z + \sqrt{1 - e^{-|\alpha-\beta|^2}}a_x\right), \\ p_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}\left(1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}a_z - \sqrt{1 - e^{-|\alpha-\beta|^2}}a_x\right), \\ p_3 &= \frac{e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}(1 - a_z). \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Один из собственных векторов оператора $P_1 + P_2$ мы уже нашли в ходе доказательства предложения 1 — это есть $|e_2\rangle = |\zeta\rangle$. Второй вектор запишется так:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}\right)}}\left(e^{i\frac{\Im(\bar{\alpha}\beta)}{2}}|\alpha\rangle + e^{-i\frac{\Im(\bar{\alpha}\beta)}{2}}|\beta\rangle\right).$$

Найдем распределение вероятностей, которое даст ρ. Для этого выразим $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ через $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$. С точностью до фазового множителя получаем:

$$|\alpha\rangle = C_1|e_1\rangle + C_2|e_2\rangle,$$

$$|\beta\rangle = C_1|e_1\rangle - C_2|e_2\rangle,$$

где введены обозначения $C_{1,2} = \sqrt{\frac{1 \pm e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{2}}$.

Значения вероятностей

$$p_1 = \Phi(\rho)(\{1\}) = Tr(\rho\mathfrak{M}(\{1\})) = Tr(\rho\mu(1)P_1) = \mu(1)Tr(\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \mu(1)\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle.$$

И аналогично

$$p_2 = \mu(2)\langle\beta|\rho|\beta\rangle,$$

$$p_3 = \mu(3)\langle\zeta|\rho|\zeta\rangle.$$

Или, выражая через матричные элементы ρ в базисе $\{|e_1\rangle,\ |e_2\rangle\}$:

$$p_1 = \mu(1)\left(C_1^2\langle e_1|\rho|e_1\rangle + C_1C_2(\langle e_1|\rho|e_2\rangle + \langle e_2|\rho|e_1\rangle) + C_2^2\langle e_2|\rho|e_2\rangle\right) = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}\left(1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}a_z + \sqrt{1-e^{-|\alpha-\beta|^2}}a_x\right).$$

Аналогично для p_2 получаем

$$p_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}\left(1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}a_z - \sqrt{1-e^{-|\alpha-\beta|^2}}a_x\right).$$

И наконец для p_3:

$$p_3 = \mu(3)\langle e_2|\rho|e_2\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}(1-a_z).$$

Отметим также, что

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2\frac{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}a_z}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}} + \frac{2e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}(1-a_z) = 1.$$

□

Следствие 2. *Мера, определяемая (3), (4), не является информационно полной.*

Доказательство. В силу (7) распределение вероятностей не зависит от a_y, а значит, два состояния, записи которых в базисе из собственных векторов оператора $P_1 + P_2$ отличаются лишь значением a_y, дадут одинаковые распределения вероятностей. Следовательно, однозначно восстановить состояние нельзя. □

Следствие 3. *Если мы ограничимся чистыми состояниями (ортогональными проекторами), то восстановить состояние по распределению вероятностей оказывается возможным.*

Доказательство. Чистые состояния располагаются на сфере Блоха, и для них выполняется равенство: $|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2 = 1$. Значения a_x и a_z получим из формул выше:

$$p_1 - p_2 = \sqrt{\frac{1-e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}}a_x \Rightarrow a_x = \sqrt{\frac{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1-e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}}(p_1 - p_2),$$

$$p_3 = \frac{e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1+e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}(1-a_z) \Rightarrow a_z = 1 - p_3(1 + e^{\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}).$$

□

Не всем распределениям вероятностей на X отвечает некоторое состояние ρ, что показывает следующее утверждение.

Следствие 4. *На значения* (p_j) *имеется следующее ограничение:*

$$p_3 \leq \frac{2}{1 + e^{\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}},$$

$$|p_1 - p_2| \leq \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}}.$$

Доказательство. Рассмотрим естественные ограничения $-1 \leq a_z \leq 1$ и $-1 \leq a_x \leq 1$. Из них следует, что, во-первых,

$$-1 \leq 1 - p_3(1 + e^{\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}) \leq 1,$$

$$\Downarrow$$

$$p_3 \leq \frac{2}{1 + e^{\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}.$$

И, во-вторых,

$$-1 \leq \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}}(p_1 - p_2) \leq 1,$$

$$\Downarrow$$

$$|p_1 - p_2| \leq \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}{1 + e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}}}.$$

□

Литература

1. Холево А. С. *Введение в квантовую теорию информации.* Москва, МЦНМО (2002).
2. Холево А. С. Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи. *Проблемы передачи информации* **9** (3), 3–11 (1973).
3. Наймарк М. А. Положительно-определенные операторные функции на коммутативной группе. *Изв. АН СССР. Сер. Математика* **7** (5), 237–244 (1943).
4. Холево А. С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.* Москва, МЦНМО (2017).
5. d'Ariano G. M., Perinotti P., Sacchi M. F. Informationally complete measurements and groups representation. *J. Opt. B: Quantum and Semicl. Optics* **6**, S487 (2004).
6. Renes J. M., Blume-Kohout R., Scott A. J., Caves C. M. Symmetric informationally complete quantum measurements. *J. Math. Phys.* **45**, 2171–2180 (2004).
7. Переломов А. М. *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* Москва, Наука (1987).
8. Amosov G. G. On quantum tomography on locally compact groups. *Physics Letters A* **431**, 128002 (2022). https://doi.org/10.1016/j.physleta.2022.128002
9. Amosov G. G. On quantum channels generated by covariant positive operator-valued measures on a locally compact group. *Quantum Information Processing* **21**, 312 (2022). https://doi.org/10.1007/s11128-022-03655-x

10. Нильсен М., Чанг И. *Квантовые вычисления и квантовая информация*, пер. с англ. Москва, Мир (2006).

11. Bennett C. H., Brassard G. Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing. *Proceedings of International Conference on Computers, Systems & Signal Processing*, December 9–12, 1984, Bangalore, IEEE India, 175 (1984).

12. Sych D., Řeháček J., Hradil Z., Leuchs G., Sánchez-Soto L. L. Informational completeness of continuous-variable measurements. *Phys. Rev. A* **86**, 052123 (2012).

13. Богачев В. И. *Основы теории меры.* Т. 1. Москва; Ижевск, РХД (2003).

14. Dodonov V. V., Korennoy Ya. A., Man'ko V. I., Mokuhin Y. A. Non classical properties of states generated by the excitations of even/odd coherent states of light. *Quantum Semiclass. Opt.* **8**, 413–427 (1996).

Статья поступила в редакцию 7 августа 2022 г.;
доработана 7 сентября 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Алексеев Антон Олегович — студент; alekseev.ao@phystech.edu
Амосов Григорий Геннадьевич — д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр.; gramos@mi-ras.ru

On extension of the family of projections to positive operator-valued measure*

A. O. Alekseev, G. G. Amosov

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
9, per. Institutsky, Moscow Region, Dolgoprudniy, 141701, Russian Federation

For citation: Alekseev A. O., Amosov G. G. On extension of the family of projections to positive operator-valued measure. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 3–13. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.101 (In Russian)

The problem of constructing a measure on a discrete set X taking values in a positive cone of bounded operators in a Hilbert space is considered. It is assumed that a projection-valued function defined on a subset of X_0 of the original set X is initially given. The aim of the study is to find such a scalar measure μ on the set X and the continuation of a projector-valued function from X_0 to X, which results in an operator-valued measure having a projector-valued density relative to μ. In general, the problem is solved for $|X| = 4$ and $|X_0| = 2$. As an example, we consider a function on X_0 that takes values in a set of projections on coherent states. For this case, the question of the information completeness of the measurement determined by the constructed measure is investigated. In other words, is it possible to reconstruct a quantum state (a positive unit trace operator) from the values of the matrix trace from the product of a measure with a quantum state. It is shown that for the constructed measure it is possible to restore the quantum state only if it is a projection. A restriction on the probability distribution is also found, at which it can be obtained as a result of measuring a certain quantum state.

Keywords: operator-valued measure, coherent states, informational completeness.

References

1. Holevo A. S. *Introduction to quantum information theory.* Moscow, MTsNMO Publ. (2002). (In Russian)

*This work was supported by the Russian Science Foundation grant no. 19-11-00086, https://rscf.ru/en/project/19-11-00086/.

2. Holevo A. S. Bounds for the quantity of information transmitted by a quantum communication channel. *Problems Inform. Transmission* **9** (3), 177–183 (1973).

3. Neumark M. Positive definite operator functions on a commutative group. *Izvestia Akad. Nauk SSSR. Ser. Matematika* **7**, 237–244 (1943). (In Russian)

4. Holevo A. S. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory.* Moscow, MTsNMO Publ. (2017). (In Russian)

5. d'Ariano G. M., Perinotti P., Sacchi M. F. Informationally complete measurements and groups representation. *J. Opt. B: Quantum and Semicl. Optics* **6**, S487 (2004).

6. Renes J. M., Blume-Kohout R., Scott A. J., Caves C. M. Symmetric informationally complete quantum measurements. *J. Math. Phys.* **45**, 2171–2180 (2004).

7. Perelomov A. M. *Generalized coherent states and their applications.* Moscow, Nauka Publ. (1987).

8. Amosov G. G. On quantum tomography on locally compact groups. *Physics Letters A* **431**, 128002 (2022). https://doi.org/10.1016/j.physleta.2022.128002

9. Amosov G. G. On quantum channels generated by covariant positive operator-valued measures on a locally compact group. *Quantum Information Processing* **21**, 312 (2022). https://doi.org/10.1007/s11128-022-03655-x

10. Nielsen M. A., Chuang I. L. *Kvantovye vychisleniia i kvantovaia informatsiia.* Cambridge University Press. (2000). [Rus. ed.: Nielsen M. A., Chang I. L. Kvantovye vychisleniia i kvantovaia informatsiia. Moscow, Mir Publ. (2006)].

11. Bennett C. H., Brassard G. Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing. *Proceedings of International Conference on Computers, Systems & Signal Processing*, December 9–12, 1984, Bangalore, India. IEEE, 175 (1984).

12. Sych D., Řeháček J., Hradil Z., Leuchs G., Sánchez-Soto L. L. Informational completeness of continuous-variable measurements. *Phys. Rev. A* **86**, 052123 (2012).

13. Bogachev V. I. *Measure theory.* Vol. 1. Moscow; Izhevsk RKhD Publ. (2003).

14. Dodonov V. V., Korennoy Ya. A., Man'ko V. I., Mokuhin Y. A. Non classical properties of states generated by the excitations of even/odd coherent states of light. *Quantum Semiclass. Opt.* **8**, 413–427 (1996).

Received: August 7, 2022
Revised: September 7, 2022
Accepted: September 8, 2022

Authors' information:

Anton O. Alekseev — alekseev.ao@phystech.edu
Grigori G. Amosov — gramos@mi-ras.ru