ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.93
MSC 34C55, 34C25, 93C73

Периодические режимы в системе автоматического управления с трехпозиционным гистерезисным реле

В. В. Евстафьева, А. М. Камачкин, Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Евстафьева В. В., Камачкин А. М., Потапов Д. К.* Периодические режимы в системе автоматического управления с трехпозиционным гистерезисным реле // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 596–607.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.413

Рассматривается система автоматического управления с трехпозиционным реле гистерезисного типа и непрерывным периодическим внешним возмущением. Получена теорема существования, устанавливающая в пространстве параметров системы, включая параметры релейной характеристики и внешнего возмущения, такие области, которым соответствуют периодические режимы с выходом в зоны насыщения, заданным периодом и определенной по конфигурации фазовой траекторией.

Ключевые слова: система автоматического управления, трехпозиционное реле с гистерезисом, периодическое внешнее возмущение, периодический режим, фазовая траектория.

1. Введение. Постановка задачи. Изучение реальных характеристик автоматических устройств позволило выделить типичные нелинейности, которые встречаются наиболее часто. В устройствах автоматического управления к ним относится мертвая зона (зона нечувствительности [1]). Для электромеханических элементов автоматики типичны релейные характеристики. Симметричные релейные характеристики с мертвой зоной, которые описывают работу трехпозиционного реле, изучаются достаточно давно (см., например, [1, 2]). Для электромагнитного трехпозиционного реле свойственна релейная характеристика и с мертвой зоной, и с зонами неоднозначности [3–5]. Такие нелинейности часто востребованы в приложениях [6–8].

Данная работа продолжает исследования системы с релейными характеристиками. Она является типовой системой автоматического управления с внешним возмущением, в которой объект регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, а регулятор представляет собой интегрирующее устройство (например, электродвигатель), управляемое с помощью трехпозиционного реле. Математическое описание системы имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{g}(t)=\lambda g(t)+b(\nu(t)+\psi(t)),\\ \dot{\nu}(t)=N(y(t)),\\ y(t)=cg(t),\\ \psi(t)=\psi\sin(\omega t+\varphi).\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь t — время ($t \geqslant 0$), $g(t)$ — функция состояния, $\nu(t)$ — выход регулятора, λ, b и c — ненулевые вещественные постоянные (параметры линейной части системы), $\psi(t)$ — функция периодического возмущения, в котором ψ — амплитуда колебаний ($\psi > 0$), ω — угловая скорость ($\omega > 0$), φ — фаза отклонения. Нелинейность $N(y(t))$ является существенной и задается характеристикой трехпозиционного реле с гистерезисом следующим образом:

$$N(y)=\begin{cases}-C, & \text{если } y\leqslant -B \text{ или } -B<y\leqslant -A \text{ и } N_-(y)=-C,\\ 0, & \text{если } -A<y<A \text{ или } -B<y<B \text{ и } N_-(y)=0,\\ C, & \text{если } y\geqslant B \text{ или } A\leqslant y<B \text{ и } N_-(y)=C,\end{cases}\tag{2}$$

где A, B и C — параметры такие, что $0 < A < B$ и $C > 0$; $N_-(y)$ — предыстория $N(y)$ (в виду ее неоднозначности). Характеристика (2) включает три типовые нелинейности, а именно, зону насыщения, мертвую зону и гистерезис. Интервалы $(-\infty, -B]$ и $[B, +\infty)$ соответствуют зонам насыщения, $(-A, A)$ — мертвой зоне, $(-B, -A]$ и $[A, B)$ — зонам неоднозначности (гистерезису). График нелинейной характеристики $N(y)$ симметричен относительно точки $(0, 0)$ на плоскости (y, N), обе гистерезисные петли обходятся против хода часовой стрелки. По своей структуре система (1) с характеристикой (2) представляет собой типовую систему локального уровня с нелинейным управлением, в которой внешнее возмущающее воздействие приложено со стороны управления [9]. Таких типовых систем, например на судне для управления судовой энергетической установкой, может насчитываться до нескольких десятков [10, 11].

После дифференцирования $\dot{g}(t)$ и несложных равносильных преобразований система (1) принимает такой вид:

$$\ddot{y}(t)=\lambda\dot{y}(t)+bcN(y(t))+bc\psi\omega\cos(\omega t+\varphi)\quad \forall t\geqslant 0.\tag{3}$$

Интегрирование уравнения (3) или системы (1) в соответствии с характеристикой (2) позволит изучить динамику системы в зависимости от величин параметров λ, b, c, A, B, C, ψ, ω и φ.

При постоянном внешнем возмущении в релейных автоматических системах, имеющих не нейтральную линейную часть и характеристику вида (2), положение равновесия возможно при вполне определенных значениях возмущения [1]. Поэтому «рабочими» режимами системы являются периодические решения со специальными свойствами, зависящими от требований практических задач. Далее будем полагать, что система (1) не имеет положений равновесия, и рассматривать периодические решения. В [12–19] обсуждается вопрос существования периодических решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностью, заданной двухпозиционным реле, и внешним периодическим возмущением. Из последних исследований по изучению возмущенных нелинейных систем, замкнутых обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом, отметим также работы [20–26]. Некоторые идеи из них реализованы в настоящей статье для более сложной релейной характеристики.

В силу вида характеристики $N(y)$ уравнение (3) может иметь, вообще говоря, периодические решения с различными по конфигурации траекториями на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$. Например, когда максимальное значение $y_{\max}$ решения $y(t)$ больше B либо не превосходит B или A, т. е. $y_{\max} > B$, $y_{\max} \leqslant B$ или $y_{\max} \leqslant A$.

Задача состоит в том, чтобы определить, при каких условиях на параметры λ, b, c, A, B, C, ψ, ω и φ система (1) имеет периодический режим с заданным периодом и выходом в зону насыщения.

2. Решение задачи. Рассмотрим периодическое решение с выходом в обе зоны насыщения, которому на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$ соответствует замкнутая траектория из шести кусков, причем обход характеристики выполняется в одну сторону за полупериод. Склейка этих кусков происходит в четырех точках, лежащих на прямых $y = \pm A$, $y = \pm B$, и двух симметричных точках, одна из которых удовлетворяет условию $y_{\max} > B$.

Введем обозначения: $\tilde{b} = bc$ и $\tilde{k} = bc\psi\omega$. Для обеспечения отрицательной обратной связи полагаем $\tilde{b} < 0$. Тогда $\tilde{k} < 0$. Перепишем уравнение (3) в новых обозначениях. Получим, что

$$\ddot{y}(t) = \lambda \dot{y}(t) + \tilde{b} N(y(t)) + \tilde{k} \cos(\omega t + \varphi) \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4}$$

При $N(y(t)) = 0$ общее решение уравнения (4) и его производная для любого $t \geqslant 0$ имеют вид

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi),$$
$$\dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} - \omega q_1 \sin(\omega t + \varphi) + \omega q_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

где $q_1 = -\frac{\tilde{k}}{\lambda^2 + \omega^2}$; $q_2 = -\frac{\tilde{k}\lambda}{\omega(\lambda^2 + \omega^2)}$; c_1 и c_2 — произвольные постоянные. При $N(y(t)) \neq 0$ общее решение уравнения (4) и его производную для любого $t \geqslant 0$ запишем следующим образом:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + q_{\pm} t + q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q_{\pm} - \omega q_1 \sin(\omega t + \varphi) + \omega q_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

причем $q_+ = -\frac{\tilde{b}C}{\lambda}$, если $N(y(t)) = C$, и $q_- = \frac{\tilde{b}C}{\lambda}$, если $N(y(t)) = -C$. По условию $\tilde{b} < 0$ и $C > 0$. Поэтому при $\lambda > 0$ находим, что $q_+ > 0$ и $q_- < 0$, а при $\lambda < 0$, наоборот, $q_+ < 0$ и $q_- > 0$.

В силу симметричности нелинейной характеристики рассмотрим решение уравнения (4) с обходом $N(y)$ только в одну сторону на трех различных участках характеристики и соответствующим им листах плоскости $(y, \dot{y})$. Решение на i-м листе обозначим через $y_i(t)$, а произвольные постоянные — соответственно c_1^i, c_2^i $(i = \overline{1, 3})$. Обозначим через t_1, t_2 и t_3 времена переходов изображающей точки по листам, а через T — полупериод решения. Тогда $T = t_1 + t_2 + t_3$.

Построим уравнения движения изображающей точки решения за полупериод, используя при этом метод припасовывания в моменты перехода по листам, чтобы обеспечить непрерывность функции $y(t)$. Пусть $y_{\max} = y_0 > B$. Примем $(y_0, 0)$ за начальную точку. Тогда изображающая точка переходит в симметричную точку $(-y_0, 0)$ за время T. Из точки $(y_0, 0)$ выпустим фазовую кривую до пересечения с прямой $y = A$.

Введем обозначения:

$$d_1(t) = q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi), \quad d_2(t) = q_2 \cos(\omega t + \varphi) - q_1 \sin(\omega t + \varphi) \quad \forall t \geqslant 0.$$

Выпишем решение и его производную на первом листе ($i = 1$) в новых обозначениях. Для любого $t \in [0, t_1]$ имеем

$$y_1(t) = c_1^1 e^{\lambda t} + c_2^1 + q_+ t + d_1(t), \quad \dot{y}_1(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda t} + q_+ + \omega d_2(t).$$

При $t = 0$ получаем, что

$$y_1(0) = c_1^1 + c_2^1 + d_1(0), \quad \dot{y}_1(0) = \lambda c_1^1 + q_+ + \omega d_2(0). \tag{5}$$

Из начальных условий $y_1(0) = y_0$, $\dot{y}_1(0) = 0$ следует система равенств

$$\begin{gathered} c_1^1 = -(q_+ + \omega d_2(0))/\lambda, \\ c_2^1 = y_0 - c_1^1 - d_1(0) = y_0 + (q_+ + \omega d_2(0))/\lambda - d_1(0). \end{gathered} \tag{6}$$

Движение из точки $(y_0, 0)$ до прямой $y = A$ осуществляется за время t_1, поэтому при $t = t_1$ имеем равенства

$$y_1(t_1) = c_1^1 e^{\lambda t_1} + c_2^1 + q_+ t_1 + d_1(t_1) = A, \quad \dot{y}_1(t_1) = \lambda c_1^1 e^{\lambda t_1} + q_+ + \omega d_2(t_1). \tag{7}$$

Выражение для c_2^1 из системы (6) подставим в первое равенство (7) и находим, что

$$c_1^1 e^{\lambda t_1} + y_0 - c_1^1 - d_1(0) + q_+ t_1 + d_1(t_1) = A,$$

откуда выражаем y_0, а именно, $y_0 = A - c_1^1(e^{\lambda t_1} - 1) - q_+ t_1 - d_1(t_1) + d_1(0) > B$.

Рассмотрим решение и его производную на втором листе ($i = 2$) с начальной точкой $(A, \dot{y}_2(0))$. Для любого $t \in (0, t_2)$ имеем равенства

$$y_2(t) = c_1^2 e^{\lambda t} + c_2^2 + d_1(t + t_1), \quad \dot{y}_2(t) = \lambda c_1^2 e^{\lambda t} + \omega d_2(t + t_1).$$

В точке перехода на второй лист склеиваем траектории, поэтому, согласно методу припасовывания, при $t = 0$ находим, что

$$y_2(0) = c_1^2 + c_2^2 + d_1(t_1), \quad \dot{y}_2(0) = \lambda c_1^2 + \omega d_2(t_1).$$

Константы c_1^2, c_2^2 определим из равенств $y_2(0) = A$ и $\dot{y}_2(0) = \dot{y}_1(t_1)$. Второе равенство является условием склейки фазовых траекторий на прямой $y = A$ в момент перехода на второй лист. Имеем систему

$$\begin{gathered} c_1^2 = c_1^1 e^{\lambda t_1} + \tfrac{q_+}{\lambda}, \\ c_2^2 = A - c_1^1 e^{\lambda t_1} - \tfrac{q_+}{\lambda} - d_1(t_1). \end{gathered} \tag{8}$$

Из точки $(A, \dot{y}_2(0))$ изображающая точка решения переходит на прямую $y = -B$ за время t_2, и в точке перехода на третий лист происходит склейка траектории. Поэтому при $t = t_2$ получим, что

$$y_2(t_2) = c_1^2 e^{\lambda t_2} + c_2^2 + d_1(t_1 + t_2) = -B, \quad \dot{y}_2(t_2) = \lambda c_1^2 e^{\lambda t_2} + \omega d_2(t_1 + t_2).$$

Далее рассмотрим решение и его производную на третьем листе ($i = 3$) с начальной точкой $(-B, \dot{y}_3(0))$. Для $t \in [0, t_3]$ имеем равенства

$$y_3(t) = c_1^3 e^{\lambda t} + c_2^3 + q_- t + d_1(t + t_1 + t_2), \quad \dot{y}_3(t) = \lambda c_1^3 e^{\lambda t} + q_- + \omega d_2(t + t_1 + t_2),$$

отсюда при $t = 0$ находим, что

$$y_3(0) = c_1^3 + c_2^3 + d_1(t_1 + t_2), \quad \dot{y}_3(0) = \lambda c_1^3 + q_- + \omega d_2(t_1 + t_2).$$

Условием склейки фазовых траекторий на прямой $y = -B$ при переходе со второго листа на третий лист является равенство $\dot{y}_3(0) = \dot{y}_2(t_2)$, которое равносильно равенству $\lambda c_1^3 + q_- = \lambda c_1^2 e^{\lambda t_2}$ для получения c_1^3. Константу c_2^3 определяем из начального условия $y_3(0) = -B$. В результате имеем систему

$$\begin{aligned} c_1^3 &= c_1^2 e^{\lambda t_2} - \tfrac{q_-}{\lambda}, \\ c_2^3 &= -B - c_1^2 e^{\lambda t_2} + \tfrac{q_-}{\lambda} - d_1(t_1 + t_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Изображающая точка решения $y_3(t)$ переходит из точки $(-B, \dot{y}_3(0))$ в точку $(-y_0, 0)$ за время t_3. Тогда при $t = t_3$ находим, что

$$y_3(t_3) = c_1^3 e^{\lambda t_3} + c_2^3 + q_- t_3 + d_1(T) = -y_0, \quad \dot{y}_3(t_3) = \lambda c_1^3 e^{\lambda t_3} + q_- + \omega d_2(T) = 0. \tag{10}$$

Здесь $T = t_1 + t_2 + t_3$. Замкнем теперь фазовую траекторию, проходящую через симметричные точки $(y_0, 0)$ и $(-y_0, 0)$, учитывая $2T$-периодичность решения $y(t)$, что равносильно выполнению равенств $y(0) = -y(T) = y(2T)$ и $\dot{y}(0) = \dot{y}(T) = \dot{y}(2T) = 0$. Исходя из построения траектории, имеем эквивалентные равенства

$$y_1(0) = -y_3(t_3) = y_0, \quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_3(t_3) = 0. \tag{11}$$

Согласно первому равенству в (11), приравниваем выражения для $y_1(0)$ из (5) и для $y_3(t_3)$ из (10) с противоположным знаком. Далее левую и правую части полученного равенства выражаем через коэффициент c_1^1, используя последовательно (7) для левой части и (8), (9) для правой части соответственно. Приходим к следующему равенству:

$$c_1^1 + A - c_1^1 e^{\lambda t_1} - q_+ t_1 - d_1(t_1) + d_1(0) = -c_1^1 e^{\lambda T} - \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda(t_2 + t_3)} + \frac{q_-}{\lambda} e^{\lambda t_3} +$$
$$+ B + c_1^1 e^{\lambda(t_1 + t_2)} + \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda t_2} - \frac{q_-}{\lambda} + d_1(t_1 + t_2) - q_- t_3 - d_1(T).$$

Слагаемое B перенесем из правой части в левую, сделаем замены в соответствии с равенствами $q_- = -q_+$ и $t_2 = T - t_1 - t_3$:

$$A + c_1^1(1 - e^{\lambda t_1}) - q_+ t_1 - d_1(t_1) + d_1(0) - B =$$
$$= -\frac{q_+}{\lambda}\left(e^{\lambda(T - t_1)} + e^{\lambda t_3} - 1 - e^{\lambda(T - t_1 - t_3)}\right) - c_1^1 e^{\lambda T}(1 - e^{-\lambda t_3}) + d_1(T - t_3) + q_+ t_3 - d_1(T). \tag{12}$$

Теперь рассмотрим равенство $\dot{y}_3(t_3) = 0$ из (11). Выражения для c_1^3 из (9), а затем для c_1^2 из (8) подставим в (10). После преобразования с учетом $q_- = -q_+$ приходим к равенству

$$\frac{q_+}{\lambda}\left(e^{\lambda(T - t_1)} + e^{\lambda t_3} - 1\right) = -c_1^1 e^{\lambda T} - \frac{\omega}{\lambda} d_2(T), \tag{13}$$

где c_1^1 определяется формулой (6) из равенства $\dot{y}_1(0) = 0$.

Далее ставим задачу поиска значений параметров системы (1), при которых разрешимы уравнения (12), (13) относительно положительных t_1, t_3 таких, что $t_1 < T$ и $t_1 + t_3 < T$ при условии $y_0 > B$.

Подставляем выражение из равенства (13) в правую часть (12) и после преобразования получаем, что

$$A + c_1^1(1 - e^{\lambda t_1}) - q_+ t_1 - d_1(t_1) + d_1(0) - B =$$

$$= \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda(T - t_1 - t_3)} + c_1^1 e^{\lambda(T - t_3)} + \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) + d_1(T - t_3) + q_+ t_3 - d_1(T).$$

Выражение в левой части последнего равенства обозначим через $\Theta_1(t_1)$, а в правой — через $\Theta_2(t_1, t_3)$. Имеем

$$\Theta_1(t_1) = A + c_1^1(1 - e^{\lambda t_1}) - q_+ t_1 - d_1(t_1) + d_1(0) - B, \tag{14}$$

$$\Theta_2(t_1, t_3) = \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda(T - t_1 - t_3)} + q_+ t_3 + c_1^1 e^{\lambda(T - t_3)} + \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) + d_1(T - t_3) - d_1(T), \tag{15}$$

при этом заметим, что $\Theta_1(t_1) = \Theta_2(t_1, t_3) = y_0 - B$. Тогда исследование поставленной задачи сводится при условии $y_0 > B$ к решению системы трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} \Theta_1(t_1) &= \gamma, \\ \Theta_2(t_1, t_3) &= \gamma, \end{aligned} \tag{16}$$

в которой γ — параметр, $\gamma \in \mathbb{R}$, относительно переменных t_1 и t_3, удовлетворяющих равенству (13).

Случай $\lambda < 0$ рассмотрен в [27]. В данной работе продолжим рассмотрение системы (1) в случае $\lambda > 0$. Имеет место

Теорема. *Пусть $\lambda > 0$, при некотором $T > 0$ выполняется условие*

$$-c_1^1 e^{\lambda T} - \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) > \frac{q_+}{\lambda}, \quad c_1^1 = -\frac{\omega}{\lambda} d_2(0) - \frac{q_+}{\lambda}, \tag{17}$$

и если $\gamma \in (0, \eta_1)$, $\eta_1 = A - B - c_1^1(e^{\lambda T} - 1) - q_+ T - d_1(T) + d_1(0) > 0$, то существует решение t_1 первого уравнения системы (16) *такое, что $t_1 \in (0, T)$; если при фиксированном t_1, кроме того, $\gamma \in (\eta_2, \eta_3)$, где*

$$\eta_2 = d_1(t_1) - d_1(T) + c_1^1 e^{\lambda t_1} + \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) + q_+(T - t_1) + \frac{q_+}{\lambda} > 0,$$

$$\eta_3 = c_1^1 e^{\lambda T} + \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) + \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda(T - t_1)},$$

то существует решение t_3 второго уравнения системы (16) *такое, что $t_3 \in (0, T - t_1)$. Пусть дополнительно значение T кратно π/ω, решения t_1, t_3 системы* (16) *являются наименьшими (или единственными) и удовлетворяют равенству* (13)*. Тогда существует периодическое решение системы* (1) *с периодом $2T$, полным обходом нелинейной характеристики с выходом в зоны насыщения и траекторией, имеющей на фазовой плоскости относительно начала координат две симметричные точки.*

Доказательство. Рассмотрим равенство (13) при $\lambda > 0$ и некотором $T > 0$. Поскольку $T - t_1 > 0$ и $t_3 > 0$, то $e^{\lambda(T - t_1)} + e^{\lambda t_3} - 1 > 1$. Кроме того, $q_+ > 0$. Отсюда справедливо неравенство $-c_1^1 e^{\lambda T} - \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) > \frac{q_+}{\lambda}$, при котором равенство (13) имеет смысл, что отражено в условии теоремы как неравенство в (17).

Рассмотрим первое уравнение системы (16) с $\Theta_1(t_1)$, определяемой равенством (14). С одной стороны, $\Theta_1(t_1) = y_0 - B$, с другой — $\Theta_1(t_1) = \gamma$. Значит, $\gamma > 0$ при условии $y_0 > B$. Далее введем обозначения:

$$f_1(t) = A - B - \gamma - c_1^1(e^{\lambda t} - 1) - q_+ t, \quad f_2(t) = d_1(t) - d_1(0) \quad \forall t \in [0, T].$$

Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются непрерывными. Заметим, что $f_1(t) < 0$ при $c_1^1 \geqslant 0$. Если $c_1^1 < 0$, то функция $f_1(t)$ может быть как отрицательной, так и неотрицательной. Функция $f_2(t)$ может принимать значения из отрезка $\left[-2\sqrt{q_1^2+q_2^2}, 2\sqrt{q_1^2+q_2^2}\right]$, поскольку при $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ имеет место равенство

$$d_1(t) - d_1(0) = \sqrt{q_1^2+q_2^2}\left(\sin\left(\omega t + \varphi + \operatorname{arctg}\frac{q_1}{q_2}\right) - \sin\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{q_1}{q_2}\right)\right),$$

где

$$\sqrt{q_1^2+q_2^2} = -\frac{bc\psi}{\sqrt{\lambda^2+\omega^2}}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{\omega}{\lambda}.$$

Следовательно, пересечение графиков функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ возможно при любом значении c_1^1, и точка их пересечения является решением уравнения $f_1(t_1) = f_2(t_1)$, эквивалентного уравнению $\Theta_1(t_1) = \gamma$.

Имеем $f_1(0) = A - B - \gamma$ и $f_2(0) = 0$. Отсюда $f_1(0) < f_2(0)$, поскольку $A < B$ и $\gamma > 0$. Тогда, если $f_1(T) > f_2(T)$, то существует по крайней мере одно решение $t_1 \in (0, T)$ уравнения $f_1(t) = f_2(t)$. Найдем величины функций при $t = T$. Имеем $f_1(T) = A - B - \gamma - c_1^1(e^{\lambda T} - 1) - q_+ T$ и $f_2(T) = d_1(T) - d_1(0)$. Отсюда получаем условие на параметр γ, а именно $\gamma < A - B - c_1^1(e^{\lambda T} - 1) - q_+ T - d_1(T) + d_1(0)$. Правая часть последнего неравенства при заданном T есть константа, которую обозначим через η_1. Поскольку $\gamma > 0$, то постоянная η_1 должна быть положительной.

Рассмотрим относительно переменной t_3 второе уравнение системы (16) с $\Theta_2(t_1, t_3)$, определяемой равенством (15), где t_1 — решение первого уравнения системы (16). Введем обозначения:

$$f_3(t) = \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda(T - t_1 - t)} - \gamma,$$

$$f_4(t) = d_1(T) - d_1(T - t) - c_1^1 e^{\lambda(T-t)} - \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) - q_+ t \quad \forall t \in [0, T - t_1].$$

Функции $f_3(t)$, $f_4(t)$ также непрерывные, могут быть как отрицательными, так и неотрицательными. Точка пересечения их графиков является решением уравнения $f_3(t_3) = f_4(t_3)$, равносильного уравнению $\Theta_2(t_1, t_3) = \gamma$ при известном значении t_1. Заметим, что функция $f_3(t)$ убывает для любого $t \in [0, T - t_1]$. Потому положим, что $f_3(T - t_1) < f_4(T - t_1)$, и найдем ограничения на γ, при которых это неравенство справедливо. Имеем равенства

$$f_3(T - t_1) = \frac{q_+}{\lambda} - \gamma, \quad f_4(T - t_1) = d_1(T) - d_1(t_1) - c_1^1 e^{\lambda t_1} - \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) - q_+(T - t_1).$$

Отсюда получаем, что

$$\gamma > d_1(t_1) - d_1(T) + c_1^1 e^{\lambda t_1} + \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) + q_+(T - t_1) + \frac{q_+}{\lambda}.$$

Обозначим правую часть последнего неравенства через η_2 и потребуем выполнение условия $\eta_2 \geqslant 0$. Если $f_3(0) > f_4(0)$, то существует хотя бы одна точка пересечения графиков функций $f_3(t)$ и $f_4(t)$ на интервале $(0, T - t_1)$. Имеем равенства

$$f_3(0) = \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda(T-t_1)} - \gamma, \quad f_4(0) = -c_1^1 e^{\lambda T} - \frac{\omega}{\lambda} d_2(T).$$

Получаем, что $f_3(0) > f_4(0)$, если параметр γ удовлетворяет следующему условию:

$$\gamma < c_1^1 e^{\lambda T} + \frac{\omega}{\lambda} d_2(T) + \frac{q_+}{\lambda} e^{\lambda(T-t_1)}.$$

Обозначим правую часть последнего неравенства через η_3 и заметим, что константа η_3 всегда положительная при выполнении неравенства в (17).

Теперь докажем обратное. Если $0 < \gamma < \eta_1$, то $f_1(T) > f_2(T)$. При $f_1(0) < f_2(0)$ есть хотя бы одно решение $t_1 \in (0, T)$ уравнения $f_1(t_1) = f_2(t_1)$ или равносильного уравнения $\Theta_1(t_1) = \gamma$. Допустим, что найдены решения t_1, одно из которых зафиксируем. Если параметр γ удовлетворяет также неравенствам $0 < \eta_2 < \gamma < \eta_3$, то справедливы неравенства $f_3(T - t_1) < f_4(T - t_1)$ и $f_3(0) > f_4(0)$, что гарантирует существование хотя бы одного решения $t_3 \in (0, T - t_1)$ уравнения $f_3(t_3) = f_4(t_3)$ или эквивалентного уравнения $\Theta_2(t_1, t_3) = \gamma$.

Таким образом, установлены условия разрешимости системы (16) относительно t_1 и t_3, которые являются необходимыми, так как решение этой системы должно отвечать решению системы (1) с траекторией заданной конфигурации и периодом $2T$.

Если t_1 — наименьшее (единственное) решение первого уравнения системы (16), то t_1 соответствует времени перехода как моменту первой встречи (см. определение 1 в [16]) с прямой $y = A$ по первому листу до момента склейки траектории, переходящей на второй лист. Если при фиксированном t_1 решение t_3 второго уравнения системы (16) также наименьшее (единственное), то оно отвечает времени перехода по третьему листу в точку $(-y_0, 0)$. Кроме того, если t_1 и t_3 удовлетворяют равенству (13), то совпадение траектории по второй координате будет обеспечено.

Далее покажем, что решение системы (1) является периодической функцией в положительном направлении, если значение T кратно π/ω. Пусть $T = \pi n/\omega$, где $n \in \mathbb{N}$. Значит, период $2T$ решения системы (1) кратен периоду функции возмущения $\psi(t)$. Поскольку $\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega(t + 2\pi n/\omega) + \varphi)$ и $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega(t + 2\pi n/\omega) + \varphi)$, то имеет место равенство $d_1(t) = d_1(t + 2T)$ для любого $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что на первом листе $d_1(t) = d_1(t + 2T(p - 1))$ для любого $t \in [0, t_1]$, на втором листе $d_1(t + t_1) = d_1(t + t_1 + 2T(p - 1))$ для любого $t \in (0, t_2)$ и на третьем листе $d_1(t+t_1+t_2) = d_1(t+t_1+t_2+2T(p-1))$ для любого $t \in [0, t_3]$, где p — порядковый номер полного обхода нелинейной характеристики, $p \in \mathbb{N}$. Это означает, что $y_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ не зависит от p. Функция $y_i(t)$ непрерывна на i-м листе на соответствующем интервале, т. е. за исключением моментов склейки траектории. Множество точек склейки дискретно. Поэтому $y(t) = y(t+2T)$ для любого $t \geqslant 0$, т. е. решение системы (1) является $2T$-периодической функцией в положительном направлении, а соответствующая ему траектория, проходящая через две симметричные точки $(-y_0, 0)$ и $(y_0, 0)$, $y_0 > B$, замкнутая. Теорема доказана.

3. Заключение. В данной работе получена теорема существования в системе (1) периодического режима с периодом, кратным периоду функции внешнего возмущения, и выходом в зоны насыщения релейной характеристики с гистерезисом. Фазовая траектория рассмотренного режима имеет две точки, симметричные относительно начала координат фазовой плоскости $(y, \dot{y})$. Одна из симметричных точек удовлетворяет условию $y_{\max} > B$. Вопрос об устойчивости траектории — отдельная тема для исследований. Отметим, что в частных случаях системы (1) они проводились численными методами (см., например, [27–30]).

Литература

1. *Цыпкин Я. З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 575 с.
2. *El-Geldawi F.* Stabilization of a relay system containing three-position element and dead time // Intern. Journal of Control. 1970. Vol. 11. N 2. P. 267–275.
3. *El-Geldawi F.* Exact analysis of a nonlinear time-delay control system containing a three-position relay with hysteresis // Journal of Engineering and Applied Sciences. 1981. Vol. 1. N 4. P. 327–337.
4. *Моржов А. В., Фалдин Н. В.* Линеаризация по полезному сигналу релейных систем управления с трехпозиционным релейным элементом и нелинейным объектом управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 5–14.
5. *Kamachkin A. M., Shamberov V. N.* The decomposition method of research into the nonlinear dynamical systems' space of parameters // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9. N 81. P. 4009–4018.
6. *Macki J. W., Nistri P., Zecca P.* Mathematical models for hysteresis // SIAM Review. 1993. Vol. 35. N 1. P. 94–123.
7. *Mayergoyz I. D.* Mathematical models of hysteresis and their applications. Amsterdam: Elsevier, 2003. 472 p.
8. *Visintin A.* Ten issues about hysteresis // Acta Applicandae Mathematicae. 2014. Vol. 132. N 1. P. 635–647.
9. *Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В.* Метод преобразования сложных систем автоматического управления к интегрируемой форме // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 2. С. 196–212. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.209
10. *Burns R. S.* Advanced control engineering. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. 464 p.
11. *Paraskevopoulos P. N.* Modern control engineering. New York: Marcel Dekker Inc., 2002. 736 p.
12. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control. 2017. Vol. 27. N 2. P. 204–211.
13. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electronic Journal of Differential Equations. 2017. N 140. P. 1–10.
14. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. Vol. 23. N 4. P. 825–837.
15. *Евстафьева В. В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. матем. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
16. *Евстафьева В. В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущенной релейной системы с гистерезисом // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
17. *Евстафьева В. В.* Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
18. *Євстаф'єва В. В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. матем. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
19. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Applications of Mathematics. 2022. Vol. 67. N 1. P. 65–80.
20. *Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A., Aleksandrov K. D.* Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations // Differential Equations. 2017. Vol. 53. N 13. P. 1764–1816.
21. *Solovyov A. M., Semenov M. E., Meleshenko P. A., Reshetova O. O, Popov M. A., Kabulova E. G.* Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems // Procedia Engineering. 2017. Vol. 201. P. 578–583.
22. *Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В.* Динамика и синхронизация цикли-

ческих структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.210

23. *Фурсов А. С., Тодоров Т. С., Крылов П. А., Митрев Р. П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.

24. *Фурсов А. С., Митрев Р. П., Крылов П. А., Тодоров Т. С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.

25. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Synchronization in feedback cyclic structures of oscillators with hysteresis // Stability and Control Processes: SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings. Cham: Springer, 2022. P. 119–125.

26. *Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В.* Неподвижные точки отображения, порожденного системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.

27. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Intern. Journal of Control. 2020. Vol. 93. N 4. P. 763–770.

28. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Определение бифуркационной структуры пространства параметров методом декомпозиции // Системы управления и информационные технологии. 2012. № 4 (50). С. 11–13.

29. *Камачкин А. М., Согонов С. А., Шамберов В. Н.* Вынужденные периодические решения нелинейных многосвязных систем // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 1 (55). С. 12–15.

30. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Существование периодических движений в неавтономных многомерных нелинейных системах // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 1 (59). С. 16–19.

Статья поступила в редакцию 23 июня 2022 г.
Статья принята к печати 1 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Евстафьева Виктория Викторовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; v.evstafieva@spbu.ru

Камачкин Александр Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.kamachkin@spbu.ru

Потапов Дмитрий Константинович — канд. физ.-мат. наук, доц.; d.potapov@spbu.ru

Periodic modes in an automatic control system with a three-position hysteresis relay

V. V. Yevstafyeva, A. M. Kamachkin, D. K. Potapov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Yevstafyeva V. V., Kamachkin A. M., Potapov D. K. Periodic modes in an automatic control system with a three-position hysteresis relay. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 4, pp. 596–607. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.413 (In Russian)

We consider an automatic control system with a three-position hysteresis relay and a continuous periodic external perturbation. The existence theorem is established that provide domains in the space of system parameters, including the parameters of the relay and perturbation, to which periodic modes having a pass to saturation zones with given periods and a specified configuration of phase trajectories correspond.

Keywords: automatic control system, three-position hysteresis relay, periodic external perturbation, periodic mode, phase trajectory.

References

1. Tsypkin Ya. Z. *Relejnye avtomaticheskie sistemy* [*Relay control systems*]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 575 p. (In Russian)

2. El-Geldawi F. Stabilization of a relay system containing three-position element and dead time. *Intern. Journal of Control*, 1970, vol. 11, no. 2, pp. 267–275.

3. El-Geldawi F. Exact analysis of a nonlinear time-delay control system containing a three-position relay with hysteresis. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 1981, vol. 1, no. 4, pp. 327–337.

4. Morzhov A. V., Faldin N. V. Linearizatsiya po poleznomu signalu relejnykh sistem upravleniya s trekhpozitsionnym relejnym elementom i nelinejnym ob"ektom upravleniya [Linearization of relay controlling systems with three-position relay block and nonlinear controlled plant with respect to the actual signal]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [*Journal of Computer and Systems Sciences International*], 2008, no. 4, pp. 5–14. (In Russian)

5. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. The decomposition method of research into the nonlinear dynamical systems' space of parameters. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 81, pp. 4009–4018.

6. Macki J. W., Nistri P., Zecca P. Mathematical models for hysteresis. *SIAM Review*, 1993, vol. 35, no. 1, pp. 94–123.

7. Mayergoyz I. D. *Mathematical models of hysteresis and their applications.* Amsterdam, Elsevier Publ., 2003, 472 p.

8. Visintin A. Ten issues about hysteresis. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2014, vol. 132, no. 1, pp. 635–647.

9. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Metod preobrazovaniya slozhnykh sistem avtomaticheskogo upravleniya k integriruemoj forme [Method for the transformation of complex automatic control systems to integrable form]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 196–212. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.209 (In Russian)

10. Burns R. S. *Advanced control engineering.* Oxford, Butterworth-Heinemann Publ., 2001, 464 p.

11. Paraskevopoulos P. N. *Modern control engineering.* New York, Marcel Dekker Inc. Publ., 2002, 736 p.

12. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence. *Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 204–211.

13. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2017, no. 140, pp. 1–10.

14. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 825–837.

15. Evstaf'eva V. V. Periodicheskie resheniya sistemy differentsial'nykh uravnenij s gisterezisnoj nelinejnost'yu pri nalichii nulevogo sobstvennogo chisla [Periodic solutions of a system of differential equations with hysteresis nonlinearity in the presence of eigenvalue zero]. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal* [*Ukrainian Mathematical Journal*], 2018, vol. 70, no. 8, pp. 1085–1096. (In Russian)

16. Evstaf'eva V. V. O sushchestvovanii dvukhtochechno-kolebatel'nykh reshenij vozmushchennoj relejnoj sistemy s gisterezisom [On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis]. *Differentsial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 2021, vol. 57, no. 2, pp. 169–178. (In Russian)

17. Evstaf'eva V. V. Sushchestvovanie T/k-periodicheskikh reshenij nelinejnoj neavtonomnoj sistemy s kratnym chislom matritsy [Existence of T/k-periodic solutions of a nonlinear nonautonomous system whose matrix has a multiple eigenvalue]. *Matematicheskie zametki* [*Mathematical Notes*], 2021, vol. 109, no. 4, pp. 529–543. (In Russian)

18. Evstaf'eva V. V. Sushchestvovanie dvukhtochechno-kolebatel'nykh reshenij relejnoj neavtonomnoj sistemy s kratnym sobstvennym chislom veshestvennoj simmetricheskoj matritsy [Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix]. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal* [*Ukrainian Mathematical Journal*], 2021, vol. 73, no. 5, pp. 640–650. (In Ukrainian)

19. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system. *Applications of Mathematics*, 2022, vol. 67, no. 1, pp. 65–80.

20. Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A., Aleksandrov K. D. Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 13, pp. 1764–1816.

21. Solovyov A. M., Semenov M. E., Meleshenko P. A., Reshetova O. O., Popov M. A., Kabulova E. G. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 201, pp. 578–583.

22. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Dinamika i sinkhronizatsiya tsiklicheskikh struktur ostsillyatorov s gisterezisnoj obratnoj svyaz'yu [Dynamics and synchronization in feedback cyclic structures with hysteresis oscillators]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 2, pp. 186–199. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.210 (In Russian)

23. Fursov A. S., Todorov T. S., Krylov P. A., Mitrev R. P. O sushchestvovanii kolebatel'nykh rezhimov v odnoj nelinejnoj sisteme s gisterezisami [On the existence of oscillatory modes in a nonlinear system with hysteresis]. *Differentsial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 2020, vol. 56, no. 8, pp. 1103–1121. (In Russian)

24. Fursov A. S., Mitrev R. P., Krylov P. A., Todorov T. S. O sushchestvovanii periodicheskogo rezhima v odnoj nelinejnoj sisteme [On the existence of a periodic mode in a nonlinear system]. *Differentsial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1104–1115. (In Russian)

25. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Synchronization in feedback cyclic structures of oscillators with hysteresis. *Stability and Control Processes: SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings.* Cham, Springer Publ., 2022, pp. 119–125.

26. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Nepodvizhnye tochki otobrazheniya, porozhdennogo sistemoj obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij s relejnym gisterezisom [Fixed points of a mapping generated by a system of ordinary differential equations with relay hysteresis]. *Differentsial'nye uravneniya* [*Differential Equations*], 2022, vol. 58, no. 4, pp. 456–469. (In Russian)

27. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. *Intern. Journal of Control*, 2020, vol. 93, no. 4, pp. 763–770.

28. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Opredelenie bifurkatsionnoj struktury prostranstva parametrov metodom dekompozitsii [The research into the parameters' space bifurcation structure by the method of decomposition]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [*Control Systems and Information Technologies*], 2012, no. 4 (50), pp. 11–13. (In Russian)

29. Kamachkin A. M., Sogonov S. A., Shamberov V. N. Vynuzhdennye periodicheskie resheniya nelinejnykh mnogosvyaznykh sistem [Forced periodic solutions of nonlinear multi-coupling systems]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [*Control Systems and Information Technologies*], 2014, no. 1 (55), pp. 12–15. (In Russian)

30. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Sushchestvovanie periodicheskikh dvizhenij v neavtonomnykh mnogomernykh nelinejnykh sistemakh [Existence of periodic motions in non-autonomous multidimensional nonlinear systems]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [*Control Systems and Information Technologies*], 2015, no. 1 (59), pp. 16–19. (In Russian)

Received: June 23, 2022.
Accepted: September 1, 2022.

Authors' information:

Victoria V. Yevstafyeva — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; v.evstafieva@spbu.ru

Alexander M. Kamachkin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.kamachkin@spbu.ru

Dmitriy K. Potapov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; d.potapov@spbu.ru