

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ТЕЛ*

Э. Д. Кузнецов¹, К. В. Холшевников^{2,3}, В. Ш. Шайдуллин^{2,4}¹ Уральский федеральный университет,

Российская Федерация, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

² Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

³ Институт прикладной астрономии РАН,

Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

⁴ Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,

Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65-1

Наиболее употребительным представлением гравитационного потенциала компактного тела T во внешнем пространстве в сферических координатах r, θ, λ служит ряд Лапласа по сферическим функциям $Y_n(\theta, \lambda)$. Для тел нерегулярной структуры известна оценка чебышёвской нормы (максимум модуля функции на сфере): $\langle Y_n \rangle \leq Cn^{-5/2}$, $C = \text{const}$, $n \geq 1$. В работе получено явное выражение $Y_n(\theta, \lambda)$ для нескольких модельных тел. Во всех случаях (за исключением одного) справедлива указанная оценка $\langle Y_n \rangle$ при точном показателе $5/2$. В одном случае, где тело T касается объемлющей T сферы, $\langle Y_n \rangle$ убывают значительно быстрее. Именно, $\langle Y_n \rangle \leq Cn^{-5/2}p^n$, $C = \text{const}$, $n \geq 1$. Величина $p < 1$ равна расстоянию от начала координат до ребра поверхности T , выраженному в радиусах объемлющей сферы. Точность показателя $5/2$ в общем случае подтверждена также на примерах тел, более или менее напоминающих реальные небесные тела. Библиогр. 16 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, ряд Лапласа, скорость сходимости.

Введение. Будем рассматривать гравитационный потенциал V компактного тела T во внешнем пространстве в сферических координатах r, θ, λ . Для представления этого потенциала в [1–5] предлагается ряд Лапласа

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda). \quad (1)$$

Здесь M — масса T , R — масштабный множитель, Y_n — безразмерная сферическая функция; постоянная тяготения принята равной единице. В общем случае сфери-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.А03.21.0006), РФФИ (грант 14-02-00804) и Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант 6.37.341.2015).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

ческая функция зависит от $2n + 1$ параметров (коэффициентов Стокса). Разработаны и применяются на практике эффективные методы определения коэффициентов Стокса по спутниковым измерениям [6–8]. В случае осевой симметрии выполняется $Y_n(\theta, \lambda) \equiv Y_n(\theta) = c_n P_n(\cos \theta)$, и остается лишь один параметр c_n . Как обычно, P_n обозначает многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_n(1) = 1$. Формула (1) принимает вид

$$V(r, \theta) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

Как принято в теоретических исследованиях, за R примем радиус объемлющей сферы, содержащей T внутри себя и имеющей с T хотя бы одну общую точку.

Скорость сходимости ряда (1) существенно зависит от гладкости распределения масс в теле T . Чем выше гладкость, тем быстрее сходится ряд, как это имеет место в теории приближения функций отрезками рядов [9–11]. Правда, в нашем случае понятие гладкости определяется довольно сложно [12]. Так, плотность может испытывать разрывы даже при пересечении поверхностей равной плотности, лишь бы сами они были достаточно гладкими. В то же время наличие ребер поверхности ∂T даже однородного тела T катастрофически снижает гладкость распределения масс, поскольку теряет гладкость ∂T , которую можно рассматривать как поверхность равной плотности.

Для приложений одним из наиболее интересных классов тел служит класс \mathcal{T} компактных тел с ограниченной интегрируемой плотностью $\varrho(r, \theta, \lambda)$, имеющей равномерно ограниченную вариацию вдоль любой окружности с центром в начале координат. Все реальные небесные тела принадлежат этому классу. Для тел $T \in \mathcal{T}$ известна оценка [12]

$$\langle Y_n \rangle \leq \frac{C}{n^{5/2}}. \quad (3)$$

Через C здесь и ниже обозначены различные постоянные, зависящие от свойств плотности ϱ , $\langle \cdot \rangle$ — чебышёвская норма (максимум модуля функции на сфере). Мы считаем $n \geq 1$, так как Y_0 тождественно равно единице.

Заметим, что впервые подобная оценка (с делителем n^2 вместо $n^{5/2}$) получена М. С. Яров-Яровым [13].

В осесимметричном случае имеем

$$\langle Y_n \rangle = |c_n|. \quad (4)$$

Оценка (3) точна в следующем смысле. Существует тело $T \in \mathcal{T}$ такое, что при некотором C справедливо неравенство (3), но при любом фиксированном $\sigma > 5/2$ выполняется

$$\sup n^\sigma \langle Y_n \rangle = \infty. \quad (5)$$

Несколько подтверждающих примеров приведено в [12]. В настоящей статье мы расширим список примеров, по-прежнему ограничиваясь однородными телами вращения, для которых справедливо (4). В этих модельных примерах (для первых четырех коэффициенты Стокса c_n взяты из [12]) тела слабо напоминают реальные планеты и спутники. Однако затем из них как из элементов мы строим более реалистичные фигуры.

1. Полушар в системе отсчета с началом в центре шара. Для четных положительных n имеем $c_n = 0$. Для нечетных n справедливо

$$c_n = 3(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-2)!!}{(n+3)!!}.$$

Применяя формулу Валлиса, получим

$$|c_n| \sim \frac{3\sqrt{2/\pi}}{n^{5/2}}. \quad (6)$$

2. Шаровой сектор в системе отсчета с началом в вершине сектора. Обозначим угол полураствора сектора через α . Тогда будем иметь

$$c_n = \frac{-3}{(1 - \cos \alpha)(n + 3)} P_{n1}(\cos \alpha).$$

Здесь P_{nk} определены в Приложении вместе с асимптотикой (16), из которой вытекает

$$c_n \sim \frac{-3\sqrt{2/\pi}\sqrt{\sin \alpha}}{(1 - \cos \alpha)n^{5/2}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7)$$

Из последовательности косинусов при любом α можно выделить последовательность, отделенную от нуля, что доказывает точность оценок (3).

Замечание. Формула (6) вытекает из (7) и приводится в силу ее простоты.

3. Цилиндр в системе отсчета с началом в его центре и осью z , направленной по оси симметрии. Обозначим a радиус основания, $2b$ высоту цилиндра (см. рис. 1; $A_2A_3 = a$, $OA_2 = b$, $OA_3 = R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\angle A_2OA_3 = \alpha$). Тогда для нечетных n будем иметь $c_n = 0$, а для четных n —

$$c_n = -\frac{2R^3}{a^2b(n+1)} P_{n+2,1} \left(\frac{b}{R} \right).$$

Учитывая обозначение через α угла A_2OA_3 , представим последнюю формулу в виде

$$c_n = -\frac{2}{(n+1)\sin^2 \alpha \cos \alpha} P_{n+2,1}(\cos \alpha).$$

С учетом асимптотики (16) получим

$$c_n \sim -\frac{2\sqrt{2/\pi}}{n^{5/2}\sin^3 \alpha \cos \alpha} \cos \left[\left(n + \frac{5}{2} \right) \alpha + \frac{\pi}{4} \right].$$

4. Конус в системе отсчета с началом в его вершине. Обозначим через α угол полураствора конуса. Тогда будем иметь

$$c_n = -\frac{6}{(n+3)\sin^2 \alpha} P_{n+1,1}(\cos \alpha),$$

откуда следует

$$c_n \sim -\frac{6}{n^{5/2}\sin^3 \alpha} \cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \alpha + \frac{\pi}{4} \right].$$

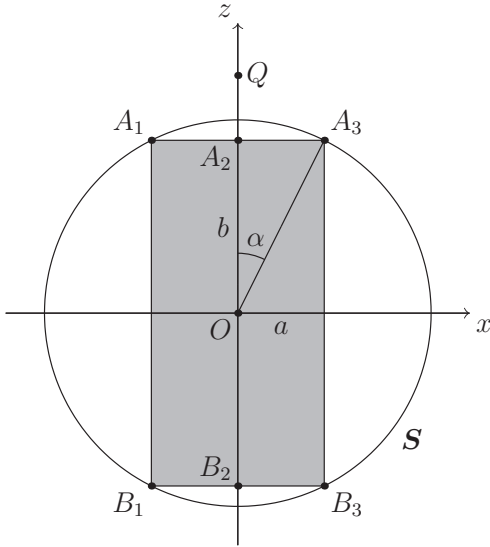


Рис. 1. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось симметрии z .

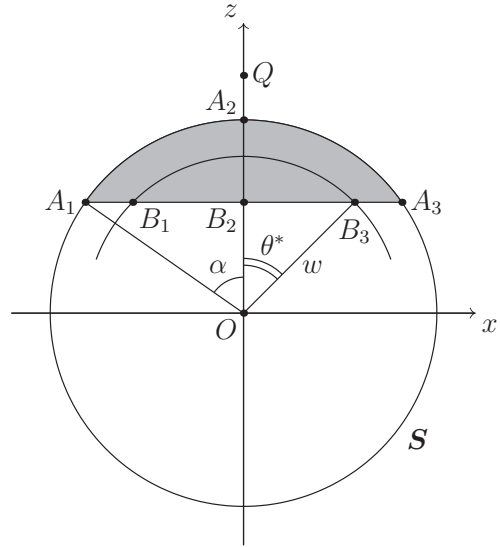


Рис. 2. Сечение шарового сегмента плоскостью, проходящей через ось симметрии z .

5. Шаровой сегмент в различных системах отсчета. Рассмотрим шаровой сегмент T с радиусом a и углом полураствора α , $0 < \alpha \leq \pi/2$. Изучим ряд Лапласа T в системах координат с осью z по оси симметрии, но с различными положениями начала отсчета.

5.1. Система отсчета с началом в центре соответствующего шара. На рис. 2 представлено сечение T плоскостью, проходящей через ось симметрии ($OA_1 = OA_2 = OA_3 = a$, $\angle A_1OA_2 = \alpha$; $OB_2 = a \cos \alpha$); при фиксированном $w = OB_1 = OB_3$ угол θ меняется от 0 до θ^* , $\cos \theta^* = (a/w) \cos \alpha$. Постоянные Стокса вычислены в [14]:

$$c_n = \frac{3}{2(2 + \cos \alpha) \sin^4(\alpha/2)} P_{n+1,2}(\cos \alpha). \quad (8)$$

Используя (16), найдем асимптотику

$$c_n \sim \frac{6}{(2 + \cos \alpha)n^{5/2}} \sqrt{\frac{\cos^3(\alpha/2)}{\pi \sin^5(\alpha/2)}} \cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \alpha + \frac{3\pi}{4} \right].$$

5.2. Система отсчета с началом, сдвинутым вверх. Пусть начало координат сдвинуто вверх на расстояние $b > 0$ (см. рис. 3; $OO_1 = b$, $R = O_1A_1 = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2}$). Объемлющая сфера S_1 проходит через точки A_1, A_3 . Величину c_n не удается выразить явно через n, α, a, b . Однако в [14] формулы (3) и (5) для T доказаны, чего достаточно для наших целей.

5.3. Система отсчета с началом, сдвинутым вниз. Пусть начало координат сдвинуто вниз на расстояние $b > 0$ (см. рис. 4). В этом случае $O_2O = b$, $R_0 = O_2A_1 = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \alpha + b^2}$, $R = a + b$, $R > R_0$. Объемлющая сфера S_2 проходит через точку A_2 ; проходящая через A_1, A_3 окружность с центром в O_2 представляет сечение границы области сходимости ряда Лапласа S^* .

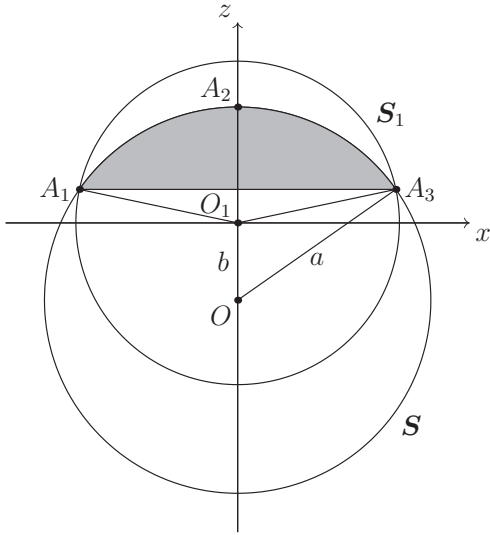


Рис. 3. Сечение шарового сегмента в системе отсчета O_1 .

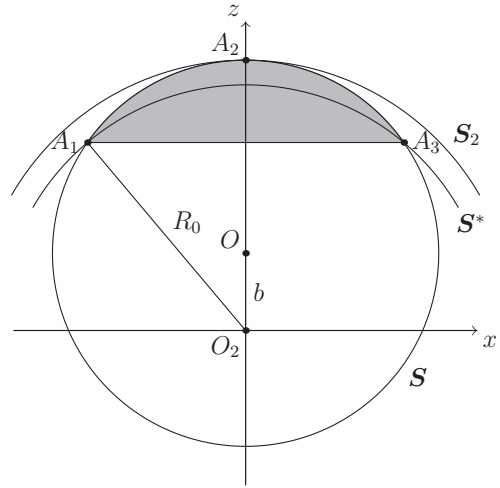


Рис. 4. Сечение шарового сегмента в системе отсчета O_2 .

В [14] получена оценка, существенно более сильная по сравнению с (3):

$$\langle Y_n \rangle \leq \frac{C}{n^{5/2}} p^n, \quad (9)$$

где обозначено

$$p = \frac{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \alpha + b^2}}{a + b} < 1.$$

Границей сходимости ряда Лапласа S^* служит сфера с центром O_2 , проходящая через точки A_1, A_3 . Заметим, что на рисунках изображены сечения сегмента и сфер. В пространстве точкам A_1, A_3 отвечает ребро сегмента, так что сфера и сегмент имеют общую окружность.

6. Сегментированный шар. Выше исследованы тела, слабо напоминающие реальные планеты и спутники. Построим более реалистичные фигуры из сегментов одинакового радиуса a . В этом пункте используется система отсчета с началом в центре порождающего шара.

Пусть T_1 — отражение T относительно плоскости экватора, южный сегмент. Гравитационный потенциал T_1 в точке с декартовыми координатами x, y, z совпадает с потенциалом T_1 в точке $x, y, -z$. Поэтому коэффициенты Стокса c_n для T_1 совпадают с таковыми для T , помноженными на $(-1)^n$. Вместо (8) получаем для T_1 при $n \geq 2$

$$M c_n = 2(-1)^n \pi a^3 \rho P_{n+1,2}(\cos \alpha). \quad (10)$$

Здесь мы учитываем, что при объединении тел, расположенных внутри шара $r \leq R$, складываются гармоники $M Y_n$, а не Y_n .

Пусть T_2 — объединение северных сегментов с параметрами α_i, ρ_i и южных сегментов с параметрами $\alpha'_i, \rho'_i, i = 1, \dots, K, i' = 1, \dots, K'$. Одно из чисел K, K' может равняться нулю, и тогда соответствующая сумма в выражении для c_n (см. ниже)

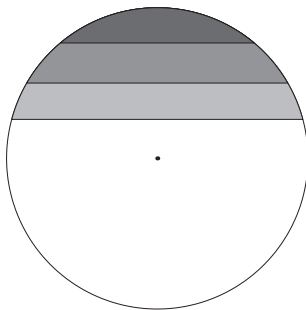


Рис. 5. Сечение тела T_2 при $K = 3, K' = 0$.

считается равной нулю. Не умаляя общности, считаем последовательности α_i и $\alpha'_{i'}$ возрастающими. На рис. 5 изображено тело T_2 при $K = 3, K' = 0$.

Поскольку сегменты вложены друг в друга, фактически в северном полушарии имеется один сегмент с углом полураствора α_K , а в южном — с углом $\alpha'_{K'}$. Плотность в северном полушарии при движении к экватору принимает последовательно значения $\varrho_1 + \dots + \varrho_K, \varrho_2 + \dots + \varrho_K, \dots, \varrho_K$. Аналогична ситуация в южном полушарии при движении к экватору. Поэтому некоторые значения $\varrho_i, \varrho'_{i'}$ могут быть отрицательными при сохранении положительной плотности тела T_2 . Заметим, что T_2 — неоднородный шар, если справедливо $\alpha_K = \alpha'_{K'} = \pi/2$.

По аддитивности потенциала гармонические коэффициенты T_2 при $n \geq 2$ равны

$$c_n = \frac{2\pi a^3}{M} \left[\sum_{i=1}^K \varrho_i P_{n+1,2}(\cos \alpha_i) + (-1)^n \sum_{i'=1}^{K'} \varrho'_{i'} P_{n+1,2}(\cos \alpha'_{i'}) \right]. \quad (11)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи описанной конструкции.

Пусть T_3 представляет собой T_2 при симметрии северного и южного полушарий, т. е. справедливо $K = K', \alpha_i = \alpha'_{i'}, \varrho_i = \varrho'_{i'}$. Тогда обе суммы в (11) одинаковы. Поэтому для нечетных n будем иметь $c_n = 0$, а для четных $n \geq 2$ —

$$c_n = \frac{4\pi a^3}{M} \sum_{i=0}^K \varrho_i P_{n+1,2}(\cos \alpha_i). \quad (12)$$

Пусть T_4 — бочкообразное однородное тело плотности ϱ , получающееся вырезанием из шара северного сегмента полураствора α и южного полураствора α' (рис. 6).

Тело T_4 получается добавлением к шару плотности ϱ тела T_2 при $K = K' = 1$ и $\varrho_1 = \varrho'_1 = -\varrho$. Если один из сегментов отсутствует, вместо бочки получаем купол. Поскольку все гармоники шара (за исключением нулевой) исчезают, приходим при $n \geq 2$ к равенствам

$$c_n = \frac{2\pi a^3 \varrho}{M} [P_{n+1,2}(\cos \alpha) + (-1)^n P_{n+1,2}(\cos \alpha')]. \quad (13)$$

Если бочка симметрична, т. е. имеем $\alpha = \alpha'$, нечетные гармоники исчезают, а четные равны

$$c_n = -\frac{4\pi a^3 \varrho}{M} P_{n+1,2}(\cos \alpha). \quad (14)$$

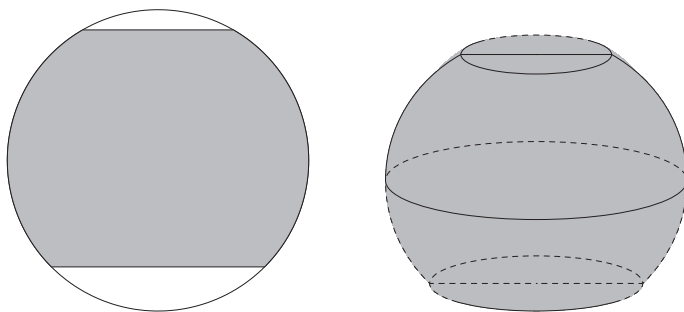


Рис. 6. Тело T_4 (справа) и его сечение (слева).

Заключение. Мы исследовали скорость сходимости ряда Лапласа нескольких модельных тел: полушар, шаровой сектор, цилиндр, конус, шаровой сегмент, сегментированный шар. Во всех случаях (за одним исключением) скорость убывания $\langle Y_n \rangle$ описывается *неулучшаемой* оценкой (3). Важную роль здесь играет фигура S — пересечение границы ∂T тела T и объемлющей сферы S .

В примерах 1, 2, 5.1 фигура S состоит из части сферы S положительной площади; граница S представляет собой ребро поверхности ∂T . К этому же классу тел можно отнести и сегментированный шар, ребрами которого можно считать границы сегментов с разной плотностью.

В примерах 3, 4, 5.2 фигура S состоит из кривых, лежащих на сфере S и представляющих собой ребра поверхности ∂T .

Исключением служит пример 5.3, в котором $\langle Y_n \rangle$ убывают существенно быстрее согласно (9). В этом случае S — это одна точка, в которой ∂T касается S , и в окрестности которой поверхность ∂T аналитична. Интересно, что область сходимости ряда (1) — лежащая внутри S сфера S^* , радиус которой равен расстоянию до ребра поверхности ∂T . Таким образом, и здесь сфера сходимости S^* определяется ребром поверхности ∂T , как и в предыдущих случаях.

Остался неисследованным случай, когда S состоит из конечного числа точек A_k , в окрестности которых ∂T лежит внутри конуса с вершиной A_k с осью, проходящей через начало отсчета и углом полураствора, меньшим $\pi/2$.

Модельные тела — полушар, шаровой сектор, цилиндр, конус, шаровой сегмент — слабо напоминают реальные планеты и спутники. Сегментированный шар является более реалистичной фигурой для представления гравитационного потенциала небесных тел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Производящие функции. На произведении отрезка $-1 \leq x \leq 1$ и круга $|z| < 1$ справедливы разложения

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n,$$

$$(1 - 2xz + z^2)^{1/2} = 1 - xz - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n1}(x)z^{n+1},$$

$$(1 - 2xz + z^2)^{3/2} = 1 - 3xz + \frac{3}{2}(x^2 + 1)z^2 + \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)z^3 + 3 \sum_{n=2}^{\infty} P_{n2}(x)z^{n+2}. \quad (15)$$

Здесь $P_{n0} = P_n$ — многочлен Лежандра, P_{nk} — последовательные интегралы

$$P_{nk}(x) = \int_{-1}^x P_{n,k-1}(y) dy.$$

2. Асимптотика P_{nk} определяется выражением

$$P_{nk}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^{k-1/2} \theta}{n^{k+1/2}} \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] + \frac{r_k(n, \theta)}{n \sin^{k+1} \theta} \right\}, \quad (16)$$

где $r_k(n, \theta)$ ограничены при $0 \leq \theta \leq \pi$, $n \geq 2$.

Формулы (15), (16) содержатся в [15, 16].

Литература

1. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. М.: Физматлит, 1961. 288 с.
2. *Каула У.* Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970. 172 с.
3. *Бурша М.* Основы космической геодезии. Часть 2. М.: Недра, 1975. 280 с.
4. *Грушинский Н. П.* Теория фигуры Земли. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Кондратьев В. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: Изд. ИКИ, 2003.
6. *Vatrt V.* Truncation error due to geopotential model EGM96 // *Studia Geoph. et Geod.* 1999. Vol. 43. P. 223–227.
7. *Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K.* An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union. Vienna, Austria, April 13–18, 2008.
8. *Петровская М. С., Вериков А. Н.* Построение моделей гравитационного поля на основе спутниковых измерений производных от потенциала тяготения // *Космические исследования.* 2014. Т. 52, № 2. С. 176–184.
9. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 688 с.
10. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
11. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: ФМ, 1962. 500 с.
12. *Антонов В. А., Тymoшкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.
13. *Яров-Яровой М. С.* О силовой функции притяжения планеты и ее спутника. С. 259–277 // *Проблемы движения искусственных небесных тел.* М.: Изд. АН СССР, 1963, 295 с.
14. *Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* О гравитационном потенциале шарового сегмента // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2015. Т. 2(60). Вып. 1. С. 157–163.
15. *Антонов В. А., Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* Об оценке производной многочлена Лежандра // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2010. Вып. 4. С. 3–9.
16. *Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* О свойствах интегралов от многочлена Лежандра // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2014. Т. 1(59). Вып. 1. С. 55–67.

Статья поступила в редколлегию 14 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Кузнецов Эдуард Дмитриевич — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой, eduard.kuznetsov@urfu.ru

Константин Владиславович Холшевников — доктор физико-математических наук, профессор, kvk@astro.spbu.ru

Вахит Шамильевич Шайдулин — кандидат физико-математических наук, доцент, shvak@yandex.ru

ON THE REPRESENTATION OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL OF SEVERAL MODEL BODIES

Eduard D. Kuznetsov¹, Konstantin V. Kholshchevnikov^{2,3}, Vakhit Sh. Shaidulin^{2,4}

¹ Ural Federal University, ul. Mira, 19, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation; eduard.kuznetsov@urfu.ru

² St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

³ Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru, shvak@yandex.ru

⁴ Main (Pulkovo) Observatory RAS, Pulkovskoe chaussee, 65/1, St. Petersburg, 196140, Russian Federation; shvak@yandex.ru

Laplace series with respect to spherical functions $Y_n(\theta, \lambda)$ represents now a most popular form of the gravitational potential representation for a compact body T in the outer space in spherical coordinates r, θ, λ . There exists a well-known estimate $\langle Y_n \rangle \leq Cn^{-5/2}$, $C = \text{const}$, $n \geq 1$ of the Chebyshevian norm (maximum of the modulus) for bodies of irregular structure. In the present paper an explicit representation of $Y_n(\theta, \lambda)$ for several model bodies is obtained. The indicated estimate $\langle Y_n \rangle$ is valid *under the exact exponent* 5/2 for all cases except one. If the segment touches the enveloping sphere, then $\langle Y_n \rangle$ decreases much faster. Namely, $\langle Y_n \rangle \leq Cn^{-5/2}p^n$, $C = \text{const}$, $n \geq 1$. The quantity $p < 1$ equals to the distance from the origin of coordinates to the edge of the segment expressed in radii of the enveloping sphere. The exactness of exponent 5/2 is valid in common case by examples of bodies which more or less reminiscent of real celestial bodies. Refs 16. Figs 6.

Keywords: gravitational potential, Laplace series, rate of convergence.

References

1. Duboshin G. N., *Theory of attraction* (Fizmatlit, Moscow, 1961) [in Russian].
2. Kaula W., *Theory of satellite geodesy* (Waltham, Toronto, London, Blaisdell Publ. Co., 1966).
3. Bursa M., *Základy kosmické geodézie* **2** (Praha, 1970).
4. Grushinskiy N. P., *Theory of the Earth figure* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
5. Kondratyev B. P., *Potential theory and figures of equilibrium* (SRI Publ. H., Moscow, Izhevsk, 2003) [in Russian].
6. Vátrt V., “Truncation error due to geopotential model EGM96”, *Studia Geoph. et Geod.* **43**, 223–227 (1999).
7. Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K., *An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union* (Vienna, Austria, April 13–18, 2008).
8. Petrovskaya M. S., Vershkov A. N., “The Construction of Gravitational Field Models on the Basis of Satellite Measurements of Gravitational Potential Derivatives”, *Cosmic Research* **52**(2), 166–174 (2014).
9. Natanson I. P., *Constructive function theory, I, II* (New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1964–1965).
10. Hobson E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931).
11. Szegő G., *Orthogonal polynomials* **23** (AMS Colloquium publ., 1975).
12. Antonov V. A., Timoshkova E. I., Kholshchevnikov K. V., *Introduction to the Theory of Newtonian Potential* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
13. Yarov-Yarovoï M. S., “On the force-function of the attraction of a planet and its satellite”, *Problems of Motion of Artificial Celestial Bodies. Acad. Sci.* (USSR Press, Moscow, 1963) [in Russian].
14. Kholshchevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “On the gravitational potential of a spherical segment”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **48**(1), 49–54 (2015).
15. Antonov V. A., Kholshchevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “Estimating the derivative of the Legendre polynomial”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **43**(4), 191–197 (2010).
16. Kholshchevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “On properties of integrals of the Legendre polynomial”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **47**(1), 28–38 (2014).

Для цитирования: Кузнецов Э. Д., Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш. О представлении гравитационного потенциала некоторых модельных тел // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 3. С. 489–497. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.317

For citation: Kuznetsov E. D., Kholshchevnikov K. V., Shaidulin V. Sh. On the representation of the gravitational potential of several model bodies. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3(61), issue 3, pp. 489–497. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.317